

Geometrická optika

nauka o optickém zobrazování

pracuje s pojmem světelného paprsku

- úzký svazek světla, který by vycházel z malého osvětleného otvoru v limitním případě, kdy by se jeho příčný rozměr blížil k nule a stejně tak i vlnová délka světla
- čili v geometrické optice nepřihlížíme ke konečné vlnové délce a předpokládáme přímočaré šíření světla
- stejně tak neuvažujeme koherentní skládání vln, takže v úvahách o intenzitě se užívá prosté superpozice (\Rightarrow nezávislost paprsků)
- toto zjednodušení vyhovuje pro rozsáhlou část geometrické optiky včetně teorie optických soustav. Jde-li však o zkoumání struktury optických obrazů a o otázky rozlišovací schopnosti, pozbývá pojem paprsku jako geometrické přímky svůj dobrý smysl a je nutno vyjít z vlnové teorie, konkrétně z teorie ohybu

V optických soustavách se chod paprsků modifikuje lomem a odrazem: zákony odrazu a lomu pro izotropní prostředí a index lomu průhledného prostředí jsou téměř jedinými fyzikálními pojmy v geometrické optice – vše ostatní je geometrie

Odraz a lom na rovině ploše

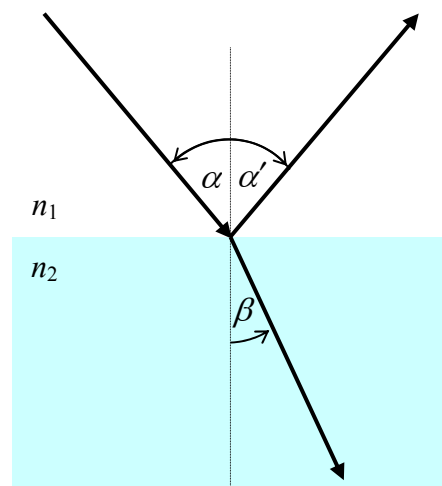
zákon odrazu

$$\alpha = -\alpha'$$

zákon lomu

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

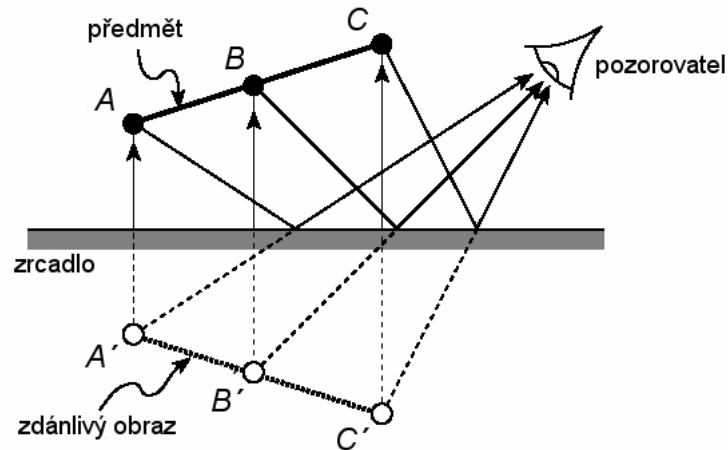
kde $n = \frac{n_2}{n_1}$ je relativní index lomu



Někdy je výhodné nerozlišovat mezi odrazem a lomem tím způsobem, že budeme pokládat odraz za lom s relativním indexem lomu $n_R = -1$.

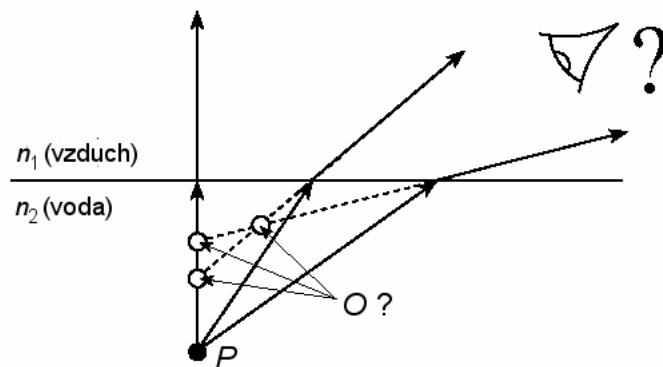
Zobrazení rovinným zrcadlem je znázorněno na obr. 1. Čárkované body dostaneme prodloužením paprsků vstupujících do oka za rovinu zrcadla. Bod A' je zdánlivým (virtuálním) obrazem bodu A . Body A, A' jsou symetricky sdruženy podle roviny zrcadla. zrcadlové obrazy – pravotočivý šroub se zobrazí jako levotočivý

Zobrazování rovinným zrcadlem je jediné optické zobrazování, které nemá žádné vady!



Obr. 1. Zobrazení rovinným zrcadlem.

Zobrazení lámavou plochou už není bodové, je nutno brát v úvahu disperzi indexu lomu (ta způsobuje tzv. barevnou (chromatickou) vadu) a jednak to, že poloha obrazu závisí na tom, pod jakým úhlem pozorujeme předmět v druhém prostředí (obr. 2.).



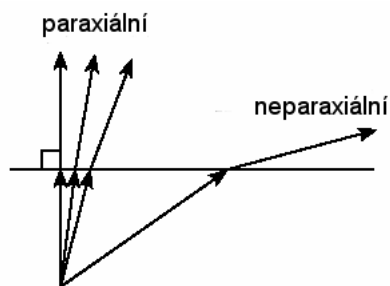
Obr. 2. Zobrazení lomem. Neexistuje společný průsečík více než dvou svazků, a proto ani neexistuje opravdový obraz předmětového bodu P.

Pro získání alespoň zřetelného obrazu se musíme omezit na tzv. **paraxiální paprsky** svírající s optickou osou zobrazovací soustavy pouze malý úhel (pro lámavou plochu je optická osa obvykle kolmicí k rozhraní). Pro paraxiální paprsky lze zákon lomu psát ve tvaru

$$n_1 \alpha \cong n_2 \beta$$

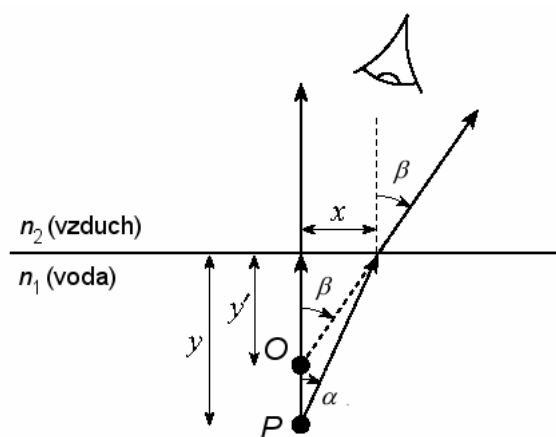
neboť $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ pro $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$

V případě paraxiálních paprsků je rozmazání (distribuce průsečíků různých paprsků) malé, takže lze určit přibližnou polohu obrazového bodu jako průsečíku dvou paprsků, z nichž jeden je kolmý k rozhraní.



Obr. 3. Paraxiální a neparaxiální paprsky.

Zdánlivá hloubka



Obr. 4. Zdánlivá hloubka předmětu ve vodě.

Protože $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$ a $\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{y'}$

bude pro paraxiální paprsky platit $n_1 \frac{x}{y} = n_2 \frac{x}{y'}$

a proto obraz O předmětového bodu P pozorujeme ve zdánlivé hloubce

$$y' \cong \frac{n_1}{n_2} y$$

Pro předmět ve vodě ($n_1 = 1,33$) pozorovaný ze vzduchu ($n_2 = 1$) tedy bude

$$y' \cong \frac{1}{1,33} y \cong 0,75y$$

čili předměty pod vodou se nám jeví blíže než ve skutečnosti jsou.

bodové (stigmatické) zobrazení $P(x, y, z) \leftrightarrow P'(x', y', z')$

kde P, P' je dvojice sdružených bodů (P je bod v předmětovém a P' v obrazovém prostoru)

přiřazení bod předmětového prostoru \leftrightarrow bod obrazového prostoru

přímka v předmětovém prostoru \leftrightarrow přímka v obrazovém prostoru

rovina v předmětovém prostoru \leftrightarrow rovina v obrazovém prostoru

\Rightarrow **kolineace** (kolineární zobrazení)

\Rightarrow hovoříme o sdružených (konjugovaných) bodech, přímkách a rovinách

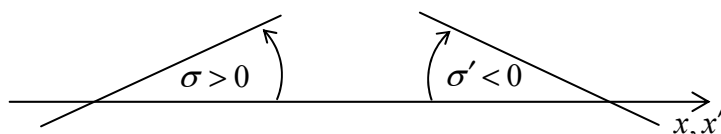
budeme se zabývat pouze osově symetrickými soustavami (tím např. vyloučíme válcové čočky), kde osa symetrie je x, x' (splývají)

potom budou souřadnice y a z respektive y' a z' ekvivalentní a můžeme se omezit pouze na řešení v rovinách (xy) a $(x'y')$

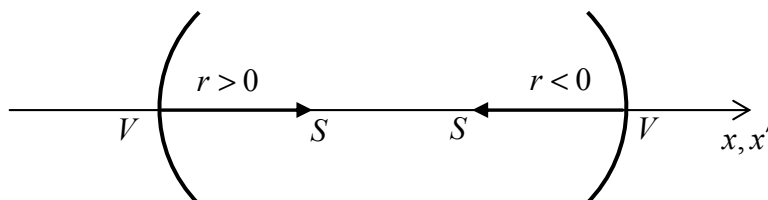
v případě složených soustav se omezíme pouze na **centrované soustavy** (tj. soustavy, jejichž osy symetrie splývají)

Budeme používat tuto znaménkovou konvenci (vzdálenosti jsou orientované, nesou tedy i znaménko):

1. kladný směr os x, x' je dán směrem paprsků vstupujících do soustavy (zleva doprava),
2. souřadné soustavy x, y, z a x', y', z' mají shodnou točivost, orientované vzdálenosti měřené od optické osy ve směru k ní kolmém přísluší znaménko kladné (záporné), je-li koncový bod nad (pod) optickou osou,
3. úhly budeme odečítat od osy k paprsku, budeme brát pouze ostré úhly, kladný směr otočení bude proti směru pohybu hodinových ručiček,



4. poloměr křivosti lámavé nebo odrazné plochy měříme vždy od vrcholu V ke středu S ; $r > 0$ je-li vypuklá strana obrácena k dopadajícím paprskům.



Definujeme **příčné (laterální) zvětšení** soustavy jako poměr y -ových souřadnic sdružených bodů v obrazovém a předmětovém prostoru

$$Z = \frac{y'}{y}$$

a **úhlové (angulární) zvětšení** soustavy jako poměr tangent úhlů, které sdružené paprsky (obrazový a předmětový) svírají s optickou osou

$$\xi = \frac{\operatorname{tg} \sigma'}{\operatorname{tg} \sigma} \quad \text{případně } \xi = \frac{\sigma'}{\sigma} \text{ pro malé úhly}$$

Kardinální body zobrazovací soustavy

ohniska F (předmětové) – jeho obrazem je úběžný bod obrazového prostoru $(\infty, 0, 0)$

F' (obrazové) – je obrazem úběžného bodu předmětového prostoru $(-\infty, 0, 0)$

ohniskové roviny (φ, φ') – kolmé k optické ose, kterou protínají v ohniscích ohniska nejsou sdružena navzájem, obrazové ohnisko není obecně obrazem předmětového ohniska a *vice versa*.

hlavní body H (předmětový) a H' (obrazový) – průsečíky hlavních rovin s osami x a x' ,

hlavní roviny (χ, χ') jsou navzájem sdružené roviny kolmé k ose, jež

odpovídají dvojicím sdružených bodů, pro něž je příčné zvětšení $Z = 1$ (úsečka délky y kolmá k optické ose v hlavní rovině χ předmětového prostoru se zobrazí v hlavní rovině χ' jako stejně dlouhá úsečka směřující na touž stranu, tedy $y' = y$)

uzlové body sdružené body U, U' ležící na optické ose, pro které je úhlové zvětšení $\xi = 1$, paprsku jdoucímu v předmětovém prostoru bodem U a svírajícím s optickou osou úhel α přísluší v obrazovém prostoru sdružený paprsek jdoucí druhým uzlovým bodem U' a svírající s optickou osou úhel $\sigma' = \sigma$. Sdružené paprsky procházející uzlovými body jsou tedy navzájem rovnoběžné

ohniskové vzdálenosti – orientované vzdálenosti ohnisek od hlavních bodů měřené vždy od ohniska k hlavnímu bodu, tedy

$$f = \overline{FH} \quad f' = \overline{F'H'}$$

Obecné transformační vztahy (**zobrazovací rovnice**) pro kolineární zobrazení mají tvar

$$x' = \frac{F_1}{F_0} \quad y' = \frac{F_2}{F_0} \quad z' = \frac{F_3}{F_0}$$

kde $F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i \quad i = 0, 1, 2, 3$

čili např. $x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_0 x + b_0 y + c_0 z + d_0}$ atd.

Omezíme-li se na roviny (xy) a $(x'y')$, potom obecné zobrazovací rovnice mají tvar

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + d_1}{a_0x + b_0y + d_0} \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + d_2}{a_0x + b_0y + d_0}$$

Z osové symetrie vyplývá, že záměna $y \leftrightarrow -y$ neovlivní x' a tedy

$$b_1 = b_0 = 0$$

Při záměně $y \leftrightarrow -y$ bude $y' \leftrightarrow -y'$ a tedy

$$a_2 = d_2 = 0$$

Transformační vztahy se nám tedy zjednoduší na tvar

$$x' = \frac{a_1x + d_1}{a_0x + d_0} \quad y' = \frac{b_2y}{a_0x + d_0}$$

a odtud
$$x = \frac{d_1 - d_0x'}{a_0x' - a_1} \quad y = \frac{a_0x + d_0}{b_2} \quad y' = \frac{a_0d_1 - a_1d_0}{b_2} \frac{y'}{a_0x' - a_1}$$

Ohniskové roviny $\varphi: a_0x(F) + d_0 = 0$ konjugovaný bod leží v $-\infty$

$\varphi': a_0x'(F') - a_1 = 0$ konjugovaný bod leží v ∞

protínají osu x (x') v bodech $x(F) = -\frac{d_0}{a_0}$

$$x'(F') = \frac{a_1}{a_0}$$

Posuneme počátky souřadných soustav do ohnisek F respektive F' , tj. přejdeme od soustav (x, y) a (x', y') k soustavám (X, Y) a (X', Y') , ve kterých $X(F) = 0$; $X'(F') = 0$

což odpovídá transformačním vztahům

$$a_0x + d_0 = a_0X \quad y = Y$$

$$a_0x' - a_1 = a_0X' \quad y' = Y'$$

Potom

$$Y' = y' = \frac{b_2y}{a_0x + d_0} = \frac{b_2}{a_0} \frac{Y}{X}$$

$$x' = \frac{a_0X' + a_1}{a_0} = \frac{a_1x + d_1}{a_0x + d_0} = \frac{a_1 \frac{a_0X - d_0}{a_0} + d_1}{a_0X} = \frac{a_1a_0X - a_1d_0 + a_0d_1}{a_0^2X}$$

Tedy
$$a_0X' + a_1 = \frac{a_1a_0X - a_1d_0 + a_0d_1}{a_0X}$$

a odtud
$$X' = \frac{d_1a_0 - a_1d_0}{a_0^2} \frac{1}{X} = \frac{d_1a_0 - a_1d_0}{a_0b_2} \frac{b_2}{a_0} \frac{1}{X}$$

Označme $f = \frac{b_2}{a_0}$ $f' = \frac{d_1 a_0 - a_1 d_0}{a_0 b_2}$

Potom zobrazovací rovnice pro kolineární zobrazení nabývají tzv. Newtonova tvaru

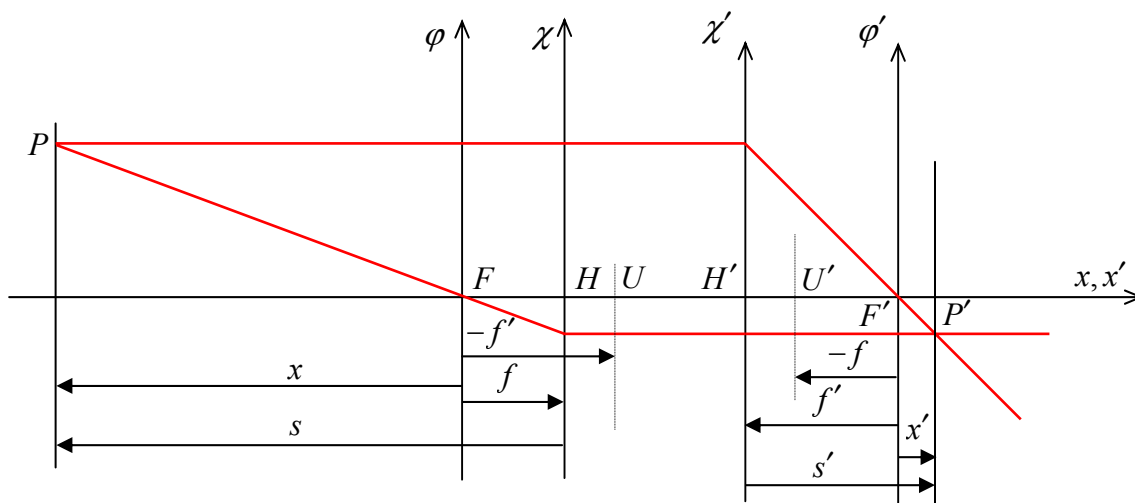
$$XX' = ff' \tag{1a}$$

$$Y' = \frac{f}{X} Y \tag{1b}$$

$$Y = \frac{f'}{X'} Y' \tag{1c}$$

kde $X_F = Y_F = 0$; $X'_{F'} = Y'_{F'} = 0$, tj. počátky předmětové i obrazové souřadné soustavy leží v příslušných ohniscích.

Potom $f = X(H)$ $f' = X'(H')$



Obr. 5. Schematické znázornění zobrazovací soustavy.

Typy optických soustav

	$f > 0$	$f < 0$
$ff' > 0$	spojná katoptrická <i>duté zrcadlo</i>	rozptylná katoptrická <i>vypuklé zrcadlo</i>
$ff' < 0$	spojná dioptrická <i>spojná čočka</i>	rozptylná dioptrická <i>rozptylná čočka</i>

Přejdeme k souřadným soustavám s počátky v hlavních bodech. Transformační vztahy jsou

$$x = s + f \quad x' = s' + f'$$

Dosazením do první Newtonovy zobrazovací rovnice (1a)

$$xx' = ff' \quad \Rightarrow \quad (s + f)(s' + f') = ff'$$

dostáváme tzv. **čočkovou rovnici**

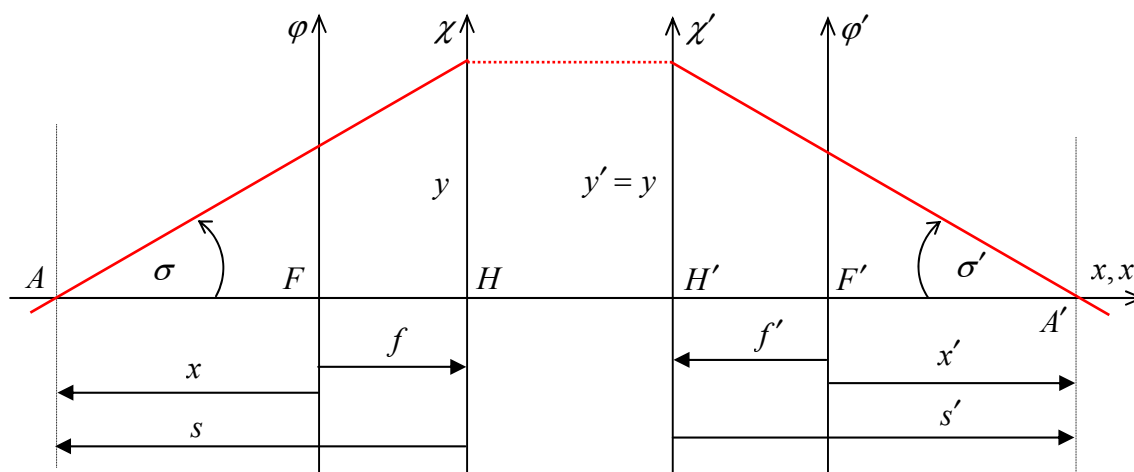
$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} + 1 = 0 \quad (2)$$

Ze zbývajících Newtonových rovnic získáme další transformační vztahy

$$y' = \frac{f}{x} y = \frac{f}{s + f} y$$

$$y = \frac{f'}{x'} y' = \frac{f'}{s' + f'} y'$$

Pozn.: Důsledkem námi zvolené znaménkové konvence je, že u čoček jsou zásadně ohniskové vzdálenosti f, f' opačných znamének a v čočkové rovnici je opačné znaménko u absolutního členu proti běžné čočkové rovnici uváděné v elementárních textech.



Obr. 6. K odvození úhlového zvětšení.

Zbývá určit polohu uzlových bodů. Z obr. 6 je zřejmé, že

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{y}{f - x} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} \sigma' = \frac{y}{f' - x'}$$

Pro úhlové zvětšení tedy platí

$$\xi = \frac{\operatorname{tg} \sigma'}{\operatorname{tg} \sigma} = \frac{f - x}{f' - x'} = \frac{f - x}{f' - \frac{ff'}{x}} = -\frac{x}{f'}$$

nebo (dosazením za x z Newtonovy rovnice)

$$\xi = -\frac{f}{x'}$$

a pro uzlové body potom z definice ($\xi = 1$) platí

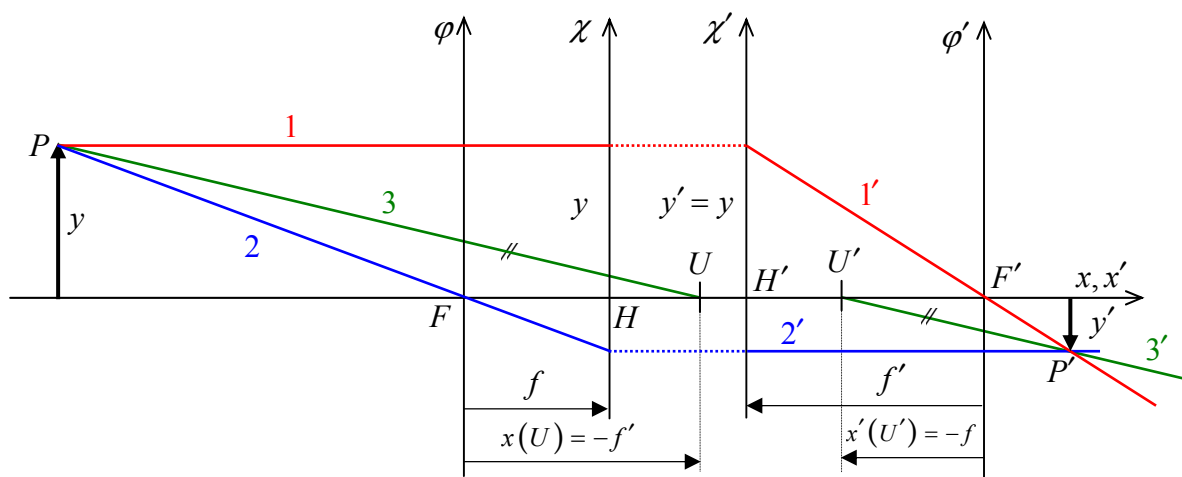
$$x(U) = -f' \quad \text{a} \quad x'(U') = -f$$

Jestliže tedy známe polohu ohnisek F, F' a ohniskové vzdálenosti f, f' , je tím jednoznačně určena i poloha dalších kardinálních bodů soustavy H, H' a U, U' , s jejichž pomocí můžeme zkonstruovat obraz libovolného bodu $P(x, y)$.

Pro geometrickou konstrukci obrazu mimoosového bodu P můžeme užít paprsky znázorněné na obr. 7.

1. Paprsek 1, který jde bodem P rovnoběžně s osou a protíná hlavní rovinu χ v bodě (f, y) , odpovídá paprsek 1' vycházející z bodu (f', y) hlavní roviny χ' a procházející ohniskem F' .
2. Paprsek 2, který vychází z bodu P do ohniska F a protíná hlavní rovinu χ v bodě (f, y') , odpovídá paprsek 2' rovnoběžný s osou ve vzdálenosti y' .
3. Paprsek 3, který vychází z bodu P a protíná osu v uzlovém bodě U , odpovídá paprsek 3' vycházející z uzlového bodu U' a jdoucí rovnoběžně s původním paprskem.

Všechny tři paprsky 1', 2', 3' se protínají v bodě P' , který je obrazem bodu P . Pro konstrukci obrazového bodu samozřejmě stačí dva z paprsků.



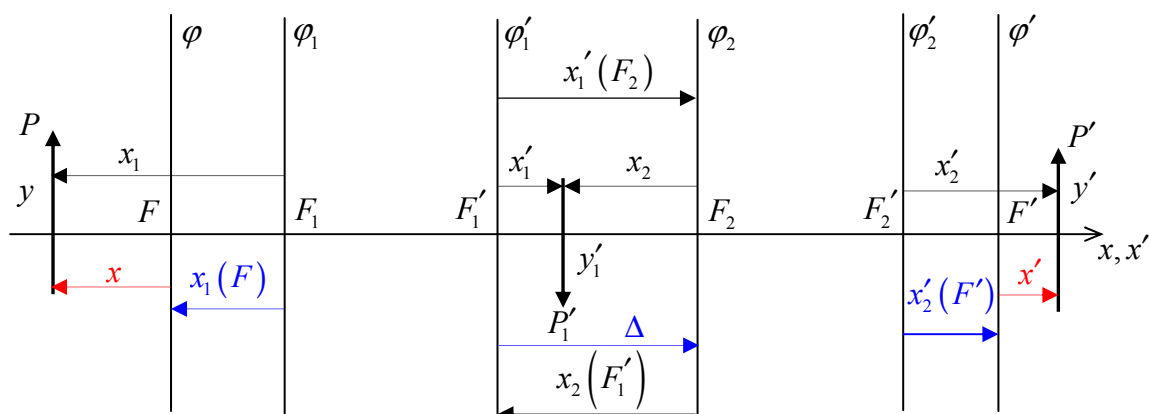
Obr. 7. Geometrická konstrukce obrazu mimoosového bodu.

Centrované soustavy

Obraz vytvořený jednou optickou soustavou může sloužit jako předmět pro další soustavu.

Z vlastností kolineárního zobrazení přitom vyplývá, že soustavu složenou ze soustav

jednodušších lze nahradit jedinou výslednou soustavou, jež je rovněž kolineární. Zabývat se budeme pouze tzv. centrovanými soustavami, složenými ze soustav s totožnými osami. Pro jednoduchost uvažujme dvě soustavy dané polohami ohnisek F_1, F_1', F_2, F_2' a ohniskovými vzdálenostmi f_1, f_1', f_2, f_2' (obr. 8).



Obr. 8. Dvě centrované zobrazovací soustavy.

1. soustava

$$x_1 x_1' = f_1 f_1'$$

$$y_1' = \frac{f_1 y_1}{x_1}$$

$$y_1 = \frac{f_1' y_1'}{x_1'}$$

2. soustava

$$x_2 x_2' = f_2 f_2'$$

$$y_2' = \frac{f_2 y_2}{x_2}$$

$$y_2 = \frac{f_2' y_2'}{x_2'}$$

Postupujeme tak, že pomocí dvojí transformace popsané Newtonovými rovnicemi pro 1. a 2. soustavu najdeme ohniska výsledné soustavy jako body sdružené s osovými body $x \rightarrow \infty$ a $x' \rightarrow -\infty$. Poté najdeme transformační rovnice obecného osového bodu a převedeme do tvaru Newtonových rovnic, čímž získáme ohniskové vzdálenosti f, f' složené soustavy.

Vzájemnou polohu dvou centrovaných soustav charakterizujeme tzv. **optickým intervalem** Δ , který udává orientovanou vzdálenost měřenou od obrazového ohniska první soustavy F_1' k předmětovému ohnisku druhé soustavy F_2 .

$$x_2'(F') = \frac{f_2 f_2'}{x_2(F_1')} = \frac{f_2 f_2'}{-\Delta} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

(paprsek vstupující do 1. soustavy rovnoběžně s osou protíná osu v ohnisku F_1' a potom je zobrazen 2. soustavou do bodu, který z definice musí být obrazovým ohniskem složené soustavy F').

Obdobně pro předmětové ohnisko složené soustavy

$$x_1(F) = \frac{f_1 f_1'}{x_1'(F_2)} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}$$

Dále musí platit (viz obr. 8)

$$\frac{v_1}{x'(H')} = \frac{w_1}{x_2'(F') - f_2'} \quad , \quad \frac{w_1}{f_2 + \Delta} = \frac{v_1}{-f_1'}$$

a odtud

$$x'(H') \equiv f' = \frac{v_1}{w_1} (x_2'(F') - f_2') = -\frac{f_1'}{f_2 + \Delta} \left(-\frac{f_2 f_2'}{\Delta} - f_2' \right) = \frac{f_1' f_2'}{f_2 + \Delta} \frac{f_2 + \Delta}{\Delta} = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

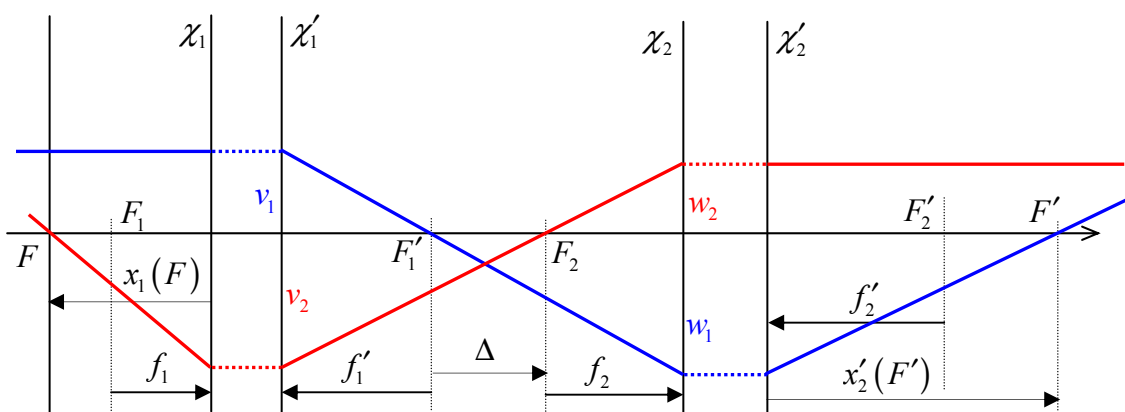
Obdobně

$$x(H) \equiv f = \frac{w_2}{v_1} (x_1(F) - f_1) = \frac{f_2}{-f_1' + \Delta} \left(\frac{f_1 f_1'}{\Delta} - f_1 \right) = -\frac{f_2 f_1}{f_2 - \Delta} \frac{f_1 - \Delta}{\Delta} = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

Tedy shrnuto pro složenou centrovanou soustavu dostáváme

$x_1(F) = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}$	$x_2'(F') = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$	(3)
$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$	$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$	(4)

Ze vztahů výše je zřejmé, že dvě spojné soustavy ($f_1 > 0, f_2 > 0$) s **kladným** optickým intervalem dávají rozptylnou výslednou soustavu ($f < 0$) a se **záporným** optickým intervalem výslednou soustavu spojnou.



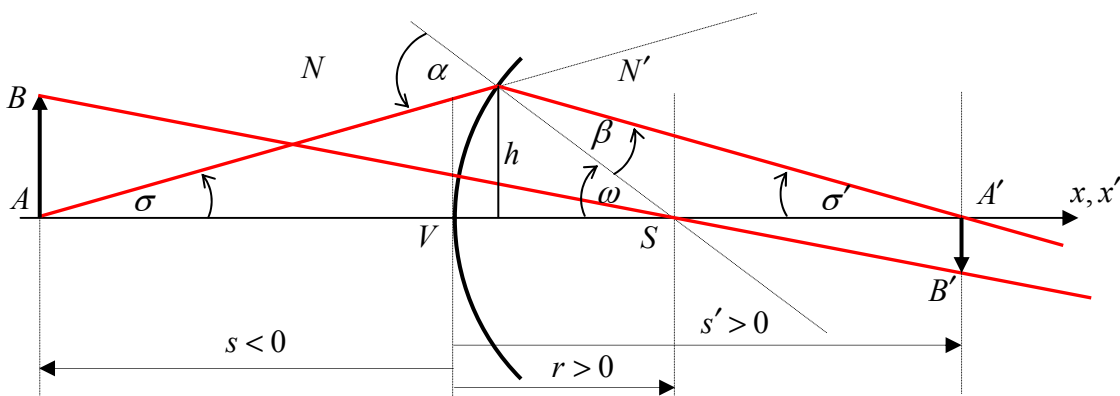
Obr. 9. Chod paprsků centrovanou kombinací dvou zobrazovacích soustav.

Nyní když známe hlavní rysy geometrického popisu kolineárních zobrazovacích soustav, začneme se zabývat konkrétními zobrazovacími soustavami a otázkou, nakolik se reálné soustavy mohou přiblížit ideálnímu modelu. Kolineární zobrazení libovolně velkých

rovinných předmětů kolmých k optické ose libovolně širokými svazky paprsků nelze fyzikálními prostředky přesně realizovat. Jediným zobrazovacím prvkem lze dosáhnout kolineárního zobrazení jen tehdy, omezíme-li se na body ležící tak blízko optické osy, že lze siny a tangenty úhlů, které paprsky svírají s osou, nahradit oblouky a vzdálenosti od osy délkami kruhových oblouků se středy ležícími na optické ose. Takové paprsky nazýváme **paraxiální** a prostor, v němž lze paprsky považovat za paraxiální se nazývá **Gaussův nitkový prostor**. Jedinou výjimkou je rovinné zrcadlo, u něhož je zobrazení kolineární i při libovolně širokých svazcích.

Lom a odraz na kulové ploše

Lámavá kulová plocha o poloměru r ohraničuje dvě prostředí o indexech lomu N a N' (obr. 10). Jestliže se omezíme na paraxiální paprsky (Gaussův nitkový prostor), budou všechny úhly malé a nemusíme činit rozdíl mezi úhlem, jeho sinem či tangentou.



Obr. 10. Zobrazení lomem na kulové ploše. Úhly α, β, σ jsou kladné, úhly ω, σ' jsou záporné.

Podle obr. 10 platí (s respektováním správného znaménka úhlu v souladu s konvencí)

$$\alpha = \sigma - \omega$$

$$\omega = \sigma' - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \sigma' - \omega$$

$$\sigma \cong -\frac{h}{s} \quad \sigma' \cong -\frac{h}{s'} \quad \omega \cong -\frac{h}{r}$$

$$\text{Zákon lomu pro malé úhly} \quad \frac{N'}{N} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sigma - \omega}{\sigma' - \omega} = \frac{-\frac{h}{s} + \frac{h}{r}}{-\frac{h}{s'} + \frac{h}{r}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}}$$

a odtud

$$N' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right) = N \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right)$$

$$\frac{N}{s} - \frac{N'}{s'} + \frac{N' - N}{r} = 0 \quad (5)$$

Tato rovnice neobsahuje h a ukazuje, že zobrazení osového bodu je *za výše uvedených předpokladů* bodové. Ze vztahu výše vyjádříme s s resp. s'

$$s' = \frac{N'rs}{(N' - N)s + Nr} \quad s = \frac{Nrs'}{(N - N')s' + N'r} \quad (6)$$

Transformační rovnici pro mimoosový bod (souřadnice y) dostaneme myšleným pootočením celé konstrukce na obr. 9 kolem středu křivosti S o takový úhel, aby se bod A bočně posunul o vzdálenost y (stále v Gaussově prostoru). Z obr. 10 plyne

$$\frac{y'}{y} = \frac{r - s'}{r - s}$$

a dosazením za s' dostaneme hledaný transformační vztah

$$y' = \frac{Nry}{(N' - N)s + Nr} \quad (7)$$

Rovnice (6) a (7) splňují požadavky kolineární transformace, a tedy zobrazení kulovou lámavou plochou je (*v paraxiálním prostoru !*) kolineární.

Nyní určíme polohu kardinálních bodů lámavé kulové plochy.

obrazové ohnisko ($s \rightarrow -\infty$)

$$s'(F') = \frac{N'rs}{(N' - N)s + Nr} = \frac{N'r}{(N' - N) + N\frac{r}{s}} = \frac{N'r}{N' - N} = \frac{nr}{n - 1}$$

kde jsme označili n relativní index lomu $n = \frac{N'}{N}$.

Podobně pro předmětové ohnisko ($s' \rightarrow \infty$)

$$s(F) = \frac{Nr}{N - N'} = -\frac{r}{n - 1}$$

Pro hlavní roviny platí $\frac{y'}{y} = \frac{r - s'(H')}{r - s(H)} = 1$

a tedy $s(H) = s'(H') = 0$

Hlavní roviny v případě kulové lámavé plochy splývají a procházejí vrcholem plochy V .

Ohniskové vzdálenosti potom jsou

$$f \equiv \overline{FH} = s(H) - s(F) = -s(F) = \frac{Nr}{N' - N} = \frac{r}{n - 1} \quad (8a)$$

$$f' \equiv \overline{F'H'} = s'(H') - s'(F') = -s'(F') = -\frac{N'r}{N' - N} = -\frac{nr}{n-1} \quad (8b)$$

$$\text{uzlové body} \quad x(U) = -f' \quad x'(U') = -f \quad x = s + f \quad x' = s' + f'$$

$$s(U) = x(U) - f = -(f + f') = -\left(\frac{r}{n-1} - \frac{nr}{n-1}\right) = r$$

$$s'(U') = x'(U') - f' = -(f + f') = r$$

Uzlové body splývají se středem křivosti kulové lámavé plochy. To je pochopitelné, protože paprsky procházející středem křivosti se lomem neodchylují, sdružené paprsky leží v téže přímce.

Vraťme se k rovnici (5)

$$\frac{N'}{s'} - \frac{N}{s} = \frac{N' - N}{r}$$

$$\frac{N'r}{(N' - N)s'} - \frac{Nr}{(N' - N)s} = 1$$

a s užitím (8a) a (8b) dostáváme čočkovou rovnici (2)

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = -1$$

nebo transformací do soustav s počátky v ohniscích ($s = x - f$; $s' = x' - f'$)

$$\frac{f'}{x' - f'} + \frac{f}{x - f} = -1$$

a po roznásobení dostaneme Newtonovu rovnici (1a)

$$xx' = ff'$$

tedy opravdu se za **daných předpokladů** jedná o **kolineární zobrazení**.

Příčné zvětšení (s užitím vztahů (2), (8a) a (8b))

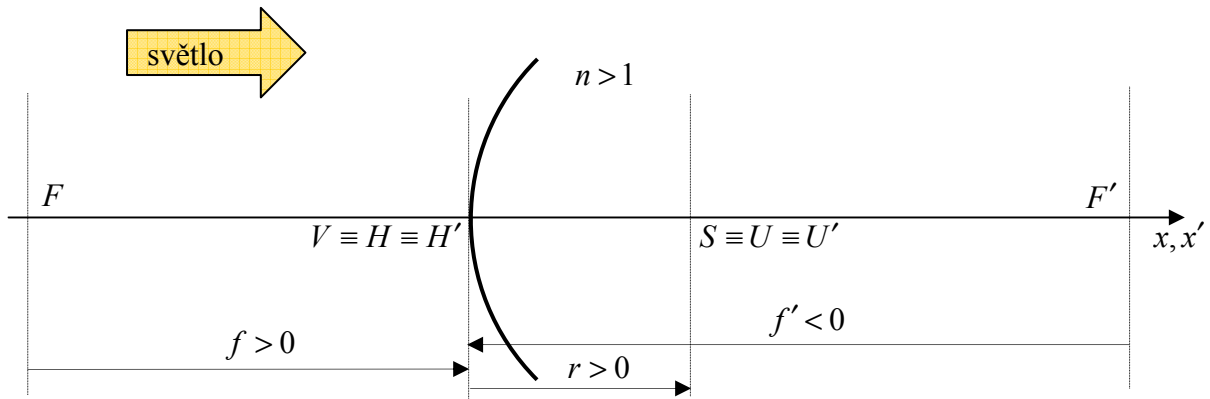
$$Z \equiv \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{f}{s + f} = -\frac{fs'}{f's} = \frac{Ns'}{N's}$$

Tedy pokud $n > 1$ ($N' > N$) a $r > 0$ bude $f = \frac{r}{n-1} > 0$ a $f' = -\frac{nr}{n-1} < 0$ jedná se o spojnou

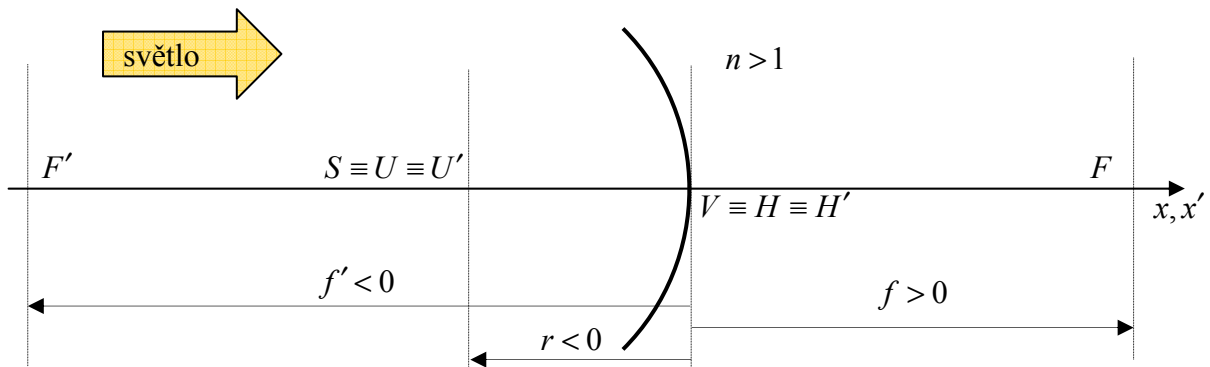
soustavu dioptrickou ($f > 0$ a $ff' < 0$), naopak při $r < 0$ půjde o rozptylnou soustavu

dioptrickou ($f < 0$ a $ff' < 0$).

Výsledky odvozené pro lámavou kulovou plochu lze použít i pro sférická zrcadla, jestliže do odvozených vztahů dosadíme $N' = -N$ respektive $n = -1$.



Obr. 11. Lámavá plocha jako spojná soustava dioptrická.



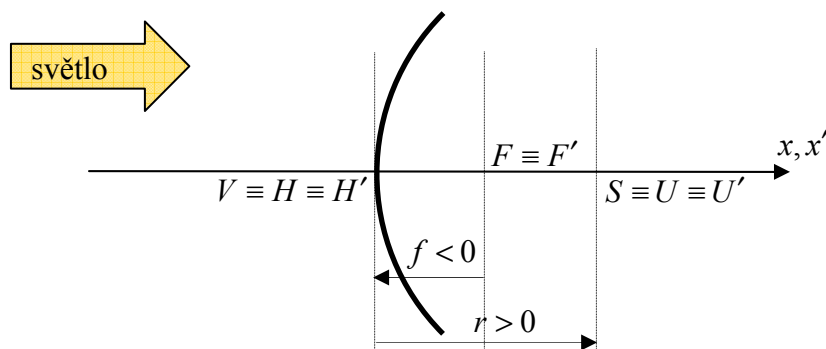
Obr. 12. Lámavá plocha jako rozptylná soustava dioptrická.

Potom ze vztahů (8a) a (8b) dostáváme pro ohniskové vzdálenosti sférického zrcadla

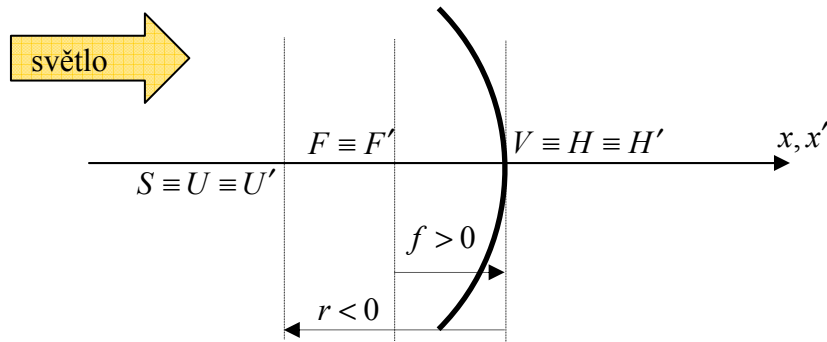
$$f = f' = -\frac{r}{2} \quad (9)$$

Ohniska tedy splývají a leží vždy na polovině vzdálenosti mezi vrcholem a středem křivosti, u dutého zrcadla ($r < 0$) před zrcadlem a u vypuklého zrcadla ($r > 0$) za zrcadlem. Stejně jako u lámavé plochy hlavní roviny splývají a procházejí vrcholem a uzlové body splývají se středem křivosti. Čočková rovnice (2) pro sférické zrcadlo nabývá tvaru

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad (10)$$



Obr. 13. Vypuklé (konvexní) sférické zrcadlo.



Obr. 14. Duté (konkávní) sférické zrcadlo.

Příčné zvětšení sférického zrcadla

$$Z \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (\text{neboť } N' = -N)$$

Vlastnosti zobrazení dutým sférickým zrcadlem ($r < 0, f > 0$), vždy je $s < 0$:

- a) $-\infty < s < -2f \Rightarrow -2f < s' < -f \Rightarrow$ skutečný (reálný), převrácený, zmenšený
- b) $s = -2f \Rightarrow s' = -2f \Rightarrow$ skutečný, převrácený, stejně velký
- c) $-2f < s < -f \Rightarrow -\infty < s' < -2f \Rightarrow$ skutečný, převrácený, zvětšený
- d) $s = -f \Rightarrow s' = -\infty$
- e) $s < -f \Rightarrow s' > |s| \Rightarrow$ zdánlivý (neskutečný, virtuální), vzpřímený, zvětšený

Vlastnosti zobrazení vypuklým sférickým zrcadlem ($r > 0, f < 0$), vždy je $s < 0$:

ať je předmět kdekoli, obraz bude zdánlivý, vzpřímený, zmenšený, $0 < s' < -f$

Zvláštním případem kulového zrcadla je rovinné zrcadlo ($r = \infty$). Je zřejmé, že také ohniskové vzdálenosti jsou nekonečné. Ze zobrazovací rovnice (10) plyne, že $s' = -s$, čili předmět a obraz leží souměrně na opačných stranách rovinného zrcadla. Obraz je vždy zdánlivý, vzpřímený a stejně velký jako předmět, neboť ze vztahu pro příčné zvětšení plyne

$$Z \equiv \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = 1$$

Zobrazení rovinným zrcadlem je jediné optické zobrazení, které nemá žádné vady.

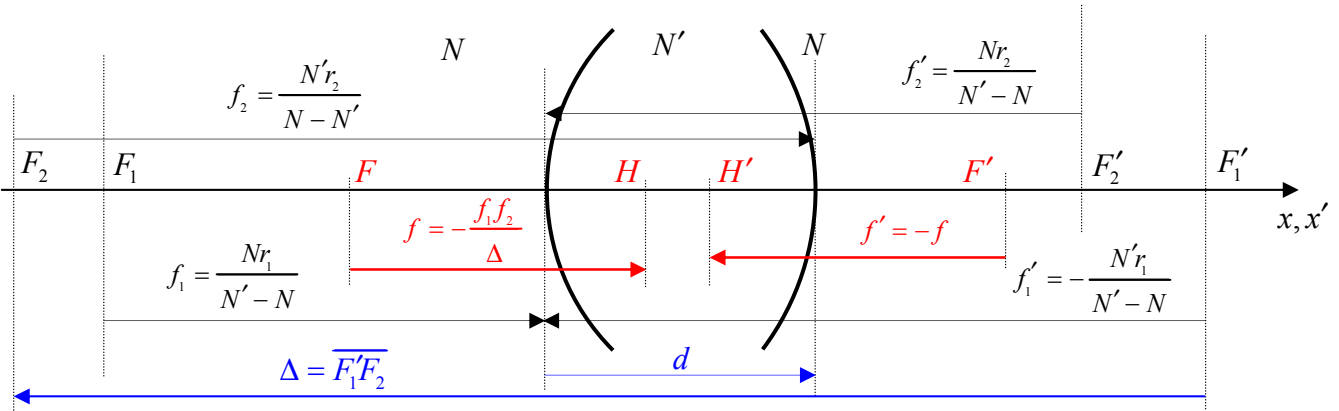
Čočky

Čočkou budeme rozumět centrovanou složenou optickou soustavu tvořenou dvěma lámavými sférickými plochami (nebudeme se tedy zabývat asférickými čočkami), z nichž nejvýše jedna může mít rovinná ($r = \infty$) omezujícími prostředí o indexu lomu N' . Předpokládáme-li stejné

prostředí na obou stranách čočky (o indexu lomu N), potom relativní index lomu na přední straně čočky bude $n = N'/N$ a na zadní straně čočky $n' = N/N' = 1/n$, tedy pro ohniskové vzdálenosti platí podle (8a) a (8b)

$$f_1 = \frac{Nr_1}{N' - N} = \frac{r_1}{n-1} \qquad f_2 = \frac{N'r_2}{N - N'} = -\frac{nr_2}{n-1}$$

$$f'_1 = \frac{N'r_1}{N - N'} = -\frac{nr_1}{n-1} \qquad f'_2 = \frac{Nr_2}{N' - N} = \frac{r_2}{n-1}$$



Obr. 15. Tlustá čočka.

Optický interval (viz obr. 15) je

$$\Delta = \overline{F_1F'_2} = f'_1 - (f_2 - d) = -\frac{nr_1}{n-1} + \frac{nr_2}{n-1} + d = \frac{n(r_2 - r_1)}{n-1} + d = \frac{d(n-1) + (r_2 - r_1)n}{n-1}$$

Ohniskové vzdálenosti čočky potom budou podle (4)

$$f = -\frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{nr_1r_2}{(n-1)^2} \frac{n-1}{n(r_2 - r_1) + d(n-1)}$$

$$f' = \frac{f'_1f'_2}{\Delta} = -\frac{nr_1r_2}{(n-1)^2} \frac{n-1}{n(r_2 - r_1) + d(n-1)}$$

Tedy $f = -f'$

(ovšem pouze pokud je na obou stranách čočky stejné prostředí !).

Potom ale $x(U) = -f' = f$ a $x'(U') = -f = f'$

a tedy hlavní a uzlové body čočky splývají, $H \equiv U$, $H' \equiv U'$.

Pro *tenkou* čočku ($d \ll r_1, r_2$) bude $\Delta \approx \frac{n(r_2 - r_1)}{n-1}$, potom

$$f = -f' \approx \frac{r_1r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$$

nebo
$$\frac{1}{f} \equiv D = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} \approx (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (11)$$

kde D je **optická mohutnost čočky** (= reciproká ohnisková vzdálenost) udávaná v dioptriích.

S ohledem na vztah (11) nabývá čočková rovnice (2) tvar

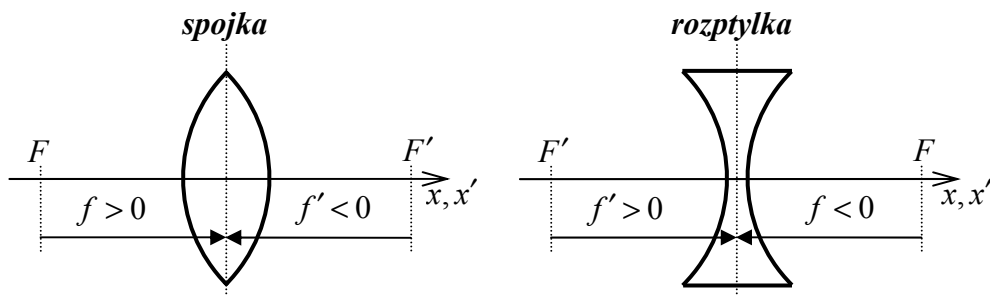
$$-\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} = 0 \quad (12)$$

který se v případě tenké čočky zjednoduší na

$$-\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0 \quad (13)$$

U tenké čočky vrcholy matematicko splývají ($d \rightarrow 0$), splývají i hlavní roviny a hlavní body.

U čoček spojných máme $f > 0$, $f' < 0$ a u rozptylných $f < 0$, $f' > 0$. U spojných čoček leží předmětové ohnisko před čočkou a obrazové za čočkou, u rozptylných je tomu naopak, obrazové ohnisko leží před a předmětové za čočkou.



Obr. 16. Srovnání spojné a rozptylné čočky.

Diskutujme výraz (11) pro tenkou čočku (viz obr. 17):

předpokládejme $n > 1$

spojky $f > 0 \Rightarrow \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} > 0 \Rightarrow \frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2}$

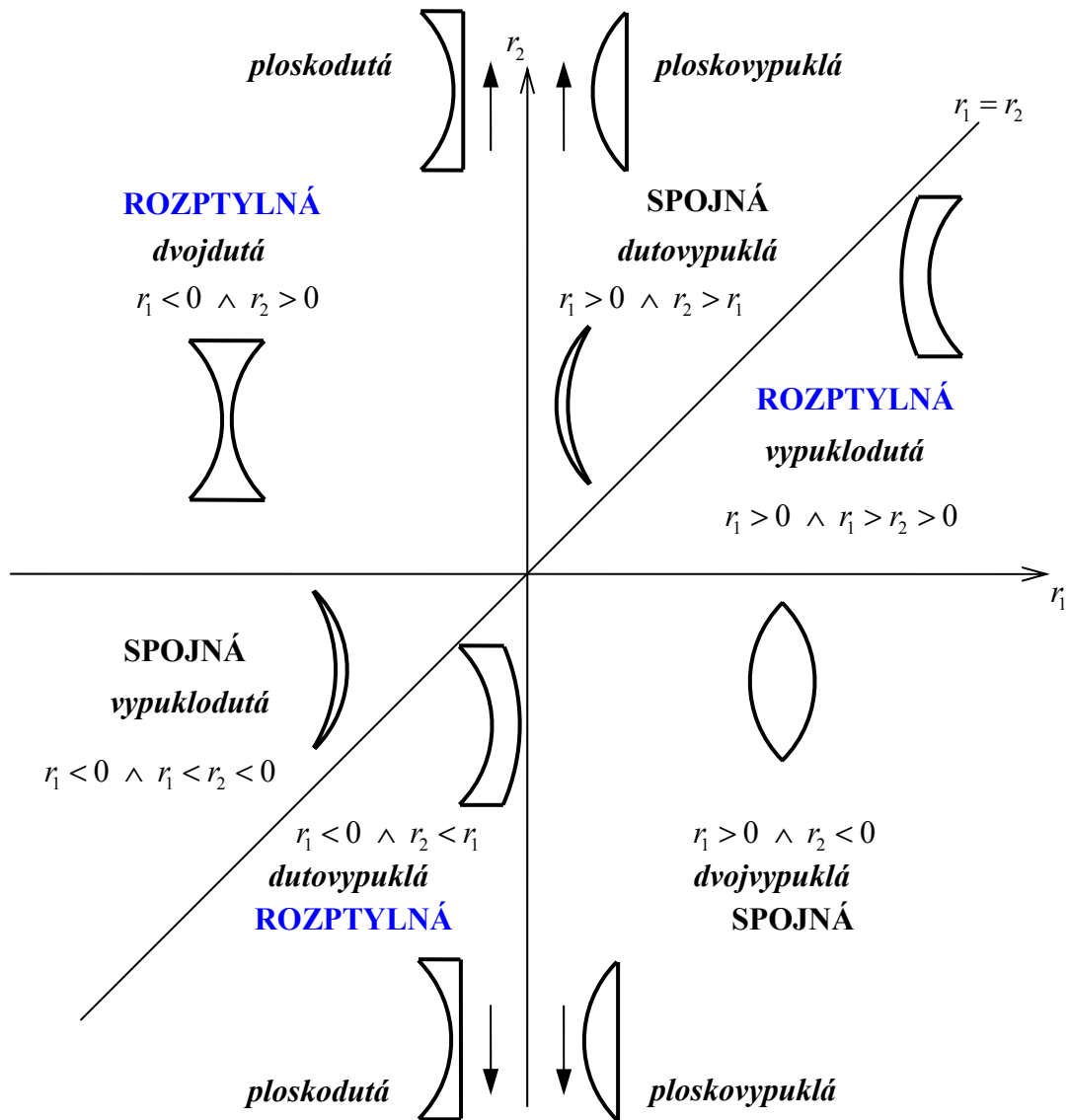
\Rightarrow 1. $r_1 > 0 \Rightarrow$ buď a) $r_2 > r_1$ nebo b) $r_2 < 0$

\Rightarrow 2. $r_1 < 0 \Rightarrow 0 > r_2 > r_1$

rozptylky $f < 0 \Rightarrow \frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2}$

\Rightarrow 1. $r_1 > 0 \Rightarrow 0 < r_2 < r_1$

\Rightarrow 2. $r_1 < 0 \Rightarrow$ buď a) $r_2 < r_1$ nebo b) $r_2 > 0$



Obr. 17. Grafické znázornění tvarů čoček v závislosti na poloměrech křivosti lámavých ploch.

Příčné zvětšení tenké čočky

$$Z \equiv \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Vlastnosti zobrazení spojnou čočkou ($f > 0$), vždy je $s < 0$:

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|--|
| a) $-\infty < s < -2f$ | $\Rightarrow f < s' < 2f$ | \Rightarrow skutečný, převrácený, zmenšený |
| b) $s = -2f$ | $\Rightarrow s' = 2f$ | \Rightarrow skutečný, převrácený, stejně velký |
| c) $-2f < s < -f$ | $\Rightarrow 2f < s' < \infty$ | \Rightarrow skutečný, převrácený, zvětšený |
| d) $s = -f$ | $\Rightarrow s' = \infty$ | |
| e) $s < -f$ | $\Rightarrow 0 > s', s' > s $ | \Rightarrow zdánlivý, vzpřímený, zvětšený |

Vlastnosti zobrazení rozptylnou čočkou ($f < 0$), vždy je $s < 0$:

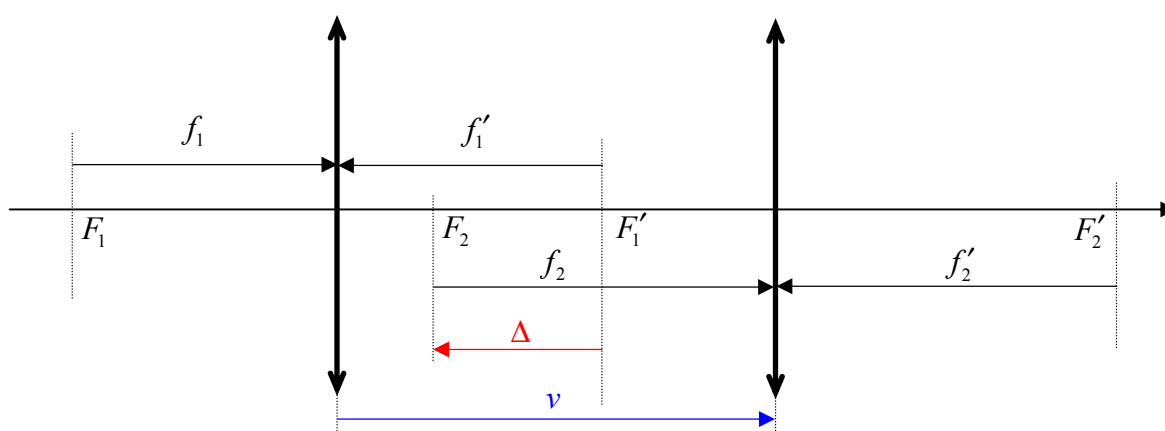
ať je předmět kdekoli, obraz bude zdánlivý, vzpřímený, zmenšený, $0 > s' > s$

Centrovaná soustava dvou tenkých čoček ve vzdálenosti v (obr. 18)

potom optický interval bude $\Delta = f_1' - (f_2 - v) = -f_1 - f_2 + v$

a výsledná optická mohutnost takové soustavy bude

$$D \equiv \frac{1}{f} = -\frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}$$



Obr. 18. Dvě tenké čočky.

Budou-li dvě čočky v těsném kontaktu ($v \rightarrow 0$), bude

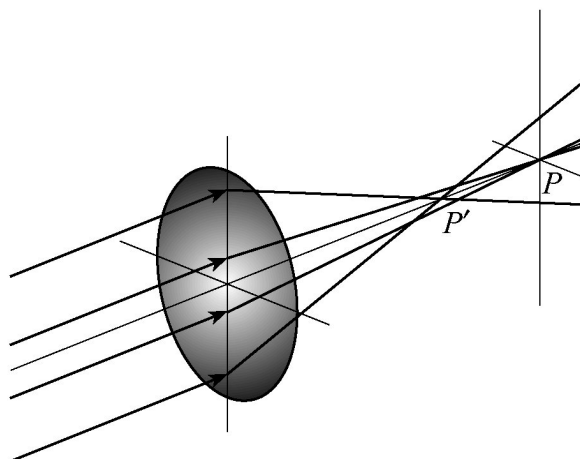
$$D = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = D_1 + D_2$$

tedy výsledná optická mohutnost bude prostým součtem optických mohutností.

Vady (aberrace) zobrazování

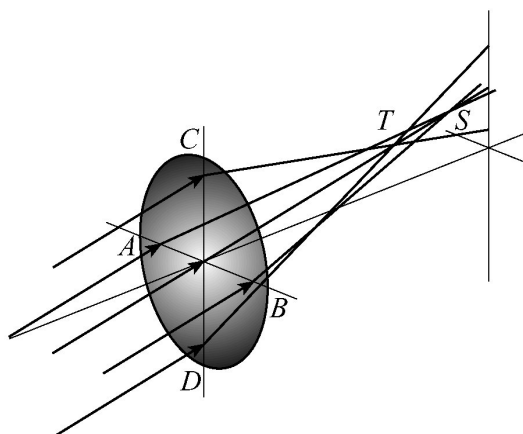
sférická (otvorová) vada – vzniká při zobrazení osového bodu širokým svazkem paprsků.

U spojně čočky paprsky, které procházejí blízko osy, se protínají dále od čočky, než paprsky procházející okrajem čočky (obr. 19).



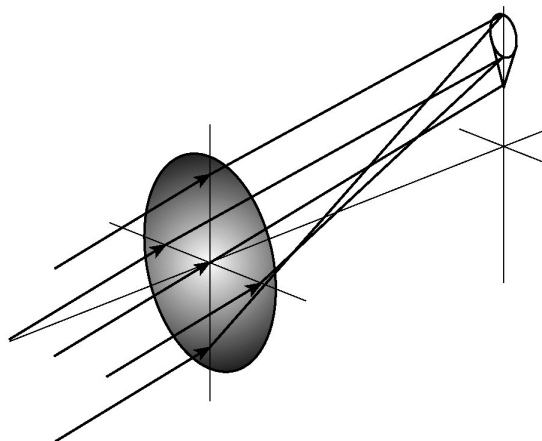
Obr. 19. Sférická vada.

astigmatismus a zklenutí obrazu – vzniká při zobrazení mimoosového bodu. Světlo procházející čočkou podél vodorovné osy AB je fokusováno do bodu S (sagitální ohnisko), zatímco světlo od stejného předmětu procházející čočkou podél svislé osy CD je fokusováno do bodu T (tangenciální ohnisko). Obrazem bodu jsou tedy dvě úsečky (fokály), ve kterých se protínají svazky paprsků ležících v rovině sagitální a tangenciální fokály (obr. 20). Jejich vzdálenost měřená ve směru paprsků je tzv. astigmatický rozdíl.



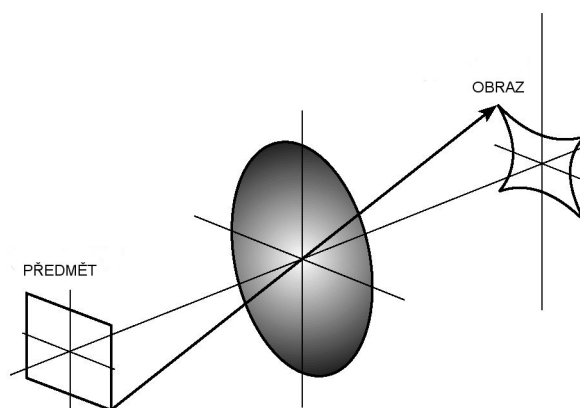
Obr. 20. Astigmatismus.

koma – vzniká při zobrazení mimoosového bodu širokým svazkem. Místo bodového obrazu vzniká klínovitě se rozbíhající světlá skvrna na širší straně oválně ohraničená. Pojmenování této vady souvisí s podobností tvaru skvrny s tvarem komety (obr. 21).



Obr. 21. Koma.

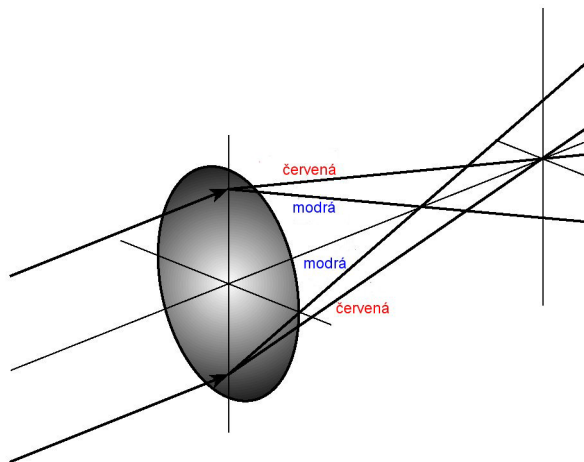
zkreslení obrazu – projevuje se tím, že přímky mimoběžné s osou se zobrazují jako křivky. Podle tvaru zakřivení mluvíme o soudkovitém a poduškovitém zkreslení. Souvisí to se závislostí příčného zvětšení na vzdálenosti od osy. Mají-li vnější části předmětu větší příčné zvětšení, vzniká zkreslení poduškovité (obr. 22), je-li naopak příčné zvětšení větší na kraji obrazu, vzniká zkreslení soudkovité.



Obr. 22. Poduškovité zkreslení obrazu.

barevná (chromatická) vada – vyskytuje se pouze u refrakčních (lámavých) soustav, neboť vzniká v důsledku disperze. Protože se světlo různé barvy láme různě, obrazový bod vytvořený světlem jedné barvy nekoinciduje s odpovídajícím obrazovým bodem vytvořeným světlem jiné barvy (obr. 23). Tento rozdíl se projevuje nejvíce u barev, jež se nacházejí na okrajích spektra, tedy červené a fialové. Fialové paprsky se lámou více než červené, a tak se svazek paprsků rovnoběžný s optickou osou láme do řady ohnisek, z nichž nejbližší spojně

čočce leží ohnisko F_f pro fialovou barvu a nejdále ohnisko F_c pro barvu červenou. U rozptylky leží rovněž ohnisko F_f blíže než ohnisko F_c , avšak ve směru dopadu světla je jejich pořadí opačné (u spojky leží za čočkou, u rozptylky před čočkou). Díky tomu je možné vhodnou kombinací spojky z korunového skla a rozptylky z disperznějšího materiálu (flintového skla) barevnou vadu alespoň částečně odstranit (achromatizace optické soustavy).



Obr. 23. Chromatická vada.

Pro mimoosový bod způsobuje frekvenční závislost ohniskové vzdálenosti frekvenční závislost příčného zvětšení (transverzální chromatická aberace).