DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul V, nr. 9-10 / 2022

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul V, Nr. 9-10, Decembrie 2022

Cuprins

DIN ACTIVITATEA DEPARTAMENTULUI

Concursul “Dräexlmaier IT Day”, Ediția a IV-a, 2022

Mihai-Radu Găman [1] *și Maria Miroiu* [2]

Departamentul **IT Center Pitești** din cadrul companiei **DRÄXLMAIER Group** a organizat în luna iulie 2022 **a patra ediție a concursului “Dräxlmaier IT Day”**. Concursul a constat în realizarea de aplicații informatice pentru un **Sistem de închiriat biciclete și trotinete electrice**. Nu au fost restricții în ceea ce privește limbajele de programare. Datele trebuiau stocate într-o bază de date relaționale (MS Access, mySql, Oracle, etc.). De asemenea, un raport al rezervărilor trebuia să fie disponibil la cerere.

Punctarea proiectelor s-a făcut astfel:
- 100 de puncte pentru implementarea administrării centrului de închiriere (adăugarea/ modificarea/ ștergerea bicicletelor, tipurilor de biciclete, prețurilor);
- 100 de puncte pentru implementarea interfeței cu utilizatorul, necesară pentru închirierea de biciclete;
- 100 de puncte pentru generarea și vizualizarea facturii de după încheierea cursei.

Data limită de depunere a proiectelor a fost 1 iulie 2022. Prezentarea proiectelor s-a desfășurat la sediul IT Center Pitești, în data de 15 iulie 2022. La concurs au participat studenți de la domeniul de licență Informatică din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică, Universitatea din Pitești, iar juriul a fost compus din mai mulți specialiști din cadrul IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

Premiile oferite: premiul I a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 1400 lei și a fost câștigat de studentul Vasile Marian-Lucian de la Informatică, anul al treilea, premiul al II-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 700 lei și a fost câștigat de studentul Croitoru Radu-Alexandru de la Informatică, anul al treilea, iar premiul al III-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 250 lei și a fost câștigat de studentul Tuță Denis-Octavian de la Informatică, anul al doilea. Au mai fost oferite mențiuni următorilor studenți de la Informatică, anul al doilea: Grigoriu Robert Ionuț, Iordan Ionuț-Marius și Mandea Daniel.

1 Scop

Scopul proiectului consta în crearea unei aplicații de închiriat biciclete și trotinete electrice într-un limbaj de programare la alegere, cu o bază de date la alegere, interfață cu utilizatorul și interfață pentru mentenanță a aplicației. Aplicația trebuia să ofere informațiile din baza

[1] Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Draexlmaier Group, mihai.gaman@draexlmaier.com

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@upit.ro

de date în cele două interfețe (de exemplu: aplicație mobilă pentru utilizatori și aplicație web pentru administratori, o singură aplicație web/mobilă atât pentru utilizatori, cât și pentru administratori, dar separată clar, în așa fel încât utilizatorii să nu poată vedea informațiile administratorilor). De asemenea, aplicația trebuia să creeze facturi fiscale pentru persoanele ce au folosit bicicletele sau trotinetele.

2 Diagrama secvențială a interacțiunii cu utilizatorul

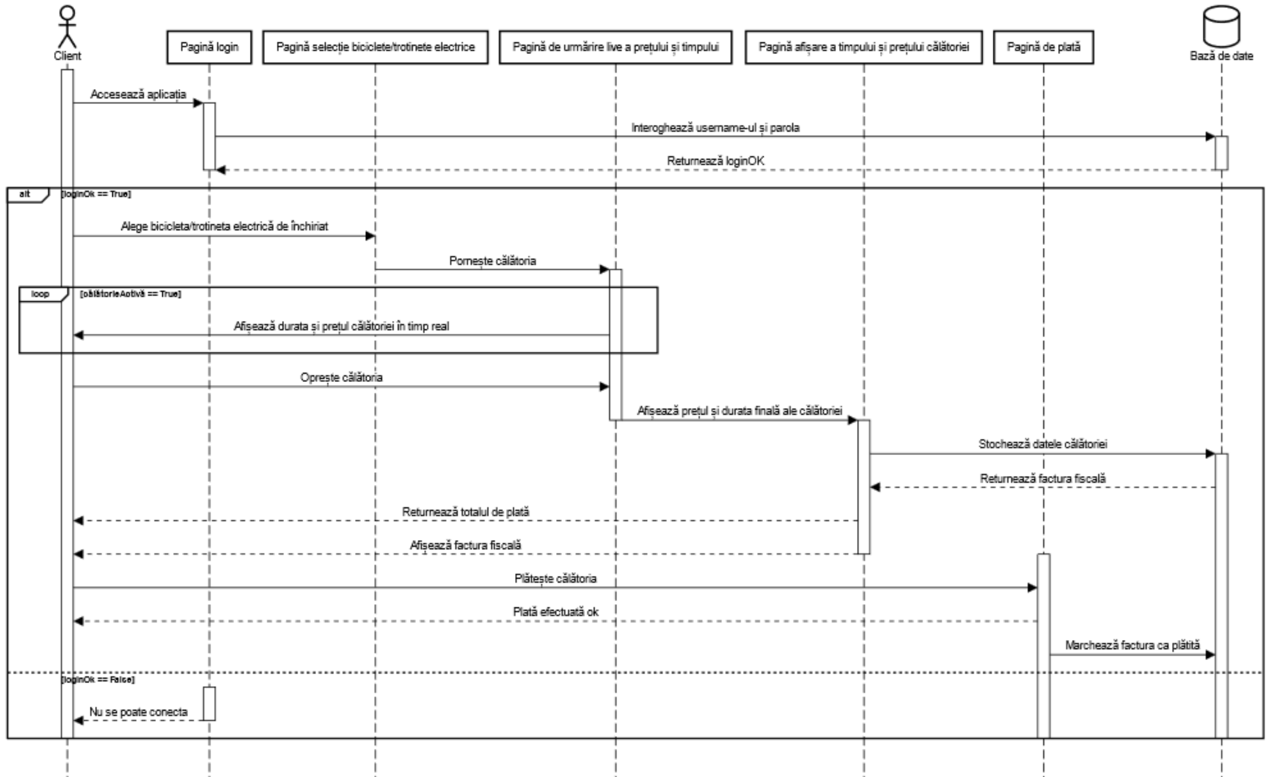


Figura 1. Sistem de închiriat biciclete și trotinete electrice

3 Model pentru entitățile din baza de date

Baza de date avea în componență următoarele entități: <**bikes**>, <**bikes_types**>, <**rentals**>, <**customers**>, <**invoices**>.

Diagrama conceptuală a acestor entități și relațiile dintre ele sunt descrise în imaginea următoare.

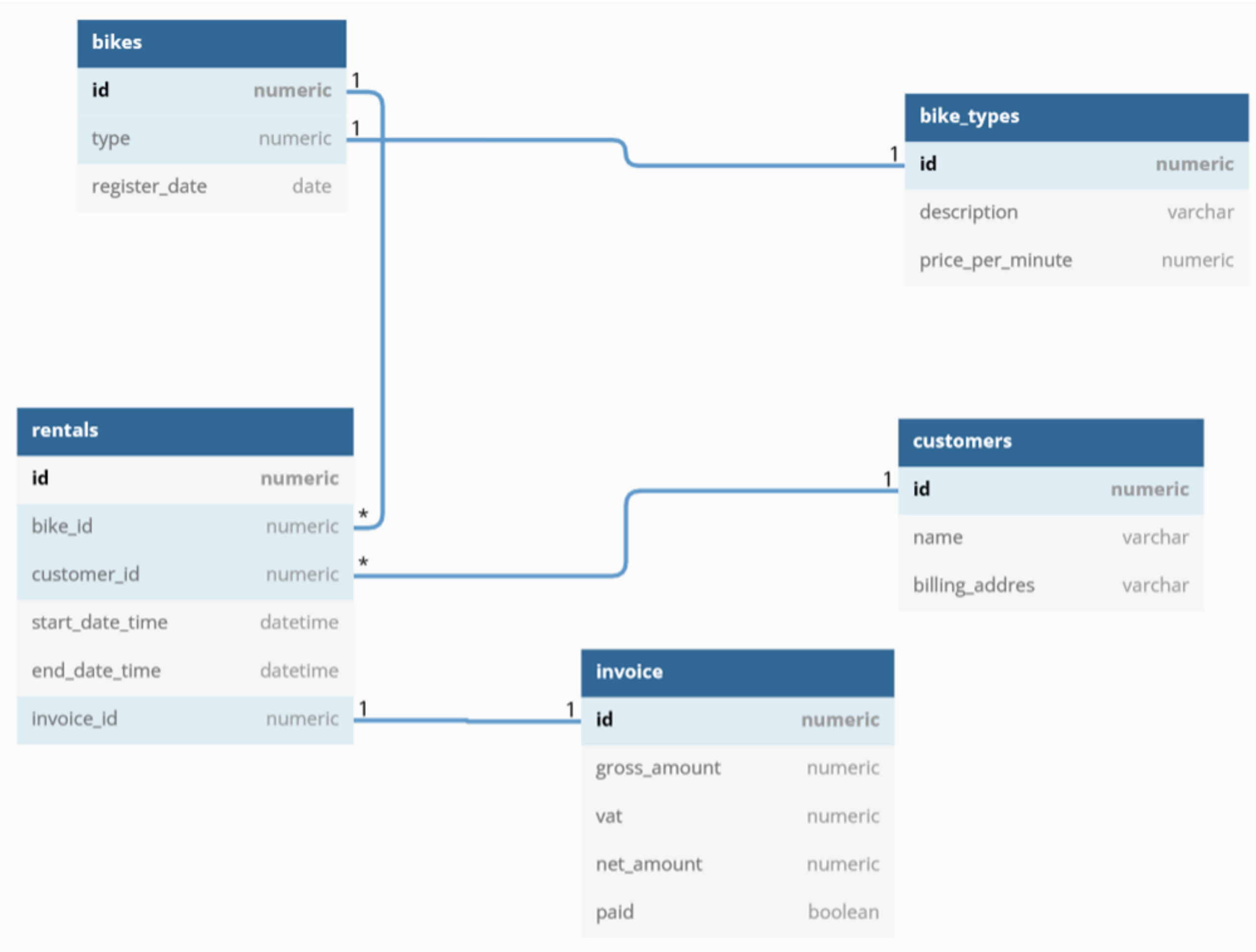


Figura 2. Relațiile între entități

Descrierea relațiilor:

- o bicicletă/trotinetă poate fi de un singur tip și poate avea mai multe închirieri;
- un client poate face mai multe închirieri;
- o factură corespunde unei singure închirieri.

4 Descrierea entităților

1. **Entitatea <bikes>** - reprezintă tabelul cu toate bicicletele/trotinetele electrice aflate în stocul companiei.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
id	int	obligatoriu	primary key, id-ul bicicletei/ trotinetei
type	int	obligatoriu	tipul (1-bicicletă clasică, 2-bicicletă electrică, 3-trotinetă etc), foreign key către tabelul <**bikes**>
register_date	date	obligatoriu	data înregistrării bicicletei în sistem

2. **Entitatea <bike_types>** - reprezintă tabelul pentru tipurile de biciclete/trotinete.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
id	int	obligatoriu	primary key, id-ul tipului
description	varchar	obligatoriu	descrierea tipului(bicicletă clasică, bicicletă electrică, trotinetă electrică etc)
price_per_minute	decimal	obligatoriu	prețul pe minut al tipului de bicicletă

3. **Entitatea <rentals>** – reprezintă tabelul pentru închirierile din sistem.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
id	int	obligatoriu	primary key, id-ul închirierii
bike_id	int	obligatoriu	foreign key către id-ul bicicletei din tabelul <**bikes**>
customer_id	int	obligatoriu	foreign key către id-ul clientului din tabelul <**customers**>
start_date_time	datetime	obligatoriu	data și timpul când bicicleta a fost închiriată
end_date_time	datetime	obligatoriu	data și timpul când bicicleta a fost returnată
invoice_id	int	opțional	foreign key către id-ul facturii din tabelul invoices; în cazul în care a fost închiriată o bicicletă, dar suma încă nu a fost plătită, coloana poate fi nulă.

4. **Entitatea <customers>** – reprezintă tabelul pentru clienții din sistem.

Atribut	**Tip**	**Validare**	**Descriere**
id	int	obligatoriu	primary key, id-ul clientului
name	varchar	obligatoriu	numele clientului
billing_address	varchar	obligatoriu	adresa de facturare

5. **Entitatea <invoices>** – reprezintă tabelul pentru facturile fiscale din sistem.

Atribut	**Tip**	**Validare**	**Descriere**
id	int	obligatoriu	primary key, id-ul închirierii
gross_amount	decimal	obligatoriu	prețul brut
VAT	decimal	obligatoriu	TVA-ul aplicabil ce va fi dedus din prețul brut
net_amount	decimal	obligatoriu	prețul net
paid	boolean	obligatoriu	true (dacă a fost plătită suma) sau false (în caz contrar)

5 Cerințe funcționale și tehnice

Proiectul curent presupune realizarea unei aplicații pentru:

- Aplicația trebuia să aibă două interfețe separate, una pentru utilizatori și una pentru administratori.

- Aplicația trebuia să aibă o bază de date, folosind un SGBD la alegere (MySQL, PostgreSQL, MS SQL Server etc.) sau simple fișiere txt, json, xml etc. În al doilea caz, integritatea datelor și a relațiilor trebuia asigurată în interiorul aplicației.

- Interfața pentru utilizatori trebuia să poată face posibilă închirierea bicicletelor de către clienți și să afișeze tipul bicicletei, prețul pe minut al acesteia, data de început a plimbării, data de încheiere a plimbării, timpul total de plimbare și prețul pe care trebuie să-l plătească. Opțional, se puteau adăuga funcționalități suplimentare precum: bateria rămasă, prețul acumulat până în momentul respectiv, închiriere prin cod QR, plată prin card online, închiriere pentru mai multe persoane etc. De asemenea, interfața pentru clienți trebuia să asigure completarea datelor clienților (nume, adresă de facturare).

- Interfața pentru administratori trebuia să conțină cât mai multe informații relevante pentru un angajat, să poată adăuga/modifica/șterge biciclete sau tipuri de biciclete (insert, update, delete pentru tabelele **bikes** și **bike_types**) și, opțional, să adauge funcționalități suplimentare, precum statistici, poziția în timp real a bicicletelor etc.

- Programul trebuia să creeze automat facturile pentru clienți la terminarea plimbării cu bicicletele. Datele facturilor trebuiau incluse în tabelul invoices. Factura trebuia afișată utilizatorilor, iar opțional, facturile puteau fi afișate clienților în interfață ca un fișier PDF (se putea utiliza platforma JasperReports pentru acest lucru).

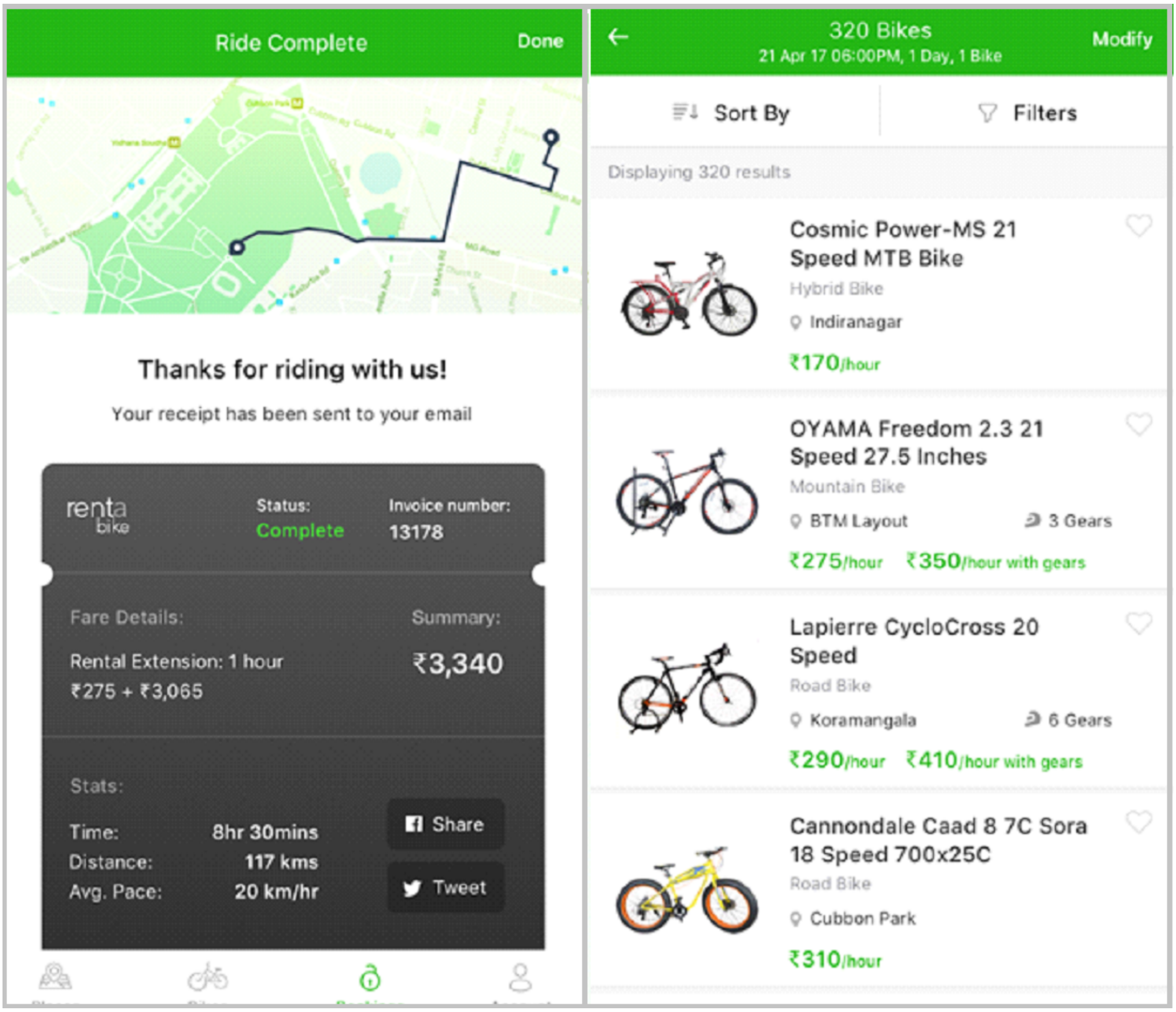
- Înregistrarea pentru o închiriere din tabelul **rental** trebuia creată la începutul călătoriei, urmând ca la finalul acesteia, să fie completată și coloana **invoice_id**.

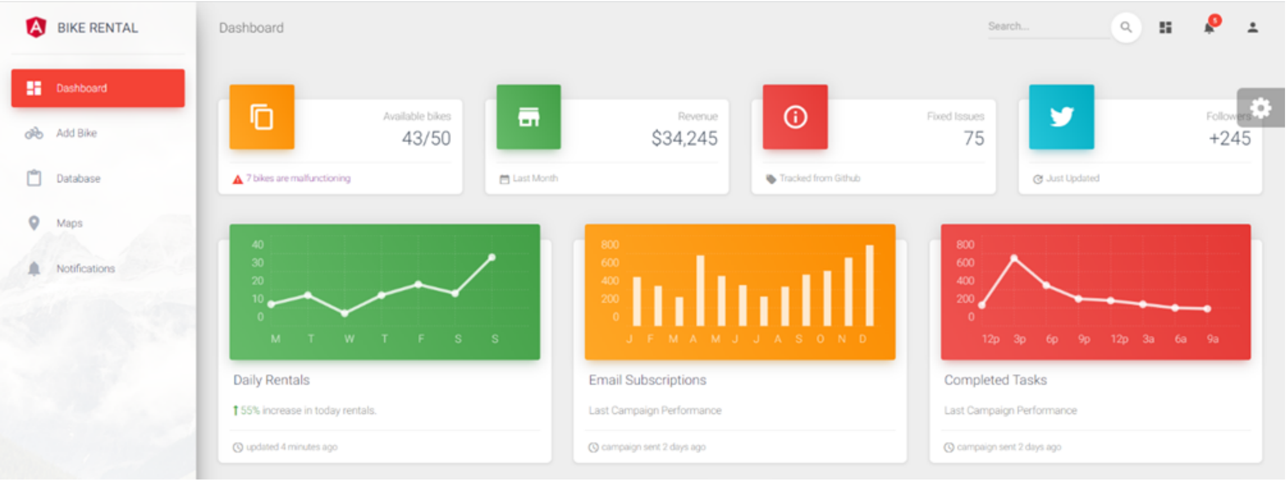
- Se putea folosi orice tehnologie dorită. Era indicată folosirea unei tehnologii compatibile cu cerințele actuale de pe piață.

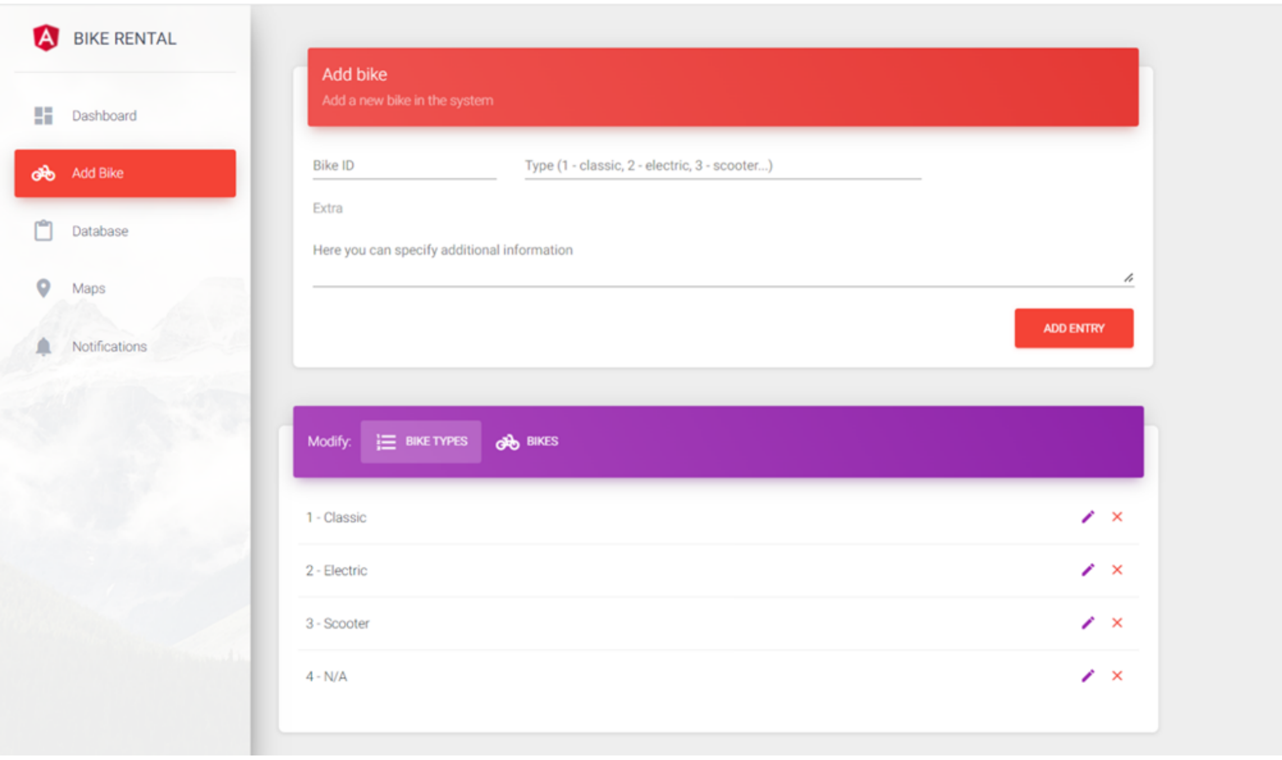
- În cazul în care se viza crearea unei singure aplicație, atât pentru utilizatori, cât și pentru administratori, trebuia să existe un mecanism prin care utilizatorii să nu poată accesa sau modifica informațiile administratorilor.

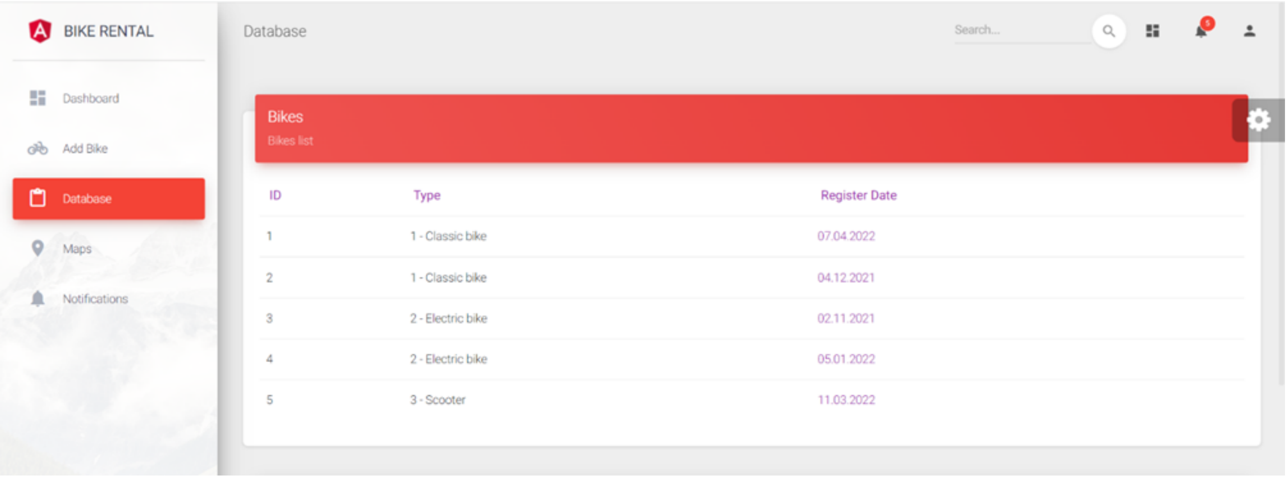
- Se puteau adăuga tabele sau coloane suplimentare față de modelul de bază de date oferit mai sus dacă cu ajutorul acestora se adaugau funcționalități suplimentare.

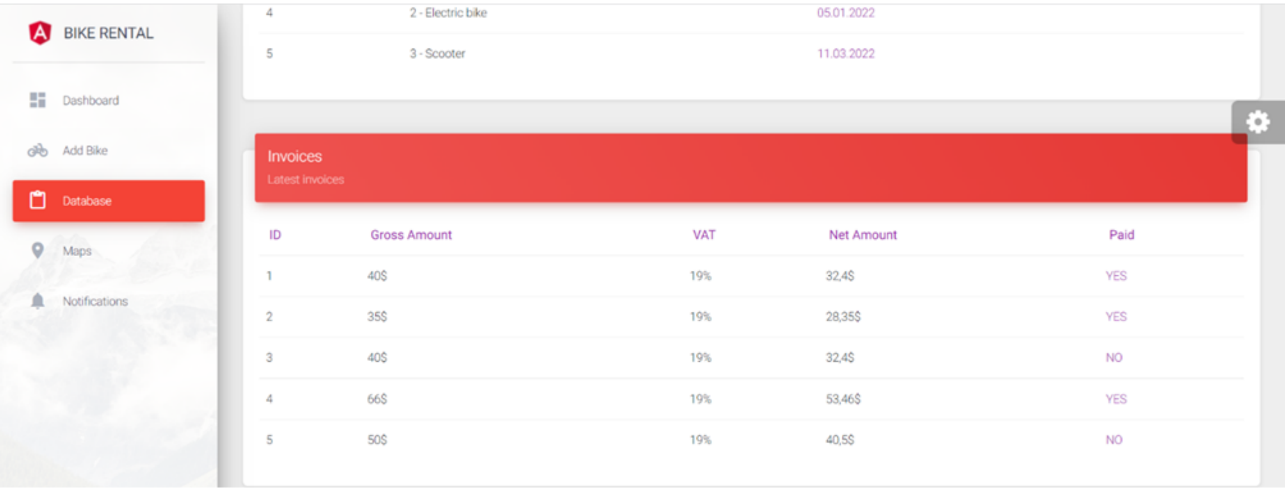
6 Exemple pentru interfața grafică




BIKE RENTAL
Dashboard
Add Bike
Database
Maps
Notifications
Dashboard
Search...
Available bikes
43/50
7 bikes are malfunctioning
Revenue
$34,245
Last Month
Fixed Issues
75
Tracked from Github
Followers
+245
Just Updated
Daily Rentals
55% increase in today rentals.
updated 4 minutes ago
Email Subscriptions
Last Campaign Performance
campaign sent 2 days ago
Completed Tasks
Last Campaign Performance
campaign sent 2 days ago


BIKE RENTAL
Dashboard
Add Bike
Database
Maps
Notifications
Add bike
Add a new bike in the system
Bike ID
Type (1 - classic, 2 - electric, 3 - scooter...)
Extra
Here you can specify additional information
ADD ENTRY
Modify:
BIKE TYPES
BIKES
1 - Classic
2 - Electric
3 - Scooter
4 - N/A


BIKE RENTAL
Database
Search...
Dashboard
Add Bike
Database
Maps
Notifications
Bikes
Bikes list
ID
Type
Register Date
1
1 - Classic bike
07.04.2022
2
1 - Classic bike
04.12.2021
3
2 - Electric bike
02.11.2021
4
2 - Electric bike
05.01.2022
5
3 - Scooter
11.03.2022


BIKE RENTAL
Dashboard
Add Bike
Database
Maps
Notifications
4
2 - Electric bike
05.01.2022
5
3 - Scooter
11.03.2022
Invoices
Latest invoices
ID
Gross Amount
VAT
Net Amount
Paid
1
40$
19%
32,4$
YES
2
35$
19%
28,35$
YES
3
40$
19%
32,4$
NO
4
66$
19%
53,46$
YES
5
50$
19%
40,5$
NO

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

Three beautiful-difficult inequality problems

Pham Huu Hoai [1]

In this paper we present three problems involving some inequalities in three non-negative real variables.

Problem 1. *Let a, b, c be three non-negative real numbers such that $ab + bc + ca > 0$. Prove that:*

$$\sqrt{\frac{8a}{b+c}+\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2}+\sqrt{\frac{8b}{c+a}+\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2}+\sqrt{\frac{8c}{a+b}+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\geq 6.$$

Solution. We first prove the following three inequalities.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2\sqrt{1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}. \tag{1}$$

Indeed, using *Minkowski's Inequality* and *Schur's Inequality* we have

$$LHS=\frac{\sum\sqrt{a^2(a+b+c)+abc}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq\frac{\sqrt{(a+b+c)^3+9abc}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}},\ \text{so}$$

$$\begin{aligned}LHS&\geq\sqrt{4+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{\sum a(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\&\geq\sqrt{4+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}=RHS.\end{aligned}$$

$$\left[\sqrt{\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\right]^2\geq 2\left[\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Indeed, let

$$x=\frac{b-c}{b+c},\ y=\frac{c-a}{c+a},\ z=\frac{a-b}{a+b},$$

so

$$x+y+z+xyz=0,\ -1\leq x,y,z\leq 1.$$

We need to prove

$$\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}+\sqrt{z^2}\right)^2\geq 2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ \text{i.e.}$$

[1] Teacher, VIET AU High School, District 12, Ho Chi Minh City, Vietnam, duyanh175@gmail.com

$$2\,|xy| + 2\,|yz| + 2\,|zx| \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

By $x + y + z + xyz = 0$, there exist $xy \geq 0$ and $z = -\dfrac{x+y}{1+xy}$.

We need to prove

$$\begin{aligned}
2|xy| + 2|yz| + 2|zx| &\geq x^2 + y^2 + z^2, \text{ i.e.} \\
2xy + \frac{2\,(x+y)^2}{1+xy} &\geq x^2 + y^2 + \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2, \text{ i.e.} \\
\frac{4xy}{(x+y)^2} + \frac{2}{1+xy} &\geq 1 + \frac{1}{(1+xy)^2}.
\end{aligned}$$

But $(1-x^2)(1-y^2) \geq 0$, then $(x+y)^2 \leq (1+xy)^2$, and hence

$$\frac{4xy}{(x+y)^2} + \frac{2}{1+xy} \geq \frac{4xy}{(1+xy)^2} + \frac{2}{1+xy} \geq 1 + \frac{1}{(1+xy)^2},$$

since $0 \leq xy \leq 4$.

$$\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2. \qquad (3)$$

This inequality follows immediately from the identity

$$\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 2 + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

We back to the given problem. Using *Minkowski's Inequality*, (1), (2) and (3), we have

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{8a}{b+c} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2} + \sqrt{\frac{8b}{c+a} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2} + \sqrt{\frac{8c}{a+b} + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2} \\
&\geq \sqrt{8\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2 + \left[\sqrt{\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}\right]^2} \\
&\geq \sqrt{8\left(4 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right) + 2\left[\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right]} \\
&= \sqrt{32 + 2\left[\left(\frac{b-c}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]} \geq 6.
\end{aligned}$$

$\square$

Problem 2. *Let a, b, c three non-negative real numbers such that $ab + bc + ca > 0$, and let $k \geq \dfrac{1}{4}$. Prove that:*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{k^2a}{b+c} + \frac{bc}{(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{k^2b}{c+a} + \frac{ca}{(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{k^2c}{a+b} + \frac{ab}{(a+b)^2}} \\
&\qquad \geq \sqrt{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4\,(k-2)^2\,abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.
\end{aligned}$$

Solution. Let

$$p = a + b + c,\ x = a^2 + b^2 + c^2,\ y = ab + bc + ca,$$
$$t = \frac{x}{y},\ r = abc,\ M = (a + b)(b + c)(c + a).$$

By *Schur's Inequality* we have

$$\sum \frac{a}{b + c} + \frac{4abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} - 2 = \frac{\sum a(a - b)(a - c)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 0, \text{ so}$$

$$\frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 4 - \sum \frac{2a}{b + c}. \tag{4}$$

Also,

$$\sum \frac{a}{b + c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 3\right) \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} = t + (t + 3)\frac{r}{M}. \tag{5}$$

Let

$$u = \frac{2a}{b + c} + \frac{2b}{c + a} + \frac{2c}{a + b},\ v = \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

By (4) we have $v \geq \max\{0, 4 - u\}$.

By (5) we have $t = \dfrac{4u - 3v}{8 + v}$.

Let

$$LHS = \frac{1}{\sqrt{ab + bc + ca}} \sum \sqrt{\left(ka + \frac{bc}{b + c}\right)^2 + \frac{(k - 1)^2 abc}{b + c}}$$

and

$$RHS = \sqrt{\left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(k - 2)^2 v}{2}}.$$

By *Minkowski's Inequality* we have

$$LHS \geq$$
$$\frac{1}{\sqrt{ab + bc + ca}} \sqrt{\left[k(a + b + c) + \sum \frac{bc}{b + c}\right]^2 + \frac{(k - 1)^2 abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \left[\sum \sqrt{(a + b)(a + c)}\right]^2}.$$

But

$$\begin{aligned}
\sum \frac{bc}{b + c} &= \sum \left(a + \frac{bc}{b + c}\right) - (a + b + c) \\
&= \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \sum \frac{a + b + c}{b + c} - (a + b + c) \\
&= \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}\left(3 + \sum \frac{a}{b + c}\right) - (a + b + c) \\
&= \frac{y}{p}\left(3 + \sum \frac{a}{b + c}\right) - p,
\end{aligned}$$

and, by *Minkowski's Inequality*,

$$\left(\sum \sqrt{(a+b)(a+c)}\right)^2 = \left(\sum \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{ab+bc+ca}\right)^2}\right)^2$$
$$\geq (a+b+c)^2 + 9(ab+bc+ca) = x + 11y,$$

and hence we have

$$LHS \geq \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{\left[kp + \frac{y}{p}\left(3 + \sum \frac{a}{b+c}\right) - p\right]^2 + \frac{(k-1)^2 r (x+11y)}{M}},$$
$$LHS^2 \geq \left[\frac{(k-1)p}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{p}\left(3 + \sum \frac{a}{b+c}\right)\right]^2 + (k-1)^2 \left[\frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y} + 3\right)\frac{r}{M} + \frac{8r}{M}\right],$$
$$LHS^2 \geq \left[(k-1)\sqrt{t+2} + \left(3 + \sum \frac{a}{b+c}\right)\frac{1}{\sqrt{t+2}}\right]^2 + (k-1)^2 \left(\sum \frac{a}{b+c} + \frac{8r}{M}\right),$$
$$LHS^2 \geq (k-1)^2 \left[t + (t+3)\frac{r}{M}\right] + \frac{1}{t+2}\left(3 + \sum \frac{a}{b+c}\right)^2 + (k-1)\sum \frac{2a}{b+c} +$$
$$+2(k-1)^2 + \frac{(k-1)^2 8r}{M},$$
$$LHS^2 \geq \left[(k-1)^2 + 2(k-1)\right]\sum \frac{a}{b+c} + \frac{1}{t+2}\left(3 + \sum \frac{a}{b+c}\right)^2 +$$
$$+2(k-1)^2 + \frac{(k-1)^2 8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$
$$LHS^2 \geq \frac{(k^2-1)u}{2} + \frac{v+8}{4u-v+16}\left(3 + \frac{u}{2}\right)^2 + 2(k-1)^2 + (k-1)^2 v.$$

We need to prove that

$$\frac{(k^2-1)u}{2} + \frac{v+8}{4u-v+16}\left(3 + \frac{u}{2}\right)^2 + 2(k-1)^2 + (k-1)^2 v \geq \left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{(k-2)^2 v}{2}, \text{ i.e.}$$
$$\frac{(k^2-1)u}{2} + \frac{v+8}{4u-v+16}\left(3 + \frac{u}{2}\right)^2 + 2(k-1)^2 + (k-1)^2 v - \left(2k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(k-2)^2 v}{2} \geq 0,$$
$$\text{i.e. } f(v) = \frac{(v+8)(u+6)^2}{4u-v+16} + 2\left(k^2-1\right)u + 2\left(k^2-2\right)v - 8k^2 - 17 \geq 0.$$

We have $f'(v) = \dfrac{4(u+6)^3}{(4u-v+16)^2} + 2(k^2-2)$.

Case A. $u > 4$, so

$$f'(v) \geq f'(0) = \frac{4(u+6)^3}{(4u+16)^2} + 2\left(k^2-2\right) \geq \frac{4(4+6)^3}{(4\times 4+16)^2} + 2\left(\frac{1}{16} - 2\right) = \frac{1}{32} > 0,$$

and hence

$$f(v) \geq f(0) = \frac{8(u+6)^2}{4u+16} + 2\left(k^2-1\right)u - 8k^2 - 17$$
$$= (u-4)\left[2\left(k^2 - \frac{1}{16}\right) + \frac{u-4}{8(u+4)}\right] \geq 0.$$

Case B. $3 \le u \le 4$, so

$$f'(v) \ge f'(4-u) = \frac{4(u+6)^3}{(5u+12)^2} + 2\left(k^2-2\right) \ge \frac{4(4+6)^3}{(5\times 4+12)^2} + 2\left(\frac{1}{16}-2\right) = \frac{1}{32} > 0,$$

and hence

$$\begin{aligned} f(v) \ge f(4-u) &= \frac{(12-u)(u+6)^2}{5u+12} + 2\left(k^2-1\right)u + 2\left(k^2-2\right)(4-u) - 8k^2 - 17 \\ &= \frac{5(4-u)(u-3)^2}{5u+12} \ge 0. \end{aligned}$$

The proof is complete. □

Remark 1. The above result can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a}{b+c} + \frac{k^2bc}{(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b}{c+a} + \frac{k^2ca}{(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c}{a+b} + \frac{k^2ab}{(a+b)^2}} \\ &\ge \sqrt{\left(\frac{k}{2}+2\right)^2 + \frac{4(2k-1)^2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}, \end{aligned}$$

where $0 \le k \le 4$.

Problem 3. *Let a, b, c three non-negative real numbers such that $abc = 1$, and let $k \ge -2$. Prove that:*

$$a^2+b^2+c^2+\left(k^3+3k^2-2\right)(ab+bc+ca) \ge \left(3k^2+3k\right)(a+b+c) + 3k^3 - 9k - 3.$$

Solution. We first prove the following inequality

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+\left(k^3+3k^2-2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) - \left(3k^2+3k\right)(a+b) \\ &\ge 2ab + \left(k^3+3k^2-2\right)\frac{2}{\sqrt{ab}}. - \left(3k^2+3k\right)\left(2\sqrt{ab}\right), \qquad (6) \\ \text{i.e. } &(a-b)^2 + \left(k^3+3k^2-2\right)\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{ab} - \left(3k^2+3k\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0, \\ \text{i.e. } &\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 + \frac{k^3+3k^2-2}{ab} - \left(3k^2+3k\right)\right] \ge 0. \end{aligned}$$

Indeed, we have

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 + \frac{k^3+3k^2-2}{ab} \ge 4\sqrt{ab} + \frac{k^3+3k^2-2}{ab} = \left(k^3+3k^2-2\right)c + \frac{4}{\sqrt{c}},$$

and hence we need to prove that

$$\left(k^3+3k^2-2\right)c + \frac{4}{\sqrt{c}} - \left(3k^2+3k\right) \ge 0, \text{ i.e.}$$

$$3\left(\sqrt{c}-1\right)(k-1)(k+2) + (k+2)(k-1)^2\sqrt{c} + \frac{2\left(\sqrt{c}+2\right)\left(\sqrt{c}-1\right)^2}{\sqrt{c}} \ge 0.$$

Case A. $-2 \leq k \leq 1$. We assume that $c = \min\{a, b, c\}$, so $c \in (0; 1]$, and hence $(\sqrt{c} - 1)(k - 1) \geq 0$.

Case B. $k \geq 1$. We assume that $c = \max\{a, b, c\}$, so $c \geq 1$, and hence $(\sqrt{c} - 1)(k - 1) \geq 0$.

Through the above two cases, we see that (6) is true.

We back to the given problem. Using (6) we have

$$LHS - RHS \geq \frac{2}{c} + c^2 + \left(k^3 + 3k^2 - 2\right)\left(\frac{1}{c} + 2\sqrt{c}\right) - \left(3k^2 + 3k\right)\left(\frac{2}{\sqrt{c}} + c\right) - 3k^3 + 9k + 3,$$

and hence

$$LHS - RHS \geq \frac{(1 - \sqrt{c})^2 (k - \sqrt{c})^2 \left[c + 2(k+1)\sqrt{c} + k + 3\right]}{c} \geq 0,$$

since $c > 0$ and $k \geq -2$. $\square$

A generalization of Mollweide's formula, rather Newton's

Emmanuel Antonio José García [1]

Mollweide's formula, sometimes also referred to as *Mollweide's equation*, is a set of two relationships between sides and angles in a triangle. This equation is particularly useful in checking one's result after solving an oblique triangle since all six components of the triangle are involved.

Let $a = |BC|$, $b = |AC|$, and $c = |AB|$ be the lengths of the three sides of a triangle. Let α, β, and γ be the measures of the angles opposite those three sides respectively. Mollweide's formula states that

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma} \tag{1}$$

and

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}. \tag{2}$$

The equations adopt their name from a German mathematician and astronomer Karl Brandan Mollweide. Nonetheless, this pair of equations was discovered earlier by Isaac Newton. In fact, formula (1) is also known as Newton's formula. An excellent overview of the history of Mollweide's formula is given by Wu [5]. For proofs of the Mollweide's formula we invite the readers to see Karjanto's article on the subject [4].

The following theorem generalizes formula (1). We recall that a cyclic quadrilateral is a quadrilateral whose vertices all lie on a single circle.

Theorem 1. *Let $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$ and $d = |AD|$ be the sides of a cyclic convex quadrilateral. Let $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$ and $\angle CDA = \delta$. If AC and BD intersect at E, denote $\angle CED = \theta$. Then the following identity holds*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)} = \frac{a+c}{b+d}\cot\frac{1}{2}\theta. \tag{3}$$

See Figure 1 for an example of the situation described in Theorem 1.

Proof. We take advantage of the cyclic nature of the half-angle formulas [2, p. 186] in combination with the formulas of compound angles.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta + \sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta}.$$

Substituting from the half-angle formulas

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)} = \frac{\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}} + \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}}{\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}} + \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}}},$$

[1] Professor, CIDIC-Universidad UTE, Santo Domingo, Dominican Republic, emmanuelgeogarcia@gmail.com

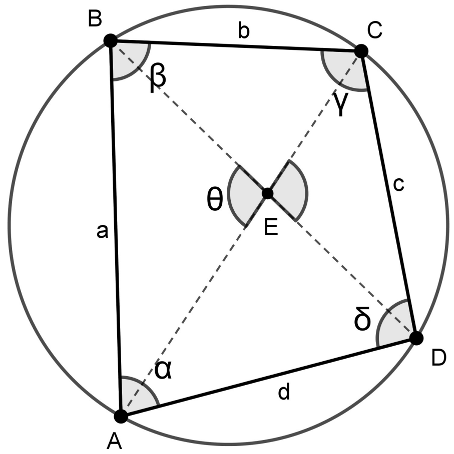


Figure 1: A cyclic convex quadrilateral with diagonals AC and BD.

where s is semiperimeter. Simplifying and factorizing

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{(s-b)(s-d)}} \cdot \frac{(s-d)+(s-b)}{(s-a)+(s-c)}.$$

It is well-known that $\tan\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{(s-b)(s-d)}{(s-a)(s-c)}}$ (see [3, p. 26]), thus the formula reduces to

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma-\delta)} = \frac{a+c}{b+d}\cot\frac{1}{2}\theta.$$

□

Note that in contrast to Mollweide's formulas, this version for a cyclic quadrilateral not only relates the four sides to the four angles, but also includes the angle between the diagonals. We have to admit we were skeptical as to whether it was really a generalization of Mollweide's formula. Blue has shown that indeed the formula (3) generalizes Mollweide's formula, more specifically, it generalizes Newton's version [1]. The following is Blue's contribution.

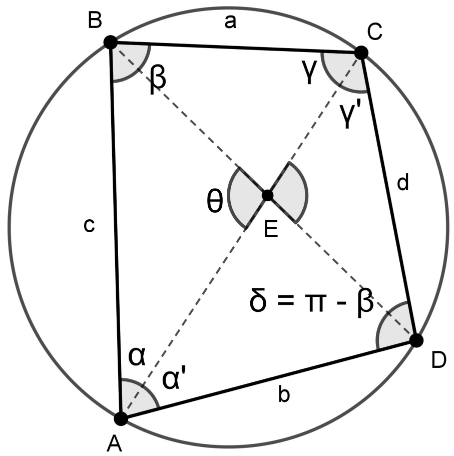


Figure 2: Angles α and γ have been sub-divided into $\alpha + \alpha'$ and $\gamma + \gamma'$.

Anticipating reducing the formula (3) to (1), rename elements of the figure as in Figure 2:

That is, angles α and γ have been sub-divided into $\alpha+\alpha'$ and $\gamma+\gamma'$, and the segment labels have been scrambled: $a=|BC|$, $b=|AD|$, $c=|AB|$, $d=|CD|$. Note that $\delta=\pi-\beta$ (as β and δ are inscribed angles subtending opposing arcs). With these changes, the formula in question becomes

$$\frac{c+d}{a+b}\cot\frac{1}{2}\theta=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma+\gamma'-(\pi-\beta))}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\alpha'+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\gamma'+\beta)}. \tag{4}$$

If we slide vertex D along the circle to coincide with C (so that E does as well), we find that α' and d shrink to nothing; γ' and θ adjust to match β and γ, respectively; and β and δ don't change at all (see Figure 3).

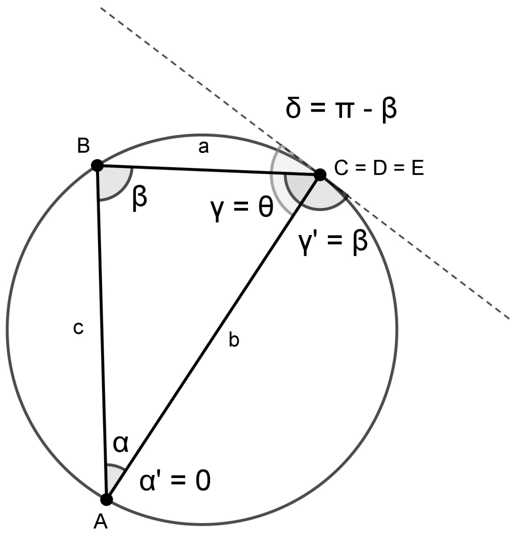


Figure 3: If $C=D=E$, then $\alpha'=0$, $\gamma=\theta$ and $\gamma'=\beta$.

So, (4) becomes

$$\frac{c+0}{a+b}\cot\frac{1}{2}\gamma=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+0+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta+\beta)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma+2\beta)}. \tag{5}$$

Since $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, we have

$$\alpha+\beta=\pi-\gamma, \qquad \gamma+2\beta=\pi-(\alpha-\beta)$$

whence (5) becomes

$$\frac{c}{a+b}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)}=\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

and we can write

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

which is Newton's formula.

References

[1] Blue (https://math.stackexchange.com/users/409/blue), An analog of Mollweide's Formula for a cyclic quadrilateral, URL (version: 2022-01-14): https://math.stackexchange.com/q/4357017

[2] J. A. Casey, Treatise On Plane Trigonometry, Hodges, Figgis, Dublin, 1888.

[3] C. V. Durell; A. Robson, Advanced Trigonometry, G. Bell and Sons, 1930.

[4] N. Karjanto, Mollweide's formula in teaching trigonometry, *Teaching Mathematics and Its Applications* **30** (2011) 70–74.

[5] R. H. Wu, The story of Mollweide and some trigonometric identities, 2007. Available online at: https://www.geocities.ws/galois_e/pdf/mollweide%20article.pdf

New inequalities in triangle

Mihály Bencze [1]

In this paper we present some new inequalities in triangle.

Theorem 1. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

$$\max\left\{\frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}, \frac{\sin B}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}, \frac{\sin C}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}\right\}$$
$$\leq \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Proof. We have the identity $\sum \cos^2 A = 1 - \dfrac{s^2-(2R+r)^2}{2R^2}$.

By Gerretsen's inequality $s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2$ we derive that

$$\sum \cos^2 A \geq 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

It follows that

$$\sin^2 A + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{R^2-r^2}{R^2} + \sin^2 A, \text{ so}$$
$$1+\cos^2 B+\cos^2 C \geq \frac{R^2-r^2}{R^2} + \sin^2 A \geq \frac{2\sqrt{R^2-r^2}}{R}\cdot \sin A, \text{ and hence}$$
$$\frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leq \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

where the last inequality holds from Euler's $R \geq 2r$ inequality. □

Corollary 1. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \dfrac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leq \dfrac{3R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \leq \sqrt{3}$
(a refinement of the inequality from problem O.600 from Mathematical Reflections);

2) $\sum \dfrac{\sin^2 A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leq \dfrac{s}{2\sqrt{R^2-r^2}};$

3) $\sum \dfrac{\sin A \sin^2 \frac{A}{2}}{1+\cos^2 A+\cos^2 C} \leq \dfrac{2R-r}{4\sqrt{R^2-r^2}};$

4) $\sum \dfrac{\sin A \cos^2 \frac{A}{2}}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \leq \dfrac{4R+r}{4\sqrt{R^2-r^2}}.$

[1] Profesor dr., Brașov, benczemihaly@gmail.com

Proof. 1) $\sum \frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \sum \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{3R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \le \sqrt{3}$.

2) $\sum \frac{\sin^2 A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \sum \sin A = \frac{s}{2\sqrt{R^2-r^2}}$.

3) $\sum \frac{\sin A \sin^2 \frac{A}{2}}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \sum \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2R-r}{4\sqrt{R^2-r^2}}$.

4) $\sum \frac{\sin A \cos^2 \frac{A}{2}}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{R}{2\sqrt{R^2-r^2}} \sum \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{4R+r}{4\sqrt{R^2-r^2}}$. □

All the next corollaries can be proved in a similar manner as Corollary 1.

Corollary 2. *In any acute triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \frac{\sin 2A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \sqrt{\frac{R+r}{R-r}}$;

2) $\sum \frac{\operatorname{tg} A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{R\left(s^2+r^2-4R^2\right)}{2\sqrt{R^2-r^2}\left[s^2-(2R+r)^2\right]}$.

Corollary 3. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \frac{r_b r_c \sin A}{1+\cos B+\cos^3 C} \le \frac{s^2 R}{2\sqrt{R^2-r^2}}$;

2) $\sum \frac{h_b h_c \sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{s^2 r}{\sqrt{R^2-r^2}}$.

Corollary 4. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \frac{a^2 r_a}{1+\cos^2 B+\cos^2 C} \le \frac{2sR^2(2R-r)}{\sqrt{R^2-r^2}}$;

2) $\sum \frac{a^2}{(1+\cos^2 B+\cos^2 C)r_a} \le \frac{2R^2(4R+r)}{s\sqrt{R^2-r^2}}$.

Theorem 2. *In any non-obtuse triangle ABC hold the following inequalities*

$$\cos^2 A+\cos^2 B \ge \frac{\sin^2 C}{1+\cos C} \ge 2\cos A\cos B$$

(and their permutations). The second inequality is valid in any triangle.

Proof. We have

$$1-2\cos A\cos B\cos C = \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \ge 2\cos A\cos B+\cos^2 C, \text{ so}$$
$$\sin^2 C \ge 2\cos A\cos B(1+\cos C), \text{ and hence}$$
$$\frac{\sin^2 C}{1+\cos C} \ge 2\cos A\cos B.$$

In another way

$$1 = \sum \cos^2 A + 2\cos A\cos B\cos C \le \sum \cos^2 A + \cos C\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right), \text{ so}$$

$$1-\cos^2 C \leq (1+\cos C)\left(\cos^2 A+\cos^2 B\right), \text{ and hence}$$
$$\frac{\sin^2 C}{1+\cos C} \leq \cos^2 A+\cos^2 B.$$

□

Corollary 5. *In any non-obtuse triangle ABC hold the following inequalities:*

$$\frac{s^2+r^2-4R^2}{2R^2} \leq \sum \frac{\sin^2 A}{1+\cos A} \leq \frac{2R^2-s^2+(2R+r)^2}{R^2}$$

(a refinement of the inequality $3s^2 \leq 16R^2+8Rr+r^2$). The first inequality is valid in any triangle.

Theorem 3. *In any acute triangle ABC hold the following inequalities:*

$$\frac{\sin^2 A}{\cos^2 B+\cos^2 C} \leq 1+\cos A \leq \frac{\sin^2 A}{2\cos B\cos C}.$$

Proof. The inequalities follow from Theorem 2. □

Corollary 6. *In any acute triangle ABC hold the following inequalities:*

$$\sum \frac{\sin^2 A}{\cos^2 B+\cos^2 C} \leq 4+\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}\sum \frac{\sin^2 A}{\cos B\cos C}.$$

Theorem 4. *In any acute triangle ABC holds the following inequality:*

$$\max\left(\frac{\cos A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C}, \frac{\cos B}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}, \frac{\cos C}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}\right) \leq \frac{R}{2\sqrt{3r(2R-r)}}.$$

Proof. We have the identity $\sum \sin^2 A = \dfrac{s^2-r(4R+r)}{2R^2}$.

By Gerretsen's inequality $s^2 \geq 16Rr-5r^2$ we derive that

$$\sum \sin^2 A \geq \frac{3r(2R-r)}{R^2}.$$

It follows that

$$\cos^2 A+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \geq \frac{3r(2R-r)}{R^2}+\cos^2 A, \text{ so}$$
$$1+\sin^2 B+\sin^2 C \geq \frac{3r(2R-r)}{R^2}+\cos^2 A \geq \frac{2}{R}\sqrt{3r(2R-r)}\cdot\cos A, \text{ and hence}$$
$$\frac{\cos A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \leq \frac{R}{2\sqrt{3r(2R-r)}}.$$

□

Corollary 7. *In any acute triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\displaystyle\sum \frac{1}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \leq \frac{R\left(s^2+v^2-4R^2\right)}{2\sqrt{3r(2R-r)}\left[s^2-(2R+r)^2\right]}$;

2) $\displaystyle\sum \frac{\cos A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \leq \frac{3R}{2\sqrt{3r(2R-r)}}$;

3) $\displaystyle\sum \frac{\cos^2 A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \leq \frac{R+r}{2\sqrt{3r(2R-r)}}$.

Corollary 8. *In any acute triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \dfrac{\sin 2A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \le \dfrac{s}{\sqrt{3r(2R-r)}}$;

2) $\sum \dfrac{\cos A \sin^2 \frac{A}{2}}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \le \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2R-r}{3r}}$;

3) $\sum \dfrac{\cos A \cos^2 \frac{A}{2}}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \le \dfrac{4R+r}{4\sqrt{3r(2R-r)}}$;

4) $\sum \dfrac{r_b r_c \cos A}{1+\sin^2 B+\sin^2 C} \le \dfrac{s^2 R}{2\sqrt{3r(2R-r)}}$.

Theorem 5. *In any triangle ABC holds the following inequality:*

$$\max\left\{\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}}, \frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}, \frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}\right\} \le \frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R-r}}.$$

Proof. We have $\sum \sin^2\frac{A}{2} = \frac{2R-r}{2R}$. It follows that

$$\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} = \frac{2R-r}{2R}+\cos^2\frac{A}{2}, \text{ so}$$

$$1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} = \frac{2R-r}{2R}+\cos^2\frac{A}{2} \ge 2\sqrt{\frac{2R-r}{2R}}\cdot\cos\frac{A}{2}, \text{ and hence}$$

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \le \frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R-r}}.$$

□

Corollary 9. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \le \dfrac{3\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R-r}}$;

2) $\sum \dfrac{\cos^3\frac{A}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \le \dfrac{4R+r}{2\sqrt{2R(2R-r)}}$;

3) $\sum \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}} \le \dfrac{(4R+r)\sqrt{2R}}{2s\sqrt{2R-r}}$;

4) $\sum \dfrac{\cos^2\frac{A}{2}}{\left(1+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}} \le \dfrac{s\sqrt{2R}}{2r\sqrt{2R-r}}$.

Theorem 6. *In any triangle ABC holds the following inequality:*

$$\max\left\{\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}},\frac{\sin\dfrac{B}{2}}{1+\cos^2\dfrac{C}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}},\frac{\sin\dfrac{C}{2}}{1+\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}}\right\}\le\frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{4R+r}}.$$

Proof. We have $\sum\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{4R+r}{2R}$. It follows that

$$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{2R}+\sin^2\frac{A}{2},\ \text{so}$$

$$1+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{2R}+\sin^2\frac{A}{2}\ge2\sqrt{\frac{4R+r}{2R}}\cdot\sin\frac{A}{2},\ \text{and hence}$$

$$\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}}\le\frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{4R+r}}.$$

□

Corollary 10. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\displaystyle\sum\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}}\le\frac{3\sqrt{2R}}{2\sqrt{4R+r}};$

2) $\displaystyle\sum\frac{\sin^3\dfrac{A}{2}}{1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}}\le\frac{2R-r}{2\sqrt{2R(4R+r)}};$

3) $\displaystyle\sum\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}}\le\frac{s\sqrt{2R}}{2r\sqrt{4R+r}};$

4) $\displaystyle\sum\frac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{\left(1+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}\right)\cos\dfrac{A}{2}}\le\frac{\sqrt{2R(4R+r)}}{2s}.$

Theorem 7. *In any triangle ABC holds the following inequality:*

$$\max\left\{\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}},\frac{\sin\dfrac{B}{2}}{\cos^2\dfrac{C}{2}+\cos^2\dfrac{A}{2}},\frac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}}\right\}\le\frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R+r}}.$$

Proof. We have

$$\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+\frac{r}{2R}-\cos^2\frac{A}{2}=1+\frac{r}{2R}+\sin^2\frac{A}{2}\ge2\sqrt{\frac{2R+r}{2R}}\cdot\sin\frac{A}{2},$$

and hence $\displaystyle\frac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}}\le\frac{\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R+r}}.$ □

Corollary 11. *In any triangle ABC hold the following inequalities:*

1) $\sum \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}} \leq \frac{3\sqrt{2R}}{2\sqrt{2R+r}}$;

2) $\sum \frac{\sin^3 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}} \leq \frac{2R-r}{2\sqrt{2R(2R+r)}}$;

3) $\sum \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}} \leq \frac{s\sqrt{2R}}{2r\sqrt{2R+r}}$;

4) $\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\left(\cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A}{2}} \leq \frac{(4R+r)\sqrt{2R}}{2s\sqrt{2R+r}}$.

References

[1] Octogon Mathematical Magazine (1993-2021).

O generalizare a Problemei 4609 din Crux Mathematicorum

Marin Chirciu [1]

Articolul pornește de la Problema 4609 din Crux Mathematicorum, Vol. 47 (2021), No. 1, propusă de George Apostolopoulos:

Dacă AD, BE și CF sunt bisectoarele triunghiului ABC ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$), atunci

$$\frac{AB^4 + BC^4 + CA^4}{DE^4 + EF^4 + FD^4} \geq 16.$$

Vom enunța și demonstra o generalizare a acestei probleme.

Vom utiliza următorul rezultat.

Lemma 1. *Dacă BE și CF sunt bisectoare în triunghiului ABC, cu $E \in (AC)$ și $F \in (AB)$, atunci*

$$EF^2 \leq \frac{a\sqrt{bc}}{4}.$$

Demonstrație. Folosind *Teorema bisectoarei* în ΔABC obținem

$$AF = \frac{bc}{a+b} \text{ și } AE = \frac{bc}{a+c}.$$

Cu *Teorema cosinusului* în ΔAEF obținem

$$\begin{aligned}
EF^2 &= AF^2 + AE^2 - 2AE \cdot AF \cdot \cos A \\
&= \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - 2 \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+c} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= \frac{b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \cdot \frac{a^2(a+b)(a+c) - a(a+b+c)(b-c)^2}{bc} \\
&\leq \frac{b^2c^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \cdot \frac{a^2(a+b)(a+c)}{bc} = \frac{a^2bc}{(a+b)(a+c)} \\
&\leq \frac{a^2bc}{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ac}} = \frac{a\sqrt{bc}}{4},
\end{aligned}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$. □

Urmează generalizarea problemei de mai sus.

[1] Profesor, Colegiul Național ,,Zinca Golescu", Pitești, marin.chirciu@yahoo.com

Propoziția 1. *Dacă AD, BE și CF sunt bisectoarele triunghiului ABC ($D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$), atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem*

$$\frac{AB^{2n} + BC^{2n} + CA^{2n}}{DE^{2n} + EF^{2n} + FD^{2n}} \geq 4^n.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Demonstrație. Folosind lema anterioară și inegalitățile binecunoscute

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R},$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z$, obținem

$$\begin{aligned}\frac{AB^{2n} + BC^{2n} + CA^{2n}}{DE^{2n} + EF^{2n} + FD^{2n}} &\geq \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{\left(\frac{a\sqrt{bc}}{4}\right)^n + \left(\frac{b\sqrt{ca}}{4}\right)^n + \left(\frac{c\sqrt{ab}}{4}\right)^n} \\ &= 4^n \cdot \frac{a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{a^n\sqrt{b^nc^n} + b^n\sqrt{c^na^n} + c^n\sqrt{a^nb^n}} \\ &\geq 4^n,\end{aligned}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$. $\square$

Observația 1. Pentru $n = 2$ se obține Problema 4609 din Crux Mathematicorum.

Bibliografie

[1] G. Apostolopoulos, *Problem 4609*, Crux Mathematicorum, Vol. 47 (2021), No. 1.

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Caracterizări pentru secvențe grafice

Costel Bălcău [1]

Grafurile sunt modele matematice cu o gamă largă de aplicații. Această aplicabilitate a condus la dezvoltarea accelerată a teoriei grafurilor, atât din punct de vedere al rezultatelor teoretice cât și al algoritmicii, grafurile impunându-se drept modele fundamentale în informatică.

În acest articol vom prezenta condiții necesare și suficiente ca o secvență de numere naturale să fie șirul gradelor unui graf neorientat.

Introducere

Într-un graf neorientat $G = (V, E)$, *gradul unui nod* x, notat cu $d(x) = d_G(x)$, reprezintă numărul de muchii incidente cu acel nod.

Menționăm că terminologia specifică teoriei grafurilor nu este unificată și astfel recomandăm ca la parcurgerea unui material despre grafuri să fim atenți la definirea conceptelor utilizate.

În articolul de față, într-un graf (numit și *graf simplu*) neorientat $G = (V, E)$ muchiile sunt perechi neorientate $[x, y]$ de noduri distincte și orice două muchii sunt diferite.

Pe de o parte, dacă permitem existența de muchii de forma $[x, x]$, numite *bucle*, spunem că avem de-a face cu un *pseudograf*. În acest caz, orice buclă $[x, x]$ se numără de două ori la calculul gradului nodului x. Pe de altă parte, dacă permitem existența de *muchii multiple* (adică muchii care au aceleași extremități și astfel două noduri pot fi conectate prin mai multe muchii), dar doar între noduri distincte, spunem că avem de-a face cu un *multigraf*. Mai general, dacă permitem existența de orice muchii multiple, inclusiv bucle multiple, spunem că avem de-a face cu un *graf general*.

Caracterizarea gradelor unui graf general

Propoziția 1 (Euler). *Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat general având m muchii. Atunci* $\sum\limits_{x \in V} d(x) = 2m$.

Demonstrație. Fiecare muchie $e = [v_i, v_j] \in E$ (din cele m muchii) contribuie cu 1 la $d(v_i)$ și cu 1 la $d(v_j)$ (cu 2 la $d(v_i)$ dacă $v_i = v_j$, adică $e =$ buclă), deci cu 2 la suma $\sum\limits_{x \in V} d(x)$. Rezultă că această sumă este egală cu $2m$. □

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

Propoziția 2. *Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci numerele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt gradele nodurilor unui graf neorientat general cu n noduri dacă și numai dacă suma $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ este un număr par.*

Demonstrație. "$\Rightarrow$" Conform Propoziției 1 avem $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$, unde m este numărul de muchii ale grafului general având gradele nodurilor $d_1, d_2, \ldots, d_n$, deci suma considerată este un număr par.

"$\Leftarrow$" Demonstrăm că dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$ cu $m \in \mathbb{N}$, atunci există un graf neorientat general $G = (V, E)$ cu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ astfel încât $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, prin inducție după m.

Pentru $m = 0$ rezultă că $d_i = 0$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, deci luând $E = \emptyset$ avem $d_G(v_i) = 0 = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $m - 1$ și o demonstrăm pentru m, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Fie $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$. Avem două cazuri.

Cazul 1) Există $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$, astfel încât $d_j \geq 1$ și $d_k \geq 1$. Fie

$$d'_i = \begin{cases} d_i - 1, & \text{dacă } i \in \{j, k\}, \\ d_i, & \text{dacă } i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, k\}. \end{cases}$$

Atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i - 2 = 2(m - 1)$, deci, conform ipotezei de inducție, există un graf general neorientat $G' = (V, E')$ cu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ astfel încât $d_{G'}(v_i) = d'_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Fie graful general $G = (V, E' \cup \{e\})$, unde $e = [v_j, v_k]$, $e \notin E'$. Evident, avem $d_G(v_j) = d_{G'}(v_j) + 1 = d'_j + 1 = d_j$, $d_G(v_k) = d_{G'}(v_k) + 1 = d'_k + 1 = d_k$ și $d_G(v_i) = d_{G'}(v_i) = d'_i = d_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j, k\}$. Astfel $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Cazul 2) Există $j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $d_i = 0$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Atunci $d_j = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$. Fie graful general $G = (V, E)$, cu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ și $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, unde $e_k = [v_j, v_j]$, $\forall\, k \in \{1, \ldots, m\}$, iar buclele $e_1, \ldots, e_m$ sunt distincte două câte două. Evident, avem $d_G(v_j) = 2m = d_j$ și $d_G(v_i) = 0 = d_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Astfel, din nou, $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. □

Observația 1. Demonstrația propoziției anterioare este constructivă, ea indicând un algoritm de generare a unui graf neorientat general cu gradele nodurilor date.

Exemplul 1. Numerele $1, 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5$ nu pot fi gradele nodurilor unui graf neorientat general, deoarece suma $\sum\limits_{i=1}^{8} d_i = 23$ este un număr impar.

Exemplul 2. Numerele $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 13$ pot fi gradele nodurilor unui graf neorientat general, deoarece suma $\sum\limits_{i=1}^{8} d_i = 24$ este un număr par. Mai mult, conform demonstrației propoziției anterioare (partea "$\Leftarrow$"), un graf general având gradele nodurilor numerele date se construiește adăugând succesiv câte o muchie între două noduri de grade nenule, grade care se micșorează cu 1, până când fie toate gradele devin egale cu zero, fie rămâne un grad nenul d'_i, par, care este anulat și el prin $d'_i/2$ bucle. Acest procedeu este evidențiat în tabelul următor:

Pas	Gradele rămase	Muchia adăugată
1	$1,1,1,1,2,2,3,13$	$[v_1, v_2]$
2	$0,0,1,1,2,2,3,13$	$[v_3, v_4]$
3	$0,0,0,0,2,2,3,13$	$[v_5, v_6]$
4	$0,0,0,0,1,1,3,13$	$[v_5, v_6]$
5	$0,0,0,0,0,0,3,13$	$[v_7, v_8]$
6	$0,0,0,0,0,0,2,12$	$[v_7, v_8]$
7	$0,0,0,0,0,0,1,11$	$[v_7, v_8]$
8	$0,0,0,0,0,0,0,10$	$[v_8, v_8]$ de 5 ori
–	$0,0,0,0,0,0,0,0$	–

Graful general obținut are matricea de adiacență

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Evident, acest graf nu este singurul cu gradele date. De exemplu, dacă dorim să minimizăm numărul de bucle, atunci adăugăm de fiecare dată muchie între două noduri de grade nenule maxime. Pe de altă parte, dacă dorim să maximizăm numărul de bucle, atunci adăugăm întâi bucle, cât timp există grade mai mari sau egale cu 2.

Caracterizarea gradelor unui multigraf

Propoziția 3. *Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci numerele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sunt gradele nodurilor unui multigraf neorientat cu n noduri dacă și numai dacă suma $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ este un număr par și $d_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$.*

Demonstrație. "⇒" Conform Propoziției 1 avem $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$, unde m este numărul de muchii ale multigrafului neorientat având gradele nodurilor $d_1, d_2, \ldots, d_n$, deci suma considerată este un număr par. De asemenea, avem $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i$, unde, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, a_i reprezintă numărul de muchii de forma $[v_n, v_i]$. Cum $a_i \leq d_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, rezultă că $d_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$.

"⇐" Arătăm că dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$ cu $m \in \mathbb{N}$, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ și $d_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$, atunci există un multigraf neorientat $G = (V, E)$ cu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ astfel încât $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Pentru $n = 2$ rezultă că $d_1 = d_2$, deci considerând multigraful neorientat $G = (V, E)$, cu $V = \{v_1, v_2\}$ și $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, unde $m = d_1 = d_2$ și $e_k = [v_1, v_2]$, $\forall\, k \in \{1, \ldots, m\}$, iar muchiile multiple $e_1, \dots, e_m$ sunt distincte două câte două, obținem că $d_G(v_1) = m = d_1$ și $d_G(v_2) = m = d_2$.

Pentru $n \geq 3$ demonstrăm afirmația prin inducție după m.

Pentru $m = 0$ rezultă că $d_i = 0$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$, deci luând $E = \emptyset$ avem $d_G(v_i) = 0 = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $m-1$ și o demonstrăm pentru m, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Fie $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m$, $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ și $d_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$. Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2m \geq 2$, rezultă că $d_n \geq 1$. Cum $d_n \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i$, rezultă că și $d_{n-1} \geq 1$. Fie

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{dacă } 1 \leq i \leq n-2, \\ d_i - 1, & \text{dacă } i \in \{n-1, n\}. \end{cases}$$

Atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i - 2 = 2(m-1)$. Avem două cazuri.

Cazul 1) $d_{n-2} < d_n$. Atunci $d'_1 \leq d'_2 \leq \ldots \leq d'_n$ și $d'_n = d_n - 1 \leq \sum\limits_{i=1}^{n-1} d_i - 1 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} d'_i$, deci, conform ipotezei de inducție, există un multigraf neorientat $G' = (V, E')$ cu $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ astfel încât $d_{G'}(v_i) = d'_i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Cazul 2) $d_{n-2} = d_n$, deci și $d_{n-1} = d_n$. Atunci $d'_1 \leq d'_2 \leq \ldots \leq d'_{n-2} = d_n$ și $d'_{n-1} = d'_n = d_n - 1$, deci

$$\max_{i=\overline{1,n}} d'_i = d'_{n-2}.$$

Avem $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i - 2d'_{n-2} = \sum\limits_{i=1}^{n-3} d_i + d_n + (d_n - 1) + (d_n - 1) - 2d_n = \sum\limits_{i=1}^{n-3} d_i + d_n - 2 \geq -1$, deoarece $d_n \geq 1$. Pe de altă parte, $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i - 2d'_{n-2} = 2(m-1) - 2d'_{n-2}$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i - 2d'_{n-2}$ este un număr par. Astfel rezultă că $\sum\limits_{i=1}^{n} d'_i - 2d'_{n-2} \geq 0$. Obținem că

$$\max_{i=\overline{1,n}} d'_i = d'_{n-2} \leq \sum_{i=1}^{n-3} d'_i + d'_{n-1} + d'_n,$$

deci, conform ipotezei de inducție (aplicată pentru numerele $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$ rearanjate în ordine crescătoare), rezultă din nou că există un multigraf neorientat $G' = (V, E')$ cu $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ astfel încât $d_{G'}(v_i) = d'_i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

În ambele cazuri, fie multigraful neorientat $G = (V, E' \cup \{e\})$, unde $e = [v_{n-1}, v_n]$, $e \notin E'$. Evident, avem

$$\begin{aligned} d_G(v_{n-1}) &= d_{G'}(v_{n-1}) + 1 = d'_{n-1} + 1 = d_{n-1}, \\ d_G(v_n) &= d_{G'}(v_n) + 1 = d'_n + 1 = d_n, \\ d_G(v_i) &= d_{G'}(v_i) = d'_i = d_i, \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n-2\}. \end{aligned}$$

Astfel $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. □

Observația 2. Demonstrația propoziției anterioare este constructivă, ea indicând un algoritm de generare a unui multigraf neorientat cu gradele nodurilor date.

Exemplul 3. Numerele $1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 13$ din exemplul anterior nu pot fi gradele nodurilor unui multigraf neorientat, deoarece suma $\sum_{i=1}^{8} d_i = 24$ este un număr par, dar $d_8 = 13 > 11 = \sum_{i=1}^{7} d_i$.

Exemplul 4. Numerele $1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 5$ pot fi gradele nodurilor unui multigraf neorientat, deoarece suma $\sum_{i=1}^{8} d_i = 24$ este un număr par și $d_8 = 5 \leq 19 = \sum_{i=1}^{7} d_i$. Mai mult, conform demonstrației propoziției anterioare (partea "$\Leftarrow$"), un multigraf având gradele nodurilor numerele date se construiește adăugând succesiv câte o muchie între două noduri de grade nenule maxime, grade care se micșorează cu 1, până când gradele devin toate egale cu zero. Acest procedeu este evidențiat în tabelul următor:

Pas	Gradele rămase	Muchia adăugată
1	$1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 5$	$[v_7, v_8]$
2	$1, 1, 1, 2, 4, 5, 4, 4$	$[v_6, v_8]$
3	$1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 3$	$[v_6, v_7]$
4	$1, 1, 1, 2, 4, 3, 3, 3$	$[v_5, v_8]$
5	$1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 2$	$[v_6, v_7]$
6	$1, 1, 1, 2, 3, 2, 2, 2$	$[v_5, v_8]$
7	$1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1$	$[v_6, v_7]$
8	$1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1$	$[v_4, v_5]$
9	$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$	$[v_7, v_8]$
10	$1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0$	$[v_5, v_6]$
11	$1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0$	$[v_3, v_4]$
12	$1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0$	$[v_1, v_2]$
−	$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$	−

Multigraful obținut are matricea de adiacență

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caracterizarea gradelor unui graf simplu

Definiția 1. *O secvență $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de numere naturale ($n \in \mathbb{N}^*$) se numește* ***secvență grafică (secvență de grade, șir grafic, șir de grade)*** *dacă există un graf neorientat simplu $G = (V, E)$ cu $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ astfel încât $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Teorema 1 (Havel-Hakimi). *Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ și $d_n \geq 1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ este o secvență grafică dacă și numai dacă $d_n \leq n-1$ și $(d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_n+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1)$ este secvență grafică.*

Demonstrație. "$\Rightarrow$" Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat simplu cu $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ astfel încât $d_G(v_i) = d_i$, $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$. Deoarece graful G este simplu, adică nu conține nici bucle, nici muchii multiple, rezultă că gradul $d_n = d_G(v_n)$ este egal cu numărul de noduri adiacente cu v_n, deci $d_n \leq n - 1$. Fie M mulțimea nodurilor adiacente cu v_n, deci $\mathrm{card}(M) = d_n$. Avem două cazuri.

Cazul 1) $M = \{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\}$. Atunci graful $G' = (V', E')$ definit prin

$$V' = V \setminus \{v_n\} = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\},\ E' = E \setminus \{[v_n, x] \mid x \in M\}$$

este un graf neorientat simplu având gradele nodurilor

$$\begin{aligned} d_{G'}(v_i) &= d_G(v_i) = d_i, \text{ pentru } 1 \leq i \leq n - d_n - 1, \\ d_{G'}(v_i) &= d_G(v_i) - 1 = d_i - 1, \text{ pentru } n - d_n \leq i \leq n - 1, \end{aligned}$$

deci $(d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_n+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1)$ este secvență grafică.

Cazul 2) $M \neq \{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\}$. Fie

$$A = \{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\} \setminus M,\ B = M \setminus \{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\}.$$

Cum $\mathrm{card}\left(\{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\}\right) = \mathrm{card}(M) = d_n$, rezultă că avem

$$\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B) \geq 1.$$

Fie $r = \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B)$, $A = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}\}$ și $B = \{v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_r}\}$, unde

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subseteq \{n - d_n, n - d_n + 1, \ldots, n - 1\} \text{ și } \{k_1, k_2, \ldots, k_r\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n - d_n - 1\}.$$

Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, cum $d_G(v_{j_i}) = d_{j_i} \geq d_{k_i} = d_G(v_{k_i})$ și v_n nu este adiacent cu v_{j_i}, dar este adiacent cu v_{k_i}, rezultă că există un nod $v_{t_i} \in V$ care este adiacent cu v_{j_i}, dar nu este adiacent cu v_{k_i}. Fie graful $G_1 = (V, E_1)$ definit prin

$$E_1 = \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \{[v_n, v_{k_i}], [v_{t_i}, v_{j_i}]\}\right) \cup \bigcup_{i=1}^{r} \{[v_n, v_{j_i}], [v_{t_i}, v_{k_i}]\}.$$

Atunci G_1 este un graf neorientat simplu având aceleași grade ale nodurilor ca și G, adică $d_{G_1}(v_i) = d_G(v_i) = d_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. În plus, în graful G_1 mulțimea nodurilor adiacente cu v_n este chiar mulțimea $\{v_{n-d_n}, v_{n-d_n+1}, \ldots, v_{n-1}\}$. Conform demonstrației de la Cazul 1 (înlocuind G cu G_1) rezultă din nou că

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, d_{n-d_n+1} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1)$$

este secvență grafică.

"$\Leftarrow$" Fie $d_n \leq n - 1$ și $G' = (V', E')$ un graf neorientat simplu cu $V' = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ astfel încât

$$\begin{aligned} d_{G'}(v_i) &= d_i, \text{ pentru } 1 \leq i \leq n - d_n - 1, \\ d_{G'}(v_i) &= d_i - 1, \text{ pentru } n - d_n \leq i \leq n - 1. \end{aligned}$$

Atunci graful $G = (V, E)$ definit prin $V = V' \cup \{v_n\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ (cu $v_n \notin V'$) și

$$E = E' \cup \{[v_n, v_i] \mid n - d_n \leq i \leq n - 1\}$$

este un graf neorientat simplu având gradele nodurilor

$$\begin{aligned} &d_G(v_i) = d_{G'}(v_i) = d_i, \text{ pentru } 1 \leq i \leq n - d_n - 1, \\ &d_G(v_i) = d_{G'}(v_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i, \text{ pentru } n - d_n \leq i \leq n - 1, \\ &d_G(v_n) = d_n, \end{aligned}$$

deci $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ este secvență grafică. □

Observația 3. Demonstrația teoremei anterioare este constructivă, ea indicând un algoritm recursiv de generare a unui graf neorientat simplu cu gradele nodurilor date.

Exemplul 5. Verificăm dacă secvența $(1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 5)$ din exemplul anterior este secvență grafică. Conform teoremei anterioare avem echivalentele:

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1, 2, 4, 5, 5, 5) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 5 \leq 7 \text{ și } (1, 1, 0, 1, 3, 4, 4) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 4 \leq 6 \text{ și } (1, 0, 0, 0, 2, 3) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 5 \text{ și } (0, 0, 0, -1, 1) \text{ este secvență grafică.} \end{aligned}$$

Cum ultima secvență nu este o secvență grafică (deoarece gradele nu pot fi negative), rezultă că nici secvența inițială nu este secvență grafică.

Exemplul 6. Verificăm dacă secvența $(1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5)$ este secvență grafică. Conform teoremei anterioare avem echivalentele:

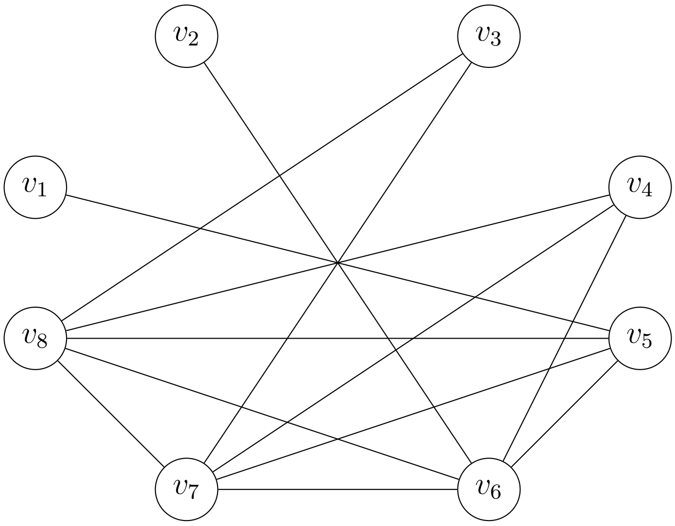
$$\begin{aligned} &S_1 = (1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 5 \leq 7 \text{ și } S_2 = (1, 1, 1, 2, 3, 4, 4) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 4 \leq 6 \text{ și } S_3 = (1, 1, 0, 1, 2, 3) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 3 \leq 5 \text{ și } S_4 = (1, 0, 0, 0, 1) \text{ este secvență grafică} \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 4 \text{ și } S_5 = (0, 0, 0, 0) \text{ este secvență grafică.} \end{aligned}$$

Cum ultima secvență, S_5, este o secvență grafică, fiind secvența gradelor grafului simplu cu 4 noduri și 0 muchii, rezultă că și secvența inițială, S_1, este secvență grafică.

Mai mult, conform demonstrației teoremei amintite (partea "$\Leftarrow$"), avem succesiv:

$S_5 = (0, 0, 0, 0)$ este secvența gradelor grafului $G_5 = (\{v_1, \ldots, v_4\}, E_5)$ cu
$E_5 = \emptyset$;
$S_4 = (1, 0, 0, 0, 1)$ este secvența gradelor grafului $G_4 = (\{v_1, \ldots, v_5\}, E_4)$ cu
$E_4 = E_5 \cup \{[v_5, v_1]\}$;
$S_3 = (1, 1, 0, 1, 2, 3)$ este secvența gradelor grafului $G_3 = (\{v_1, \ldots, v_6\}, E_3)$ cu
$E_3 = E_4 \cup \{[v_6, v_2], [v_6, v_4], [v_6, v_5]\}$;
$S_2 = (1, 1, 1, 2, 3, 4, 4)$ este secvența gradelor grafului $G_2 = (\{v_1, \ldots, v_7\}, E_2)$ cu
$E_2 = E_3 \cup \{[v_7, v_3], [v_7, v_4], [v_7, v_5], [v_7, v_6]\}$;
$S_1 = (1, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5)$ este secvența gradelor grafului $G_1 = (\{v_1, \ldots, v_8\}, E_1)$ cu
$E_1 = E_2 \cup \{[v_8, v_3], [v_8, v_4], [v_8, v_5], [v_8, v_6], [v_8, v_7]\}$.

Graful G_1 este reprezentat în figura următoare.



Bibliografie

[1] C. Bălcău, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Universității din Pitești, Pitești, 2007.

[2] D. Fanache, *Teoria algoritmică a grafurilor*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.

[3] D.R. Popescu, R. Marinescu-Ghemeci, *Combinatorică și teoria grafurilor prin exerciții și probleme*, Editura Matrix Rom, București, 2014.

[4] I. Tomescu, *Probleme de combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

[5] I. Tomescu, *Data structures*, Editura Universității din București, București, 2004.

[6] ***, *Handbook of discrete and combinatorial mathematics*, edited by K.H. Rosen, J.G. Michaels, J.L. Gross, J.W. Grossman and D.R. Shier, CRC Press, Boca Raton, 2000.

Algoritmul fill și aplicații

Doru Anastasiu Popescu [1]*și Doru Constantin* [2]

În acest articol se prezintă algoritmul fill de tip backtracking în plan într-o manieră simplă cu structuri de date elementare. Apoi, sunt prezentate câteva probleme clasice rezolvate cu acest algoritm. În partea finală a articolului s-a introdus o listă de probleme din arhive educaționale pentru a implementa algoritmul fill în situatii variate.

1 Introducere

Algoritmul fill este un caz particular de parcurgere a unui graf neorientat. În acest articol se prezintă algoritmul fără a se folosi noțiuni de teoria grafurilor. Mai precis, vom porni de la un caz practic legat de aplicația Paint. Fiecare dintre noi a creat un desen în aplicația Paint și a trebuit să umple cu o anumită culoare un contur închis (cerc, dreptunghi, triunghi, etc). Acest lucru l-am realizat selectând *culoarea*, *pensula* și dând *click* în interiorul conturului. Apoi instant operația a fost realizată. Lucrul acesta s-a realizat pentru că în spatele aplicației imaginea este un tablou bidimensional, elementele lui fiind pixeli de o anumită culoare, și cu un algoritm de tip fill se schimbă culoarea pixelilor din interiorul conturului. În Figura 1 și Figura 2 este prezentat un astfel de exemplu.

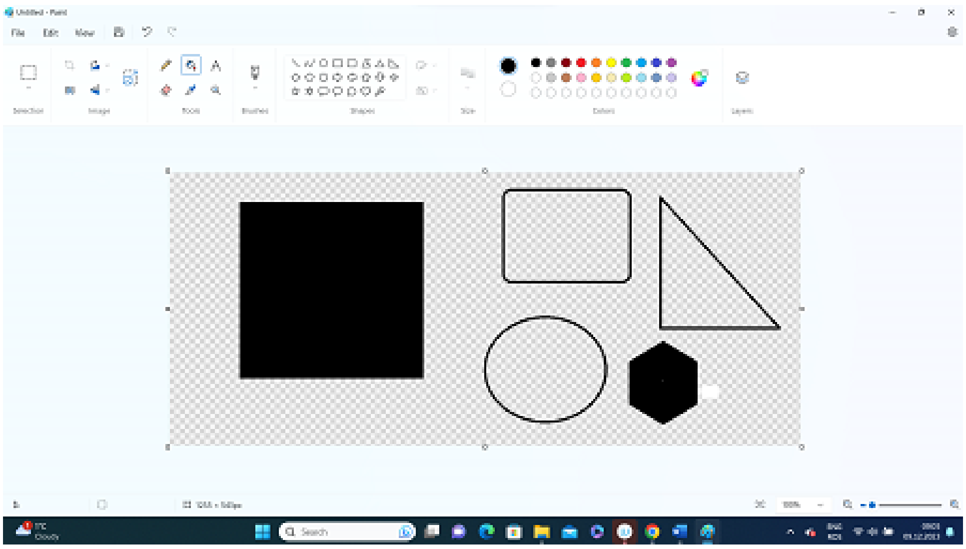


Figura 1. Contururi umplute cu culori în Paint.

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com
[2]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cdomanid@yahoo.com

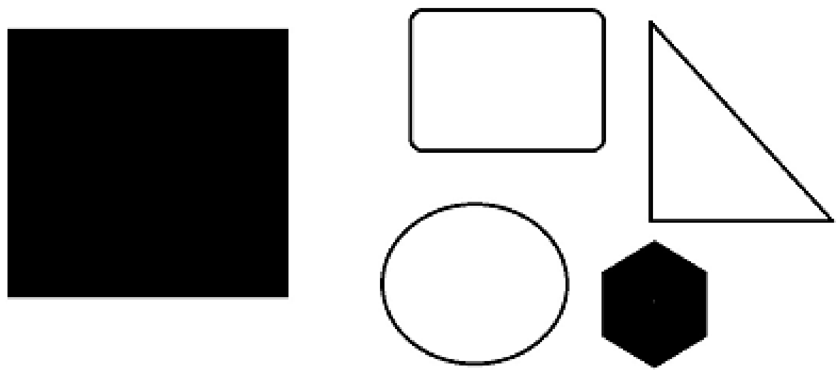


Figura 2. Imaginea rezultată după operația de umplere

2 Algoritmul fill pentru umplerea unui contur închis

În prezentarea algoritmului fill vom porni de la următoarea problemă:

Se dă un tablou bidimensional cu m linii, n coloane și elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ ce codifică o imagine cu un contur închis. Un pixel din imagine corespunde unui element din tabloul bidimensional. Pentru a avea o imagine cât mai simplă vom considera doar două culori: alb codificat cu 0 și negru codificat cu 1. Cunoscând coordonatele unui pixel din interiorul conturului umpleți tot conturul cu 1. Doi pixeli sunt vecini pe contur dacă sunt unul sub altul sau, unul lângă altul, sau vecini pe diagonală. Tabloul bidimensional este dat în fișierul `fill.in`, pe prima linie dimensiunile, iar pe liniile următoare elementele sale. Linia și coloana pixelului din interiorul conturului sunt date pe ultima linie a fișierului `fill.in`. După umplerea conturului tabloul obținut se va scrie în fișierul `fill.out`.

Exemplu

`fill.in`

```
6 8
0 1 0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 0 0 0
0 0 1 0 0 1 1 0
0 0 1 0 0 0 1 0
0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0
4 5
```

`fill.out`

```
0 1 1 1 0 0 0 0
0 1 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0
```

Descrierea algoritmului

1. Citim m, n, elementele tabloului a și x0, y0 - linia și coloana pixelului interior conturului.

2. Din (x0,y0) generăm toate traseele cu metoda backtracking în plan, fără a le memora, doar marcăm cu 1 elementele de pe aceste trasee. Când ne găsim într-un element a[i][j] putem să ne deplasăm numai în cele 4 direcții: sus, dreapta, jos, stânga dacă elementele respective sunt 0. Adică în a[i-1][j], a[i][j+1], a[i+1][j], a[i][j-1]. Pe scurt din a[i][j] în a[in][jn], unde in = i + dl[k], jn = j + dc[k], k = 0, 1, 2, 3, vectorii dl și dc memorând deplasările relative în cele 4 direcții:

int dl[4]={-1, 0, 1, 0};

int dc[4]={ 0, 1, 0,-1};

3. După umplerea conturului închis se afișează tabloul.

Programul C++ pentru algoritmul de umplere a unui contur închis este prezentat în continuare.

```
#include <fstream>
using namespace std;

ifstream fin("fill.in");
ofstream fout("fill.out");

int a[200][200],m,n,x0,y0;
int dl[4]={-1, 0, 1, 0};
int dc[4]={ 0, 1, 0,-1};

void cit(){ // citirea imaginii si a coordonatelor unui pixel interior
int i,j;
fin>>m>>n;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                fin>>a[i][j];
fin>>x0>>y0;
}

void fill(int i, int j){
int k,n,in,jn;
a[i][j] = 1; // coloaram cu 1 pixelul curent din contur
for(k=0;k<4; k++){ // verificam pixeli vecini celui curent
        in = i + dl[k];
        jn = j + dc[k];
        if(in>=1 && in<=m && jn>=1 && jn<=n && a[in][jn] == 0)
                fill(in,jn);
}
}

void afis(){ // afisarea tabloului bidimensional
int i,j;
for(i=1;i<=m;i++){
        for(j=1;j<=n;j++)
                fout<<a[i][j]<<" ";
        fout<<endl;
}
}

int main(){
cit();
fill(x0,y0);
```

```
afis();
return 0;
}
```

3 Ștergerea unui obiect dintr-o imagine

Se dă un tablou bidimensional cu m linii, n coloane și elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ care codifică o fotografie alb - negru cu un singur obiect. Elementele obiectului sunt valori egale cu 1. Relația de vecinătate a pixelilor este ca în problema din Secțiunea 2. Ștergeți obiectul din fotografie.

Dimensiunile tabloului bidimensional și elementele lui se dau în fișierul `foto1.in`. Tabloul după ștergerea obiectului se va scrie în fișierul `foto1.out`.

Exemplu

foto1.in

```
5 6
0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0
0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0
0 0 1 1 0 0
```

foto1.out

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

Descrierea algoritmului

1. Citim m, n și elementele tabloului bidimensional a.

2. Determinăm coordonatele unui pixel de valoare 1 din tablou. Notăm cu x0, y0 linia și coloana pe care se află acesta.

3. Ștergem obiectul cu un algoritm fill mergând pe elemente de 1 în cele 8 direcții posibile: pe orizontală, verticală și diagonale.

4. Afișăm tabloul modificat.

Programul C++ pentru acest algoritm este prezentat în continuare.

```
#include <fstream>
using namespace std;

ifstream fin("foto1.in");
ofstream fout("foto1.out");

int a[200][200],m,n,x0,y0;
int dl[8]={-1,-1, 0, 1, 1, 1, 0,-1};
int dc[8]={ 0, 1, 1, 1, 0,-1,-1,-1};
```

```
void cit(){
int i,j;
fin>>m>>n;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                fin>>a[i][j];
}

void fill(int i, int j){
int k,n,in,jn;
a[i][j] = 0;
for(k=0;k<8; k++){ //deplasarea in cele 8 directii
        in = i + dl[k];
        jn = j + dc[k];
        if(in>=1 && in<=m && jn>=1 && jn<=n && a[in][jn] == 1)
                fill(in,jn);
}
}

void afis(){
int i,j;
for(i=1;i<=m;i++){
        for(j=1;j<=n;j++)
                fout<<a[i][j]<<" ";
        fout<<endl;
}
}

int main(){
cit();
//determinam x0, y0
int i,j;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                if(a[i][j]==1){
                        x0 = i; i=m+1;
                        y0 = j; j=n+1;
                }
fill(x0,y0); //stergem obiectul
afis();
return 0;
}
```

4 Determinarea numărului de obiecte dintr-o fotografie

Se dă o fotografie alb negru codificată printr-un tablou bidimensional cu m linii, n coloane și elemente 0, 1 (0 – pixel alb, 1 – pixel negru). Fotografia conține obiecte ca în problema din Secțiunea 3. Determinați numărul de obiecte conținute de fotografie. Dimensiunile tabloului bidimensional și elementele lui se dau în fișierul `foto2.in`. Numărul de obiecte se va scrie în fișierul `foto2.out`.

Exemplu

foto2.in

```
6 8
1 0 0 0 0 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1
```

```
1 1 0 0 1 1 0 0
1 1 0 0 1 0 1 0
1 0 0 0 0 0 0 1
```

foto2.out

```
4
```

Descrierea algoritmului

1. Citim m, n și elementele tabloului a.

2. Parcurgem elementele tabloului a cu i=1,...,m și j =1,2,...,n, dacă a[i][j]=1 numărăm obiectul curent și îl ștergem cu apelul fill(i,j).

3. Afișăm numărul de obiecte.

Programul C++ pentru algoritm este următorul:

```
#include <fstream>
using namespace std;

ifstream fin("foto2.in");
ofstream fout("foto2.out");

int a[200][200],m,n,NrOb;
int dl[8]={-1,-1, 0, 1, 1, 1, 0,-1};
int dc[8]={ 0, 1, 1, 1, 0,-1,-1,-1};

void cit(){
int i,j;
fin>>m>>n;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                fin>>a[i][j];
}

void fill(int i, int j){
int k,n,in,jn;
a[i][j] = 0;
for(k=0;k<8; k++){
        in = i + dl[k];
        jn = j + dc[k];
        if(in>=1 && in<=m && jn>=1 && jn<=n && a[in][jn] == 1)
                fill(in,jn);
}
}

int main(){
cit();
int i,j;
NrOb = 0;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                if(a[i][j]==1){
                        NrOb++;
                        fill(i,j);
                }
fout<<NrOb;
return 0;
}
```

5 Suprafața unui obiect

Se dă o fotografie cu un singur obiect. Ce suprafață (arie) are obiectul? Fotografia este asemănătoare cu cea de la Secțiunea 3. Suprafața unui obiect este egală cu numărul de pixeli (elemente de 1 din tabloul dat). Dimensiunile tabloului bidimensional și elementele lui se dau în fișierul `foto3.in`. Suprafața obiectului se va scrie în fișierul `foto3.out`.

Exemplu

`foto3.in`

```
5 6
0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0
0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0
0 0 1 1 0 0
```

`foto3.out`

```
8
```

Descrierea algoritmului

1. Citim m, n și elementele tabloului bidimensional a.
2. Inițializăm Aria cu 0.
3. Determinăm un pixel în obiect și îi memorăm coordonatele x0, y0 (linia și coloana).
4. Ștergem obiectul pornind din (x0,y0) și numărând pixelii în variabila Aria.
5. Afișăm valoarea pentru Aria.

Programul C++ pentru algoritm este următorul:

```
#include <fstream>
using namespace std;

ifstream fin("foto3.in");
ofstream fout("foto3.out");

int a[200][200],m,n,x0,y0, Aria;
int dl[8]={-1,-1, 0, 1, 1, 1, 0,-1};
int dc[8]={ 0, 1, 1, 1, 0,-1,-1,-1};

void cit(){
int i,j;
fin>>m>>n;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                fin>>a[i][j];
}

void fill(int i, int j){
int k,n,in,jn;
Aria++;
a[i][j] = 0;
```

```
for(k=0;k<8; k++){
        in = i + dl[k];
        jn = j + dc[k];
        if(in>=1 && in<=m && jn>=1 && jn<=n && a[in][jn] == 1)
                fill(in,jn);
}
}

int main(){
cit();
//det x0,y0
int i,j;
for(i=1;i<=m;i++)
        for(j=1;j<=n;j++)
                if(a[i][j]==1){
                        x0 = i;
                        y0 = j;
                }
fill(x0,y0);
fout<<Aria;
return 0;
}
```

6 Probleme propuse pentru rezolvare

Pentru a vă familiariza cu algoritmul fill vă propunem să rezolvați problemele aflate la link-urile următoare:

https://www.pbinfo.ro/probleme/eticheta/128/fill

https://www.pbinfo.ro/probleme/830/generare2

https://www.pbinfo.ro/probleme/840/croco

https://www.pbinfo.ro/probleme/844/croco1

https://www.infoarena.ro/problema/padure

https://www.infoarena.ro/problema/ferma3

http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=1574

http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=534

http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=135

http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=1195

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Bazele programării - Limbajul C++*, infobits București, 2021. http://ebooks.infobits.ro/acasa/83-bazele-programarii-limbajul-cpp-volumul-1-doru-anastasiu-popescu-2021.html.

[2] M. Șerban, E. Cerchez, *Programarea in limbajul C/C++ pentru liceu*, Volumul 2, Editura Polirom, 2021. http://polirom.ro/calculatoare-informatica/7933-programarea-C3AEn-limbajul-cc-pentru-liceu-volumul-al-ii-lea.html.

[3] https://www.pbinfo.ro/.

[4] https://www.infoarena.ro/.

[5] http://campion.edu.ro/arhiva/.

MATEMATICĂ PENTRU PROGRAMATORI ȘI PROGRAMARE PENTRU MATEMATICIENI

Elemente de calculul probabilităților în R

Maria-Crina Diaconu[1] *și Cosmin-Marian Arpășanu*[2]

Limbajul de programare R este unul dintre cele mai avansate programe statistice. Materialul prezentat se adresează utilizatorilor începători. Este important de precizat însă că programul poate fi utilizat în mai multe domenii ale matematicii aplicate, nu numai în statistică.

Bazele teoriei probabilităților au fost puse în secolul al XVII-lea de matematicienii Blaise Pascal (1623-1662) și Pierre Fermat (1601-1665). Epoca noastră cunoaște o dezvoltare considerabilă a acestei teorii care este aplicată în toate domeniile de activitate. Aplicațiile teoriei probabilităților au contribuit la dezvoltarea ei teoretică, statistica a căpătat o mare dezvoltare.

A defini o probabilitate în raport cu o experiență, având un număr finit de cazuri posibile, înseamnă a asocia fiecărui eveniment A, legat de respectiva experiență, un număr $P(A)$ numit probabilitatea evenimentului A. Cum orice eveniment poate fi considerat ca o submulțime a unei mulțimi E, o probabilitate P face să corespundă fiecărei submulțimi a lui E un număr real.

Definiția 1. *Aplicația $P : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ este o probabilitate dacă:*

a) $0 \leq P(A) \leq 1$;

b) $P(E) = 1$;

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *dacă* $A \cap B = \emptyset$.

Dacă cunoaștem probabilitatea evenimentelor elementare, cunoaștem probabilitatea oricărui eveniment.

Rezultă că, în cazul evenimentelor elementare echiprobabile, ***probabilitatea unui eveniment A este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile lui A și numărul total al cazurilor posibile ale experienței.***

În multe din aplicații se consideră satisfăcută condiția de echiprobabilitate a cazurilor posibile ale experienței.

În continuare, prezentăm rezolvarea unor probleme cu grade diferite de dificultate, precum si implemetarea în R a soluțiilor acestora. Primele probleme sunt extrase din variantele de bacalaureat propuse în anii anteriori [4], ultimele două probleme fiind rezolvate în manualul de matematică de clasa a X-a [3].

1. Să se calculeze probabilitatea ca alegând unul dintre numerele $\log_2 \sqrt{2}$, $\log_5 25$, $\log_7 1$, acesta să fie supraunitar.

[1]Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com
[2]Student, Universitatea din Pitești, cosmin.arpasanu@gmail.com

Soluție.

$\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2} < 1;\quad \log_5 25 = 2 > 1;\quad \log_7 1 = 0 < 1.$
Nr. caz. favorabile $= \mathrm{card}\left(\{\log_5 25\}\right) = 1.$
Nr. caz. posibile $= 3 \implies P = \dfrac{1}{3} = 0,(3).$

Implementare în R:

```
> x<-c(log(sqrt(2),2),log(25,5),log(1,7))
>  f<-0
> for(i in x)
+  if(i>=1)
+  f<-f+1
>  p=f/length(x)
> P
[1] 0.3333333
```

2. Să se determine probabilitatea ca alegând un element x al mulțimii

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 8x + 7 < 0\right\},$$

acesta să fie număr prim.

Soluție. $x^2 - 8x + 7 < 0 \implies x \in (x_1, x_2)$, unde x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației și $x_1 < x_2$.
$\Delta = (-8)^2 - 4 * 1 * 7 = 64 - 28 = 36 \implies x_1 = \dfrac{-(-8) - \sqrt{36}}{2 * 1} = 1,$
$x_2 = \dfrac{-(-8) + \sqrt{36}}{2 * 1} = 7 \implies A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 8x + 7 < 0\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$
Nr. caz. favorabile$=$ card$(\{x \in A \,|\, x \text{ prim}\}) =$ card$(\{2, 3, 5\}) = 3.$
Nr. caz posibile$=$ card$(A) = 5 \implies P = \frac{3}{5} = 0,6.$

Implementare în R:

```
>  a<-1
>  b<--8
>  c<-7
>  x1<-(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
>  x2<-(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a)
>  A<-(x1+1):(x2-1)
>  prim <- function(x){
+    if(x == 2) {
+       TRUE
+ }   else if(any(x %% 2:(x-1) == 0)) {
+ FALSE
+ }   else {
+   TRUE
+ }}
> f<-0
> for(x in A)
+ if(prim(x)==TRUE)
+ f<-f+1
> t<-length(A)
> P<-f/t
> P
[1] 0.6
```

3. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr k din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, el să îndeplinească condiția: $C_7^k < C_7^{k+1}$.

Soluție.

- $k = 0 : \dfrac{7!}{7!} < \dfrac{7!}{6!} \iff 1 < 7$ **A**
- $k = 1 : \dfrac{7!}{6!} < \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} \iff 7 < 21$ **A**
- $k = 2 : \dfrac{7!}{5! \cdot 2!} < \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} \iff 21 < 35$ **A**
- $k = 3 : \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} < \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} \iff 35 < 35$ **F**
- $k = 4 : \dfrac{7!}{3! \cdot 4!} < \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} \iff 35 < 21$ **F**
- $k = 5 : \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} < \dfrac{7!}{\cdot 6!} \iff 21 < 7$ **F**
- $k = 6 : \dfrac{7!}{6!} < \dfrac{7!}{\cdot 7!} \iff 7 < 1$ **F**

Caz.fav.$= \{0, 1, 2\}$

$$P = \frac{Nr.caz.favorabile}{Nr.caz.posibile} \Longrightarrow P = \frac{3}{7} \simeq 0,4285714.$$

Implementare în R:

```
> x<-0:6
> f<-0
> for(i in x)
+ if(choose(7,i)<choose(7,i+1))
+ f<-f+1
> t<-length(x)
> P=f/t
> P
[1] 0.4285714
```

4. Calculați probabilitatea ca alegând o pereche (a, b) din mulțimea $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, să avem $a + b = 5$.

Soluție. Nr.caz.posibile$= 3^2 = 9$.
$a + b = 5 \Longrightarrow a = 2, b = 3 \Longrightarrow (2, 3)$ sau $a = 3, b = 2 \Longrightarrow (3, 2)$
$\Longrightarrow$ Nr.caz.favorabile $= 2 \Longrightarrow P = \frac{2}{9} = 0,(2)$.

Implementare în R:

```
> A<-1:3
> f<-0
> t<-(length(A))^2
> for(a in A)
+ for(b in A)
+ if(a+b==5)
+ f<-f+1
> P<-f/t
> P
[1] 0.2222222
```

5. Să se calculeze probabilitatea ca alegând unul dintre numerele P_3, A_3^1, C_4^3, acesta să fie divizibil cu 3.

Soluție.

$$P_3 = 3! = 6 \Longrightarrow 3 \mid P_3$$

$$A_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3 \Longrightarrow 3 \mid A_3^1,$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{1! * 3!} = 4 \Longrightarrow 3 \nmid C_4^3$$

$$\Longrightarrow P = \frac{2}{3} \simeq 0,6666667.$$

Implementare în R:

```
> x<-c(factorial(3), prod((3-1+1):3), choose(4, 3))
> t<-length(x)
> f<-0
> for(i in x)
+ if(i%%3==0)
+ f<-f+1
> P=f/t
> x
[1] 6 3 4
> f
[1] 2
> P
[1] 0.6666667
```

6. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din primele 40 de numere naturale, acesta să nu conțină cifra 7.

Soluție. Nr.cazuri favorabile= 36, Nr. cazuri posibile= 40.
P=$\frac{36}{40} = 0,9.$

Implementare în R:

```
> x<-1:40
> f<-0
> t<-length(x)
> for(i in x)
+ if(i %% 10 != 7  && i %/% 10 != 7)
+  f<-f+1
> P<-f/t
> P
[1] 0.9
> t
[1] 40
> f
[1] 36
```

7. Se aruncă un zar de 4 ori. Care este probabilitatea să obținem de fiecare dată cifra 4?

Soluție. $P_1 = \frac{1}{6}, P_2 = \frac{1}{6}, P_3 = \frac{1}{6}, P_4 = \frac{1}{6}$ $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \simeq 0,00076$ (evenimente independente).

Implementare în R:

```
> N<-10^5
> zar1=sample(c(1:6), N, replace=TRUE)
> zar2=sample(c(1:6), N, replace=TRUE)
> zar3=sample(c(1:6), N, replace=TRUE)
> zar4=sample(c(1:6), N, replace=TRUE)
> p1<-sum(zar1==4)/length(zar1)
> p2<-sum(zar2==4)/length(zar2)
> p3<-sum(zar3==4)/length(zar3)
> p4<-sum(zar4==4)/length(zar4)
> P<-p1*p2*p3*p4
> P
[1] 0.0007659271
```

8. a) O urnă conține 7 bile verzi și 6 albastre. Se extrag succesiv 3 bile fără întoarcerea bilei extrase. Care este probabilitatea ca prima bilă să fie verde, iar celelalte două albastre?

b) O urnă conține 6 bile verzi și 5 bile albastre. O altă urnă conține 4 bile verzi și 3 bile albastre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Se consideră evenimentele: A=bila extrasă din prima urnă este verde; B=bila extrasă din a doua urnă este verde. Să se calculeze: $P(A \cap B), P(A \cup B), P(A - B), P(\overline{A})$.

Soluție. a)A - prima bilă verde, B - a doua bilă albastră, C - a treia bilă albastră.
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$.
$P(A) = \dfrac{7}{13}$, $P(B|A) = \dfrac{6}{12}$, $P(C|A \cap B) = \dfrac{5}{11}$, $P(A \cap B \cap C) \simeq 0,122377$.

b) $P(A) = \dfrac{6}{11}, P(B) = \dfrac{4}{7}$.
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \dfrac{24}{77} \simeq 0,3116$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \simeq 0,8062$.
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \simeq 0,2320$.
$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \simeq 0,4550$.

Implementare în R:

```
> N<-10^5
> f<-0
> urna1=sample(c("verde", "verde", "verde",
> urna2=sample(c("verde","verde","verde","v
> pA=sum(urna1=="verde")/length(urna1)
> pB=sum(urna2=="verde")/length(urna2)
> pAB=pA*pB
> pAB
[1] 0.3129439
> pAsiB=pA+pB-pAB
> pAsiB
[1] 0.8062661
> pAmB=pA-pAB
> pAmB
[1] 0.2320361
> pnA=1-pA
> pnA
[1] 0.45502
```

Menționăm că am realizat această prezentare cu dorința de a familiariza elevii de liceu cu R, un limbaj de programare accesibil, tot mai utilizat in mediul academic, dar care este folosit și pentru realizarea unor proiecte complexe. Este gratuit și are avantajul existenței unui grup de utilizatori activi care aduc îmbunătățiri, dezvoltă module noi specializate pe implementarea unor algoritmi și oferă sfaturi și asistență pe forumuri specializate.

Bibliografie

[1] M. Miroiu, V. Petrehuș, Gh. Zbăganu, *Inițiere în R*, Ed. StudIS, 2013.

[2] Gh. Mihoc, M. Micu, *Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică,* Ed. Didactică și Pedagogică, 1988.

[3] I.P. Iambor, A. Pădureanu, *Manual Matematică clasa a X-a*, Ed. Aramis, 2005.

[4] https://www.didactic.ro/materiale-didactice/probabilitati-proiect-de-lectie-integrat.

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Deprinderea elementelor fundamentale robotică și de programare în Python folosind robotul Finch 2.0

Remus-Dragoș Albu [1]

Finch 2.0 este un instrument versatil ce poate fi folosit pentru a integra codificarea în programa școlară și pentru a alinia oportunitățile de la cei mai mici și mai puțin experimentați elevi ai noștri până la cei mai experimentați. Capacitatea de a utiliza o varietate de dispozitive / platforme și o gamă corespunzătoare de limbaje de programare permite elevilor să crească cunoștințele și experiența lor de codificare.

1 Introducere

Python este un limbaj de programare simplu, cu scop general, la nivel înalt și orientat pe obiecte.

Robotul Finch poate fi extrem de util pentru a fixa și completa, printre altele, elementele fundamentale de programare în Python.

Finch este un robot conceput special pentru elevii care învață informatică. Se pot scrie programe pentru a muta și roti Finch, lumina ciocul și/sau coada și colecta informații cu senzorii săi. Pe măsură ce sunt scrise programe, acestea pot fi testate cu Finch în lumea reală!

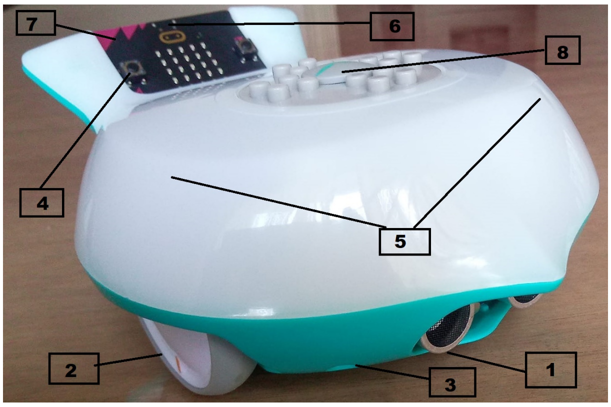


Figura 1: Robotul Finch 2

1. Senzor distanță
2. Roată
3. Senzor de linie
4. Butoane
5. Senzori lumină
6. Accelerometru
7. Busolă
8. Suport marker

Mai întâi, se realizează conexiunea la Finch în conectorul BlueBird, apoi se deschide un fișier nou în Python, care trebuie să se afle în folderul BirdBrainPython care conține BirdBrain.py. Pentru a utiliza Finch în Python, trebuie importată clasa Finch din biblioteca BirdBrain. O bibliotecă în Python este o colecție de cod Python ce poate fi utilizată în program., iar clasa Finch conține metodele utilizate pentru a scrie programe care utilizează Finch.

[1]Profesor, Liceul Tehnologic ,,Danubius" / Liceul Teoretic ,,Al. I. Cuza" Corabia, dragos_albu@yahoo.com

from BirdBrain import Finch

Apoi, se declară un obiect care reprezintă Finch. Această linie de cod îi dă lui Finch un nume, în acest caz ”pasare”, și îi spune programului că este Finch.

pasare = Finch()

2 Prezentare

După declararea unui obiect Finch, se pot utiliza metode pentru a-l face pe Finch să facă lucruri diferite. De exemplu, metoda setMove() face ca Finch să se deplaseze înainte sau înapoi. Această metodă ia trei parametri, sau bucăți de informații, în interiorul parantezelor.

Toate aceste părți sunt prezentate împreună în programul de probă de mai jos. Acest program de probă va muta Finch înainte de 20 cm la 75% din viteza maximă.

pasare.setMove(’F’,20,75) # deplasare înainte 20 cm la 75% viteză

pasare.setMove(’B’,30,50) # deplasare înapoi 30 cm la 50% viteză

Rotirea robotului este foarte asemănătoare cu deplasarea robotului înainte sau înapoi. Se utilizează metoda setTurn() pentru a roti Finch.

pasare.setTurn(’R’,90,50) # rotire la dreapta 90^o la 50% viteză

pasare.setTurn(’L’,60,30) # rotire la stânga 60^o la 30% viteză

Ieșirile sunt modalități prin care Finch poate acționa asupra lumii sau poate comunica cu utilizatorul; acestea includ motoarele, luminile și soneria. Finch are și intrări numite senzori, care colectează date despre mediul din jurul său și furnizează aceste date programului.

Senzorul de distanță măsoară distanța dintre Finch și cel mai apropiat obstacol. Se poate citi valoarea senzorului de distanță cu funcția getDistance(), care returnează o valoare numerică care este distanța în centimetri. Pentru a vedea valoarea senzorului de distanță, se poate utiliza funcția print() pentru a afișa valoarea pe ecran.

print(pasare.getDistance())

print(”Distanța: ”, pasare.getDistance()) # afișare valoare senzor de distanță cu etichetă

Afișarea valorilor unora dintre ceilalți senzori Finch folosind metodele de mai jos:

getLight(’R’) – returnează valoarea senzorului de lumină potrivit getLight(’L’) – returnează valoarea senzorului de lumină din stânga getButton(’A’) - returnează valoarea butonului A pe micro:bit getOrientation() – returnează orientarea Finch-ului getEncoder(’R’) – returnează numărul de rotații pe care roata din dreapta le-a rotit	print(”Right Light: ”, pasare.getLight(’R’)) print(”Left Light: ”, pasare.getLight(’L’)) print(”Button A: ”, pasare.getButton(’A’)) print(”Orientation: ”, pasare.getOrientation()) print(”Right Encoder: ”, pasare.getEncoder(’R’))

print(”Right Light: ”, type(pasare.getLight(’R’))) # int

print(”Left Light: ”, type(pasare.getLight(’L’))) # int

print(”Button A: ”, type(pasare.getButton(’A’))) # bool

print(”Orientation: ”, type(pasare.getOrientation()))#string

print(”Right Encoder: ”, type(pasare.getEncoder(’R’))) # float

Fiecare valoare are un tip de date diferit, existând patru tipuri de date comune în Python: int, float, bool și str. Se poate utiliza funcția type() pentru a găsi tipul de date al unei valori. Pentru a salva o valoare pentru a o utiliza mai târziu, în Python se utilizează o variabilă, care este un nume care reprezintă o valoare. Pentru a crea o variabilă, se selectează un nume și se utilizează semnul egal pentru a atribui o valoare variabilei. După ce o variabilă a fost inițializată, poate fi utilizată mai târziu în program. De fiecare dată când programul vede numele variabilei, acesta va înlocui valoarea acelei variabile. Se pot utiliza operatori aritmetici în Python.

distanțaCurentă = pasare.getDistance() print(distanțaCurentă) print(2* distanțaCurentă) print(4* distanțaCurentă)	leftLight = pasare.getLight('L') rightLight = pasare.getLight('R') diferența = leftLight - rightLight print(diferența) media = (leftLight + rightLight)/2 print(media)

Alte tipuri de ieșiri: controlul luminilor din ciocul și coada lui Finch. Fiecare dintre luminile din cioc și coadă are de fapt trei elemente mici de lumină în interiorul acestuia. Unul este roșu, unul este verde, iar unul este albastru.

Pentru a seta culoarea ciocului, se utilizează metoda setBeak(). Această metodă necesită trei parametri care setează valorile a trei culori. Prin combinarea cantităților diferite din aceste trei culori, se pot crea alte culori. Funcția setBeak() setează culoarea ciocului și apoi trece imediat la următoarea linie din program. Pentru a întrerupe fiecare culoare, se utilizează funcția sleep(). Funcția sleep() are un singur parametru care este un număr de secunde pentru ca programul să se întrerupă; acesta poate fi un număr întreg sau un număr zecimal. Funcția sleep() trebuie importată din biblioteca time.

Coada lui Finch conține patru lumini. Pentru a le controla, se utilizează metoda setTail(), care este similară cu setBeak(), cu excepția faptului că are un parametru suplimentar. Parametrul portului controlează lumina care este activată. Acest parametru trebuie setat fie la un număr întreg de la 1 la 4, fie la valoarea șirului "toate".

# setare luminile 1 și 4 la roșu respectiv albastru timp de 2 secunde 	
pasare.setTail(1,100,0,0)
pasare.setTail(4,0,0,100)
sleep(2)
pasare.stopAll()
	# arată un curcubeu de culori pe ciocul și coada lui Finch
	pasare.setBeak(100,0,0)
	pasare.setTail(1,100,0,100)
	pasare.setTail(2,0,0,100)
	pasare.setTail(3,0,100,100)
	pasare.setTail(4,0,100,0)
	sleep(2)
	pasare.stopAll()

Se pot scrie programe pentru a permite unui utilizator să controleze Finch. Se poate utiliza funcția input() pentru a adresa o întrebare utilizatorului și a aștepta un răspuns. Când utilizatorul atinge tasta Enter, funcția returnează răspunsul lor. Valoarea returnată de input() este un șir, caz în care se știe că utilizatorul a introdus un număr, astfel încât să poată fi folosită funcția int() pentru a converti userResponse la un număr variabil de tip int.

userResponse=input("Valoare roșu (0-100): ") #preia input utilizator
roșu=int(userResponse) # Convertire la int
userResponse=input("Valoare verde(0-100): ") #preia input utilizator
verde=int(userResponse) # Convertire la int
userResponse=input("Valoare albastru(0-100): ") #input utilizator
albastru=int(userResponse) # Convertire la int
pasare.setBeak(roșu,verde,albastru)
pasare.setTail("all", roșu,verde,albastru)
sleep(3)
pasare.stopAll()
	userResponse=input("Lungime în centimetri: ")
	latura = int(userResponse)
	pasare.setTail('all',100,0,0)
	pasare.setMove('F',side,60)
	pasare.setTurn('R',90,50)
	pasare.setTail('all',0,100,0)
	pasare.setMove('F',side,60)
	pasare.setTurn('R',90,50)
	pasare.setTail('all',0,0,100)
	pasare.setMove('F',side,60)
	pasare.setTurn('R',90,50)
	pasare.setTail('all',100,0,100)
	pasare.setMove('F',side,60)
	pasare.setTurn('R',90,50)
	pasare.stopAll()

Pentru a obține o gamă mai largă de mișcări, se poate utiliza setMotors() pentru a seta viteza fiecărei roți în parte. Această metodă ia doi parametri, care sunt viteza roților din stânga și din dreapta. Pentru a muta Finch folosind setMotors, trebuie pornite roțile, întrerupt programul și apoi oprite roțile (se poate utiliza, de asemenea, setMotors (0,0) sau stopAll() pentru a opri motoarele).

```
userResponse=input(”Viteza pentru roata stângă (-100 to 100): ”)
stânga = int(userResponse)
userResponse = input(”Viteza pentru roata dreaptă (-100 to 100):
”)
dreapta = int(userResponse)
pasare.setMotors(left,right)
sleep(2)
pasare.stop()
```

```
pasare.setMotors(40,40) # înainte
sleep(3)
pasare.setMotors(50,25) # întoarcere la dreapta
sleep(4)
pasare.setMotors(40,40) # înainte
sleep(3)
pasare.setMotors(25,50) # întoarcere la stânga
sleep(4)
pasare.stop()
```

Este o idee bună să se verifice dacă utilizatorul a introdus valori valide, ce se poate face cu o declarație if-else, care permite programului să ia o decizie. Să presupunem că se dorește pornirea motoarelor Finch pentru un anumit număr de secunde: în primul rând se cer utilizatorului informații și se convertește răspunsul său la o valoare flotantă, apoi se pornesc motoarele pentru această perioadă de timp.

```
userResponse = input(”Timpul în secunde: ”)
timp = float(userResponse)
if (timp < 0): # Dacă timp este mai mic decât 0
   print(”Timp negativ nu este luat în calcul!”) # Eroare
else: # Altfel
   pasare.setMotors(100,0) # rulează pentru acel timp
   sleep(timp)
   pasare.stop()
```

```
directie = input(”Introduceți d sau s: ”)
if (direcție == ’d’):
   pasare.setMotors(50,25)
else:
   pasare.setMotors(25,50)
sleep(1)
pasare.setMotors(0,0)
```

Uneori se dorește să se verifice dacă două declarații booleene sunt adevărate. Se poate face acest lucru cu operatorii logici and și or.

```
userResponse = input(”Introduceți viteza (-100 to 100): ”)
viteza = int(userResponse)
if (viteza>=-100) and (viteza<=100): # Dacă ambele sunt
true
   pasare.setMotors(viteza,viteza) # Mișcare înainte
   sleep(1)
   pasare.stop()
else: # Altfel
   print(”Viteză nevalidă!”) # Eroare
```

```
userResponse=input(”Viteza pentru roata stângă(0-50): ”)
stânga = int(userResponse)
if (stânga >= 0) and (stânga <= 50):
   dreapta = 2*stânga
   pasare.setMotors(stânga,dreapta)
   sleep(5)
   pasare.setMotors(0,0)
else:
   print(”Eroare: Viteza nu este între 0 și 50.”)
```

Se pot utiliza operatori de comparație pentru a crea condiții booleene care utilizează alți senzori Finch, cum ar fi senzorul de distanță. Metoda getDistance() returnează distanța până la cel mai apropiat obiect în centimetri. Gama senzorilor de distanță Finch este de aproximativ 2-200 cm. Senzorul de distanță nu poate măsura un obiect care este apăsat direct pe acesta!.

```
print(pasare.getDistance())
if pasare.getDistance() < 30: # dacă aproape de senzor
   pasare.setTail(”all”,0,0,100) # Coada albastră
else:
   pasare.setTail(”all”,100,0,0) # Coada roșie
sleep(2)
pasare.stopAll()
```

```
if (pasare.getDistance() > 30): # Niciun obstacol
   pasare.setMove(”forward”,20,50)
else:
   pasare.setMove(”backward”,20,50)
```

Uneori se dorește continuarea verificării stării, atâta timp cât este adevărată, lucru ce se realizează utilizând o buclă while, ce repetă declarațiile din interiorul ei, atâta timp cât o expresie booleană este adevărată.

while pasare.getDistance() < 30: # distanta mai mica de 30
pasare.setBeak(100,0,0) # Red
pasare.setBeak(0,100,0) # Verde
sleep(1)
pasare.stopAll()
	while (pasare.getDistance()>30): #distanța mai mare de 30
	pasare.setMotors(50,50) # înainte
	pasare.stop()

while pasare.getDistance() > 20:

pasare.setTail("all",0,0,100)

sleep(3)

pasare.setTail("all",100,0,100)

sleep(3)

pasare.stopAll()

Se poate plasa o structură de control în interiorul alteia, care se numește imbricare, ce poate ajuta la crearea unor programe mai complexe.

while not pasare.getButton('A'): #Repeta până când butonul A este apăsat
if (pasare.getDistance() > 30): # Niciun obstacol
bird.setTail("all",0,100,0)
else:
bird.setTail("all",100,0,0)
pasare.stopAll()
	while not pasare.getButton('A'): #Repeta până când butonul A este apăsat
	if (pasare.getDistance() > 30): # Niciun obstacols
	pasare.setMotors(50,50) # Înainte
	else:
	pasare.setMove('B',10,50) # Înapoi
	pasare.setTurn('R',120,50) # Întoarcere
	pasare.stopAll()

Metoda getLight() returnează valoarea măsurată de un senzor de lumină de la 0 la 100 (fără unități). Această metodă necesită un parametru, un șir care indică dacă este vizat senzorul din dreapta sau din stânga. Deoarece getLight() returnează o valoare între 0 și 100, se poate apela această metodă într-o metodă Finch care necesită un parametru de la 0-100.

while not bird.getButton('A'):
pasare.setBeak(0,bird.getLight('R'),0)
# Control cioc cu senzorul drept 	
pasare.setTail("1",0,0,bird.getLight('L'))
pasare.setTail("2",0,0,bird.getLight('L'))
bird.stopAll()
sleep(1)
	while not pasare.getButton('A'):
	pasare.setBeak(0,100 - pasare.getLight('R'),0)
	# Control cioc cu senzorul drept
	pasare.setTail("all",0,0,100 - pasare.getLight('L'))
	bird.stopAll()
	sleep(1)
		while not (pasare.getButton('A') or pasare.getButton('B')):
		pasare.setMotors(pasare.getLight('R'), pasare.getLight('L'))
		pasare.stopAll()

Se poate utiliza senzorul de lumină pentru a controla comportamentul Finch cu o instrucțiune if-else sau o buclă while.

prag = 10
while (pasare.getLight('L')>prag):#Cât timp senzorul stâng detectează lumină
pasare.setTail("all",100,0,0)
sleep(0.1)
pasare.setTail("all",0,0,0)
sleep(0.1)
	while (pasare.getLight('L')>prag)and (pasare.getLight('R')>prag): #cât timp e lumină
	pasare.setMotors(50,50)
	pasare.stopAll()

if (pasare.getLight('L')<prag) and (pasare.getLight('R')<prag): # cât timp ambele detectează întuneric

pasare.setBeak(100,0,0)

pasare.setTail("all",100,0,0)

pasare.setMotors(100,0)

else:

```
    pasare.setBeak(0,100,0)
    pasare.setTail("all",0,100,0)
sleep(3)
pasare.stopAll()
```

Pentru un comportament mai puțin previzibil, se pot încorpora unele variații, astfel încât robotul să facă ceva ușor diferit de fiecare dată când rulează programul, putându-se utiliza un generator de numere aleatorii, care este o funcție care alege un număr aleatoriu de fiecare dată când este apelat. În Python, se utilizează randint() pentru a alege un întreg, aceasta având doi parametri care definesc intervalul de numere interesat (funcția trebuie importată din biblioteca random). Biblioteca random include și alte generatoare de numere aleatorii. De exemplu, random.random() generează un număr aleator între 0.0 și 1.0 (fără a include 1.0).

while (pasare.getLight('L')<prag) or (pasare.getLight('R')<prag):
  for i in range(4): #pornește fiecare dintre luminile cozii la o culoare aleatoare diferită
pasare.setTail(i+1,random.randint(0,100), random.randint(0,100), random.randint(0,100))
  sleep(1)
pasare.stopAll()
	while (pasare.getLight('L')<prag) or (pasare.getLight('R')<prag):
	  for i in range(4): #pornește fiecare dintre luminile cozii la o culoare aleatoare diferită pasare.setTail(i+1,random.randint(0,100), random.randint(0,100), random.randint(0,100))
	  sleep(5*random.random())
	bird.stopAll()

```
while (pasare.getLight('L')>prag) or (pasare.getLight('R')>prag):
    pasare.setBeak(100,0,0)
    bird.setMotors(-50,50) # Învârtire
    sleep(2*random.random()) #pentru o perioadă aleatoare de timp
    pasare.setMotors(0,0) # Stop
    pasare.setBeak(0,100,0)
    sleep(1)
pasare.stopAll()
```

Finch conține doi senzori de linie, care sunt senzori infraroșii care emit radiații infraroșii și măsoară cantitatea reflectată de suprafața de sub Finch. Metoda getLine() returnează valoarea măsurată de un senzor de linie de la 0 la 100 (fără unități). Această metodă necesită un parametru, un șir care indică interesul pentru senzorul din dreapta sau stânga.

while not pasare.getButton('A'):
  if (pasare.getLine('L')<prag) or (pasare.getLine('R')<prag):
    print("negru")
  else:
    print("alb")
	pasare.setMotors(30,30)
	while not (pasare.getLine('L')<prag or pasare.getLine('R')<prag):
	pass
	pasare.stop()

Cea mai obișnuită utilizare a senzorilor de linie este de a urmări o linie. Pentru a urmări partea dreaptă a unei linii negre cu senzorul de linie dreaptă, robotul ar trebui să vireze la dreapta atunci când este peste linia neagră (mai puțină radiație infraroșie reflectată) și la stânga atunci când este peste o suprafață luminoasă (mai multă radiație infraroșie reflectată).

```
while not pasare.getButton(’A’):
    if (pasare.getLine(’R’)<prag): # dacă este peste negru
        pasare.setMotors(20,0) # întoarce dreapta
    else:
        pasare.setMotors(0,20) # întoarce stânga
pasare.stop()
```

```
while not pasare.getButton(’A’):
    if (pasare.getDistance()<20): # Obstacle!
        pasare.setMotors(0,0) # Stop
    else: # altfel urmează linia
        if (pasare.getLine(’R’)<prag): # peste negru
            pasare.setMotors(20,0) # întoarce dreapta
        else:
            pasare.setMotors(0,20) # întoarce stânga
pasare.stop()
```

Prin utilizarea ambilor senzori de linie, Finch poate detecta locurile în care se ramifică o cale. Când Finch ajunge la punctul de ramificație într-o cale, ambii senzori de linie vor fi peste negru.

```
while not pasare.getButton(’A’):
    if (pasare.getLine(’R’)<prag) and (pasare.getLine(’L’)>prag): # dreapta peste negru și stânga peste alb
        pasare.setMotors(20,0) # întoarce dreapta
    elif (pasare.getLine(’R’)>prag) and (pasre.getLine(’L’)<prag): # dreapta peste alb și stânga peste negru pasare.setMotors(0,20) #întoarce stânga
    else: # altfel merge înainte
        pasare.setMotors(20,20)
pasare.stop()
```

```
while not pasare.getButton(’A’):
if (pasare.getLine(’R’)<prag) and (pasare.getLine(’L’)>prag): #dreptul peste negru și stângul peste alb
        pasare.setMotors(20,0) # întoarce dreapta
    elif (pasare.getLine(’R’)>prag) and (pasare.getLine(’L’)<prag): # dreptul peste alb și stângul peste negru
        pasare.setMotors(0,20) # întoarce stânga
    elif (pasare.getLine(’R’)<prag) and (pasare.getLine(’L’)<prag): # ambele peste negru
        pasare.setMotors(0,0) # Stop
        pasare.setTurn(’L’,45,50) # întoarcere spre stânga
        if (pasare.getDistance()<60): # un obstacol
            pasare.setTurn(’R’,90,50) # drumul din dreapta
        pasare.setMove(’F’,5,50) # trecere peste intersecție
    else: # ambele peste alb
        pasare.setMotors(20,20) # mergere înainte
pasare.stop()
```

Pentru a defini o funcție, se utilizează cuvântul cheie def, urmat cum se dorește să fie denumită funcția. Numele nu trebuie să conțină spații sau semne de punctuație. Numele este urmat de o pereche de paranteze și de două puncte. Toate declarațiile indentate după două puncte sunt conținutul funcției. După ce se definește o funcție, poate fi utilizat numele pentru a apela funcția respectivă. Funcțiile permit să reutilizarea cu ușurință a codului. Funcțiile sunt și un instrument de abstractizare, care este ideea că se pot face programele mai ușor de utilizat și de înțeles prin plasarea grupurilor de acțiuni autonome în cadrul funcțiilor. Un programator poate utiliza apoi funcțiile fără a înțelege detaliile codului din interiorul lor!

```
# funcție trasare pătrat
def trasarePatrat():
    for i in range(4):
        pasare.setMove(’F’,15,50)
        pasare.setTurn(’R’,90,50)
# trasarePatrat() # apel funcție
    for i in range(6):
        trasarePatrat()
    pasare.setTurn(’L’,60,50)
```

```
# functie trasare cerc
def trasareCerc():
    pasare.setMotors(40,80)
    sleep(4)
    pasare.setMotors(0,0)
# trasareCerc() # apel funcție
for i in range(8):
    drawCircle()
    bird.setTurn(’R’,45,50)
```

```
# funcție ce poate fi apelată (repetat) oricând se dorește urmarea unei linii.
def lineTrack():
  prag = 91
  if (pasare.getLine(’R’)<prag) and (pasare.getLine(’L’)>prag): #dreptul pe negru, stângul pe alb
    pasare.setMotors(30,0) # întoarce dreapta
  elif (pasare.getLine(’R’)>prag) and (pasare.getLine(’L’)<prag): # dreptul peste alb și stângul peste negru
    pasare.setMotors(0,30) # întoarcere stânga
  else: # altfel merge înainte
    pasare.setMotors(30,30)
# urmează linia până când se întâlnește un obstacol
while (pasare.getDistance() > 20):
    lineTrack()
pasare.stop()
```

```
def urmeazaZid():
  pasare.setMotors(20,30) # Arc până se întâlnește zid
  while (pasare.getDistance() > 30):
pass
  pasare.setMotors(0,0)
  pasare.setMove(’B’,10,50) # înapoi ușor
  pasare.setTurn(’R’,90,50) # întoarcere dreapta

while not(pasare.getButton(’A’)):
  followWall()
```

Se pot crea funcții care iau parametri. Este nevoie de un parametru numit dimensiune care este numit în interiorul parantezelor care urmează numele funcției, care creează o variabilă în interiorul funcției. Când apelați funcția, furnizați o valoare pentru parametru, iar funcția este executată cu variabila parametrului egală cu acea valoare.

```
def trasarePatrat2(marime):
  for i in range(4):
    pasare.setMove(’F’,size,50)
    pasare.setTurn(’R’,90,50)

trasarePatrat2(10) # apel funcție

for i in range(5):
    trasarePatrat2(random.randint(5,20))
```

```
def licărireTot(roșu, verde, albastru):
  pasare.setBeak(roșu, verde, albastru)
  pasare.setTail(”all”, roșu, verde, albastru)
  sleep(0.1)
  pasare.stopAll()
sleep(0.1)

for i in range(20): # Testare
  licărireTot(100,0,100)
```

Funcțiile pot returna și valori. De exemplu, o funcție ce returnează media valorilor senzorilor de lumină Finch. Codul care apelează această funcție poate utiliza apoi valoarea returnată.

```
def lightMean():
  return 0.5*(pasare.getLight(’L’)+pasare.getLight(’R’))

print(lightMean())
```

```
# funcție ce returnează True când Finch este intr-o anumită poziție și False altfel
def estePoziție():
  return pasare.getOrientation() == ”Poziție”
while estePoziție ():
  licărireTot(0,100,0)
```

Dacă se dorește redarea unei melodii cu Finch, este mai ușor să se utilizeze o listă, care, în Python, este un grup de valori. Se poate defini o listă plasând elementele sale în paranteze pătrate, separate prin virgule. O buclă for stabilește variabila i egal cu fiecare element dintr-o listă. Listele pot fi create cu funcția range(), dar se poate utiliza orice listă cu o buclă for. Pentru cântecele, a se vede siteul [8],

Se pot accesa elemente individuale dintr-o listă utilizând paranteze pătrate. Elementele listei sunt indexate de la 0 la lungimea listei minus 1. Funcția len() returnează lungimea unei liste. Se poate utiliza o buclă for cu funcția range() pentru a accesa elementele individuale ale unei liste.

```
note = [60,65,69,72,60] #Listă note
for i in note: #Pentru fiecare notă din listă
  pasare.playNote(i, 0.5) #redă nota
  sleep(0.5)
```

```
print(”Prima notă: ”, note[0])
print(”Ultima notă: ”, note[len(note) - 1])
```

```
for i in range(len(note)): #Pentru fiecare notă din listă
  pasare.playNote(note[i], 0.5) # redă nota
  sleep(0.5)
```

```
bătăi = [1,0.5,1,2,0.5]
for i in range(len(note)): #Pentru fiecare notă din listă
  pasare.playNote(note[i], bătăi[i]) #Redă nota
  sleep(bătăi[i])
```

Se pot utiliza liste pentru a stoca datele colectate de la utilizator.

distanţaMăsurată = [] # Creare listă goală
for i in range(15):
distanţaMăsurată.append(pasare.getDistance())
# Adaugă element la sfârşitul listei 	
sleep(1)
print(distanţaMăsurată)
	luminaMăsurată = [] # Creare listă goală
	for i in range(20): # Măsurare senzor stângă de 20 ori
	luminaMăsurată.append(pasare.getLight('L'))
	# Adăugare element la sfârşitul listei
	sleep(1)
		for i in range(len(luminaMasurata)):
		pasare.playNote(luminaMasurata [i] + 32, 0.5)
		sleep(0.5)

Finch conține doi senzori numiți codificatoare, care măsoară informații despre Finch însuși. Codificatoarele fac parte din roțile Finch și fiecare codificator măsoară cât de departe s-a rotit una dintre roți. Metodele setMove() și setTurn() utilizează codificatoarele pentru a determina când Finch a finalizat mișcarea dorită.

Înainte ca Finch să facă o mișcare ce se dorește măsurată, trebuie resetate codificatoarele apelând metoda resetEncoders(). Resetarea codificatoarelor setează valoarea ambelor codificatoare la 0 (pasare.resetEncoders()). După resetare, se poate citi valoarea fiecărui codificator utilizând metoda getEncoder(), carereturnează numărul de rotații pe care roata le-a mișcat de la ultima resetare. Mișcările înainte sunt pozitive, iar mișcările înapoi sunt negative.

pasare.resetEncoders() #Setare encodere la 0
pasare.setMotors(50,50) # Mișcare înainte pentru 1 s
sleep(1)
pasare.stop()
#Afișare cât de departe fiecare roată s-a mișcat
print('Rotații roata stângă: ', pasare.getEncoder('L'))
print('Rotații roata dreaptă: ', pasare.getEncoder('R'))
	#Funcția returnează distanța în cm pe care roata a parcurs-o de când encoderul a fost resetat
	def getDistanțaRoata(roata):
	diametru=5 #diametrul roții Finch
	circumferința=3.14159*diametru # circumferința roții Finch
	if roata == 'R' or roata == 'L':
	return pasare.getEncoder(wheel)*circumferința
	else:
	print("Roata nevalidă")
	return -1
	pasare.resetEncoders() #Setare encoder la 0
	pasare.setMotors(50,50) #Mișcare înainte pentru 1 s
	sleep(1)
	pasare.stop()
	#Afișarecât de departe fiecare roată s-a mișcat
	print('Distanța roata stângă: ', getDistanțaRoata ('L'))
	print('Distanța roata dreaptă: ', getDistanțaRoata ('R'))

```
prag = 70

pasare.resetEncoders()

pasare.setMotors(20,20)

while not (pasare.getLine('L')<prag or pasare.getLine('R')<prag):

    pass

pasare.stop()

print("S-a mișcat ", 0.5*(getWheelDistance('L')+getWheelDistance('R')), ' cm.')
```

Se pot utiliza codificatoarele pentru a afla cât de departe s-a întors robotul. Acest lucru necesită o anumită geometrie! Imaginați-vă că roata finch din stânga este staționară în timp ce roata din dreapta se mișcă. Finch se va deplasa într-un cerc de rază d, care este lățimea robotului. Distanța a pe care se mișcă roata din dreapta este o lungime a arcului de-a lungul acelui cerc. Acea lungime a arcului este lățimea ori unghiul θ pe care robotul s-a întors. Acest unghi este în radiani și poate fi convertit în grade înmulțindu-l cu factorul de conversie $\pi/180°$. $a = d \cdot \theta_{radiani} = \frac{\pi \cdot d \cdot \theta}{180}$, $\theta = \frac{180 \cdot a}{\pi \cdot d}$. Această ecuație permite aflarea a faptului cât de departe s-a deplasat Finch în funcție de distanța pe care a mișcat-o roata din dreapta și de lățimea robotului, care este de 10 cm.

Se poate utiliza această funcție pentru o situație mai generală. Dacă vitezele roților din dreapta și din stânga sunt ambele pozitive, dar nu egale, se poate calcula diferența dintre distanța parcursă de roata mai rapidă și distanța pe care o parcurge roata mai lentă. Dacă se apelează funcția cu această diferență, se va oferi unghiul în care robotul s-a întors.

```
def getUnghiÎntoarcere(distanța):
    d = 10 # lățimea robotului
    unghi=180*distanța/(3.14159*d)
  return unghi
```

```
pasare.resetEncoders()
pasare.setMotors(0,20)
  while getUnghiÎntoarcere(getDistanțaRoata ('R')) <= 360:
    pass
pasare.stop()
```

```
def trasareCerc(leftSpeed, rightSpeed):
    pasare.resetEncoders()
    pasare.setMotors(leftSpeed, rightSpeed)
    while getUnghiÎntoarcere(abs(getDistanțaRoata('R')-getDistanțaRoata('L'))) <= 360:
    pass
    bird.stop()
for i in range(5):
    trasareCerc(random.randint(0,50),50+random.randint(0,50))
  sleep(1)
```

Utilizarea busolei Finch spune direcția micro:bitului în raport cu nordul magnetic. Înainte de a utiliza busola, trebuie calibrată în conectorul BlueBird. După calibrare, se poate utiliza metoda getCompass() pentru a citi valoarea busolei. Această metodă nu necesită parametri și returnează valoarea busolei de la 0° și 359°. 0° corespunde direcției nordului magnetic. Unghiul crește pe măsură ce robotul se întoarce în sensul acelor de ceasornic, deci 90° este spre est, 180° este spre sud, iar 270° este vest. Pentru a utiliza busola, Finch trebuie să fie la nivelul solului, în caz contrar, busola nu va oferi măsurători utile.

```
#Funcța returnează un string ce reprezintă direcția în care este
îndreptat Finch
def direcția():
if pasare.getCompass()>30 and pasare.getCompass()<60:
    return 'NE'
  elif pasare.getCompass()>75 and pasare.getCompass()<105:
    return 'E'
  elif pasare.getCompass()>120 and pasare.getCompass()<150:
    return 'SE'
  elif pasare.getCompass()>165 and pasare.getCompass()<195:
    return 'S'
  elif pasare.getCompass()>210 and pasare.getCompass()<240:
    return 'SW'
  elif pasare.getCompass()>255 and pasare.getCompass()<285:
    return 'W'
  elif pasare.getCompass()>300 and pasare.getCompass()<330:
    return 'NW'
  elif pasare.getCompass()>345 or pasare.getCompass()<15:
    return 'N'
else:
    return ''
# Testare funcție
while not(pasare.getButton('A')):
  pasare.print(direcța())
  print(pasare.getCompass())
sleep(1)
```

```
while not(pasare.getButton('A')):
  if pasare.getDistance()>30: #Niciun obstacol
  if pasare.getCompass()>180: #ușor spre vest
      pasare setMotors(20,0)
    else: # ușor spre est
      pasare.setMotors(0,20)
    else:
      pasare.setMove('B',10,50)
      pasare setTurn('L',90, 50)
pasare.stopAll()
```

Dacă se dorește ca Finch să redea o notă diferită pentru fiecare direcție, o modalitate ar fi de a utiliza o declarație if-elif-else care să includă un caz pentru fiecare direcție. Se poate face codul mai eficient folosind un dicționar, care este similar cu o listă, cu excepția faptului că fiecare element constă dintr-o cheie și o valoare. În loc să se acceseze o valoare folosind indexul său (așa cum s-a făcut cu listele), se accesează o valoare plasând cheia în interiorul parantezelor pătrate. Când se utilizează un dicționar, adesea se dorește verificarea faptului dacă o anumită cheie se află în dicționar, lucru ce se face folosind cuvântul cheie in.

exempluDictionar = {'c':60, 'd': 62, 'e':64} #Dictionar cu 2 intrări
pasare.playNote(exempluDictionar['e'],0.5)
sleep(0.5)
nota = 'a'
if nota in exempluDictionar:
pasare.playNote(exempluDictionar[nota],0.5)
sleep(0.5)
	dictionarDirecție={'N':60, 'NE': 62, 'E':64, 'SE': 65, 'S': 67, 'SW': 69, 'W': 71, 'NW': 72}
	while not pasare.getButton('A'):
	direcțieCurentă=direction()
	if direcțieCurentă in dicționarDirecție:
	pasare.playNote(dictionarDirecție [direcțieCurentă],0.5)
	sleep(0.5)
	pasare.stopAll()

culoareDirecție={'N':[100,0,0], 'NE': [0,100,0], 'E':[0,0,100], 'SE': [100,0,100], 'S': [0,100,100], 'SW': [100,100,0], 'W': [100,100,100], 'NW': [50,100,50]}

while not pasare.getButton('A'):

direcțieCurrntă=direction()

if direcțieCurrntă in dictionarDirecție: pasare.setBeak(culoareDirecție[direcțieCurentă][0], culoareDirecție[direcțieCurentă][1], culoareDirecție[direcțieCurentă][2]) bird.setTail("all",directionColor[currentDirection][0], directionColor[currentDirection][1],directionColor[currentDirection][2])

bird.playNote(directionDictionary[currentDirection],0.5)

sleep(0.5)

bird.stopAll()

A fost folosit un obiect de tip Finch care este definit în Python ca o clasă, care este o structură de programare care include toate funcțiile și variabilele care se referă la un singur obiect. Un obiect poate fi ceva abstract ca o bază de date, dar în cazul Finch, este un obiect fizic!

Încapsularea funcțiilor și variabilelor în clase se numește programare orientată pe obiecte. Când se află în interiorul unei clase, o funcție se numește metodă. O clasă permite unui programator să utilizeze metodele clasei fără a fi nevoie să înțeleagă modul în care acestea sunt implementate. Acesta este un exemplu de abstractizare în informatică. Acest lucru înseamnă că detaliile sunt manipulate o dată într-o bucată de cod reutilizabil. Alții pot folosi apoi acel cod pentru a rezolva noi probleme fără a-și face griji cu privire la aceste detalii. Funcțiile sunt, de asemenea, un exemplu de abstractizare.

Pot fi conectați până la trei Finch (sau Hummingbird Bits sau micro:bits) cu Conectorul BlueBird sau BirdBrain Brython, apoi se utilizează clasa Finch pentru a crea mai multe obiecte Finch independente! Acest lucru înseamnă că se pot programa roboții să interacționeze unul cu celălalt. Când sunt mai multe obiecte Finch, trebuie să fie declarat fiecare apelând Finch() cu un parametru care este litera ("A", "B" sau "C") care identifică acel Finch în BlueBird Connector. Obiecte declarate pot accesa toate metodele Finch.

from BirdBrain import Finch

from time import sleep

pasare1 = Finch('A')

pasare2 = Finch('B')

for i in range(10): #Sincronizare blinking
    pasare1.setBeak(0,100,0)
    pasare2.setBeak(0,100,0)
    sleep(1)
    pasare1.setBeak(0,100,100)
    pasare2.setBeak(0,100,100)
    sleep(1)
pasare1.stopAll()
pasare2.stopAll()
	while pasare1.getOrientation() == "Level":
	    if pasare2.getButton('A'):
	      pasare1.setTail("all",0,0,100)
	    if pasare2.getButton('B'):
	      pasare1.setTail("all",0,0,0)
	pasare1.stopAll()
	pasare2.stopAll()

while not pasare1.getButton('A'):
  if pasare1.getOrientation() == "Cioc jos":
    pasare2.setMove('F',10,50)
  elif pasare1.getOrientation() == "Cioc sus":
    pasare2.setMove('B',10,50)
  elif pasare1.getOrientation()=="Înclinat stânga":
    pasare2.setTurn('L',90,50)
  elif pasare1.getOrientation()=="Înclinat dreapta":
    pasare2.setTurn('R',90,50)
	while not pasare1.getButton('A'):
	  acc = pasare1.getAcceleration()
	  print(acc)
	  if abs(acc[0]) < abs(acc[1]):
	    pasare2.setMotors(round(-3*acc[1]),round(-3*acc[1]))
	  else:
	    pasare2.setMotors(round(3*acc[0]),round(-3*acc[0]))
	pasare1.stopAll()
	pasare2.stopAll()

Poate fi explorată recursivitatea cu Finch. Recursivitatea este atunci când o funcție se apelează pe ea însăși. Se poate folosi recursivitatea pentru a desena fractali Koch. Pentru mai multe tipuri de fractali, se poate accesa siteul [7].

Se poate folosi algoritmul dat în *How to Think Like a Computer Scientist: Learning with Python 3 by Wentworth, Elkner, Downey și Meyers.* Pașii de mai jos pot fi utilizați pentru a desena un fractal Koch de ordinul n:

1. Desenați fractalul Koch de ordinul n - 1 și dimensiunea L / 3.
2. Virați la stânga la 60°.
3. Desenați fractalul Koch de ordinul n - 1 și dimensiunea L / 3.
4. Virați la dreapta la 120°.
5. Desenați fractalul Koch de ordinul n - 1 și dimensiunea L / 3.
6. Virați la stânga la 60°.
7. Desenați fractalul Koch de ordinul n - 1 și dimensiunea L / 3.

```
from BirdBrain import Finch # Import biblioteca Finch

from time import sleep # Import funcția sleep()

pasare = Finch()

# Funcția se apelează pe sine recursiv pentru a desena un fractal Koch.

def desenareFractal(ordin, distanță):

  if ordin == 0:

    pasare.setMove('F',distanța,50)

  else:

    desenareFractal(ordin - 1, round(distanța/3))

    bird.setTurn('L',60,50)

    desenareFractal(ordin - 1, round(distanța/3))

    bird.setTurn('R',120,50)
```

```
        desenareFractal(ordin - 1, round(distanța/3))
        bird.setTurn('L',60,50)
        desenareFractal(ordin - 1, round(distanța/3))
desenareFractal (1, 50)
```

3 Concluzii

Se poate spune că Finch este un robot conceput pentru a crește cu studenții. De la codificarea bazată pe pictograme și blocuri la programarea avansată bazată pe text (Python, Java), Finch este un instrument pentru școala elementară, AP ComputerScience și orice nivel intermediar, astfel încât acestea să poată satisface nevoile elevilor de la toate nivelurile de experiență.

Python cu robotul Finch este conceput pentru a oferi o explorare practică a Python și roboticii: se folosește Finch pentru a învăța și a practica o mare varietate de concepte de informatică, de la algoritmi la variabile, la bucle, la liste și multe altele. Se poate utiliza pentru abordarea strategiilor care folosesc robotica ca instrument pentru implicarea studenților în învățarea informaticii și a gândirii computaționale.

Bibliografie

[1] Learn Python Tutorial - javatpoint

[2] Python Programming Language - GeeksforGeeks

[3] Finch Robot 2.0 - Start Teaching - BirdBrain Technologies

[4] Toc |Pathfinders Online Institute (onwingspan.com)

[5] Data Structures - GeeksforGeeks

[6] 2-D L-Systems - Robert Dickau

[7] Note names, MIDI numbers and frequencies (unsw.edu.au)

[8] Human Benchmark - Reaction Time Test

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Maria-Crina Diaconu [1]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calcului $3^2 - 2^2 \cdot 3$ este:

   a) 9; b) 3; c) -3; d) -12.

2. Dacă $\frac{x}{3} = \frac{2}{5}$, atunci $5 \cdot x - 8$ este egal cu:

   a) -2; b) 0; c) 2; d) -1.

3. Produsul dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $2\sqrt{3}$ și $4\sqrt{3}$, este egal cu:

   a) $6\sqrt{3}$; b) 24; c) $18\sqrt{2}$; d) 12.

4. Dintre numerele $-\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{6}$, cel mai mare este:

   a) $-\frac{2}{3}$, ; b) $-\frac{1}{5}$, ; c) $-\frac{5}{6}$, ; d) $-\frac{5}{4}$, .

5. Inversul numărului $x = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ este:

   a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; c) $3\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Numărul de numere iraționale din mulțimea $M = \left\{\sqrt{0,(2)}, \sqrt{0,14}, \sqrt{0,(6)}, \sqrt{0,18}\right\}$ este:

   a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

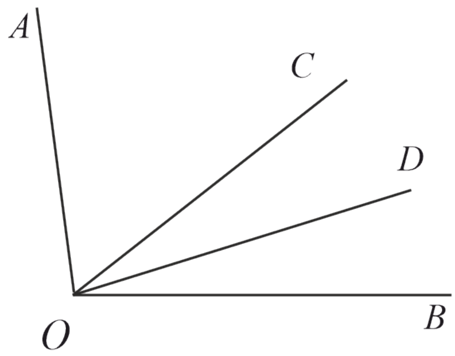
1. În figura alăturată punctele M, N, P sunt coliniare. Dacă X este mijlocul segmentului MN, segmentul MP are lungimea de 4 cm, iar segmentul MN are lungimea de 10 cm, atunci lungimea segmentului XP este egală cu:

   a) 1 cm; c) 2 cm;
   b) 5 cm; d) 6 cm.

---

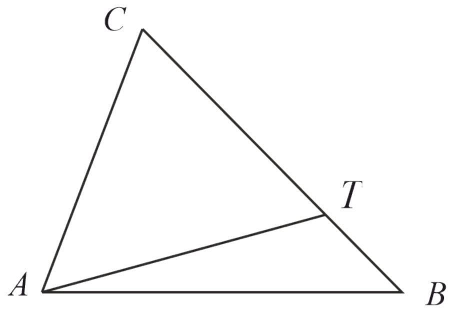
[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

2. În figua alăturată, semidreapta OC este bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și semidreapta OD este bisectoarea $\sphericalangle BOC$. Dacă măsura $\sphericalangle BOD = 25°$, atunci $\sphericalangle AOB$ are măsura de:



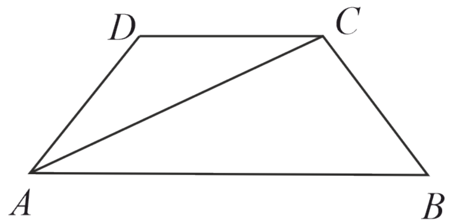
   a) $90°$; c) $50°$;
   b) $100°$; d) $75°$.

3. În figura alăturată este reprezentat $\triangle ABC$ cu aria de 12 cm^2. Punctul T se află pe segmentul BC, astfel încât $CB = 4 \cdot TP$. Aria $\triangle ATC$ este egală cu:



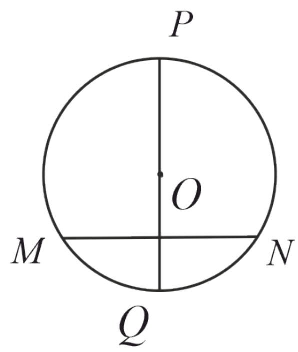
   a) 8 cm^2; c) 19 cm^2;
   b) 4 cm^2; d) 3 cm^2.

4. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AB și AC bisectoarea $\sphericalangle BAD$. Știind că $AB = 2AD = 12$ cm, atunci lungimea liniei mijlocii a trapezului este de:



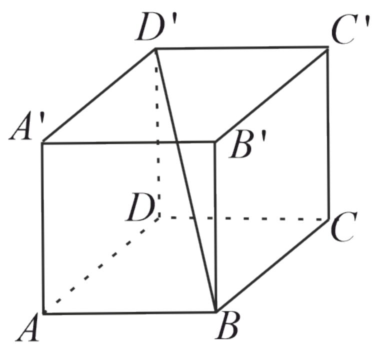
   a) 24 cm; c) 18 cm;
   b) 12 cm; d) 9 cm.

5. În figura alăturată este reprezentat un cerc de centru O, iar punctele $M, N \in \mathcal{C}(0, r)$ astfel încât $MN = 8$ cm și $\sphericalangle MON = 120°$. Perpendiculara dusă din O pe coarda MN intersectează cercul în punctele P și Q. Aria $\triangle MNQ$ este egală cu:



   a) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ cm^2; c) $24\sqrt{3}$ cm^2;
   b) 16 cm^2; d) $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$ cm^2.

6. Un cub are lungimea diagonalei egală cu $\sqrt{8}$ cm. Volumul cubului este egal cu:

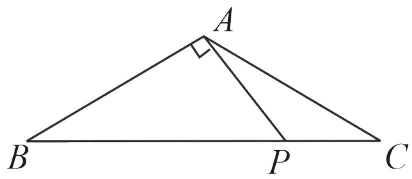


   a) $\dfrac{15\sqrt{8}}{2}$ cm^3; c) $\dfrac{12\sqrt{6}}{5}$ cm^3;
   b) $\dfrac{16\sqrt{6}}{9}$ cm^3; d) $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$ cm^3.

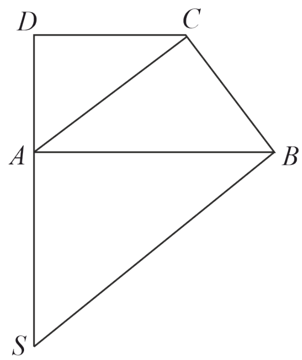
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

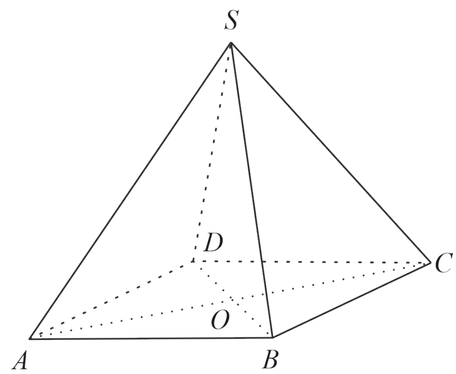
1. Un obiect s-a ieftinit cu 15% și apoi s-a scumpit cu 25%. Ultimul preț este egal cu 374 lei.
   a) Prețul inițial al obiectului poate fi 400 lei? Justificați.
   b) Determinați prețul inițial al obiectului.
2. Se consideră expresia: $E(x) = \left(x - 2 + \dfrac{1}{x+2}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
   a) Să se arate că $E(x) = \dfrac{1}{2}x(x^2 - 3)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $E(x) = 0$.
3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2a - 3) \cdot x + 1$, $a \in \mathbb{R}$.
   a) Aflați numărul real a, știind că reprezentarea grafică a funcției f conține punctul $A(-1, 1)$.
   b) Pentru $a = 1$, calculați aria triunghiului obținut din reprezentarea grafică a funcției și axele de coordonate.
4. În figura alăturată este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu $AB = 18$ cm, și $\sphericalangle BAC = 120°$. Punctul P este situat pe latura BC astfel încât $AP \perp AB$.



   a) Determinați m$\sphericalangle(APC)$.
   b) Calculați distanța de la punctul P la dreapta AC.
5. În trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, m$\sphericalangle(BAD) = 90°$ și m$\sphericalangle(ABC) = 45°$, $DC = 8$ cm și $AB = 15$ cm.
   a) Calculați aria trapezului $ABCD$.
   b) Dacă $BS \| AC$, unde $S \in AD$, determinați lungimea segmentului BS.



6. În figura alăturată este desenată o piramidă patrulateră regulată $SABCD$ cu laturile $AB = 6$ cm și $SA = 8$ cm. Punctul O este centrul bazei $ABCD$, iar punctele M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor AB, SA, SD, respectiv DC.
   a) Demonstrați că OP este paralelă cu planul (SBC).
   b) Calculați sinusul unghiului format de dreptele PQ și MN.



Testul 2

Daria Bădoi [2]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Scrierea numărului 2023 ca produs de puteri de numere prime distincte este:

   a) 17^3; b) $7 \cdot 17^2$; c) $7^2 \cdot 17^2$; d) $7^2 \cdot 17$.

2. Calculând 24% din 75, rezultatul obținut este egal cu:

   a) 12; b) 15; c) 18; d) 20.

3. Dacă $\dfrac{a}{10} = \dfrac{3}{b}$, atunci ab-30 este egal cu:

   a) 30; b) 0; c) 10; d) 3.

4. Produsul numerelor întregi pozitive din intervalul $(-3; 4)$ este:

   a) 4; b) 3; c) 6; d) 0.

5. Dinu, Maria, Toma și Dan calculează media geometrică a numerelor $3\sqrt{6} - \sqrt{5}$ și $3\sqrt{6}+\sqrt{5}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul alăturat. Răspunsul corect a fost dat de:

Dinu	Maria	Toma	Dan
$\sqrt{30}$	7	$2\sqrt{6}$	8

   a) Dinu; b) Maria; c) Toma; d) Dan.

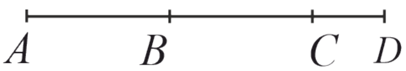
6. Un pieton se deplasează cu 9 km/h. Sofia afirmă: ,,Pietonul va parcurge 6 km în 40 minute.” Afirmația Sofiei este:

   a) adevărată; b) falsă.

SUBIECTUL al II-lea

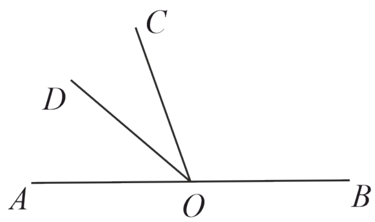
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D, $AB = 4$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 2$ cm. Valoarea raportului $\dfrac{AC}{AD}$ este egală cu:



   a) $0,25$; b) $0,80$; c) 2; d) $2,50$.

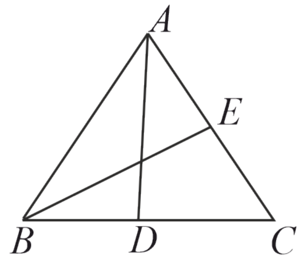
2. În figura alăturată unghiurile AOC și BOC sunt adiacente suplementare. Măsura unghiului BOC este egală cu 100°, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOC. Măsura unghiului DOB este egală cu:



   a) 140°; c) 100°;
   b) 40°; d) 80°.

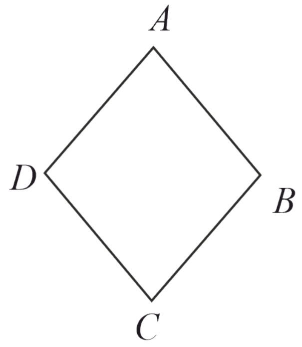
[2]Profesor, Școala Gimnazială ,,Academician Marin Voiculescu” Giurgiu, badoidaria@yahoo.com

3. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, $AB = AC = 12$ cm, $BC = 12\sqrt{3}$ cm. Medianele AD și BE se intersectează în punctul G. Lungimea segmentului GD este egală cu:



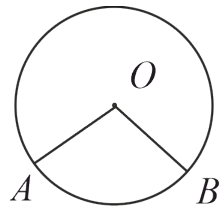
   a) 6; c) 4;
   b) $3\sqrt{2}$; d) 2.

4. În figura alăturată rombul $ABCD$ are măsura unghiului BAD egală cu $30°$ și lungimea laturii $AB = 6$ cm. Aria rombului $ABCD$ este egală cu:



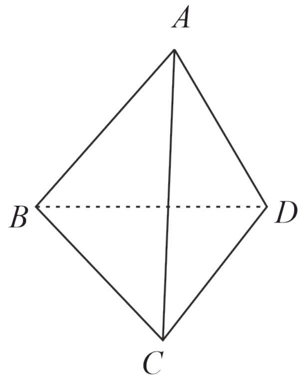
   a) 18 cm^2 c) $36\sqrt{2}$ cm^2
   b) 36 cm^2 d) $18\sqrt{3}$ cm^2.

5. În figura alăturată punctele A şi B se află pe cercul de centru O şi rază R, astfel încât măsura unghiului AOB este egală cu $80°$. Măsura arcului mare de cerc AB este egală cu:



   a) $80°$; c) $280°$;
   b) $160°$; d) $120°$.

6. În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului $ABCD$ este 48 cm. Suma ariilor tuturor fețelor tetraedrului este egală cu:



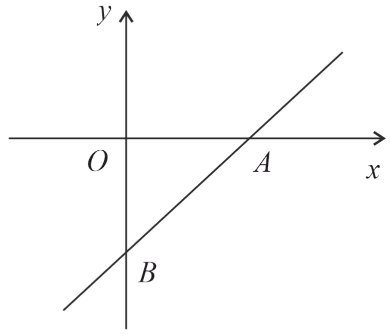
   a) $64\sqrt{3}$ cm^2; c) 96 cm^2;
   b) $48\sqrt{3}$ cm^2; d) 64 cm^2.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

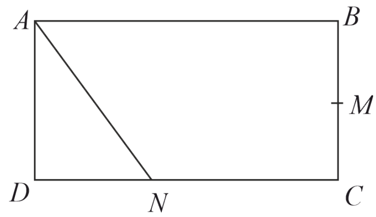
1. Dacă elevii unei clase sunt aşezaţi câte doi în bancă, rămân 6 elevi în picioare, iar dacă sunt aşezaţi câte trei în bancă, rămân trei bănci libere.
   a) Este posibil ca în clasa să fie zece bănci? Justificati răspunsul.
   b) Aflați numărul elevilor și băncilor din clasă.
2. Se consideră expresia: $E(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2}\right) : \frac{2x+1}{x^2+3x+2}$, unde x este număr real, $x \neq 0$, $x \neq -1$ și $x \neq -\frac{1}{2}$; $x \neq -2$
   a) Arată că $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.
   b) Dacă n este număr par, nenul, arată că numărul $N = \frac{1}{E(n)}$ este număr natural.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$.



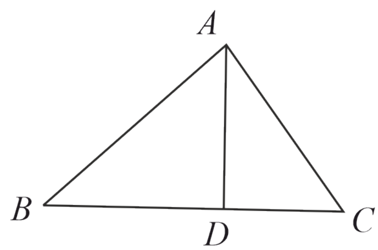
   a) Arată că $f(2) + f(3) = 1$.
   b) În sistemul de axe ortogonale xOy, se consideră punctul $M(1, 1)$. Arată că triunghiul AMB este dreptunghic în A, unde A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respective Oy.

4. În figura alaturată, $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 12$ cm și $AD = 4$ cm. Punctul M este mijlocul lui BC și $[AN$ este bisectoarea unghiului DAB.



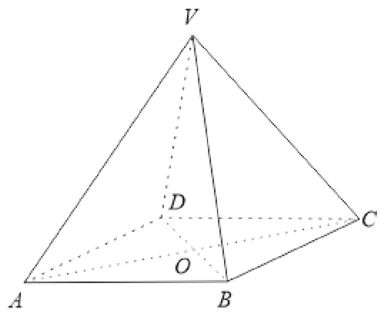
   a) Determinați aria dreptunghiului $ABCD$.
   b) Calculați aria $\triangle AMN$.

5. Figura alăturată reprezintă un triunghi ABC, cu măsura unghiului ABC egală cu $60°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $AB = 18$ cm și $BC = 24$ cm.



   a) Calculează lungimea segmentului CD.
   b) Arată că perimetrul triunghiului ABC este mai mic decât $63,9$ cm.

6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $AB = VA = 6$ cm. Punctul M este mijlocul muchiei BC.



   a) Arată că apotema piramidei $VABCD$ are lungimea de $3\sqrt{3}$ cm.
   b) Calculează distanța de la punctul M la planul (VAB).

Testul 3

Raluca Mihaela Georgescu [3]

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $\left[-\dfrac{3}{10}+0,(6)\right]\cdot\left(\dfrac{11}{30}\right)^{-1}$ este:

   a) 2; b) $\dfrac{1}{2}$; c) 3; d) 1.

2. Fie mulţimea $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3^x+3^{x+2}+3^{x+3}\leq 333\}$.Cardinalul mulţimii A este:

   a) 3; b) 4; c) 5; d) 1.

3. Dacă $\dfrac{x}{0,(1)}=\dfrac{0,(3)}{y}$, atunci $\left(\dfrac{4}{9}\right)^2-xy=$

   a) 2; b) $\dfrac{13}{81}$; c) $-\dfrac{14}{81}$; d) $\dfrac{11}{81}$.

4. O persoană are la bancă un depozit de 6000 lei, la care i se acordă o dobândă de 5% pe an. După 24 de luni, în depozitul bancar, persoana va avea:

   a) 6220 lei; b) 6615 lei; c) 6830 lei; d) 6500 lei.

5. Pătratul numărului $\dfrac{1}{3\sqrt{3}+3}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ este egal cu:

   a) $\dfrac{1}{6}$; b) $\dfrac{1}{36}$; c) $\dfrac{4}{9}$ d) $\dfrac{1}{12}$.

6. Andrei afirmă că numărul $n^2+5n+8,\ n\in\mathbb{N}$ este un număr par. Afirmaţia lui este:

   a) Adevărată; b) Falsă.

SUBIECTUL al II-lea

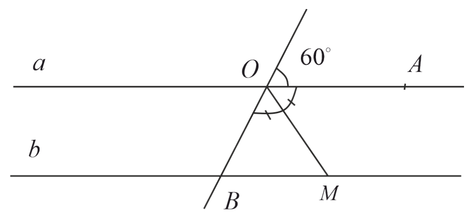
Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În jurul punctului O sunt patru unghiuri, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOA}$, astfel încât $\widehat{AOB}=3x-20°$, $\widehat{BOC}=2x+30°$, $\widehat{COD}=3x-60°$, $\widehat{DOA}=90°$. Măsura unghiului $\widehat{AOC}$ este:

   a) 120°; b) 150°; c) 220°; d) 180°.

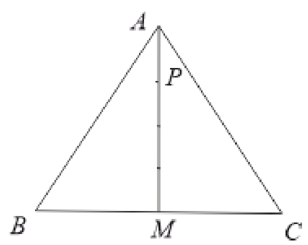
2. În figura alăturată se ştie că $a||b$, și OM este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$. Atunci $m(\widehat{OMB})=$

   a) 60°; c) 35°;
   b) 30°; d) 120°.



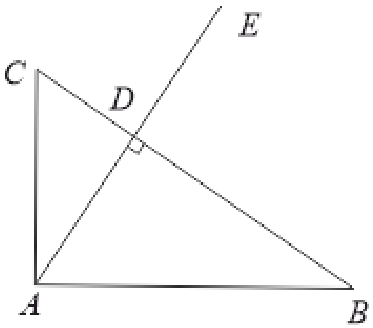
3. În triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC=10$ cm, $BC=16$cm, se consideră M mijlocul laturii BC şi $P\in AM$, astfel încât $AP=\frac{1}{4}AM$. Distanţa de la P la AC este:

   a) 2 cm; c) $1,2$ cm;
   b) $1,4$ cm; d) 3 cm.



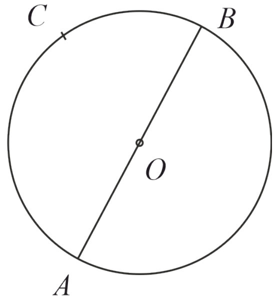
[3]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\measuredangle A = 90°$, se construieşte $AD \perp BC, D \in (BC)$. Fie E simetricul lui A faţă de D. Dacă $AB = 9$ cm şi $BC = 15$ cm, atunci perimetrul triunghiului ACE este:



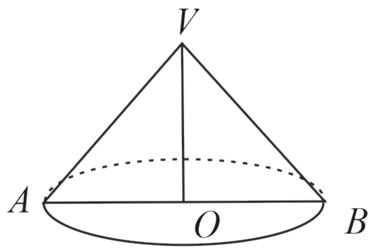
   a) $\frac{108}{5}$ cm; c) $\frac{192}{5} cm$;
   b) $\frac{72}{5}$ cm; d) $\frac{128}{5} cm$.

5. În cercul de centru O se consideră un diametru AB şi un punct C pe semicercul $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $\overset{\frown}{BC} = x + 30°$, $\overset{\frown}{AC} = 2x + 60°$ şi coarda $BC = 16$ cm, atunci aria triunghiului AOC este:



   a) 64 cm^2; c) 25 cm^2;
   b) $64\sqrt{3}$ cm; d) $64\sqrt{3}$ cm^2.

6. Într-un con circular drept raza şi înălţimea au aceeaşi lungime. Ştiind că generatoarea conului este $6\sqrt{2}$ cm, lungimea cercului de la baza conului este egală cu:

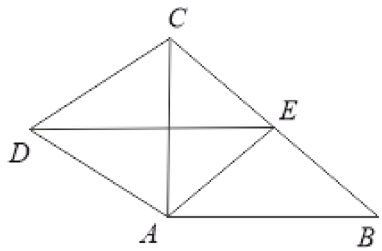


   a) 10π cm; c) 12π cm;
   b) $10\sqrt{2}\pi$ cm; d) 12 cm.

SUBIECTUL al III-lea

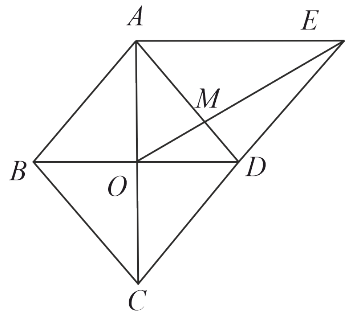
Scrieţi rezolvările complete.

1. Media aritmetică a două numere naturale a şi b este 60% din diferenţa lor. Suma dintre dublul lui a şi triplul lui b este 50.
   a) Este adevărat că raportul celor două numere este $\frac{2}{3}$? Justificaţi răspunsul.
   b) Aflaţi cele două numere.
2. Se consideră expresia $E(x) = 4(x+3)^2 - (x-5)^2 - 3(x+4)(x-4)$.
   a) Aduceţi expresia $E(x)$ la o formă mai simplă.
   b) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $|E(x)| = 9$.
3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3$, $a \in \mathbb{R}^*$.
   a) Determinaţi numărul real a, ştiind că $3f(1) + 2a = 19$.
   b) Pentru $a = 2$, fie A, B punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axele de coordonate şi $C(-4, 0)$. Aflaţi aria triunghiului ABC.
4. În exteriorul triunghiului dreptunghic ABC, $\measuredangle A = 90°$, cu $AB = 4$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm, se construieşte triunghiul echilateral DAC. Mediana din vârful D al triunghiului DAC se prelungeşte până intersectează latura BC în E.

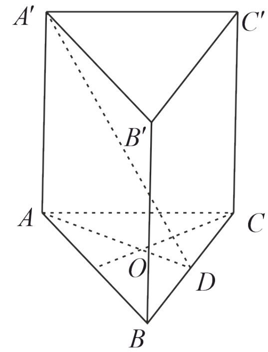


   a) Arătaţi că punctul E este mijlocul laturii BC.
   b) Calculaţi cât la sută din aria patrulaterului $AECD$ reprezintă aria triunghiului ABE.

5. Se consideră rombul $ABCD$ și punctul E simetricul lui C față de D.
   a) Să se arate că dreptele AE și AC sunt perpendiculare.
   b) Dacă $AD \cap EO = \{M\}$, $(\{O\} = AC \cap BD)$, arătaţi că prelungirea segmentului CM intersectează latura AE în mijlocul acesteia.



6. Fie prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu $AB = 6$ cm şi $A'D = 6\sqrt{3}$ cm şi D mijlocul muchiei BC.
   a) Calculaţi măsura unghiului format de dreptele CC' şi $A'D$.
   b) Se consideră punctul $O \in (AD)$ astfel încât $OD = \sqrt{3}$ cm. Aflaţi distanţa de la C la OC'.



Testul 4

Florentina-Alina Ştefan[4]

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{2023}\right)^0 + \sqrt{0,(1)} : 3^{-1}$ este:

   a) -1; b) 0; c) 2; d) 1.

2. Media geometrică a două numere naturale este 12. Ştiind că numerele sunt direct proporţionale cu 4 şi 9, media lor artimetică este egală cu:

   a) 13; b) 79; c) 58; d) 19.

3. Probabilitatea de a alege un număr divizibil cu 2 şi cu 5 din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 50\}$ este egală cu:

   a) 0,8; b) 0,4; c) 0,1; d) 0,3.

4. Scrisă sub formă de interval mulţimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} : (3x-1)^2\left(\frac{x}{3} - 2\right) < 0\right\}$ este:

   a) $(-\infty, 3)$; b) $(-\infty, 6)$; c) $(6, \infty)$; d) $(-\infty, 6]$;.

5. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Ştiind că 20% din ei au media 10 la matematică, 30% au media 10 la engleză, 20% au media 10 la limba română, iar restul media 10 la limba franceză, aflaţi câţi elevi au media 10 la limba franceză?

   a) 7; b) 4; c) 5; d) 9.

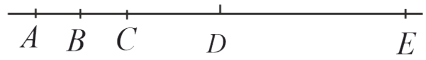
6. Andrei afirmă că relaţia următoare este adevărată: $\dfrac{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Afirmaţia lui este: a) adevărată; b) falsă.

---

[4]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, florentina.stefan@upit.ro

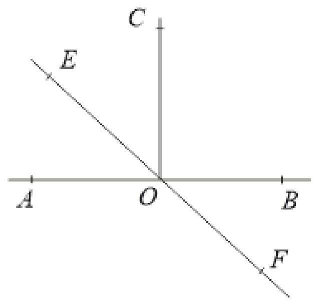
SUBIECTUL al II-lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect.



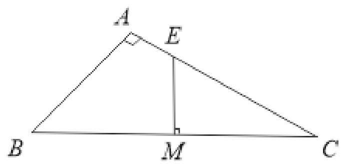
1. În figura alăturată se consideră lungimea segmentului AE egală cu 80 cm. Ştiind că punctul C este simetricul lui A faţă de B, punctul D este simetricul lui A faţă de C, iar punctul E este simetricul lui A faţă de D. Raportul lungimilor segmentelor AB şi DE este egal cu:

   a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{5}$.



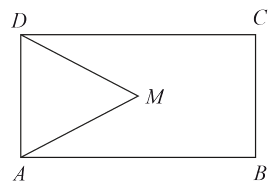
2. În figura alăturată dreptele AB şi CO sunt perpendiculare, EO este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$, iar semidreptele OE şi OF sunt semidrepte opuse. Măsura unghiului $\angle COF$ este egală cu:

   a) 120°; c) 135°;
   b) 130°; d) 110°.



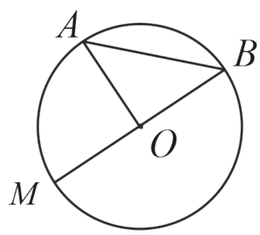
3. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu lungimile laturilor $BC = 10$ cm, $AB = 6$ cm. Mediatoarea ME a segmentului BC intersectează latura AC în punctul E. Aria triunghiului MEC este egală cu:

   a) 6 cm^2; c) $\frac{75}{8}$ cm^2;
   b) 2 cm^2; d) 1 cm^2.



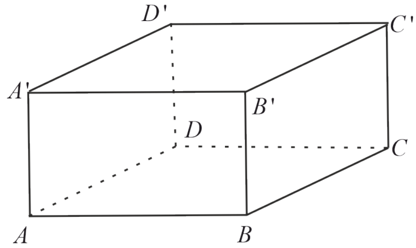
4. În interiorul dreptunghiului $ABCD$ cu lungimile laturilor $AB = 10$ cm, $AD = 6$ cm se consideră triunghiul isoscel DAM, cu $DM = MA$. Raportul dintre aria triunghiului DMC şi aria dreptunghiului $ABCD$ este egal cu:

   a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{5}$.



5. În cercul din figura alăturată se consideră diametrul MB şi un punct pe cerc A, astfel încât triunghiul AOB să fie echilateral. Măsura unghiului AMB este egală cu:

   a) 60°; c) 120°;
   b) 30°; d) 90°;



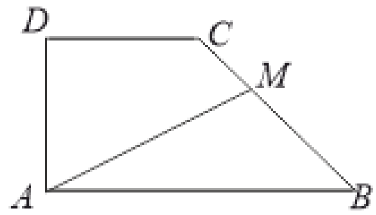
6. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimile laturilor $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $D'B = 5\sqrt{2}$ cm. Sinusul unghiului format de dreptele AD şi BC' este egal cu:

   a) $\frac{1}{2}$. c) $\frac{3}{2}$.
   b) $\frac{4}{5}$. d) $\frac{3}{5}$.

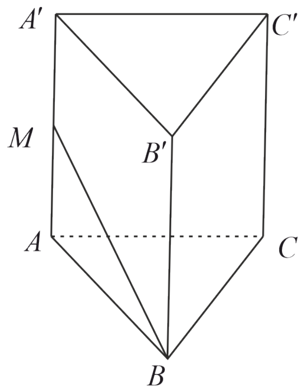
SUBIECTUL al III-lea

Scrieţi rezolvările complete.

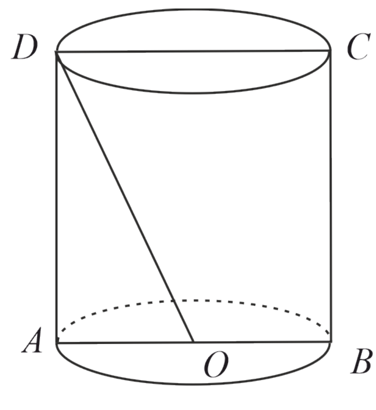
1. Se consideră numerele de forma $x = \overline{ab} + \overline{1ab} + \overline{11ab} + \overline{111ab}$, unde a, b cifre.
   a) Verificaţi dacă x este divizibil cu 4. Justificaţi răspunsul.
   b) Dacă $x = 12392$, aflaţi cifrele a, b.
2. Se consideră expresia $E(x) = x^2(x^2+2) - (x^2-3)^2 - 5(x-4)(x+4) - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Arătaţi că $(x^2-3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
   b) Dacă x este un număr par, studiaţi paritatea expresiei $\frac{E(x)}{3} + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
3. Se consideră funcţia liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.
   a) Determinaţi media geometrică a numerelor $f(\sqrt{5})$ şi $f(-\sqrt{5})$.
   b) Verificaţi dacă dreapta ce reprezintă graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta ce reprezintă graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$.
4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu măsurile unghiurilor $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, având lungimile laturilor $AD = DC = 6$ cm, $AB = 14$ cm. Se consideră punctul M pe latura BC astfel încât $\frac{CM}{MB} = \frac{1}{3}$. Să se caculeze:
   a) valoarea $\sin \sphericalangle B + \cos \sphericalangle B$;
   b) aria patrulaterului $AMCD$.



5. În prisma triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$ cu lungimile laturilor $AB = 6$ cm şi $AA' = 10$ cm, se consideră punctul $M \in AA'$ astfel încât $MB]$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABB'$. Să se determine:
   a) perimetrul şi aria desfăşurării suprafeţei laterale a prismei.
   b) sinusul unghiului format de dreptele MB şi MC.



6. Un cilindru circular drept are aria desfăşurării laterale egală cu 48π cm^2. Dacă lungimea generatoarei este egală cu 6 cm, calculaţi:
   a) aria discului ce reprezintă baza cilindrului;
   b) se notează cu $ABCD$ secţiunea axială a cilindrului și cu O centrul bazei. Aflaţi distanţa de la punctul A la dreapta DO.



Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I

1. Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ știind că $b_2 = 3$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axa Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x + \sqrt{x+1} = 5$.
4. Determinați termenul din dezvoltarea $\left(3x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, care-l conține pe x^4.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$, $B(-2, 2)$ și $C(4, 1)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta determinată de punctele B și C.
6. Calculați $\sin 2x$, știind că $(\sin x + 3\cos x)^2 = 3 + 8\cos^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 3x & 1-3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
   a) Arătați că $\det\left(A^3(-1)\right) = 125$.
   b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 4xy)$, pentru orice numere reale x și y.
   c) Determinați numărul real x știind că $A(2022^x) \cdot A(2022^x) = A(-2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 5$, unde m este număr real.
   a) Determinați numărul real m știind că $x = 1$ este rădăcină a polinomului f.
   b) Determinați numărul real m știind că restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X + 1$ este $2X - 6$.
   c) Determinați valorile întregi ale lui m astfel încât $x_1^4 + x_1^3 + x_2^4 + x_2^3 + x_3^4 + x_3^3 \leq 17$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.
   a) Arătați că panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 3$ este egală cu 0.
   b) Determinați coordonatele punctului de intersecție ale celor două asimptote ale graficului funcției f.
   c) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \sin 2x$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{e^x} dx = \frac{1}{2}$.
   b) Calculați $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} dx$.
   c) Arătați că suprafața plană determinată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$ are aria egală cu $\frac{2\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)}{5}$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 2

Maria-Crina Diaconu [2]

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $a^2 \in \mathbb{N}^*$ dacă $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 3$. Determinați numerele reale m pentru care dreapta $y = 2mx - 1$ intersectează graficul funcției într-un punct cu ordonata -5.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:
$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$$
4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$. Determinați numărul submulțimilor lui M care au cel puțin cinci elemente.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 3)$ și $B(3, -5)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.
6. Determinați numerele reale $x \in [0, \pi]$, pentru care $\sin 2x = \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_3 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Arătați că $\det(M(1)) = 7$.
   b) Determinați numărul real a pentru care $M(a)$ este inversabilă.
   c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $M(1) \cdot X \cdot M(-1) = M(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x - 3y - 12$.
   a) Calculați $(1 \circ 2) \circ 3$.
   b) Determinați numărul natural n astfel încât $n \circ n = n$.
   c) Arătați că legea de compoziție „$\circ$" nu admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + \ln \dfrac{x-2}{x+2}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$, $x \in (2, \infty)$.
   b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   c) Demonstrați că $f\left(\dfrac{\sqrt{37}}{3}\right) < f\left(\dfrac{\sqrt{37}}{2}\right)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_1^e \left(1 + x + x^2\right) f(x) \ln x dx = \frac{e^2+1}{4}$.
   b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.
   c) Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, crynutza_25@yahoo.com

Testul 3

Marius Macarie [3]

SUBIECTUL I

1. Calculați modulul numărului complex $z = (1 - i)^8$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 1$, unde m este un număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat deasupra axei Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\lg(2x - 3) = \lg(4x^2 - 4x + 1)$.
4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul de submulțimi ordonate ale lui M care au cel puțin două elemente.
5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = (m + 2)\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$ șă fie ortogonali.
6. Calculați $\operatorname{ctg} x$, $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x = -\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x + 2y + mz = m \end{cases}$ unde m este număr real.
   a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
   b) Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, rezolvați sistemul de ecuații.
   c) Aflați inversa matricei $A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3(x + y - 2) - x \cdot y$.
   a) Arătați că $x \circ y = 3 - (x - 3)(y - 3)$, pentru orice numere reale x și y.
   b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 1) \circ (x + 1) \circ (x + 1) = 11$.
   c) Calculați $\sqrt[3]{-2022} \circ \sqrt[3]{-2021} \circ \ldots \circ \sqrt[3]{2021} \circ \sqrt[3]{2022}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)\ln(x + 2) - x$.
   a) Arătați că $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 0$.
   b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
   c) Demonstrați că graficul funcției f nu admite asimptote verticale.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot e^{2x}$.
   a) Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x) \cdot e^{-2x} dx = \frac{20}{3}$.
   b) Calculați $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x^3} f(\ln x) dx$.
   c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $\frac{2e^2 - 1}{2}$.

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

Testul 4

Florentina-Alina Ştefan[4]

SUBIECTUL I

1. Determinați partea imaginară a numărului complex $z = (3+i)(2-i)$.
2. Determinați valorile parametrului real m astfel încât axa Ox să fie tangentă parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+2) = \log_2(x^2 + x - 2)$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta sa aibă cifra unităților divizibilă cu 3.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,7)$, $B(-3,5)$ și $C(2,8)$. Determinați ecuația medianei din C.
6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 3$, $AC = 6$ și $\sphericalangle A = 30°$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 3-a & 2 & 0 \\ 2 & 3-a & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.
   a) Calculați $\det(A(-1))$.
   b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricele $A(a)$ sunt inversabile.
   c) Determinați $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, știind că $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $*$, $x * y = 2^{x+y} + 2^x + 2^y$.
   a) Calculați $1 * 0$.
   b) Rezolvați ecuația $x * (-x) = 3$.
   c) Determinați numerele naturale m și n astfel încât $m * n = 26$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2) - \dfrac{2x-4}{x}$.
   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2}$.
   b) Determinați coordonatele punctului de extrem al funcției.
   c) Demonstrați că $2\ln x + \dfrac{4}{x} \geq 2 + 2\ln 2$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.
2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3\sqrt{x^2+4}$.
   a) Arătați că $\int\limits_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}} dx = 4$.
   b) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.
   c) Determinați $a \in \mathbb{N}^*$, știind că $\int\limits_0^a f(x)f'(x)dx = \dfrac{5}{2}$.

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, florentina.stefan@upit.ro

Testul 5

Raluca Mihaela Georgescu [5]

SUBIECTUL I

1. Determinați modulul numărului complex $z = \dfrac{3+2i}{2-3i}$.
2. Determinați parametrul real m astfel încât graficele funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 10x + 9$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 5$ să aibă un singur punct de intersecție.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{x + \log_2 16}$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $n + 3$ să fie divizibil cu 17.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, 7)$, $B(-1, 3)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.
6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = \sqrt{10}$, $AC = 6$ și $\operatorname{tg}(\sphericalangle A) = 3$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $A(x) = xI_2 + A$, cu $x \in \mathbb{R}$.

   a) Calculați $\det(A(1))$.
   b) Arătați că $(A(x))^2 = xA(x) + xA + 4I_2$.
   c) Determinați valorile reale ale lui x astfel încât $\det(A(x))^4 = 256$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $*$, $x * y = xy + x + 2y$.

   a) Calculați $2 * (-3)$.
   b) Rezolvați ecuația $x * x = 4$.
   c) Determinați numerele naturale m și n astfel încât $m * n = 6$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$.

   a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(\sqrt{x^2+1} - 2)}{x^2 + 1}$.
   b) Găsiți intervalele de monotonie ale funcției.
   c) Demonstrați că $\sqrt{x^2 + 1} \leq 1 + \ln(x^2 + 1)$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x + \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

   a) Arătați că $\int\limits_0^1 (f(x) - x^2 e^x) dx = \dfrac{\pi}{4}$.
   b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
   c) Determinați $a > 0$, știind că $\int\limits_0^a \left(f(x) - \dfrac{1}{x^2 + 1} \right) dx = e^a - 2$.

[5] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Marius Macarie [1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătaţi că numărul $n = \left(\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_{\frac{1}{3}} 3\right) : 0,(3)$ este întreg.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 1$. Determinaţi numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) = (g \circ f)(-a)$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2 = 0$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele impare.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,-1)$ şi $C(1,7)$. Determinaţi ecuaţia dreptei OG, ştiind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

6. Determinaţi $\cos(\pi + 2x)$, ştiind că x este un număr real şi $\sin x = \dfrac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ mx + 2y + z = 4m \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, notăm cu S_m mulţimea soluţiilor reale ale sistemului.

a) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

b) Arătaţi că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

c) Să se determine $\min\{x^2 + y^2 + z^2 | (x,y,z) \in S_1\}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + mX - 2$, unde m este un număr real.

a) Determinaţi numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g = X - 1$.

b) Pentru $m = 4$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

c) Determinaţi numărul real m astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{e^x}$.

a) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

b) Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, macariem@yahoo.com

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x \cdot e^{-x}}$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 2}$.

a) Arătaţi că $\int_3^4 \left(f(x) - \frac{2}{x-2}\right) dx = \frac{7}{2}$.

b) Arătaţi că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}] \setminus \{2\}$.

c) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Testul 2

Marius Macarie [2]

SUBIECTUL I

1. Determinaţi partea reală a numărului complex $z = \left(\dfrac{2 + 3i}{3 - 2i}\right)^{2022}$.
2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 2$. Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu dreapta de ecuaţie $y = -2x - 7$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(2x + 6) = 1 + 2 \lg(2x - 3)$.
4. Determinaţi termenul care-l conţine pe x^4 din dezvoltarea $\left(2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^6$, unde $x \in \mathbb{R}^*$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, -2)$ şi $H(2, 4)$. Știind că H este ortocentrul triunghiului MNP, determinaţi panta dreptei NP.
6. Determinaţi $x \in [0, 2\pi)$ pentru care $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2-a & 2 & 1 \\ 1 & 3-a & 1 \\ 1 & 2 & 2-a \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (2-a)x + 2y + z = 0 \\ x + (3-a)y + z = 0 \\ x + 2y + (2-a)z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
   a) Determinaţi numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.
   b) Determinaţi inversa matricei $A(2)$.
   c) Pentru $a = 5$, determinaţi soluţiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se defineşte legea de compoziţie „$\circ$” prin $z_1 \circ z_2 = z_1 \cdot z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
   a) Demonstraţi că $z_1 \circ z_2 = (z_1 + i)(z_2 + i) - i$, pentru orice numere complexe z_1 şi z_2.
   b) Determinaţi simetricul elementului $z = 1 - 2i$ în raport cu legea „$\circ$”.
   c) Arătaţi că $\underbrace{z \circ z \circ \ldots \circ z}_{\text{de } n \text{ ori}} = (z + i)^n - i$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $z \in \mathbb{C}$.

---

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, macariem@yahoo.com

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.
   a) Arătaţi că $(x^2 + 4) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
   b) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
   c) Arătaţi că funcţia f nu este surjectivă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{2x+3}dx$.
   a) Calculaţi I_1 şi I_2.
   b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ verifică relaţia $2I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$.

Testul 3

Raluca-Mihaela Georgescu [3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătaţi că numărul $(1 + i)^4 + |3 + 4i|$ este natural.

2. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât distanţa dintre punctele de intersecţie ale graficului funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax - 3$ cu axa Ox să fie 4.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x} - 5^{x+1} + \log_2 64 = \log_4 16$.

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând o submulţime din mulţimea submulţimilor nevide ale unei mulţimi cu 6 elemente, aceasta să aibă trei elemente.

5. În reperul cartezian XOY se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(1, 5)$ şi $C(-5, 3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este paralelă cu mediatoarea segmentului BC.

6. Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ şi raza cercului circumscris triunghiului este $R = 2$ cm.

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} (a+1)x - y + z & = & a+3 \\ x + (a+1)y - 2z & = & a-4 \\ -x + y + z & = & a+4 \end{cases}$, unde a este un parametru real.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să aibă soluţie unică.

b) Verificaţi dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie incompatibil.

c) Ştiind că sistemul are soluţie unică, să se determine $a > 0$, astfel încât soluţia sistemului să fie în progresie geometrică.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie "$*$", $x * y = xy + ax + by + 2$.

a) Ştiind că legea este asociativă, determinaţi valorile posibile pentru a şi b.

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, gemiral@yahoo.com

b) Pentru $a = b = 2$, rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x * x = e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziţie.

c) Pentru $a = b = -1$, calculaţi $\lg 1 * \lg 2 * \cdots * \lg 2022$.

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x = e$, situat pe graficul funcţiei f, unde e este numărul lui Euler.

c) Determinaţi numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) \cdot e^{-x}$.

a) Calculaţi $\int\limits_1^2 \frac{f(x)}{\ln(x^2+1)} dx$.

b) Calculaţi $\int\limits_0^1 f(x)e^x dx$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int\limits_0^x f(t)dt$.

Testul 4

Alina Fulga [4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Arătaţi că numărul $-1 - \sqrt{2}$ este soluţie a ecuaţiei $z^2 + 2z + 3.$.

2. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = 3x + a$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} = x^2 - 3a$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(f \circ g)(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + 3$.

4. Calculaţi $C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{16}^{12} + C_{17}^{13} - C_{18}^{13}$.

5. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = m\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = (m-2)\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Determinaţi $m > 0$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ să fie perpendiculari.

6. Dacă $a \in [0, 2\pi]$ astfel încât $\sin a + \cos a = \frac{1}{3}$, calculaţi $\sin 2a$.

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie sistemul de ecuaţii $\begin{cases} a + 3b + 5c = 5 \\ 2a + b - 3c = 3 \\ 5a - 2b + 7c = 3 \end{cases}$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

[4]Student Matematică, anul III, Universitatea din Piteşti, alina.fulga2002@gmail.com

a) Calculaţi $\det A$.

b) Calculaţi $A^3 - A^2 + 2A$.

c) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Se consideră pe $\mathbb{R}$ legea de compoziţie dată de $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Calculaţi $20 * 23$.

b) Arătaţi că legea de compoziţie "$*$" admite element neutru.

c) Calculaţi $1 * 2 * 3 * \cdots * 2023$.

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-1}{x} - \ln x$.

a) Calculaţi derivata funţiei f.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Demonstraţi că graficul lui f are o unică asimptotă.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2023} dx$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că $I_{n+2} + 2023 \cdot I_n = \dfrac{1}{n+1}, \forall n > 0$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Testul 5

Antonio-Mihail Nuică [5]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze $\left| \dfrac{-1+2i}{3-2i+i^3} \right|$.

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $x(f \circ f)(x) + 1 > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$, $x \in \mathbb{R}$).

3. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_3(\log_2(\log_5 x)) = 0$.

4. Să se calculeze $C_9^1 + C_9^3 + C_9^5 + C_9^7 + C_9^9$.

5. Fie vectorii $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{i} - a\overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - (a+1)\overrightarrow{j}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ să fie perpendiculari.

6. Să se calculeze $\cos 1° \cdot \cos 2° \cdot \ldots \cdot \cos 2023°$.

SUBIECTUL al II-lea (30p)

[5]Lect. univ. dr., Universitatea din Piteşti, antonio.nuica@upb.ro

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $G := \{A(x) = I_2 + xA \,|\, x \neq -1/4\}$.

a) Să se arate că $A^2 = 4A$.

b) Să se arate că G este parte stabilă în raport cu înmulţirea matricilor.

c) Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ, unde ”$\cdot$” este înmulţirea matricilor.

2. Fie polinomul $f = X^4 - 4X^2 + 16$.

a) Să se arate că $f(\sqrt{3} - i) = 0$.

b) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(z) = 0$.

c) Să se descompună polinomul în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$ şi în $\mathbb{C}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$, $x \neq 1$.

a) Să se calculeze f'.

b) Sše determine intervalele de monotonie ale lui f.

c) Să se determine asimptotele la graficul lui f.

2. Fie $I(a, b, n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{ax + b}{\sqrt[n]{x^2 + 1}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $I(0, 1, 2)$.

b) Să se calculeze $I(1, 1, 2)$.

c) Să se calculeze $I(1, 0, 4)$.

Testul 6

Daniela Curpene [6]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se arate că $x = (1 - i)^{2024}$ este un număr real pozitiv.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + m$. Să se determine cea mai mare valoare întreagă a lui m astfel încât vârful parabolei (graficul lui f) să fie în cadranul IV.

3. Să se reazolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_2(x^2 + 1) = -3$.

4. Să se determine numărul termenilor iraţionali din dezvoltarea $(1 + \sqrt[5]{5})^{100}$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta $d : x + 2y - 1 = 0$ şi punctul $A(1, 0)$ ce aparţine dreptei d. Să se determine punctele B ce se află pe dreapta d astfel încât $AB = 2\sqrt{6}$.

6. Se consideră punctele A, B, C, necoliniare, astfel încât $AB = 4$, $AC = 10$ şi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$. Să se determine lungimea segmentului BC.

SUBIECTUL al II-lea (30p)

[6]Doctorand, Universitatea din Pitești, daniela.curpene@yahoo.com

1. Fie $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \\ 5a^2 & 5b^2 & 5c^2 \end{pmatrix}$ şi $D(a,b,c)$ determinantul acesteia (unde a, b, $c \in \mathbb{R}$).

a) Să se calculeze $D(1,0,-1)$.

b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $A(x,0,-1)$ să aibă rangul 2.

c) Să se arate că dacă $D(a,b,c) = 0$ şi $a \neq b$, atunci $a = c$ sau $b = c$.

2. Pe mulţimea $G = (-2, \infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = xy + 2(x + y) + 2$.

a) Să se determine inversul numărului $x = \sqrt{2}$ în raport cu legea "$\circ$".

b) Să se rezolve în G ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.

c) Să se arate că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+2)$ este izomorfism între grupurile $(G, \circ)$ şi $(\mathbb{R}, +)$.

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 5x + 2024$.

a) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{f(-x)}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei.

c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $f(x) - 2024 = m$ are trei soluţii reale distincte.

2. Se consideră $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2024}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Sše calculeze I_2.

b) Să se arate că $I_4 = \dfrac{1}{3} - 2024 I_2$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Raluca Mihaela Georgescu[1]

SUBIECTUL I

Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} mx+2y-2z & = & m+2 \\ -4x+(m-1)y+3z & = & m-8 \\ 3x-2y+(m-2)z & = & 4 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că sistemul este compatibil pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
b) Pentru $m = 1$ să se determine soluția $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ astfel încât $x_0,\ y_0,\ z_0$ să fie în progresie aritmetică.
c) Dacă $A(m) \in \mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$ reprezintă matricea atașată sistemului, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $tr(A(m))^2 = -26$.
d) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$ din ecuația $A(2) \cdot X - \ tr(A(2)) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 17 & -6 & 6 \\ 12 & 20 & -9 \\ -9 & 6 & 23 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

a) Să se arate că $f'(0) + f''(0) = 0$.
b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)+\frac{4}{25}}{x-1}$.
c) Să se calculeze $\int\limits_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.
d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x\int\limits_0^x \dfrac{f''(t)\cdot f(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}\mathrm{d}t$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate XOY se consideră triunghiul ABC, cu $A(1,6)$, $B(5,2)$ și punctul $Q(3,2)$, unde $\{Q\} = CP \bigcap AM$ și CP este înălțimea din C, iar AM este mediana din A în triunghiul ABC.

a) Să se determine cooordonalele punctului C.
b) Să se calculeze lungimea vectorului $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.
c) Dacă prin A se duce o paralelă la BC, care întâlnește pe CP în N, să se afle aria triunghiului ANC.
d) Să se determine valoarea raportului dintre perimetrele triunghiurilor ΔANP și ΔCPB.

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

SUBIECTUL I

Fie matricele pătratice $A(a) \in \mathcal{M}_3[\mathbb{R}]$, $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & a & 0 \\ 0 & a & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine a astfel încât $A(a)$ să fie inversabile;

b) Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$A(a) + (A(a))^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

c) Să se rezolve ecuația $\det A(a) - 2\mathrm{tr}\ (A(a))^2 + \mathrm{tr}\ A + 1 = 0$;

d) Să se calculeze $(A(a))^n$

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietățile $f'(x) - 3f(x) = 0$ și $f(0) = e$, unde e este numărul lui Euler.

a) Să se determine $f(x)$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - e}{x}$;

c) Să se arate că ecuația $f(x) = m - e$ are cel mult o soluție pentru orice $m \in \mathbb{R}$ și să se determine m astfel încât, în cazul în care există soluție, aceasta să se afle în intervalul [0,1];

d) Să se determine primitiva F a funcției f pentru care $F(0) = \dfrac{5}{27}e^3$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate XOY se consideră punctele $A(3,2)$ și $B(5,8)$. Prin punctul A se ridică o perpendiculară pe dreapta AB, care intersectează axele OX și OY în M, respectiv N. Prin punctul B se duce o paralelă la MN, pe care se ia un punct $P \notin OY$, astfel încât aria triunghiului ABP să fie 10.

a) Să se determine coordonatele punctelor M și N;

b) Să se calculeze $|\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{BM}|$;

c) Să se determine coordonatele punctului P;

d) Să se determine aria patrulaterului $MNBP$.

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

Testul 3

D.M.I.[3]

Algebră, Elemente de analiză matematică, Geometrie și Trigonometrie

1. Se consideră ecuația
$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0,\ (m, n \in \mathbb{R}),$$
de rădăcini $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.
a) Să se calculeze $E = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.
b) Dacă $1 + i$ este rădăcină a ecuației, să se calculeze celelalte rădăcini și parametrii m și n.

2. Dacă $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ este funcția $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, atunci:
a) Să se arate că $\forall\ x \in [2, \infty)$ avem $2 \leq f(x) \leq x$, iar pentru $x \in [1, 2]$ rezultă că $f(x) = 2$.
b) Se definește șirul $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$, unde $x_0 \in [1, \infty)$. Să se arate că $(x_n)_n$ este convergent și să se calculeze limita sa.

3. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{dacă} \quad x \in (0, e) \\ ax + b, & \text{dacă} \quad x \in [e, \infty) \end{cases}$, unde a și b sunt numere reale.
a) Să se determine parametrii a și b astfel încât f să fie derivabilă pe domeniul ei de definiție.
b) Pentru $a = \dfrac{1}{e}$ și $b = 0$ să se calculeze $\int\limits_2^3 f(x)dx$.

4. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E astfel ca $AD \equiv CE$ și fie $\{M\} = BE \cap CD$. Să se arate că $m(\widehat{BMC}) = 120°$ și să se calculeze în funcție de latura triunghiului echilateral a, raza r a cercului înscris.

5. Să se rezolve ecuația: $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 2002)

[3]Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Vasile Marius Macarie[1]

1. Mulţimea soluţiilor reale ale sistemului $\begin{cases} x^2 - 8x + 12 \geq 0 \\ \dfrac{-2x+2}{x-5} \leq 0 \end{cases}$ este:

a) $(-\infty, 2] \cup (5, \infty)$; b) $[1, 2]$; c) $[1, 2] \cup [6, +\infty)$; d) $[1, 5)$; e) $(-\infty, 2]$.

2. Soluţia ecuaţiei $(\sqrt{5+2\sqrt{6}})^x - (\sqrt{5-2\sqrt{6}})^x = \dfrac{3}{2}$ este:

a) $x = 2$; b) $x \in \emptyset$; c) $x = \frac{2\lg 2}{\lg(5+2\sqrt{6})}$; d) $x = 1$; e) $x = \frac{\lg 2}{\lg(5-2\sqrt{6})}$.

3. Imaginea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 2}$ este:

a) $(-\infty, \frac{14-4\sqrt{14}}{7}]$; b) $[\frac{14+4\sqrt{14}}{7}, +\infty)$; c) $(-\infty, \frac{14-4\sqrt{14}}{7}] \cup [\frac{14+4\sqrt{14}}{7}, +\infty)$; d) $[\frac{14-4\sqrt{14}}{7}, \frac{14+4\sqrt{14}}{7}]$; e) $[\frac{14-2\sqrt{14}}{7}, \frac{14+2\sqrt{14}}{7}]$.

4. Se consideră determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde ε este o rădăcină cubică complexă a unităţii ($\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1$). Atunci:

a) $\Delta = -3 - 6\varepsilon$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta = 3$; d) $\Delta = -3 + 6\varepsilon$; e) $\Delta = 1$.

5. Resturile împărţirii unui polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ la $X - 1, X + 1$ şi $X - 2$ sunt 2, -2 şi respectiv 7. Atunci restul împărţirii lui f la $(X-1)(X+1)(X-2)$ este:

a) $X^2 + 2X - 1$; b) $X^2 - 2X + 3$; c) 0; d) $2X^2 - X - 1$; e) $X^2 + 2$.

6.Valoarea limitei $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{5}]+[2^2\sqrt{5}]+\ldots+[n^2\sqrt{5}]}{2n^3+n}$ este:

a) $l = \sqrt{5}$; b) $l = \frac{\sqrt{5}}{2}$; c) $l = 0$; d) $l = \frac{\sqrt{5}}{6}$; e) $l = 1$.

7. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + 4x + 1)$. Valorile reale ale lui m pentru care ecuaţia $f(x) = m$ are trei soluţii reale distincte sunt:

a) $m \in (-\infty, -2e^{-1})$; b) $m \in (-2e^{-1}, 0)$; c) $m \in (6e^{-5}, \infty)$; d) $m \in (-2e^{-1}, \infty)$; e) $m \in (0, 6e^{-5})$.

8. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 2, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x}{(x-1)(x^2-4)}$ şi n numărul asimptotelor la graficul funcţiei f. Atunci:

a) $n = 2$; b) $n = 4$; c) $n = 3$; d) $n = 1$; e) $n = 0$.

9. Valoarea integralei $I = \int_2^4 \frac{|x-3|}{(x^2-6x)^2} dx$ este:

[1]Lect.univ.dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

a) $I=\dfrac{1}{6}$; b) $I=\dfrac{1}{12}$; c) $I=\dfrac{1}{72}$; d) $I=0$; e) $I=\dfrac{1}{36}$.

10. Dacă $F(x)=e^{-2x}(a\sin 4x+b\cos 4x)$ este o primitivă a funcţiei $f(x)=e^{-2x}\cos 4x$ atunci $a+b$ este egal cu:

a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{4}{5}$; c) 0; d) -2; e) $\dfrac{1}{10}$.

Testul 2

Raluca Mihaela Georgescu[2]

1. Suma pătratelor soluţiilor întregi negative ale ecuaţiei $x^4+5x^3+5x^2-5x-6=0$ este:

a) 29; b) 24; c) 14; d) 15; e) 25.

2. Soluţiile reale ale ecuaţiei $(\log_3 x)^2-\dfrac{1}{\log_{x^3}3}+\log_3 9=0$ sunt:

a) $\{1,2\}$; b)$\{-1,2\}$; c) $\{1,9\}$; d) $\{3,9\}$; e) $\{3,2\}$.

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\ln\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-3x+4}$ este:

a) e^5; b) ∞; c) 5; d) e^2; e) 0.

4. Mulţimea soluţiilor naturale ale inecuaţiei $x+\dfrac{21}{x}<10$ este:

a) $\{3,4,5,6\}$; b) $\{4,5,6\}$; c) $\{3,4,5,6,7\}$; d) $\{4,5,6,7\}$; e) $\{5,6\}$.

5. Ecuaţia asimptotei către ∞ a funcţiei $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^3+5}{x-1}}$ este:

a) $y=2x-1$; b) $y=2x$; c) $y=1$; d) $y=2x+1$; e) $y=2$.

6. Dacă într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu raţia 3, avem $b_4=54$ şi $S_n=728$, atunci n este:

a) 6; b) 5; c) 10; d) 4; e) 12.

7. Soluţiile reale ale ecuaţiei $9\sqrt[5]{9x+14}=x^5-14$ sunt:

a) $\{-3\}$; b) $\{2\}$; c) $\{14\}$; d) $\{3,2\}$; e) $\{-1,2\}$.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$. Atunci $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x^3-3x+2}$, unde a este punctul de minim, este:

a) 3; b) 6; c) -2; d) 2; e) 0.

9. Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}\sqrt[3]{8} & \log_3 27\\ 0 & \ln e^2\end{pmatrix}$. Atunci $Tr(A^{2022})$ este:

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

a) 2^{2022}; b) 2^{2023}; c) 2^{2021}; d) 0; e) $3 \cdot 2^{2022}$.

10. Valoarea integralei $\int_0^2 |x-1|e^x \, dx$ este:

a) $2e-3$; b) $2(e+1)$; c) e^2-2; d) $2(e-2)$; e) $2(e-1)$.

Testul 3

Vasile Marius Macarie[3]

1. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 3xy - 6x - 6y + 14$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Rezultatul calculului $\underbrace{3 \circ 3 \circ \cdots \circ 3}_{de\ 2022\ ori}$ este:

a) $3^{2021}+2$; b) 3^{2022}; c) $3^{2022}-2$; d) 2; e) $3^{2021}-2$.

2. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$ este:

a) $l=1$; b) $l=0$; c) $l=e$; d) $l=e-1$; e) $l=\infty$.

3. Inversa matricei $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$, este:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{4} & \hat{1} \end{pmatrix}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{4} \end{pmatrix}$; c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$; d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{4} & \hat{3} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$; e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

4. Dacă $l = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\right)^{2x}$ atunci:

a) $l=1$; b) $l=e$; c) $l=e^2$; d) $l=\frac{1}{e}$; e) $l=\frac{1}{e^2}$.

5. Dacă $I = \int_0^3 e^x f(x)\mathrm{d}x$, unde $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = min(x+1, x^2-1)$, atunci:

a) $I = 3e^3 - e^2 - 1$; b) $I = e^3 + e^2 - 2$; c) 0; d) $I = 3e^3 + 2e^2 + 1$; e) $I = e^3 - 2e - 2$.

6. Soluţia în $\mathbb{R}$ a inecuaţiei $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3x-2}} > 5^{-x}$ este:

a) $I=(1,2)$; b) $I = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (2,\infty)$; c) $I=(2,\infty)$; d) $I = \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$; e) $I = (-\infty, 1) \cup (2,\infty)$.

[3]Lect.univ.dr., Universitatea din Piteşti, macariem@yahoo.com

7. Termenul din dezvoltarea binomului $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$ în care x şi y au puteri egale este:

a) T_{14}; b) T_{12}; c) T_8; d) T_{10}; e) T_9.

8. Valoarea expresiei $E=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2022}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2022}$ este:

a) -2; b) i; c) 2; d) 0; e) $-i$.

9. Fie determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $f=X^3-3X^2+4X-11$. Atunci

a) $\Delta=24$; b) $\Delta=0$; c) $\Delta=9$; d) $\Delta=-11$; e) $\Delta=-9$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x$. Dacă g este inversa lui f, atunci $g'(3)$ este:

a) $\frac{1}{3}$; b) 1; c) 5; d) 3; e) $\frac{1}{5}$.

Testul 4

D.M.I.[4]

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{ax+1}{1-x^2}\cdot e^{2x}$. Dacă $3\cdot f'(0)=11+f(0)$, atunci:

a) $a=2$; b) $a=0$; c) $a=3$; d) $a=-1$; e) $a=1$.

2. Soluţia în $\mathbb{C}$ a ecuaţiei $|z|+z=1+\frac{2+i}{\sqrt{3}}$ este:

a) $z=2+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $z=2-\frac{\sqrt{3}}{3}i$; c) $z=1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$; d) $z=1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$; e) $z=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$.

3. Fie $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$, $x\in(0,\infty)$ şi F o primitivă a sa cu proprietatea $F(1)=-\ln\sqrt{2}$. Atunci:

a) $F(2)=-\ln\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $F(2)=-\ln\frac{2}{\sqrt{5}}$; c) $F(2)=-\ln\sqrt{5}$; d) $F(2)=\ln\frac{2}{\sqrt{5}}$; e) $F(2)=-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Valoarea expresiei $E(x,y)=\sqrt{3x^2-5xy+3y^2}$ pentru $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ şi $y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ este:

a) 7; b) 12; c) 13; d) 17; e) 8.

5. Dacă $a\in\mathbb{R}$ şi $\int_a^{a+1}(x^3+4)dx=\frac{31}{4}$, atunci:

[4]Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

a) $a = 2$; b) $a = 1$; c) $a = -2$; d) $a = \frac{1}{2}$; e) $a = -1$.

6. Se consideră funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x + m, & \text{dacă} \quad x \leq 1 \\ 2mx - 1, & \text{dacă} \quad x > 1 \end{cases},\ (m \neq 0).$$

Funcţia f este surjectivă pentru:

a) $m \in (0, 3)$; b) $m \in (-2, 0)$; c) $m \in (0, 2]$; d) $m \in (0, \infty)$; e) $m \in (-\infty, 0)$.

7. Soluţia ecuaţiei $0,5 \cdot \lg(2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} = 1$ este:

a) $x = 15$; b) $x = 13$; c) $x = 18$; d) $x = 10$; e) $x = 12$.

8. Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + mx - 8 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului m pentru care rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt în progresie geometrică este:

a) $m = 8$; b) $m = 6$; c) $m = 14$; d) $m = -8$; e) $m = 10$.

9. Dacă $L = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x^2}{x + 1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$, atunci:

a) $L = 1$; b) $L = 0$; c) $L = -\infty$; d) $L = e$; e) $L = \infty$.

10. Care din următoarele propoziţii este adevărată?
a) "Orice şir monoton de numere reale este convergent."
b) "Orice şir mărginit de numere reale este convergent."
c) "Orice şir convergent de numere reale este mărginit."
d) "Orice şir monoton de numere reale este mărginit."
e) "Orice şir convergent şi mărginit de numere reale este monoton."

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Doru Anastasiu Popescu [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare științe ale naturii

◦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
◦ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
◦ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră două variabile de tip int cu numele x și y. Ce valori pot lua x și y pentru ca expresia din dreapta să aibă valoarea 6? **(4p.)**

   a) $x = 8$, $y = 2$
   b) $x = 10$, $y = 3$
   c) $x = 11$, $y = 4$
   d) $x = 10$, $y = 2$

2. Indicați valoarea expresiei `3*floor(1+sqrt(10))`. **(4p.)**

   a) `11`
   b) `3`
   c) `12`
   d) `10`

3. Cu ce trebuiesc înlocuite punctele de suspensie ... pentru ca secvența de instrucțiuni să afișeze produsul cifrelor nenule ale lui n? **(4p.)**

```
p = 1;
do{
k = ...;
        if(k != 0)
                p *= k;
        n /= 10;
}while(n != 0);
cout<<p;
```

   a) `n/10`
   b) `n%10`
   c) `n`
   d) `n/10%10`

4. Dacă a este un tablou bidimensional pătratic de dimensiune 5 cu indicii de la 0, în care pe fiecare linie i se află numerele i, i+1, i+2, i+3, i+4, i=0,1,2,3,4.

---
[1]Conf.univ.dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

```
x=0;
for(i=1;i<5;i++)
        for(j=1;j<5;j++)
                if(i==j ||i+j==4)
                        x += a[i][j];
cout<<x;
```

Ce se va afișa după execuția secvenței de instrucțiuni? **(4p.)**

a) 40
b) 38
c) 10
d) 36

5. Ce valoare trebuie sa citim în x, pentru ca pe ecran să se afișeze 55? **(4p.)**

```
cin>>x;
for(i=2;i<=10;i++)
        x+=i;
cout<<x;
```

a) 2
b) 3
c) 1
d) -1

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu a%b restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b și cu $[c]$ partea întreagă a numărului real c.

```
citeste n(numar natural nenul)
m <- 0; i <- 1
pentru i > 0 executa
|   citeste x (numar natural)
|  |cat timp x > 9 executa
|  |x <- [x/10]
|  |_
| m <- m*10 +x; i <- i-1
|_
scrie m
```

a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc, în această ordine, numerele 5, 1899, 2024, 988, 2, 7832. **(6p.)**
b) Dacă primul număr citit este 5, scrieți un set de numere distincte din intervalul [10, 1000] care pot fi citite în continuare astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afișeze un număr cu toate cifrele egale. **(6p.)**
c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip pentru...execută. **(6p.)**

2. Se consideră secvența de instrucțiuni alăturată. Cu ce valori trebuie să pornească componentele lui x, pentru $n = 5$, ca să se afișeze 54321. **(6p.)**

```
for(i=1;i<=n;i++)
  if(x[i] < 10)
     cout<<8-x[i];
```

3. Cunoscând valoarea variabilei n din intervalul [50,100] scrieți o secvență de instrucțiuni care să foloseasca doar două variabile n și k de tip int și să afișeze codul ASCII și caracterul corepunzător pentru intervalul de valori [n, 2n] pe linii diferite separate printr-un spatiu. Primele 3 linii afișate, dacă n = 64 sunt:

```
65 A
66 B
66 C
...
```

(6p.)

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se citesc 3 numere naturale a, b și c, din intervalul $[1, 105]$, $a < b$. Se cer să se scrie un program ce calculează suma numerelor naturale din $[a, b]$ care sunt prime cu c.

   Exemplu: dacă $a = 4$, $b = 12$ și $c = 6$, atunci programul afișează valoarea 23 ($5+7+11 = 23$). **(10p.)**

2. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural n ($n \in [1, 102]$), apoi un șir de n numere naturale nenule din intervalul $[1, 109]$, elemente ale unui tablou unidimensional. Programul afișează pe ecran termenii șirului, pe două linii separate, astfel încât prima linie să conțină numerele cu suma cifrelor un număr prim, iar pe linia a doua numerele cu suma cifrelor un număr care nu este prim. Pe o linie numere vor fi separate prin câte un spațiu.

   Exemplu: pentru n=7 și tabloul (128,9000,151,9002,6,11111,10002) se vor afișa pe ecran valorile:

   `128 9002 11111 10002`

   `9000 151 6` **(10p.)**

3. Un elev are o carte din care lipsesc pagini. Fiecare pagină este numerotată în partea de jos a paginii ca în orice carte prin numere consecutive pornind de la 1. Cunoscând numerele paginilor rămase din carte se cere să se determine cu un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de execuție și al memoriei cifra/cifrele care este/sunt folosită/folosite de cele mai multe ori în numerele asociate paginilor din carte. Numerele asociate paginilor sunt date în fișierul bac.txt pe o linie separate prin câte un spațiu (cel mult 1000000 de numere cu maxim 9 cifre fiecare). Cifrele cerute se vor afișa pe ecran separate printr-un spațiu în ordine descrecătoare.

   Exemplu: Dacă fișierul bac.txt conține numerele 28 1901 188 se va afișa: 8 1.

   a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Doru Anastasiu Popescu [1]

Limbajul C/C++

Filieră teoretică, profil real, specializare matematică-informatică / matematică-informatică intensiv informatică, Filieră vocațională, profil militar, specializare matematică-informatică

∘ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
∘ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
∘ Identificatorii utilizați în rezolvări trebuie să respecte precizările din enunț (bold), iar în lipsa unor precizări explicite, notațiile trebuie să corespundă cu semnificațiile asociate acestora (eventual în formă prescurtată). Datele de intrare se consideră corecte, validarea lor nefiind necesară.
∘ În grafurile din cerințe oricare arc/muchie are extremități distincte și oricare două arce/muchii diferă prin cel puțin una dintre extremități.

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieţi pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră două variabile de tip int cu numele x și y. Ce valori pot lua x și y pentru ca expresia din dreapta să aibă valoarea 6? **(4p.)**

   a) $x = 8$, $y = 2$ c) $x = 11$, $y = 4$
   b) $x = 10$, $y = 3$ d) $x = 10$, $y = 2$

2. Se consideră funcția alăturată. Care este valoarea expresiei ex(100) + ex(80)? **(4p.)**

```
int ex(int x){
if(x % 2 == 0)
    return ex(x/2) + 1;
return x;
}
```

   a) 36 c) 30
   b) 29 d) 6

3. Utilizând metoda backtracking se generează numere naturale impare în ordine crescătoare cu n cifre impare, divizibile cu 3. Dacă $n = 5$, care este a 6-a soluție generată? **(4p.)**

   a) 11193 b) 11157 c) 11175 d) 11151

4. Se consideră un arbore cu 10 noduri prin vectorul de tați $t = (6, 7, 0, 3, 7, 3, 6, 5, 10, 3)$. Câte frunze are arborele? **(4p.)**

   a) 4 b) 5 c) 6 d) 3

5. Se dă un graf neorientat cu 7 noduri și muchiile $[4, 7]$, $[1, 4]$, $[2, 6]$, $[7, 1]$. Se cere să se determine numărul de componente conexe. **(4p.)**

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

---

[1] Conf.univ.dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Algoritmul alăturat este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu $a\%b$ restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b și cu $[c]$ partea întreagă a numărului real c.

```
citeste n(numar natural nenul)
m <- 0; i <- 1
pentru i > 0 executa
|   citeste x (numar natural)
|   |cat timp x > 9 executa
|   |x <- [x/10]
|   |_
| m <- m*10 +x; i <- i-1
|_
scrie m
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc, în această ordine, numerele 5, 1899, 2024, 988, 2, 7832. **(6p.)**
   b) Dacă primul număr citit este 5, scrieți un set de numere distincte din intervalul $[10, 1000]$ care pot fi citite în continuare astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afișeze un număr cu toate cifrele egale. **(6p.)**
   c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat prima structură repetitivă cu o structură de tip pentru...execută. **(6p.)**

2. Se consideră variabila C definită cu ajutorul structurii cerc și punct din dreapta. Se cere să inițializați componentele lui C cu datele unui cerc care are centrul în originea axelor și raza radical din 10 scriind atribuirile corespunzătoare. **(6p.)**

```
struct punct{
 int x, y;};
struct cerc{
punct C;
float r;} C;
```

3. Variabila k este de tip întreg, iar variabila a memorează un tablou bidimensional cu 25 linii și 50 de coloane, numerotate începând cu 0, cu elemente numere întregi. Fără a utiliza alte variabile decât cele menționate, scrieți o secvență de instrucțiuni în urma executării căreia să se afișeze pe ecran, separate prin câte un spațiu, indicii liniilor care au primul și ultimul element numere cu ultima cifră egală. **(6p.)**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieţi pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerinţele următoare.

1. Subprogramul suma are trei parametri, a, b și c, prin care primește câte un număr natural din intervalul $[1, 105]$, $a < b$. Subprogramul returnează suma numerelor naturale din $[a, b]$, care sunt prime cu c. Scrieți definiția completă a subprogramului. **(10p.)**

   Exemplu: dacă $a = 4$, $b = 12$ și $c = 6$, atunci subprogramul returnează valoarea 23 (5+7+11=23).

2. Un text are cel mult 250 de caractere, iar cuvintele sale sunt formate numai din litere mici ale alfabetului englez și sunt separate prin câte un spațiu. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un număr natural n ($n \in [1, 250]$), apoi un text de tipul precizat mai sus, și afișează pe ecran cuvinte ale acestuia cu cel puțin n litere pe poziții consecutive ordonate alfabetic pe aceeași linie separate prin câte un spațiu. Dacă nu există astfel de cuvinte, se afișează pe ecran doar mesajul nu exista. **(10p.)**

Exemplu: pentru $n = 3$ și textul anul acesta nu a plouat mult se poate afișa pe ecran: `acesta anul mult plouat`.

3. Un elev are o carte din care lipsesc pagini. Fiecare pagină este numerotată în partea de jos a paginii ca în orice carte prin numere consecutive pornind de la 1. Cunoscând numerele paginilor rămase din carte se cere să se determine cu un algoritm eficient din punct de vedere al timpului de execuție și al memoriei cifra/cifrele care este/sunt folosită/folosite de cele mai multe ori în numerele asociate paginilor din carte. Numerele asociate paginilor sunt date în fișierul bac.txt pe o linie separate prin câte un spațiu (cel mult 1000000 de numere cu maxim 9 cifre fiecare). Cifrele cerute se vor afișa pe ecran separate printr-un spațiu în ordine descrecătoare.

   Exemplu: dacă se citește numărul 13 fișierul `bac.txt` conține numerele 13 5 1

   a) Dacă fișierul `bac.txt` conține numerele `28 1901 188` se va afișa: `8 1`. **(2p.)**
   b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 7

Clasa a IX-a

M 165. *Se consideră șirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât* $x_1 = 1$ *și*

$$\sqrt{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_n + 4x_n^2}}{2},\ \forall\, n \geq 1.$$

Demonstrați că $(x_n)_{n\geq 1}$ *este crescător, nemărginit și*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}} < \frac{1}{2},\ \forall\, n \geq 1.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Prin inducție rezultă ușor că $x_n \geq 1$, $\forall\, n \geq 1$. Avem $2\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = \sqrt{x_n + 4x_n^2}$, deci ridicând la pătrat obținem $x_{n+1} - x_n^2 = \sqrt{x_n x_{n+1}}$. Cum $x_n^2 \geq x_n \geq 1$, rezultă că

$$x_{n+1} - x_n \geq \sqrt{x_n x_{n+1}} \geq 1,\ \forall\, n \geq 1.$$

De aici deducem că $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător și că $x_n \geq n$, $\forall\, n \geq 1$ (inducție), deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit. Pentru orice $n \geq 1$, folosind inegalitatea de mai sus și *Inegalitatea mediilor*, avem

$$\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n+1}^2} = \frac{(x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n)}{x_n^2 x_{n+1}^2} \geq \frac{2\sqrt{x_n x_{n+1}} \cdot \sqrt{x_n x_{n+1}}}{x_n^2 x_{n+1}^2} = \frac{2}{x_n x_{n+1}},$$

deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k x_{k+1}} \leq \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_k^2} - \dfrac{1}{x_{k+1}^2} \right) = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{x_1^2} - \dfrac{1}{x_{n+1}^2} \right) < \dfrac{1}{2}$.

M 166. *Fie* $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ *divizorii naturali ai unui număr natural* $n \geq 2$. *Arătați că:*

a) $(n-1)\left(\dfrac{d_2}{d_1} + \dfrac{d_3}{d_2} + \ldots + \dfrac{d_k}{d_{k-1}} \right) \geq (k-1)(n-1) + d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$;

b) $(n-1)^{k-1} d_k \geq (n-1+d_1)(n-1+d_2) \cdot \ldots \cdot (n-1+d_{k-1})$.

Mihály Bencze, Brașov

Soluție. Pentru orice $i = \overline{1, k-1}$ avem, succesiv: $d_{i+1} > d_i$, $\dfrac{n}{d_i} > \dfrac{n}{d_{i+1}}$, $\dfrac{n}{d_i} - \dfrac{n}{d_{i+1}} \geq 1$, $d_{i+1} \geq \dfrac{n d_i}{n - d_i} = d_i + \dfrac{d_i^2}{n - d_i} \geq d_i + \dfrac{d_i^2}{n-1}$, deci $(n-1) \cdot \dfrac{d_{i+1}}{d_i} \geq n - 1 + d_i$.

a) Prin adunare obținem $(n-1)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_{i+1}}{d_i} \geq (k-1)(n-1)+\sum_{i=1}^{k-1} d_i$.

b) Prin înmulțire obținem $\prod_{i=1}^{k-1}(n-1+d_i) \leq (n-1)^{k-1}\cdot\prod_{i=1}^{k-1}\frac{d_{i+1}}{d_i} = (n-1)^{k-1}\cdot\frac{d_k}{d_1} = (n-1)^{k-1}d_k$ (deoarece $d_1=1$).

M 167. *Fie $a,b,c,d>0$ astfel încât $abcd=1$. Demonstrați că*

$$(a+b+c+d)^3\left(\frac{1}{a^3+15}+\frac{1}{b^3+15}+\frac{1}{c^3+15}+\frac{1}{d^3+15}\right) \geq 16.$$

Marin Chirciu și *Octavian Stroe*, Pitești

Soluție (*Titu Zvonaru*, Comănești). Folosind *Inegalitatea mediilor*, avem

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 &= (a+b)^3+(c+d)^3+3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)\\ &= a^3+b^3+c^3+d^3+3ab(a+b)+3cd(c+d)+3(a+b)(c+d)(a+b+c+d)\\ &\geq a^3+b^3+c^3+d^3+6ab\sqrt{ab}+6cd\sqrt{cd}+24\sqrt{abcd}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)\\ &\geq a^3+b^3+c^3+d^3+12\sqrt{abcd\sqrt{abcd}}+48\sqrt{abcd\sqrt{abcd}}\\ &= a^3+b^3+c^3+d^3+60=(a^3+15)+(b^3+15)+(c^3+15)+(a^3+15).\end{aligned}$$

Inegalitatea din enunț rezultă imediat din *Inegalitatea HM-AM*, scrisă sub forma binecunoscută

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \geq 16.$$

Remarcă. Această soluție permite rezolvarea următoarei probleme, mai generală: dacă $a,b,c,d,x,y,z,t>0$ astfel încât $abcd=1$ și $x+y+z+t=60$, atunci

$$(a+b+c+d)^3\left(\frac{1}{a^3+x}+\frac{1}{b^3+y}+\frac{1}{c^3+z}+\frac{1}{d^3+t}\right) \geq 16.$$

M 168. *Fie ABC un triunghi și M mijlocul laturii AC. Considerăm punctul D pe dreapta BC astfel încât B este situat între C și D, iar $BD=AB$. Dacă dreapta DM intersectează bisectoarea unghiului B în punctul E, să se calculeze unghiul $\sphericalangle EAB$ în funcție de unghiurile triunghiului ABC.*

Titu Zvonaru, Comănești

Soluție. Notăm $x=\sphericalangle EAB$. Deoarece $\triangle ABD$ este isoscel, avem $\sphericalangle BAD=\frac{B}{2}=\sphericalangle EBA$, deci $BE \parallel AD$ și $AD=2c\cos\frac{B}{2}$. Din *Teorema sinusurilor* în $\triangle ABE$ avem $BE=\frac{c\sin x}{\sin\left(x+\frac{B}{2}\right)}$.

Fie $\{P\}=AB\cap DM$. Folosind *Teorema lui Menelaus* pentru $\triangle ABC$ cu transversala $D-P-M$ și faptul că $BE\parallel AD$, avem, succesiv: $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$, $\frac{c}{a+c}\cdot\frac{AD}{BE}=1$, $2c^2\cos\frac{B}{2}=\frac{c(a+c)\sin x}{\sin\left(x+\frac{B}{2}\right)}$, $2c\sin\left(x+\frac{B}{2}\right)\cos\frac{B}{2}=(a+c)\sin x$, $c\left[\sin(x+B)+\sin x\right]=(a+c)\sin x$, $\sin(x+B)\sin C=\sin A\sin x$, $\sin(x+B)\sin C=\sin x\sin(B+C)$, $\sin x\cos B\sin C+\cos x\sin B\sin C=\sin x\sin B\cos C+\sin x\cos B\sin C$, $\cos x\sin C=\sin x\cos C$, $\sin(x-C)=0$, prin urmare $x=C$.

M 169. *Demonstrați că numerele* $\sin 2021^\circ$ *și* $\cos 2021^\circ$ *sunt iraționale.*

***

Soluție. Avem $(2021, 360) = 1$, deci există $k, m \in \mathbb{Z}$ astfel încât $2021k + 360m = 1$, prin urmare $\cos(k \cdot 2021^\circ) = \cos 1^\circ$. Să presupunem, prin absurd, că avem $\cos 2021^\circ \in \mathbb{Q}$. Atunci, folosind formula $\cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x$, rezultă prin inducție că avem $\cos(n \cdot 2021^\circ) \in \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel ar rezulta că și $\cos 1^\circ = \cos(|k| \cdot 2021^\circ) \in \mathbb{Q}$, de unde, aplicând același raționament, ar rezulta că și $\cos n^\circ \in \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fals, deoarece $\cos 30^\circ \notin \mathbb{Q}$. Deci $\cos 2021^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Analog, $\sin 2021^\circ = \cos(2021^\circ - 90^\circ) = \cos 1931^\circ \notin \mathbb{Q}$, deoarece $(1931, 360) = 1$.

Clasa a X-a

M 170. *Fie* $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$, $n \ge 3$ *astfel încât* $\sum\limits_{i=1}^n x_i = 1$ *și* $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{x_i}{1-x_i} \le 2$.

Demonstrați că

$$(n-2)\left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(1-x_i)^2} - \frac{n}{(n-1)^2}\right] \ge (2n-1)\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1-x_i} - \frac{n}{n-1}\right)^2.$$

Când are loc egalitatea?

Vasile Cîrtoaje, Ploiești și *Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Notăm $\dfrac{x_i}{1-x_i} = a_i$, deci $x_i = \dfrac{a_i}{1+a_i}$, $i = \overline{1,n}$. Deoarece $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{a_i}{a_i+1} = 1$, avem $\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{a_i+1} = n-1$. Astfel inegalitatea dorită devine

$$(n-2)\left[\sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{n}{(n-1)^2}\right] \ge (2n-1)\left(\sum_{i=1}^n a_i - \frac{n}{n-1}\right)^2.$$

Utilizând *Inegalitatea HM-AM* avem $n-1 = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{a_i+1} \ge \dfrac{n^2}{n + \sum\limits_{i=1}^n a_i}$, deci $\sum\limits_{i=1}^n a_i \ge \dfrac{n}{n-1}$, cu egalitate d.n.d. $a_1 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n-1}$. Notând $\sum\limits_{i=1}^n a_i = S$, avem $\dfrac{n}{n-1} \le S \le 2$.

Din *Inegalitatea CBS* avem $\left[\sum\limits_{i=1}^n a_i(1+a_i)\right]\left(\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{a_i}{a_i+1}\right) \ge \left(\sum\limits_{i=1}^n a_i\right)^2$, adică $\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \ge S^2 - S$. Mai mult, egalitatea are loc d.n.d. $a_1 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n-1}$ sau $a_1 = \ldots = a_p = \dfrac{1}{p-1}$ și $a_{p+1} = \ldots = a_n = 0$, unde $2 \le p \le n-1$, și permutările lor. Astfel este suficient să demonstrăm că $(n-2)\left[S^2 - S - \dfrac{n}{(n-1)^2}\right] \ge (2n-1)\left(S - \dfrac{n}{n-1}\right)^2$, adică

$$(n-2)\left(S - \frac{n}{n-1}\right)\left(S + \frac{1}{n-1}\right) \ge (2n-1)\left(S - \frac{n}{n-1}\right)^2.$$

Cum $S - \dfrac{n}{n-1} \geq 0$, mai trebuie arătat doar că $(n-2)\left(S + \dfrac{1}{n-1}\right) \geq (2n-1)\left(S - \dfrac{n}{n-1}\right)$, adică $S \leq 2$, adevărat. Pentru egalitate trebuie ca $S \in \left\{\dfrac{n}{n-1}, 2\right\}$. Astfel, conform celor de mai sus, egalitatea are loc pentru $a_1 = \ldots = a_n = \dfrac{1}{n-1}$ sau permutările lui $(1,1,0,\ldots,0)$. Deducem că inegalitatea din enunț devine egalitate pentru $x_1 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$ sau permutările lui $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$,

M 171. *Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația*

$$\frac{55 - 9^{\frac{1}{x}}}{5 + 9^{\frac{1}{x}}} = \frac{50}{1 + 5^x}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești; *Titu Zvonaru.* Comănești). Observăm că pentru orice $x < 0$ avem $\dfrac{55 - 9^{\frac{1}{x}}}{5 + 9^{\frac{1}{x}}} < 11 < \dfrac{50}{1+5^x}$, deci ecuația dată nu are soluții negative.

Pentru $x > 0$, ecuația poate fi scrisă sub forma $f(x) = g(x)$, unde $f(x) = \dfrac{55 - 9^{\frac{1}{x}}}{5 + 9^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{60}{5 + 9^{\frac{1}{x}}} - 1$ este o funcție strict crescătoare, iar $g(x) = \dfrac{50}{1+5^x}$ este o funcție strict descrescătoare. Rezultă că ecuația are cel mult o soluție $x > 0$. Dar $f(\log_5 9) = 5 = g(\log_5 9)$, deci $x = \log_5 9$ este singura soluție a ecuației date.

M 172. *Dacă* $a, b, c, d \in (0,1)$ *sau* $a, b, c, d \in (1, \infty)$, *demonstrați că*

$$\frac{\log_a b}{c+d} + \frac{\log_b c}{d+a} + \frac{\log_c d}{a+b} + \frac{\log_d a}{b+c} \geq \frac{8}{a+b+c+d}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție (*Titu Zvonaru*, Comănești). Folosind *Inegalitatea mediilor*, avem

$$\begin{aligned}
(a+b+c+d)&\left(\frac{\log_a b}{c+d} + \frac{\log_b c}{d+a} + \frac{\log_c d}{a+b} + \frac{\log_d a}{b+c}\right) = \log_a b + \log_b c + \log_c d + \log_d a \\
&+ \frac{(a+b)\log_a b}{c+d} + \frac{(b+c)\log_b c}{d+a} + \frac{(c+d)\log_c d}{a+b} + \frac{(d+a)\log_d a}{b+c} \\
&\geq 4\sqrt[4]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a} \\
&+ 4\sqrt[4]{\frac{(a+b)\log_a b}{c+d} \cdot \frac{(b+c)\log_b c}{d+a} \cdot \frac{(c+d)\log_c d}{a+b} \cdot \frac{(d+a)\log_d a}{b+c}} \\
&= 8\sqrt[4]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a} = 8
\end{aligned}$$

(deoarece $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d a = \log_a a = 1$). Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = d$.

Notă. Domnul *Daniel Văcaru* din Pitești a propus o altă rezolvare, folosind *Inegalitatea lui Bergström.*

M 173. *Pentru orice număr natural $n \in \mathbb{N}$, arătați că*

$$\frac{(2^{2021} \cdot n)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (2n+1)! \cdot (4n+1)! \cdot (8n+1)! \cdot \ldots \cdot (2^{2020} \cdot n+1)!} \in \mathbb{N}^*.$$

$\boxed{\textit{Stelian Corneliu Andronescu}}$ și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Notăm cu $a(n)$ expresia din enunț. Evident, $a(0)=1$. Pentru $n \geq 1$ avem

$$a(n) = \frac{(2^{2021} \cdot n)!}{(2^{2020} \cdot n)! \cdot (2^{2020} \cdot n+1)!} \cdot \frac{(2^{2020} \cdot n)!}{(2^{2019} \cdot n)! \cdot (2^{2019} \cdot n+1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(4n)!}{(2n)!(2n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Notând $c(n) = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (*numerele lui Catalan*), avem

$$a(n) = c\left(2^{2020} \cdot n\right) \cdot c\left(2^{2019} \cdot n\right) \cdot \ldots \cdot c(2n) \cdot c(n) \in \mathbb{N}^*.$$

M 174. *Fie ABC un triunghi și fie D și E două puncte situate pe laturile (AC), respectiv (AB). Considerăm două puncte distincte M și N situate pe segmentul (DE). Notăm cu x, y și z distanțele de la punctul M la dreptele BC, CA, respectiv AB. Analog, notăm cu u, v și w distanțele de la punctul N la dreptele BC, CA, respectiv AB.*

Demonstrați că dacă $x = y+z$ și $u = v+w$, atunci BD și CE sunt bisectoarele interioare din B, respectiv C ale triunghiului ABC.

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

Soluția 1 (*Titu Zvonaru*, Comănești). Vom utiliza următoarea relație: dacă $ABCD$ este un trapez și $MN \parallel AB \parallel CD$, unde $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$, atunci $MN = \dfrac{DM \cdot AB + AM \cdot CD}{AD}$.

Într-adevăr, dacă paralela prin D la BC intersectează MN în Q, iar paralela prin M la BC intersectează AB în P, atunci din asemănarea triunghiurilor DMQ și MAP avem $\dfrac{MN - CD}{AB - MN} = \dfrac{DM}{AM}$, de unde se obține relația de mai sus.

Trecem la rezolvarea problemei. Presupunem ordinea E, M, N, D. Notăm cu M_a, N_a și D_a proiecțiile pe dreapta BC ale punctelor M, N, respectiv D. Analog, notăm cu M_b, N_b proiecțiile pe dreapta AC ale punctelor M, N, iar cu M_c, N_c și D_c proiecțiile pe dreapta AB ale punctelor M, N, respectiv D. Aplicând relația de mai sus pentru trapezele MM_aD_aD și MM_cD_cD, precum și asemănarea triunghiurilor MDM_b și NDN_b, aven

$$u = \frac{MN \cdot DD_a + ND \cdot x}{MD}, \; w = \frac{MN \cdot DD_c + ND \cdot z}{MD}, \; v = \frac{ND \cdot y}{MD}.$$

Cum $u = v + w$, obținem $MN \cdot DD_a + ND \cdot x = ND \cdot y + MN \cdot DD_c + ND \cdot z$, de unde rezultă că $MN(DD_a - DD_c) = ND(y + z - x) = 0$, deci $DD_a = DD_c$. Astfel punctul D este egal depărtat de laturile AB și BC, deci BD este bisectoarea din B în triuunghiul ABC. Analog se obține că și CE este bisectoare în triuunghiul ABC.

Soluția 2 (*Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Fie h_1 și h_2 distanțele de la E la dreptele BC, respectiv AC. Avem $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{[EAC]}{[EBC]} = \dfrac{bh_2}{ah_1}$, deci $\overrightarrow{AE} = \dfrac{bh_2 \cdot \overrightarrow{AB}}{ah_1 + bh_2}$. Analog, dacă

h_3 și h_4 sunt distanțele de la E la dreptele BC, respectiv AB, obținem $\overrightarrow{AD} = \dfrac{ch_4 \cdot \overrightarrow{AC}}{ah_3 + ch_4}$. Cum M se află în interiorul $\triangle ABC$, atunci coordonatele sale baricentrice în raport cu A, B și C sunt ariile $[MBC]$, $[MCA]$ și $[MAB]$. Deci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{by \cdot \overrightarrow{AB} + cz \cdot \overrightarrow{AC}}{ax + by + cz} = \dfrac{by \cdot \overrightarrow{AB} + cz \cdot \overrightarrow{AC}}{a\,(y+z) + by + cz}$, (1).

Dar $M \in (DE)$, deci $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AE} + (1-k) \cdot \overrightarrow{AD} = k \cdot \dfrac{bh_2 \cdot \overrightarrow{AB}}{ah_1 + bh_2} + (1-k) \cdot \dfrac{ch_4 \cdot \overrightarrow{AC}}{ah_3 + ch_4}$, cu $k \in (0,1)$.

Prin identificare, obținem $\dfrac{y\,(ah_1 + bh_2)}{kh_2} = \dfrac{z\,(ah_3 + ch_4)}{(1-k)h_4}$, deci $k = \dfrac{\dfrac{y\,(ah_1 + bh_2)}{h_2}}{\dfrac{y\,(ah_1 + bh_2)}{h_2} + \dfrac{z\,(ah_3 + ch_4)}{h_4}}$.

Astfel $\overrightarrow{AM} = \dfrac{by \cdot \overrightarrow{AB} + cz \cdot \overrightarrow{AC}}{\dfrac{y\,(ah_1 + bh_2)}{h_2} + \dfrac{z\,(ah_3 + ch_4)}{h_4}}$. Deci dacă notăm $\dfrac{h_1}{h_2} = \alpha$ și $\dfrac{h_3}{h_4} = \beta$, atunci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{by \cdot \overrightarrow{AB} + cz \cdot \overrightarrow{AC}}{y\,(a\alpha + b) + z\,(a\beta + c)}$, (2). Din (2) și (1) rezultă că $y\alpha + z\beta = y + z$.

Procedând analog pentru punctul N, obținem $v\alpha + w\beta = v + w$.

Dacă, prin absurd, $\dfrac{y}{v} = \dfrac{z}{w}$, atunci $\dfrac{y}{v} = \dfrac{z}{w} = \dfrac{y+z}{v+w} = \dfrac{x}{u} = R$, deci $R = \dfrac{yb}{vb} = \dfrac{zc}{wc} = \dfrac{xa}{ua} = \dfrac{yb + zc + xa}{vb + wc + ua} = \dfrac{[ABC]}{[ABC]} = 1$, deci M și N au aceleași ponderi în raport cu A, B, C, deci $M = N$, contradicție. Așadar $\dfrac{y}{v} \neq \dfrac{z}{w}$, de unde rezultă că sistemul $\begin{cases} y\alpha + z\beta = y + z \\ v\alpha + w\beta = v + w \end{cases}$ are soluție unică. Observăm că $\alpha = 1$, $\beta = 1$ este soluție a sistemului, deci este unica soluție. Astfel $h_1 = h_2$ și $h_3 = h_4$, ceea ce încheie demonstrația.

Clasa a XI-a

M 175. *Se consideră matricea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculați* A^{2021}.

***

Soluție. Avem $\operatorname{tr}(A) = 0$, $\det(A) = 4$ și $\alpha(a) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 = -2$, deci *ecuația caracteristică* a matricei A este $A^3 - 2A - 4I_3 = O_3$. Forma numerică a acestei ecuații este $x^3 - 2x - 4 = 0$, având rădăcinile $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1 \pm i$.

Din *Teorema împărțirii cu rest* avem $x^{2021} = (x^3 - 2x - 4)C(x) + ax^2 + bx + c$, $\forall\, x \in \mathbb{C}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Luând $x = x_1$ și $x = x_3$ obținem $4a + 2b + c = 2^{2021}$ și $2ai + b(-1-i) + c = (-1-i)^{2021}$, adică $-b+c+i(2a-b)=-2^{1010}(-1-i)$. Obținem sistemul $\begin{cases} -b+c=2^{1010} \\ 2a-b=2^{1010} \\ 4a+2b+c=2^{2021} \end{cases}$, având soluția $a=\dfrac{2^{2020}+2^{1010}}{5}$, $b=\dfrac{2\cdot 2^{2020}-3\cdot 2^{1010}}{5}$, $c=\dfrac{2\cdot 2^{2020}+2\cdot 2^{1010}}{5}$.

Avem $A^{2021}=aA^2+bA+cI_3$, iar $A^2=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, deci

$$A^{2021}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 2^{2020}-2^{1010} & 2\cdot 2^{2020}-8\cdot 2^{1010} & -4\cdot 2^{2020}-9\cdot 2^{1010} \\ 4\cdot 2^{2020}+4\cdot 2^{1010} & 2\cdot 2^{2020}+12\cdot 2^{1010} & -4\cdot 2^{2020}+16\cdot 2^{1010} \\ -4\cdot 2^{2020}+2^{1010} & -2\cdot 2^{2020}-2\cdot 2^{1010} & 4\cdot 2^{2020}-2^{1010} \end{pmatrix}.$$

M 176. *Fie matricea* $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d & 0 \\ k & l & m & 0 & -d \\ n & p & 0 & -m & -c \\ q & 0 & -p & -l & -b \\ 0 & -q & -n & -k & -a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_5(\mathbb{Z})$.

a) Arătați că dacă produsul $abcdklmnpq$ *nu se divide cu* 4, *atunci* $\operatorname{rang}(A)=4$.

b) Rămâne afirmația adevărată dacă produsul $abcdklmnpq$ *nu se divide cu* 8*?*

$\boxed{\textit{Stelian Corneliu Andronescu}}$ și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Avem

$$\det(A)=\det(A^t)=\begin{vmatrix} a & k & n & q & 0 \\ b & l & p & 0 & -q \\ c & m & 0 & -p & -n \\ d & 0 & -m & -l & -k \\ 0 & -d & -c & -b & -a \end{vmatrix}=(-1)^5\begin{vmatrix} -a & -k & -n & -q & 0 \\ -b & -l & -p & 0 & q \\ -c & -m & 0 & p & n \\ -d & 0 & m & l & k \\ 0 & d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Interschimbând L_1 cu L_5 și L_2 cu L_4 rezultă că $\det(A)=-\begin{vmatrix} 0 & d & c & b & a \\ -d & 0 & m & l & k \\ -c & -m & 0 & p & n \\ -b & -l & -p & 0 & q \\ -a & -k & -n & -q & 0 \end{vmatrix}$.

Interschimbând acum C_1 cu C_5 și C_2 cu C_4 rezultă că $\det(A)=-\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ k & l & m & 0 & -d \\ n & p & 0 & -m & -c \\ q & 0 & -p & -l & -b \\ 0 & -q & -n & -k & -a \end{vmatrix}$.

Am obținut că $\det(A)=-\det(A)$, deci $\det(A)=0$ și astfel rezultă că $\operatorname{rang}(A)\le 4$.

Pe de altă parte, minorul $(1,5)$ al matricei A este $\delta_{1,5}=\begin{vmatrix} k & l & m & 0 \\ n & p & 0 & -m \\ q & 0 & -p & -l \\ 0 & -q & -n & -k \end{vmatrix}=k(kp^2+pmq-pnl)-l(knp+mnq-ln^2)+m(mq^2-lnq+kpq)=(kp-ln+mq)^2$. Analog, $\delta_{2,4}=(ap-bn+cq)^2$, $\delta_{3,3}=(al-bk+dq)^2$, $\delta_{4,2}=(am-ck+dn)^2$, $\delta_{5,1}=(bm-cl+dp)^2$.

Conform ipotezei, cel mult unul dintre numerele a, b, c, d, k, l, m, n, p, q este par, deci cel puțin doi dintre minorii $\delta_{1,5}$, $\delta_{2,4}$, $\delta_{3,3}$, $\delta_{4,2}$, $\delta_{5,1}$ au toate variabilele impare, deci sunt impari, deci diferiți de zero. Prin urmare avem $\operatorname{rang}(A) = 4$.

b) Răspunsul este NU, de exemplu pentru $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ avem $L_2 = L_1 + L_4$ și $L_3 = L_4 + L_5$, deci $\operatorname{rang}(A) \leq 3$.

M 177. *Fie $a > 0$ un număr real fixat și fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin*

$$x_1 = a \text{ și } x_n = n\,(a + x_{n-1}),\ \forall\, n \geq 2.$$

Calculați $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{x_1}\right)\left(1+\frac{a}{x_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a}{x_n}\right).$

Marin Chirciu, Pitești

Soluție. Fie $y_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{x_k}\right)$. Deoarece $1+\frac{a}{x_k} = \frac{(k+1)(a+x_k)}{(k+1)x_k} = \frac{x_{k+1}}{(k+1)x_k}$, rezultă că $y_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}}{(k+1)x_k} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)!\cdot x_1} = \frac{x_{n+1}}{a(n+1)!}$.

Dar $\frac{x_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{a+x_k}{k!}$, adică $\frac{x_{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x_k}{k!} = \frac{a}{k!}$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{x_{k+1}}{(k+1)!} - \frac{x_k}{k!}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a}{k!}$, adică $\frac{x_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x_1}{1!} = a\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$, prin urmare $\frac{x_{n+1}}{(n+1)!} = a\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Astfel rezultă că $y_n = \frac{x_{n+1}}{a(n+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

M 178. *Fie $a, b, c \in (0,1)$. Demonstrați că*

$$(a+b)(b+c)(c+a)\left(a^b+c\right)\left(b^c+a\right)\left(c^a+b\right) > a^{1-bc}\cdot b^{1-ca}\cdot c^{1-ab}.$$

Dorin Mărghidanu, Corabia

Soluție. Vom utiliza următoarea inegalitate: pentru orice $x > 0$ și $n \in (0,1)$, avem

$$x^n > \frac{x}{x+n}.$$

Într-adevăr, prin logaritmare această inegalitate este echivalentă cu $(n-1)\ln x + \ln(x+n) > 0$. Considerând funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (n-1)\ln x + \ln(x+n)$, avem $f'(x) = \frac{n(x+n-1)}{x(x+n)}$, deci f are un minim în $x_0 = 1-n$. Prin urmare, pentru orice $x > 0$ avem $f(x) \geq f(1-n) = (n-1)\ln(1-n) > 0$.

Trecem acum la demonstrația inegalității din enunț. Aplicând în trei rânduri (de câte două ori) inegalitatea de mai sus, obținem $a^{bc} = (a^b)^c > \dfrac{a^b}{a^b+c} > \dfrac{\frac{a}{a+b}}{a^b+c} = \dfrac{a}{(a+b)(a^b+c)}$ și analoagele $b^{ca} > \dfrac{b}{(b+c)(b^c+a)}$, $c^{ab} > \dfrac{c}{(c+a)(c^a+b)}$, deci prin înmulțire obținem că

$$a^{bc} \cdot b^{ca} \cdot c^{ab} > \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)(a^b+c)(b^c+a)(c^a+b)},$$

inegalitate echivalentă cu inegalitatea din enunț.

M 179. *Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 3$ astfel încât* $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j > \dfrac{n(n-1)}{2}$.

a) Demonstrați că dacă $\dfrac{2}{n} < \beta \leq 1$, *atunci*

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2. \qquad (*)$$

b) Arătați că dacă $\beta \in \left(-\infty, \dfrac{2}{n}\right] \cup (1, +\infty)$, *atunci inegalitatea* $(*)$ *nu este întotdeauna adevărată.*

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Cum $(n-1)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq 2n \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j > n^2 (n-1)$, deducem că $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > n$.

Fie $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = ns$, deci $s > 1$. Notăm $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = n\left[(n-1)t^2 + s^2\right]$, $t \geq 0$. Avem

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \text{ adică } \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left[s-(n-1)t\right]\left[s+(n-1)t\right].$$

a) Este suficient să demonstrăm următorul rezultat mai general: dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > n$, atunci

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Dacă $t < \dfrac{s}{n-1}$, atunci $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i \geq (s+t)^{n-1}\left[s-(n-1)t\right]$ (deoarece pentru suma fixată produsul este minim când sunt $n-1$ variabile egale, a se vedea, de exemplu, Lema 2 de la pag. 26 din MATINF 3/2019). Deci în acest caz este suficient să arătăm că

$$(s+t)^{(n-1)\beta} > \left[s+(n-1)t\right]\left[s-(n-1)t\right]^{1-\beta}.$$

Din *Inegalitatea lui Bernoulli* avem $(s+t)^{n-1} \geq s^{n-2}\left[s+(n-1)\,t\right]$, deci

$$(s+t)^{(n-1)\beta} \geq s^{(n-2)\beta}[s+(n-1)\,t]^{\beta}.$$

Astfel este suficient să arătăm că $s^{(n-2)\beta}[s+(n-1)\,t]^{\beta} > [s+(n-1)\,t]\,[s-(n-1)\,t]^{1-\beta}$, adică

$$s^{(n-2)\beta} > [s+(n-1)\,t]^{1-\beta}[s-(n-1)\,t]^{1-\beta}.$$

Cum $s^{2(1-\beta)} \geq [s+(n-1)\,t]^{1-\beta}[s-(n-1)\,t]^{1-\beta}$, rămâne de arătat că $s^{(n-2)\beta} > s^{2(1-\beta)}$, fapt ce rezultă din $s>1$ și $(n-2)\,\beta > 2\,(1-\beta)$.

Dacă $t \geq \dfrac{s}{n-1}$, atunci $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > 0 \geq [s-(n-1)\,t]\,[s+(n-1)\,t]$.

Demonstrația este completă.

b) Fie $\beta \in \left(-\infty, \dfrac{2}{n}\right] \cup (1,\infty)$, arbitrar fixat.

Presupunem prin reducere la absurd că inegalitatea

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\beta} > \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$$

este întotdeauna adevărată.

Cazul 1. $\beta \in \left(-\infty, \dfrac{2}{n}\right]$. Fie $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = s > 1$. Avem $s^{n\beta} > s^2$, deci $\beta > \dfrac{2}{n}$, contradicție.

Cazul 2. $\beta \in (1,\infty)$. Fie $s>1$ fixat și fie $t \in \left(1, \sqrt{\dfrac{n}{n-2}}\right)$.

Fie $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = st$ și $a_n = s \cdot \dfrac{n-(n-2)\,t^2}{2t}$.

Evident, $\sum\limits_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j = \dfrac{s^2 n\,(n-1)}{2} > \dfrac{n\,(n-1)}{2}$.

Inegalitatea devine

$$2t^2 s^{n\beta-2} t^{(n-2)\beta}\left[\frac{n-(n-2)\,t^2}{2}\right]^{\beta-1} > \left[nt^2-(n-2)\right],\ \forall\, t \in \left(1, \sqrt{\frac{n}{n-2}}\right),$$

deci

$$0 = \lim_{t \nearrow \sqrt{\frac{n}{n-2}}} 2t^2 s^{n\beta-2} t^{(n-2)\beta}\left[\frac{n-(n-2)\,t^2}{2}\right]^{\beta-1} \geq \lim_{t \nearrow \sqrt{\frac{n}{n-2}}} \left[nt^2-(n-2)\right] = \frac{4n-4}{n-2} > 0,$$

contradicție.

Demonstrația prin reducere la absurd este încheiată.

Clasa a XII-a

M 180. *Rezolvați în* $\mathbb{Z}_{2021}$ *ecuația* $\widehat{505}x^2 + \widehat{1} = \widehat{0}$.

$\boxed{\textit{Stelian Corneliu Andronescu}}$ și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Înmulțind cu $\widehat{4}$, care este inversabil, ecuația dată devine $-x^2 + \widehat{4} = \widehat{0}$, adică $\left(x - \widehat{2}\right)\left(x + \widehat{2}\right) = \widehat{0}$. Avem $2021 = 43 \cdot 47$ (descompunerea în factori primi).

Notând $x = \widehat{k}$, unde $k \in \{0, 1, \ldots, 2020\}$, ecuația este echivalentă cu $(k-2)(k+2) \vdots 2021$, adică

$$(k-2)(k+2) \vdots 43 \text{ și } (k-2)(k+2) \vdots 47.$$

Avem următoarele cazuri.

Cazul 1. 43 și 47 divid $k - 2$. Atunci $k - 2 = \mathcal{M}2021$, deci $k = 2$.

Cazul 2. 43 și 47 divid $k + 2$. Atunci $k + 2 = \mathcal{M}2021$, deci $k = 2019$.

Cazul 3. 43 divide $k - 2$ și 47 divide $k + 2$. Atunci $k = 43a + 2 = 47b - 2$, $a, b \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a = b + \dfrac{4(b-1)}{43}$, deci $b = 43c + 1$, $c \in \mathbb{N}$. Astfel $k = \mathcal{M}2021 + 45$, deci $k = 45$.

Cazul 4. 43 divide $k + 2$ și 47 divide $k - 2$. Atunci $k = 43a - 2 = 47b + 2$, $a, b \in \mathbb{N}$. Rezultă că $a = b + \dfrac{4(b+1)}{43}$, deci $b = 43c - 1$, $c \in \mathbb{N}$. Astfel $k = \mathcal{M}2021 - 45$, deci $k = 1976$.

În concluzie, ecuația dată are soluțiile $x \in \left\{\widehat{2}, \widehat{45}, \widehat{1976}, \widehat{2019}\right\}$.

M 181. *Pentru* $n \in \mathbb{N}^*$, *fie* x_k, $k \in \{1, 2, , \ldots, 5n\}$ *rădăcinile complexe ale ecuației*

$$\left(x^5 + x^3 + x + 1\right)^n = x.$$

Arătați că $\displaystyle\sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{1 - x_k} = \frac{9n \cdot 4^{n-1} - 1}{4^n - 1}$.

Mihály Bencze, Brașov

Soluție. Fie polinomul $f(X) = (X^5 + X^3 + X + 1)^n - X$. Cum $f(X) = \prod\limits_{k=1}^{5n} (X - x_k)$, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{x - x_k} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n\left(x^5 + x^3 + x + 1\right)^{n-1}\left(5x^4 + 3x^2 + 1\right) - 1}{\left(x^5 + x^3 + x + 1\right)^n - x},$$

pentru orice $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_{5n}\}$.

Cum $f(1) \neq 0$, luând $x = 1$ obținem egalitatea din enunț.

M 182. *Calculați*

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{9x^4 + 3x^2 + 6x + 2}\, dx,\ x \in \mathbb{R}.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{9x^4+3x^2+6x+2}=\dfrac{3x^2+2x+1}{(3x^2-1)^2+(3x+1)^2}$, deci f este continuă, și fie F o primitivă a lui f. Pentru $x\neq -\dfrac{1}{3}$ avem

$$f(x)=\frac{\dfrac{3x^2+2x+1}{(3x+1)^2}}{\left(\dfrac{3x^2-1}{3x+1}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\dfrac{3x^2-1}{3x+1}\right)'}{\left(\dfrac{3x^2-1}{3x+1}\right)^2+1}.$$

Rezultă că $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x^2-1}{3x+1}+C_1, & \text{dacă } x<-\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x^2-1}{3x+1}+C_2, & \text{dacă } x>-\dfrac{1}{3}\end{cases}.$

Dar F este derivabilă, deci continuă, deci $F\left(-\dfrac{1}{3}\right)=F_s\left(-\dfrac{1}{3}\right)=F_d\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, adică $F\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{2}+C_1=-\dfrac{\pi}{2}+C_2$. Astfel, luând $C_1=-\dfrac{\pi}{2}$, obținem că o primitivă a funcției f este

$$F_0(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x^2-1}{3x+1}-\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x<-\dfrac{1}{3}\\ 0, & \text{dacă } x=-\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{3x^2-1}{3x+1}+\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } x>-\dfrac{1}{3}\end{cases},$$

iar $\displaystyle\int f(x)\,dx=F_0(x)+\mathcal{C}$.

M 183. *Arătați că există o singură funcție* $f:[0,\infty)\to[1,\infty)$ *astfel încât*

$$f(x)=x+\sqrt{f(x)},\ \forall\, x\geq 0.$$

Demonstrați că funcția f *este continuă și calculați* $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$.

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Fie funcția $g:[1,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=x-\sqrt{x}$. Evident, g este derivabilă, $g'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$, $g(1)=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$, deci g este bijectivă. Cum $g(f(x))=f(x)-\sqrt{f(x)}=x$ pentru orice $x\in[1,\infty)$, rezultă că $f=g^{-1}$. Prin urmare f este derivabilă, deci continuă, iar utilizând substituția $g^{-1}(x)=t$ avem

$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^6 g^{-1}(x)\,dx=\int_1^9 tg'(t)\,dt=\int_1^9\left(t-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)dt=\frac{t^2}{2}\Big|_1^9-\frac{t\sqrt{t}}{3}\Big|_1^9=40-\frac{26}{3}=\frac{94}{3}.$$

M 184. *a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$. Demonstrați că*

$$(n-1)\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + 2n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i\right] \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \left(a_i^{n-3} + a_j^{n-3}\right).$$

b) (problemă deschisă) Demonstrați sau infirmați următoarea afirmație: dacă $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$, $1 < k < n-1$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, atunci*

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{k-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-k+1} + n^k \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{k} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-k}.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. a) Conform *Inegalității lui Surányi*,

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1},$$

cu egalitate dacă și numai dacă fie toate numerele sunt egale, fie unul este nul și celelalte egale. Așadar,

$$(n-1)\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i^n + 2n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i\right] \geq (n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} + n^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Deci este suficient să arătăm că

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} + n^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \left(a_i^{n-3} + a_j^{n-3}\right). \tag{1}$$

Dar

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \left(a_i^{n-3} + a_j^{n-3}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-2} - \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}.$$

Astfel (1) devine

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} + n^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-2}. \tag{2}$$

Pentru a demonstra (2), presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1$.

Folosim două rezultate importante:

i) Conform *Teoremei variabilelor egale*, Corolarul 1.7 (V. Cîrtoaje, *The equal variable method*, Journal of Inequlities in Pure and Applied Mathematics, vol. 8, iss. 1, art. 15, 2007; `https://www.emis.de/journals/JIPAM/images/059_06_JIPAM/059_06_www.pdf#page=5`) pentru $p = n-2$, dacă fixăm $\sum_{i=1}^{n} a_i$ și $\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-2}$, atunci $\prod_{i=1}^{n} a_i$ este minim fie pentru $a_n = 0$, fie pentru $0 < a_n \leq a_{n-1} = \ldots = a_1$.

ii) Tot conform *Teoremei variabilelor egale*, Corolarul 1.8, Cazul 3, punctul (a), pentru $p = n-2$ și $q = n-1$, dacă fixăm $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ și $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-2}$, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{n-1}$ este minimă fie pentru $a_n = 0$, fie pentru $0 < a_n \leq a_{n-1} = \ldots = a_1$.

Revenim la demonstrația inegalității (2).

Cazul 1. $0 < a_n \leq a_{n-1} = \ldots = a_1$. În virtutea celor două rezultate de mai sus și datorită omogenității, putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a_{n-1} = \ldots = a_1 = 1$ și $a_n = x \in (0, 1]$. În urma unor calcule facile, (2) devine $x(x-1)^2(2x+7) \geq 0$ pentru $n = 4$, respectiv $x(x-1)^2\left[(n-2)\,x^{n-3} + (n^2-2n-1)\,x^{n-4} + \ldots + 2n - 1\right] \geq 0$ pentru $n \geq 5$, inegalități adevărate, cu egalitate d.n.d. $x = 1$. Așadar în Cazul 1 inegalitatea este adevărată, cu egalitate d.n.d. toate numerele sunt egale.

Cazul 2. $a_n = 0$. Atunci (2) devine

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1} \geq \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-2},$$

inegalitate adevărată conform *Inegalității lui Cebîșev* pentru secvențele finite și descrescătoare $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ și $\left(a_1^{n-2}, \ldots, a_{n-1}^{n-2}\right)$, cu egalitate d.n.d. $a_{n-1} = \cdots = a_1$.

Demonstratia este încheiată.

Nota redacției. Pentru punctul b) nu am primit, deocamdată, soluții corecte, deci problema rămâne deschisă.

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 205. Fie $a \geq b \geq c > 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 1$.

Demonstrați că

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{3}(a-c)^2.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 206. Determinați numerele reale $a, b, c \in (2022, 2023)$ astfel încât

$$\frac{1}{a-2022} + \frac{1}{b-2022} + \frac{1}{c-2022} = 6 = \frac{1}{2023-a} + \frac{1}{2023-b} + \frac{1}{2023-c}.$$

George Mihai, Slatina

M 207. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$ și fie $k \in (0, 2]$. Arătați că

$$\frac{(xy+z)(xz+y)}{(x+yz)[1+k(xy+z)(xz+y)]} + \frac{(yz+x)(yx+z)}{(y+zx)[1+k(yz+x)(yx+z)]} + \frac{(zx+y)(zy+x)}{(z+xy)[1+k(zx+y)(zy+x)]} < \frac{2}{k}.$$

Florică Anastase, Lehliu-Gară

M 208. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 8a$ și $BC = 9a$, unde $a > 0$. Fie punctele E, F și G astfel încât $3\overrightarrow{CE} = 5\overrightarrow{ED}$, $4\overrightarrow{AF} = 5\overrightarrow{FD}$ și $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GE}$.

a) Arătați că punctele C, F și G sunt coliniare.

b) Calculați aria patrulaterului $DEGF$.

Marin Chirciu, Pitești

M 209. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos^8 x} + \frac{\cos^2 x}{1-\sin^8 x} = \frac{80\,(3+\cos^2 2x)}{224 + 32\cos^2 2x + \sin^6 2x}.$$

Mihály Bencze, Brașov

Clasa a X-a

M 210. Fie a, b, c, d, e, f numere reale nenegative astfel încât

$$ab + bc + cd + de + ef + fa = 6.$$

Demonstrați că

$$(2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 + (2d+1)^2 + (2e+1)^2 + (2f+1)^2 \geq 54.$$

Vasile Cîrtoaje, Ploiești

M 211. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$9^{x+1} - 4 \cdot 6^{x+1} + 4^{x+2} = 1.$$

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava

M 212. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{\pi}{2}.$$

Demonstrați că

$$\begin{aligned} &\sin 2x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin 2x_n + \sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_2) + \ldots + \sin(x_n - x_{n-1}) \\ &\quad < \frac{\pi}{2} + \sin(x_1 + x_2) + \sin(x_2 + x_3) + \ldots + \sin(x_{n-1} + x_n). \end{aligned}$$

Miguel Amengual Covas, Spania

M 213. Fie numărul

$$A = C_{2022}^0 + C_{2022}^3 + C_{2022}^6 + \ldots + C_{2022}^{2022}.$$

Determinați cel mai mare număr natural k cu proprietatea că 3^k divide numărul $A - 22$.

Sorin Ulmeanu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 214. Fie P următoarea propoziție:

$$\forall x\ \exists y\ \exists z \text{ a.î. } x^2yz^2 + x^2y - 2yz^2 - 2y - z^2 - 1 = 0.$$

Să se demonstreze că:

a) P este falsă în mulțimea numerelor întregi;

b) P este adevărată în mulțimea numerelor raționale;

c) P este falsă în mulțimea numerelor reale;

d) P este adevărată în mulțimea numerelor complexe.

Mihai Prunescu, București

Clasa a XI-a

M 215. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b-1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & b+2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{C}$.

Calculați A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Marin Chirciu, Pitești

M 216. Fie triunghiul ABC astfel încât mediana din B, mediatoarea lui $[BC]$ și înălțimea din C sunt concurente.

a) Determinați valorile posibile ale unghiului B.

b) Exprimați valorile unghiurilor A și C în funcție de valoarea unghiului B.

c) Calculați $\lim\limits_{\substack{B \to \pi \\ B < \pi}} \dfrac{A}{C}$.

Marcel Țena și *Mihai Prunescu*, București

M 217. Studiați convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \sin(1 + \cos k), \ \forall\, n \geq 1.$$

Ionel Tudor, Călugăreni și *Costel Bălcău*, Pitești

M 218. Determinați funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că graficul său admite o asimptotă orizontală și

$$g(x) + g\left(x + g(x)\right) = 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

M 219. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

a) Determinați cea mai mică constantă K_n pentru care inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leq n^2 + K_n \cdot \frac{(a_1 - a_n)^2}{a_1 a_n}$$

are loc pentru orice numere reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

b) Determinați cea mai mare constantă C_n pentru care inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 + C_n \cdot \frac{(a_1 - a_n)^2}{a_1 a_n}$$

are loc pentru orice numere reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

c) Determinați cea mai mare constantă Λ_n pentru care inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 + \Lambda_n \cdot \frac{(a_{n-1} - a_n)^2}{a_{n-1} a_n}$$

are loc pentru orice numere reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Clasa a XII-a

M 220. Se consideră mulțimea

$$M = \left\{x^2 + 8y^2 \parallel x, y \in \mathbb{N}\right\}$$

și fie n un număr natural.

Să se arate că dacă $200n \in M$, atunci și $804n \in M$.

Costel Anghel, Slatina și *Florea Badea*, Scornicești

M 221. Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$,

$$f = X^4 + 8mX^3 + 24mX^2 + (m+6)^2X + 1, \quad \text{unde} \quad 0 \leq m \leq 1.$$

Arătați că polinomul f are exact două rădăcini reale.

Marin Chirciu, Pitești

M 222. Calculați

$$\int \frac{e^x \sin 2x - 4\text{ctg}\, 2x}{2 + e^x \sin 2x}\, dx, \ x \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Mihály Bencze, Brașov

M 223. Calculați

$$I = \int_0^{\sqrt{10}} x \cdot [x] \cdot \{x\}\, dx$$

(unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x).

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 224. a) Determinați cea mai mare constantă reală k pentru care inegalitatea

$$6\sqrt{abcd} + k(a-d)^2 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd \tag{3}$$

are loc pentru orice numere reale $a \geq b \geq c \geq d > 0$.

b) Demonstrați că dacă $4d \geq a \geq b \geq c \geq d > 0$ și $k = \dfrac{1}{3}$, atunci inegalitatea (3) este adevărată.

c)* (problemă deschisă) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Determinați cea mai mare constantă K_n pentru care inegalitatea

$$n(n-1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} + K_n(a_{n-1} - a_n)^2 \leq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

are loc pentru orice numere reale $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 121 (numere). Se dau două numere naturale n și x. Se cere să se determine cele mai mici n numere naturale nenule și prime cu x.

Cerință

Cunoscând n și x, se cere să se afișeze primele n numere naturale nenule și prime cu x.

Restricții și precizări

- x număr natural nenul cu maxim 8 cifre;
- $0 < n < 1000$.

Exemplu

Date de intrare

$n = 4$, $x = 6$

Date de ieșire

1 5 7 11

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 122 (fibosecv). Se dă un șir cu n numere naturale.

Cerință

Determinați cea mai lungă secvență a șirului dat formată doar cu numere – termeni din șirul lui Fibonacci. Dacă există mai multe astfel de secvențe se va afișa ultima.

Restricții și precizări

- Numerele din șir au maxim 9 cifre;
- $0 < n < 10000$;
- O secvență de elemente din șir are indicii consecutivi.

Date de intrare

Fișierul `fibosecv.in` conține pe prima linie n, iar pe linia următoare termenii șirului separați prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fibosecv.out` va conține secvența cerută.

Exemplu

fibosecv.in	fibosecv.out	Explicație
10 11 8 1 3 4 5 3 1 9 4	5 3 1	Există două secvențe de lungime maximă (8 1 3 și 5 3 1), dar se afișează ultima: 5 3 1

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 123 (pputeri). Se dau M și N numere naturale nenule, $M < N$. Se cere să se determine numărul de puteri (notat cu Nr) de numere prime din intervalul $[M, N]$.

Cerință

Cunoscând M și N, se cere să se determine numărul de puteri de numere prime Nr din $[M, N]$.

Restricții și precizări

- $0 < M < N < 1000000$.

Date de intrare

Fișierul `pputeri.in` conține pe prima linie valorile lui M și N separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pputeri.out` va conține pe prima linie valoarea lui Nr.

Exemplu

pputeri.in	pputeri.out	Explicație
10 26	7	Puterile de numere prime din [10,26] sunt 11, 13, 16, 17, 19, 23 și 25.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 124 (monoton). Un număr se numește *monoton* dacă cifrele sale sunt în ordine crescătoare sau descrescătoare (exemplu: 81110 si 5569 sunt *monotone*). Pentru un șir de numere care se termină cu 0 (0 nu face parte din șir) se cere să se determine numărul de numere *monotone* pe care îl conține.

Cerință

Cunoscând șirul de numere, determinați numărul de *numere monotone* pe care îl conține.

Restricții și precizări

- Numerele din șir sunt cu maxim 10 cifre;
- Numărul de termeni din șirul dat este cel mult 100000.

Date de intrare

Fișierul `monoton.in` conține pe o linie termenii șirului separați prin câte un spațiu. Șirul se termină cu 0.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `monoton.out` va conține numărul de numere *monotone* din șirul dat.

Exemplu

`monoton.in`	`monoton.out`	`Explicație`
2 100 1452 112233 0	3	Numerele *monotone* din șir sunt: 2 100 112233

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 125 (cuvinte). Se dă un șir de n cuvinte. Determinați lungimea celui mai lung cuvânt palindrom ce se poate forma prin alăturarea cuvintelor dintr-o secvență de cuvinte din șirul dat.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$;
- Cuvintele au cel mult 30 de litere mici;
- O secvență dintr-un șir are indicii consecutivi;
- Un cuvânt este palindrom dacă este același indiferent de citire, stânga-dreapta sau dreapta-stânga.

Date de intrare

Fișierul `cuvinte.in` conține pe prima linie n, iar pe următoarele n linii câte un cuvânt.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cuvinte.out` va conține lungimea celui mai lung palindrom ce se poate forma cu restricțiile din enunț.

Exemplu

`cuvinte.in`	`cuvinte.out`	`Explicație`
5 abcd xa acd caax vx	9	Secvența xa acd caax conduce prin alăturarea cuvintelor la xaacdcaax, care este palindrom.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

Clasa a X-a

I 126 (prop). Se dă o propoziție formată din litere mari, litere mici si spații. Cuvintele sunt separate prin spații. Se cere să se determine cuvintele care sunt formate numai din litere mici si nu conțin litere care să se repete. Apoi cuvintele se vor afișa pe câte o linie în ordine alfabetică.

Restricții și precizări

- Cuvintele au cel mult 30 de litere mici.
- Propoziția are cel mult 10000 de caractere și se termină cu punct.

Date de intrare

Fișierul `prop.in` conține pe prima linie caracterele propoziției.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `prop.out` va conține cuvintele din enunț în ordine alfabetică, câte unul pe o linie.

Exemplu

`prop.in`	`prop.out`	`Explicație`
Are un mar Si un par fara.	mar par un un	Cuvintele din propoziție care au litere mici distincte sunt: un, mar, un, par. Alfabetic, acestea sunt în ordinea: mar, par, un, un

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 127 (fill). Se dă o fotografie care conține mai multe obiecte. Fiecare pixel are o culoare din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, \ldots, c\}$. Fundalul fotografiei este colorat cu 0, iar obiectele sunt colorate cu aceași culoare. Doi pixeli sunt vecini din același obiect dacă sunt colorați la fel și sunt unul sub altul, unul lângă altul sau sunt pe vecini pe diagonală. Se dorește numărul de culori nefolosite în fotografie și numărul maxim de obiecte colorate la fel. Fotografia este dată printr-un tablou bidimensional cu m linii, n coloane și numere din mulțimea $\{0, 1, \ldots, c\}$ pentru culorile pixelilor.

Cerință

Pentru un tablou bidimensional cu m linii si n coloane ce codifică o fotografie și c, determinați numărul de culori nefolosite și numărul maxim de obiecte colorate la fel.

Restricții și precizări

- $0 < m, n < 200$;
- Nu există obiecte diferite care să aibă pixeli vecini;
- Un obiect este colorat cu aceeași culoare.

Date de intrare

Fișierul `fill.in` conține pe prima linie m, n, c separate printr-un spațiu și apoi pe următoarele m linii elementele tabloului bidimensional.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `fill.out` va conține pe câte o linie cele două numere din cerință.

Exemplu

fill.in	fill.out
4 6 8 3 3 0 1 1 1 3 0 0 0 1 0 0 3 0 0 0 1 0 0 0 3 0 0	6 2

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 128 (subtab). Se dă un tablou pătratic de dimensiune n cu elemente numere naturale și k un număr natural nenul, $k \leq n$. Se cere să se determine numărul de subtablouri pătratice de dimensiune k, care au suma elementelor un număr prim.

Cerință

Cunoscând n, k și elementele tabloului pătratic, determinați numărul de subtablouri pătratice de dimensiune k cu suma un număr prim.

Restricții și precizări

- $1 \leq k \leq n \leq 100$;
- Numerele din tablou sunt ≤ 100.

Date de intrare

Fișierul `subtab.in` conține pe prima linie n și k, apoi pe liniile următoare elementele tabloului pătratic separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `subtab.out` va conține pe prima linie numărul cerut.

Exemplu

subtab.in	subtab.out
4 3 1 1 0 1 1 0 0 2 0 0 0 3 3 3 3 1	2

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 129 (perm). Se dau n cuvinte $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Pentru fiecare cuvânt c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se cere să se determine numărul de cuvinte Nr_i care se pot forma folosind literele distincte ale lui c_i.

Cerință

Cunoscând n și cuvintele $c_1, c_2, \ldots, c_n$, se cere să se determine numerele $Nr_1, Nr_2, \ldots, Nr_n$ cu semnificația de mai sus.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 1000$;
- Cuvintele conțin maxim 100 litere mici și maxim 18 litere distincte.

Date de intrare

Fișierul `perm.in` conține pe prima linie n și pe următoarele n linii câte un cuvânt.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `perm.out` va conține pe câte o linie numerele $Nr_1, Nr_2, \ldots, Nr_n$.

Exemplu

`perm.in`	`perm.out`
3 maria ana vali	24 2 24

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 130 (cifsir). Un șir de numere este format numai din cifre impare în ordine crescătoare, astfel încât o cifră poate să apară de cel mult două ori. Câte șiruri se pot forma cu n elemente?

Cerință

Pentru un număr n dat, determinați câte șiruri cu n elemente, de tipul descris mai sus, se pot forma.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 100$.

Date de intrare

Fișierul `cifsir.in` conține pe prima linie n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `cifsir.out` va conține numărul din cerință.

Exemplu

`cifsir.in`	`cifsir.out`	Explicație
2	15	Se pot forma sirurile: 1 1; 1 3; 1 5; 1 7; 1 9; 3 3; 3 5; 3 7; 3 9; 5 5; 5 7; 5 9; 7 7; 7 9; 9 9

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Clasele a XI-a și a XII-a

I 131 (puteremat). Se dă o matrice pătratică A de dimensiune n, cu numere naturale. Determinați valoarea determinantului matricei A^n.

Cerință

Cunoscând n și elementele matricei A, se cere să se determine valoarea determinantului matricei A^n.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10$;
- Numerele din matrice sunt ≤ 100.

Date de intrare

Fișierul `puteremat.in` conține pe prima linie n, apoi elementele matricei, linii după linii, pe fiecare linie numerele sunt separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `puteremat.out` va conține pe prima linie numărul cerut în enunț.

Exemplu

`puteremat.in`	`puteremat.out`	Explicație
2 3 1 4 2	4	Matricea din fișier la puterea a doua este: 13 5 20 8 și are determinantul egal cu 4.

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 132 (greuler). Se dă un graf neorientat conex prin numărul de noduri n, numărul de muchii m și perechile de noduri ce reprezintă muchiile. Se cere să se determine numărul minim de muchii $NrMin$ ce trebuie adăugate la graful dat pentru ca acesta să devină graf eulerian, dacă acest lucru este posibil. În caz contrar se consideră că $NrMin = -1$.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 50$;
- Pentru toate testele, graful este conex.

Date de intrare

Fișierul `greuler.in` conține pe prima linie n și m separate prin spațiu și pe următoarele m linii perechi de noduri (separate prin câte un spațiu) ce reprezintă muchiile grafului.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `greuler.out` va conține pe prima linie numărul $NrMin$ cerut în enunț.

Exemplu

`greuler.in`	`greuler.out`	Explicație
5 4 2 4 5 2 3 2 1 2	1	Graful nu este eulerian, iar prin adăugarea muchiei $[1, 3]$ devine eulerian.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 133 (conex3). Se dă un graf neorientat conex cu n noduri și m muchii. Pentru acest graf se dorește determinarea a două muchii, care dacă se elimină se obține un graf cu 3 componente conexe.

Cerință

Cunoscând n, m și cele m muchii, se cere să se determine două muchii, care dacă se elimină conduc la un graf cu 3 componente conexe.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 50$;
- Pentru toate testele din fișierul de intrare există soluție!

Date de intrare

Fișierul `conex3.in` conține pe prima linie n și m separate printr-un spațiu, apoi pe următoarele m linii nodurile muchiilor separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `conex3.out` va conține pe prima și a doua linie muchiile cerute în enunț.

Exemplu

conex3.in	conex3.out	Explicație
5 5 2 4 3 2 5 2 4 1 3 5	4 1 2 4	Eliminând muchiile 4 1 2 4 se obține un graf cu 3 componente conexe. Prima componentă conexă conține nodurile 2, 3, 5 iar celelalte componente nodul 1, respectiv 4.

Timp maxim de execuție: 1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 134 (absir). Se dau $a < b$ numere naturale și un șir cu n numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se cere să se determine numărul Nr de numere din intervalul $[a, b]$, care se pot scrie ca sumă de elemente distincte ale șirului x.

Cerință

Cunoscând a, b, n și termenii sirului x, se cere să se determine Nr.

Restricții și precizări

$1 \leq a < b \leq 30$.

Date de intrare

Fișierul `absir.in` conține pe prima linie a, b și n separate prin spațiu. Pe a doua linie se află termenii șirului x separați prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fișierul de ieșire `absir.out` va conține pe prima linie numărul Nr.

Exemplu

absir.in	absir.out	Explicație
2 10 3 9 1 4	4	Numerele 4, 5, 9, 10 din [2, 10] se pot scrie ca sumă de termeni din șirul x: $4 = 4$ $5 = 1 + 4$ $9 = 9$ $10 = 9 + 1$

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 135 (arborebin). Se dă un arbore binar cu n noduri prin vectorii stânga s și dreapta d și rădăcină r. Afișați numărul maxim, notat cu $NrMax$, de noduri aflate pe același nivel.

Cerință

Cunoscând n, r și elementele lui s, respectiv d, determinați $NrMax$.

Restricții și precizări

$1 \leq n \leq 1000$.

Date de intrare

Fișierul `arborebin.in` conține pe prima linie n și r, iar pe linia a doua vectorul s și pe linia a treia vectorul d, cu elementele separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arborebin.out` va conține $NrMax$.

Exemplu

`arborebin.in`	`arborebin.out`
8 4 8 0 5 3 0 0 0 6 7 0 0 1 0 0 0 2	3

Timp maxim de execuție: 0.1 secundă/test.
Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL