Le lambda calcul

Jean-Jacques.Levy@inria.fr

http://para.inria.fr/~levy

INRIA – Rocquencourt

tel: 01 39 63 56 89

Plan

1. Théorèmes fondamentaux
2. Redex – Résidus – Développements finis
3. Indécidabilité
4. Logique Combinatoire
5. Permutation de réductions – Le treillis des réductions
6. Sémantiques libres
7. Modèles D_∞, $P\omega$

② Syntaxe du λ-calcul:

2.1 λ-expressions:

On dispose de deux ensembles $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ infini dénombrable de variables notées aussi $x, y, z \dots f, g, h \dots$ et d'un ensemble $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ de constantes.

Déf L'ensemble $\Lambda = \Lambda(V,C)$ des λ-expressions construites à partir de V et C est l'ensemble minimal tel que

1) $V \subset \Lambda$
2) $C \subset \Lambda$
3) Si $M, N \in \Lambda$, alors $(MN) \in \Lambda$ (application de M à N)
4) Si $x \in V$ et $M \in \Lambda$, alors $(\lambda x M) \in \Lambda$ (abstraction de M par rapport à x)

Convention Pour supprimer des parenthèses, on utilise les abréviations suivantes:

1) Les applications sont parenthésées implicitement à gauche. Donc $(MN_1N_2\dots N_n)$ pour $(\cdots((MN_1)N_2)\cdots N_n)$

2) On introduit un nouveau symbole "•" jouant le rôle d'une grosse parenthèse ouvrante. Donc

$(\lambda x \bullet MN)$ pour $(\lambda x(MN))$
$(\lambda x \bullet y)$ pour $(\lambda x y)$
$(\lambda x \bullet c)$ pour $(\lambda x c)$
$(\lambda x \bullet \lambda y M)$ pour $(\lambda x(\lambda y M))$

3) On regroupe des abstractions successives sous un seul "λ":
$(\lambda x_1 \bullet \lambda x_2 \bullet \cdots \lambda x_m \bullet M)$ pour $(\lambda x_1 \bullet (\lambda x_2 \bullet \cdots (\lambda x_m \bullet M) \cdots))$

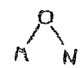
On écrit aussi $(\lambda x_1 x_2 \cdots x_m \bullet M)$.

4) Les parenthèses les plus externes peuvent être supprimées.

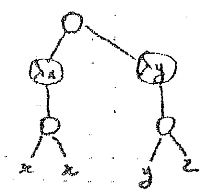
Exemples

fxy pour $((fx)y)$
$f(\lambda x \bullet x)y$ pour $((f(\lambda x x))y)$
$\lambda x \bullet (\lambda y \bullet yz)x$ pour $(\lambda x((\lambda y(yz))x))$

Représentation en arbres On sera amené à représenter aussi les λ-expressions par des arbres dont les noeuds sont de deux sortes (application - abstraction par rapport à une variable) et les feuilles sont des variables ou des constantes. Ainsi

x	pour	x	(feuille)
c	"	c	(")
	"	(MN)	
	"	$(\lambda x M)$	

Exemple



pour $(\lambda x \bullet xx)(\lambda y \bullet yz)$

2.2 Occurrences

Pour désigner la *sous-expression* $M{\downarrow}u$ *d'occurrence* u dans M, on utilisera un ensemble $O(M)$ de mots fabriqués à partir des caractères 1,2 et λ vérifiant :

$$O(c) = O(x) = \varepsilon \quad \text{(mot vide)} \qquad M{\downarrow}\varepsilon = M$$
$$O(\lambda xM) = \{\varepsilon\}\cup\lambda O(M) \qquad (\lambda xM){\downarrow}\lambda u = M{\downarrow}u$$
$$O(MN) = \{\varepsilon\}\cup 1O(M)\cup 2O(N) \qquad (MN){\downarrow}1u = M{\downarrow}u$$
$$(MN){\downarrow}2u = N{\downarrow}u$$

Si M,N sont deux expressions et $u\in O(M)$, alors on notera $M[u\leftarrow N]$ l'expression M où la sous-expression d'occurrence u est remplacée textuellement par N.

2.3 Variables et substitution

Dans toute expression M, on distingue deux ensembles de variables : l'ensemble VARLIB(M) des *variables libres* et l'ensemble VARLIE(M) des *variables liées*. Une occurrence u d'une variable x dans M est liée ssi il existe u_1,u_2 et N tels que $M{\downarrow}u=x$, $u=u_1u_2$ et $M{\downarrow}u_1=(\lambda x\cdot N)$. Sinon u est une occurrence libre. L'occurrence du lieur d'une occurrence u liée de x dans M, notée LIEUR(M,u), est l'occurrence u_1 maximale réalisant la condition précédente. En termes de programmation ALGOL, on retrouve donc les lois habituelles de portée de blocs, comme le montrent les deux exemples suivants :

1) $M = (\lambda x\cdot xx)(\lambda y\cdot yz)$. Alors les occurrences $1\lambda 1$, $1\lambda 2$, $2\lambda 1$ sont liées et l'occurrence $2\lambda 2$ est libre. Donc VARLIE(M) $= \{x,y\}$ et VARLIB(M) $= \{z\}$.

2) $M = \lambda x\cdot(\lambda x\cdot xx)(\lambda y\cdot yx)(\lambda x\cdot xx)$. Alors les occurrences $\lambda 11\lambda 1$, $\lambda 11\lambda 2$, $\lambda 12\lambda 2$, $\lambda 2\lambda 1$ et $\lambda 2\lambda 2$ ont respectivement comme lieur $\lambda 11$, $\lambda 11$, ε, $\lambda 2$ et $\lambda 2$.

Les règles de réécriture du λ-calcul sont définies principalement à partir d'une opération de *substitution* des variables libres. Cette opération est intuitivement évidente, mais légèrement compliquée par la présence des variables liées. L'expression $M[x\backslash N]$ obtenue à partir de M en substituant x par N est définie formellement par :

$$c[x\backslash N] = c$$
$$x[x\backslash N] = N$$
$$y[x\backslash N] = y \quad \text{si } x\neq y$$
$$(MM')[x\backslash N] = (M[x\backslash N]\ M'[x\backslash N])$$
$$(\lambda x\cdot M)[x\backslash N] = (\lambda x\cdot M)$$
$$(\lambda y\cdot M)[x\backslash N] = (\lambda z\cdot M[y\backslash z][x\backslash N]) \quad \text{si } x\neq y \text{ et } z \text{ est la variable telle}$$

que

1) si $x\notin$ VARLIB(M) ou $y\notin$ VARLIB(N), alors $z=y$

2) sinon z est la première variable de V (en supposant donc V énumérable) vérifiant $z\notin$ VARLIB(M)$\cup$VARLIB(N). (On veille donc à ce qu'aucune occurrence libre d'une variable de N ne ...

2.4 Règles de conversion

Ecrivons $M\to N$ pour signifier que M se réécrit en N. Les règles de réécritures classiques du λ-calcul, encore appelées règles de conversion sont définies par :

$$(\alpha\text{-règle}) \quad (\lambda x\cdot M)\to(\lambda y\cdot M[x\backslash y]) \quad \text{si } y\notin \text{VARLIB}(M)$$
$$(\beta\text{-règle}) \quad ((\lambda x\cdot M)N)\to M[x\backslash N]$$
$$(\eta\text{-règle}) \quad (\lambda x\cdot Mx)\to M \quad \text{si } x\notin \text{VARLIB}(M)$$
$$(\delta\text{-règle}) \quad cM_1M_2\cdots M_n\to N$$

La première règle signifie que les variables liées sont des variables muettes dont le nom a peu d'importance. Nous l'ignorerons donc et nous placerons donc dans l'espace quotient engendré par la relation d'α-interconvertibilité, l'égalité de deux expressions devant être souvent comprise comme égalité modulo cette règle. La β-règle représente l'application d'un argument à une procédure et est la seule règle qui nous intéresse. La η-règle est une notion d'extensionalité sur les fonctions et n'a pas grand sens d'un point de vue "informatique". Les δ-règles (qui peuvent être aussi nombreuses qu'il y a de constantes) servent à décrire le comportement de ces dernières. En fait, Church [4] en donne une définition plus restrictive. Nous les ignorerons ici et cela simplifiera notamment notre problème, quoique ces règles ont un sens important pour refléter le comportement des langages de programmation.

En résumé, comme nous ne nous intéressons qu'aux appels de procédures, nous ne considérerons que la β-règle. De plus, comme le comportement des constantes par rapport à la β-règle est identique à celui des variables libres, nous poserons $C=\emptyset$. Donc, le λ-calcul considéré ici sera un λ-calcul pur sans constantes muni de la seule β-règle.

2.5 Réductions

Appelons *radical* (redex en anglais) toute expression de la forme $((\lambda x\cdot M)N)$. Soit RAD(M) l'ensemble des occurrences des sous-expressions de M qui sont des radicaux. Si $u\in$ RAD(M), on dit que M *se réduit en* N *en une étape* par conversion du radical d'occurrence u, noté $M \xrightarrow{u} N$, ssi $M{\downarrow}u = R\to S$ et $N = M[u\leftarrow S]$. On écrira aussi $M \xrightarrow{R} N$ quand l'occurrence du radical R de M est claire d'après le contexte, et $M\to N$ quand on ne se soucie pas du radical converti. (On a donc étendu le sens de $\to$). Une succession (éventuellement vide) $M=M_1\to M_2\to\cdots\to M_n = N$ de réductions élémentaires est appelée une *réduction*, que nous noterons également $M \xrightarrow{*} N$. Pour nommer une réduction, on posera

Les expressions d'origine et d'extrémité d'une réduction ρ sont notées $ORG(\rho)$ et $EXT(\rho)$. Dans notre exemple, on a $ORG(\rho) = M$ et $EXT(\rho) = N$. De plus, si $EXT(\rho) = ORG(\sigma)$, la concaténation de ρ et σ est notée $\rho\sigma$. Dans les langages de programmation, une réduction correspond donc à des appels successifs de procédures c'est à dire à un calcul (puisque nous ne nous intéressons qu'à ces derniers). (13)

Une expression M irréductible, donc telle que $RAD(M) = \phi$, est dite <u>en forme normale</u>. Enfin, si $M \xrightarrow{*} N$ et N est en forme normale, alors on dit que M a une forme normale et que N est une forme normale de M.

$\boxed{\text{Exercices}}$

1) Montrer que

$(xx)[x\backslash \lambda u.u] = (\lambda u.u)(\lambda u.u)$

$((\lambda y.x)(\lambda x.x))[x\backslash \lambda u.u] = (\lambda y.(\lambda u.u))(\lambda x.x) = (\lambda yu.u)(\lambda x.x)$

$(\lambda y.xy)[x\backslash y] = \lambda z.yz$

(Pour la dernière, penser en termes de pointeurs

 $[x\backslash y] =$ )

2) Montrer que VARLIE et VARLIB sont définis récursivement par

$VARLIE(x) = \phi$ $\qquad$ $VARLIB(x) = \{x\}$

$VARLIE(MN) = VARLIE(M) \cup VARLIE(N)$ $\qquad$ $VARLIB(MN) = VARLIB(M) \cup VARLIB(N)$

$VARLIE(\lambda x M) = \{x\} \cup VARLIE(M)$ $\qquad$ $VARLIB(\lambda x M) = VARLIB(M) - \{x\}$

3) Donner un exemple où $M[u \leftarrow N] \neq M[x\backslash N]$ si x n'a qu'une seule occurrence u dans M. (14)

4) Montrer que, si on pose $I = \lambda x.x$, $\Delta = \lambda x.xx$, on a

$Ix \to x$

$\Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \Delta\Delta \to \cdots$

$\Delta(\lambda x.xy) \xrightarrow{*} yy$

$(\lambda xy.xy)ab \xrightarrow{*} ab$

$(\lambda xy.xy)yx \xrightarrow{*} yx$

$(\lambda x.xa)(II) \xrightarrow{*} a$

5) Montrer que, si $M \xrightarrow{*} N$, on a

oubien $M = x = N$

oubien $M = \lambda x.M_1$, $N = \lambda x.N_1$ et $M_1 \xrightarrow{*} N_1$

oubien $M = M_1M_2$, $N = N_1N_2$ avec $M_1 \xrightarrow{*} N_1$ et $M_2 \xrightarrow{*} N_2$

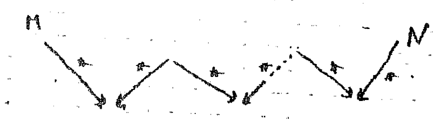
oubien $M = M_1M_2$ avec $M_1 \xrightarrow{*} \lambda x.N_1$, $M_2 \xrightarrow{*} N_2$ et $(\lambda x.N_1)N_2 \to N_1[x\backslash N_2] \xrightarrow{*} N$.

$\boxed{\text{R.6}}$ Interconvertibilité :

$\boxed{\text{Def}}$ La relation d'interconvertibilité est la fermeture symétrique et transitive de $\xrightarrow{*}$. Formellement

$M =_\beta N$ ssi $M \xrightarrow{*} N$ ou $N \xrightarrow{*} M$ ou $\exists P$ tq. $M =_\beta P =_\beta N$

Graphiquement :



$\boxed{\text{Exercice}}$ (Curry-Th du point fixe) Montrer que pour tout $M \in \Lambda$ il existe une expression P telle que $P =_\beta MP$. (Indication : considérer $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. (15)

2) Trouver des expressions

K tel que $KMN \twoheadrightarrow M$ pour tout M, N

M tel que $M =_\beta \lambda x.M$ ~~pour tout M~~

M " $M =_\beta MM$

M " $MN_1N_2\dots N_n =_\beta M$ pour tout $n \geq 0$ et $N_1, N_2, \dots N_n \in \Lambda$

3) Montrer que, si $M \twoheadrightarrow N$, alors $VARLIB(N) \subset VARLIB(M)$.

4) Montrer qu'il n'existe qu'un seul radical M tel que la seule réduction possible à partir de M soit de la forme

$M \to M \to M \to M \to \dots$

II Théorèmes syntaxiques classiques du λ-calcul.

1) Compatibilité de la réduction avec la substitution – Lemme 11**:

$\boxed{\text{Proposition}}$ Si $M \xrightarrow{*} N$ et $P \xrightarrow{*} Q$, alors $M[x\backslash P] \xrightarrow{*} N[x\backslash Q]$

Lemme 1. Si $P \to Q$, alors $M[x\backslash P] \xrightarrow{*} M[x\backslash Q]$

Dém: Récurrence sur $\|M\|$ (la taille de M).

1) $M = y \neq x$, alors $M[x\backslash P] = y \xrightarrow{*} y = M[x\backslash Q]$

2) $M = x$, alors $M[x\backslash P] = P \to Q = M[x\backslash Q]$

3) $M = \lambda y.M_1$. Alors $M_1[x\backslash P] \xrightarrow{*} M_1[x\backslash Q]$ par récurrence. D'où

$M[x\backslash P] = (\lambda y.M_1[x\backslash P]) \xrightarrow{*} (\lambda y.M_1[x\backslash Q]) = M[x\backslash Q]$

4) $M = M_1M_2$. Alors $M_i[x\backslash P] \xrightarrow{*} M_i[x\backslash Q]$ pour $i=1,2$, par récurrence.

D'où $M[x\backslash P] = (M_1[x\backslash P]\, M_2[x\backslash P]) \xrightarrow{*} (M_1[x\backslash Q]\, M_2[x\backslash P]) \xrightarrow{*} (M_1[x\backslash Q]\, M_2[x\backslash Q]) = M[x\backslash Q]$

$\square$

Lemme 2: (Distributivité de subst). Si $x \neq y$ et $x \notin VARLIB(N')$, alors

$$M[x\backslash N][y\backslash N'] = M[y\backslash N'][x\backslash N[y\backslash N']]$$

Dém. Récurrence sur $\|M\|$. Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les membres gauche et droit.

1) $M = x$. Alors $\mathcal{E}_1 = N[y\backslash N']$ et $\mathcal{E}_2 = N[y\backslash N']$ car $x \neq y$.

2) $M = y$. Alors $\mathcal{E}_1 = N'$ car $x \neq y$, et $\mathcal{E}_2 = N'[x\backslash N[y\backslash N']] = N'$ car $x \notin VARLIB(N')$.

3) $M = z$ où $z \neq x$ et $z \neq y$. Alors $\mathcal{E}_1 = z = \mathcal{E}_2$.

4) $M = \lambda z.M_1$
5) $M = M_1M_2$) récurrences triviales $\square$

Lemme 3: Si $M \to N$, alors $M[x\backslash P] \to N[x\backslash P]$.

Dém: 1) $M = y$. Impossible

2) $M = \lambda y.M_1$. Récurrence

3) $M = M_1M_2 \to N_1M_2$ où $M_1 \to N_1$
4) $M = M_1M_2 \to M_1N_2$ où $M_2 \to N_2$) Récurrences

5) $M = (\lambda y.M_1)M_2 \to M_1[y\backslash M_2] = N$. Alors on peut toujours supposer grâce à la α-conversion implicite que la variable liée y vérifie $y \neq x$ et $y \notin VARLIB(P)$. D'où, comme

$M[x\backslash P] = (\lambda y.M_1[x\backslash P])M_2[x\backslash P] \to M_1[x\backslash P][y\backslash M_2[x\backslash P]]$

par le lemme précédent

$M[x\backslash P] \to M_1[y\backslash M_2][x\backslash P] = N[x\backslash P]$. $\square$

Démonstration de la proposition:

Si $M \xrightarrow{*} N$ et $P \xrightarrow{*} Q$, alors

$$\underbrace{M[x\backslash P] \xrightarrow{*} N[x\backslash P]}_{\text{itérer le lemme 3}} \underbrace{\xrightarrow{*} N[x\backslash Q]}_{\text{et le lemme 1}}. \square$$

$\boxed{\text{Corollaire}}$ **Lemme 11**:** Si $M \to N$ et $M \to P$, alors il existe Q tel que $N \xrightarrow{*} Q$ et $P \xrightarrow{*} Q$.

Dém: Récurrence sur $\|M\|$. Soit $M \xrightarrow{u} N$ et $M \xrightarrow{v} P$

1) $M = x$ Impossible 2) $M = \lambda y.M_1$. Récurrence sur M_1

3) $M = M_1M_2$ et $u = 1u_1$, $v = 1v_1$. Récurrence sur M_1

4) $M = M_1M_2$ et le tout dans M_2. Idem pour M_2

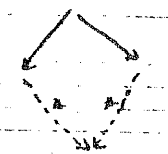
5) $M = M_1 M_2$ et $u = 1u_1$, $v = 2v_2$. Alors
$M \xrightarrow{u} N_1 M_2 = N$ et $M \xrightarrow{v} M_1 N_2 = P$. D'où $M \to N_1 N_2$ et $P \to N_1 N_2$.

6) $M = ((\lambda x . M_1) M_2) \xrightarrow{u} N = M_1 [x \backslash M_2]$ (Donc $u = \varepsilon$ occ. vide)
Et $M \xrightarrow{v} ((\lambda x . P_1) P_2) = P$ (où $v \neq \varepsilon$). Donc $M_1 \xrightarrow{*} P_1$ et $M_2 \xrightarrow{*} P_2$ (En fait une de ces deux réductions est vide). D'où par la proposition, si $Q = P_1 [x \backslash P_2]$, on a $N \xrightarrow{*} Q$. Or $P \to Q$. ∎

7) $v = \varepsilon$, $u \neq \varepsilon$ (Symétrique du cas précédent)

8) $v = u = \varepsilon$. Trivial car $N = P = Q$. □

Convention On démontrera beaucoup (?) de lemmes du style précédent sur les réductions. Ils s'énoncent tous sous la forme, si telles et telles réductions, il existe telles et telles réductions. Pour simplifier les énoncés, on utilisera la convention graphique suivante : les réductions supposées en hypothèse seront représentées normalement, les réductions dont on veut montrer l'existence figureront en pointillés. Par exemple, le lemme 11.x peut se représenter par

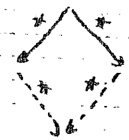


(Remarque : on peut même ne pas préciser les expressions dans cet exemple)

On dit que $\to$ est *localement confluent*, c'est à dire que si deux étapes de calcul (ou réduction) sont différentes à partir d'une même expression, on peut revenir à un résultat commun. Peut-on généraliser ce résultat ?

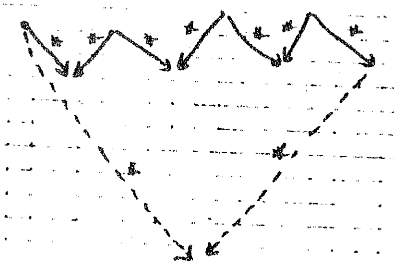
② Théorème de Church-Rosser :

Théorème (Church-Rosser 41) $\xrightarrow{*}$ est *confluent*, c.à.d.



Corollaire 1 : Si M a une forme normale, cette forme normale est unique (à ~~des~~ α-conversions près - toujours ignorées)

Corollaire 2 : Si $M =_\beta N$, alors il existe P tel que $M \xrightarrow{*} P$ et $N \xrightarrow{*} P$ (ou graphiquement



Exercices :

① Montrer que si $M =_\beta N$ et N est en forme normale, alors $M \xrightarrow{*} N$

② Démontrer le théorème de Church-Rosser dans le cas où l'expression initiale M est *fortement normalisable*, c'est à dire, lorsqu'il n'y a pas de réduction infinie issue de M

③ Donner un exemple de réécriture qui n'est pas confluente (Prendre des δ-règles par exemple).

(4) Donner un exemple de règles de récritures qui sont localement confluentes, mais non confluentes

(5) Montrer que si $M \xrightarrow{*} \lambda x.A$ et $M \xrightarrow{*} \lambda x.B$, alors $A =_\beta B$.

(6) Montrer que si $M \xrightarrow{*} \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x M_1 M_2 \dots M_n$ et si $M \xrightarrow{*} \lambda x_1 x_2 \dots x_p . y N_1 N_2 \dots N_q$, alors $m = p$, $n = q$ et $x = y$.

(7) Soit $K = \lambda xy.x$. Donner un M tel que $M \xrightarrow{*} Kab$ et $M \xrightarrow{*} Kac$ avec $b \neq c$.

(8) (Difficile) Trouver M et N tels que $M =_\beta N$ et il n'existe pas P tel que $P \xrightarrow{*} M$ et $P \xrightarrow{*} N$. (Donc "anti-Church-Rosser" est faux)

(9) On appelle <u>λI-calcul</u> la restriction du λ-calcul à l'ensemble d'expressions qui ne contiennent jamais de sous-expressions de la forme $\lambda x.M$ avec $x \notin VARLIB(M)$. On parle encore de <u>λI-expressions</u>. Remarque : $I = \lambda x.x$ est une λI-expression, mais $K = \lambda xy.x$ n'en est pas une. (Le λ-calcul que nous avons jusqu'à présent considéré est pour cette raison aussi appelé λK-calcul).

Montrer :

a) si M est une λI-expression et $M \xrightarrow{*} N$, alors N est une λI-exp.

b) Connaissant Church-Rosser pour le λ-calcul, montrer Church-Rosser pour le λI-calcul

c) On peut définir $=_{\beta I}$ comme nous avons défini $=_\beta$. Montrer que si M et N sont des λI-expressions, alors $M =_\beta N$ ssi $M =_{\beta I} N$.

d) si M est une λI-expression ~~et~~ $M \xrightarrow{*} N$, alors $VARLIB(M) = VARLIB(N)$.

(3) <u>Démonstration du théorème de Church-Rosser par la méthode de Tait et Martin-Löf :</u>

$\boxed{\text{Définition}}$ La relation $\xrightarrow{/\!/}$ sur Λ est définie par :

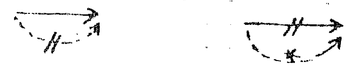
1) $x \xrightarrow{/\!/} x$

2) Si $M \xrightarrow{/\!/} M'$, alors $\lambda x.M \xrightarrow{/\!/} \lambda x.M'$

3) Si $M \xrightarrow{/\!/} M'$ et $N \xrightarrow{/\!/} N'$, alors $MN \xrightarrow{/\!/} M'N'$

4) Si $M \xrightarrow{/\!/} M'$ et $N \xrightarrow{/\!/} N'$, alors $(\lambda x.M)N \xrightarrow{/\!/} M'[x \backslash N']$

<u>Remarque</u> : $\xrightarrow{/\!/}$ simule la réduction simultanée de plusieurs radicaux en parallèle (pris en fait de l'intérieur vers l'extérieur). On a donc si $M \to N$, alors $M \xrightarrow{/\!/} N$ et si $M \xrightarrow{/\!/} N$, alors $M \xrightarrow{*} N$. Graphiquement



(Figure 1)

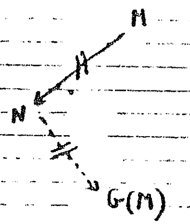
On veut montrer (c.a.d si $M \xrightarrow{/\!/} M_1$ et $M \xrightarrow{/\!/} M_2$, alors $M_1 \xrightarrow{/\!/} N$ et $M_2 \xrightarrow{/\!/} N$ pour un N)

(Figure 2)

D'où on conclura Church-Rosser grâce aux remarques précédentes. On simplifie d'habitude la démonstration en considérant la <u>réduction de Gross</u> qui consiste à contracter tous les radicaux d'une expression. Pour cela on définit :

$\boxed{\text{Définition}}$
$$
\begin{cases}
G(x) = x \\
G(\lambda x.M) = \lambda x. G(M) \\
G(MN) = (G(M)\, G(N)) & \text{si } M \neq \lambda x.M_1 \\
G((\lambda x.M)N) = G(M)[x \backslash G(N)]
\end{cases}
$$

Intuitivement, $G(M)$ est l'expression obtenue par la réduction de Gross de M. On va montrer



(Figure 3)

D'où trivialement la figure 2. La démonstration se résume en:

<u>Lemme 1</u>. Si $M \#\!\!\!\rightarrow M'$ et $N \#\!\!\!\rightarrow N'$, alors $M[x\backslash N] \#\!\!\!\rightarrow M'[x\backslash N']$

<u>Lemme 2</u> : Si $M \#\!\!\!\rightarrow N$, alors $N \#\!\!\!\rightarrow G(M)$

<u>Lemme 3</u> : Si $M \#\!\!\!\rightarrow M_1$ et $M \#\!\!\!\rightarrow M_2$, alors $M_1 \#\!\!\!\rightarrow N$ et $M_2 \#\!\!\!\rightarrow N$ pour un N.

<u>Théorème</u> : Church-Rosser

(Les lemmes 1 et 2 se montrent par récurrence sur $\|M\|$ en considérant les différents cas dus à la définition de $\#\!\!\!\rightarrow$ et G) On se sert aussi du lemme de distributivité de la substitution, voir § 1)

<u>Exercices</u>.

1) Montrer que si $M \xrightarrow{*} N$, il existe $n \geq 0$ tel que $N \xrightarrow{*} G^n(M)$

2) Montrer que si M a une forme normale N, alors il existe $n \geq 0$ tel que $N = G^n(M)$. Soit n_0 le n minimum vérifiant $N = G^n(M)$. Montrer qu'alors $n_0 \leq |\rho|$ pour toute réduction $\rho : M \xrightarrow{*} N$ (où $|\rho|$ représente la longueur de ρ, i.e son nombre d'étapes). Donner un exemple où cette borne n'est pas atteinte.

5 <u>Radicaux résidus - Radicaux créés</u>:

$\boxed{\text{Définition}}$ Soit $\rho : M \xrightarrow{*} N$ et R un radical de M d'occurrence u. Alors l'ensemble u/ρ des <u>résidus</u> de R par ρ est défini par:

1) $u/\rho = \{u\}$ si $|\rho| = 0$ (Alors ρ est la réduction vide)

2) $u/(\rho\sigma) = (u/\rho)/\sigma = \{w \mid w \in v/\sigma,\ v \in u/\rho\}$ (Transitivité)

3) Si $|\rho| = 1$ et $\rho : M \xrightarrow{v} N$, on a plusieurs cas selon les positions relatives de u et v

3a) Si u et v sont disjoints, alors $u/\rho = \{u\}$

3b) Si u contient strictement v, alors $u/\rho = \{u\}$

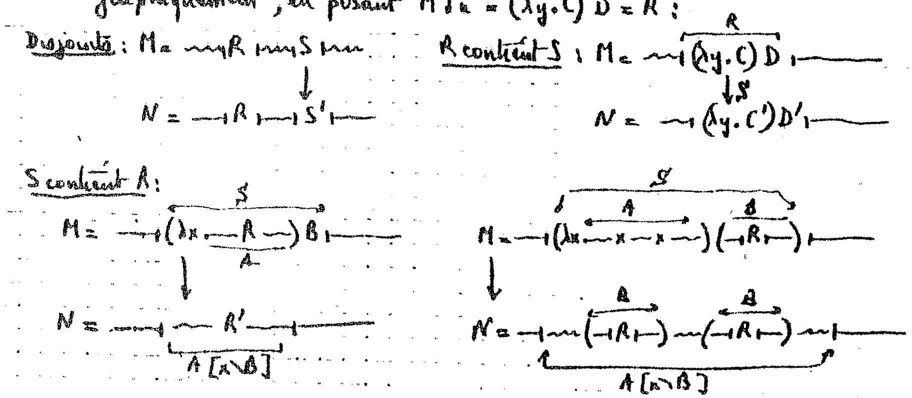
3c) Si $u = v$, alors $u/\rho = \emptyset$

3d) Si u est contenu strictement dans v, alors posons $M\downarrow v = S = (\lambda x.A)B$ et on a encore deux cas:

3d1) u contenu dans A (càd $u = v1\lambda u_1$), alors $u/\rho = \{vu_1\}$

3d2) u contenu dans B (càd $u = v2u_2$), alors $u/\rho = \{v w u_2 \mid \text{LIEUR}(M, v1\lambda w) = v1\}$ (Autrement dit, il y a autant de résidus que d'occurrences de x dans A)

Graphiquement, en posant $M\downarrow u = (\lambda y.C)D = R$:



exemples : En soulignant les radicaux et en posant $I = \lambda x.x$, $\Delta = \lambda x.xx$:

$\Delta(\underline{Ix}) \to (\underline{Ix})(\underline{Ix})$

$(\underline{Ix})(\Delta(Ix)) \to (\underline{Ix})((Ix)(Ix))$

$\underline{I(\Delta(Ix))} \to \underline{I((Ix)(Ix))}$

$\underline{\Delta(Ix)} \to (Ix)(Ix)$

$(Ix)(\Delta(\underline{Ix})) \to (Ix)((\underline{Ix})(\underline{Ix}))$

$\underline{\Delta\Delta} \to \Delta\Delta$

Remarques :

1) Si R est un radical de M et $\rho : M \xrightarrow{*} N$, on n'hésitera pas à écrire R/ρ sans préciser l'occurrence u de R (quand celle-ci sera claire d'après le contexte. De même, on écrira $S \in R/\rho$.

2) Si $S \in R/\rho$, on peut avoir $R \neq S$ (voir 3ème exemple)

3) Si $\rho : M \xrightarrow{*} N$ et $\sigma : M \xrightarrow{*} N$, on peut avoir $u/\rho \neq u/\sigma$. Prendre $M = I(Ix)$, $N = Ix$ et $\rho : M \xrightarrow{\varepsilon} N$, $\sigma : M \xrightarrow{2} N$. Alors $\varepsilon/\rho = \emptyset$, mais $\varepsilon/\sigma = \{\varepsilon\}$. Donc les résidus dépendent de la réduction, et non des expressions de départ et d'arrivée.

$\boxed{\text{Définition}}$ Si $\rho : M \xrightarrow{*} N$ et S est un radical de N, alors S est créé par ρ ssi $\nexists R$ tel que $S \in R/\rho$.

exemples :

$\rho : (\lambda x.xa)\, I \to Ia$, alors Ia est créé par ρ

$\rho : (\lambda xy.xy)\, ab \to (\lambda y.ay)b = S$, alors S est créé par ρ

$\rho : IIa \to Ia$, alors Ia est créé par ρ

Exercices :

1) Montrer que les résidus de deux radicaux disjoints peuvent ne pas être disjoints.

2) Donner un exemple de radical R et de réduction ρ tels que il existe R_1, R_2 vérifiant $R_1 \in R/\rho$, $R_2 \in R/\rho$ et R_1 contient R_2

3) Montrer que les résidus d'un radical sont des radicaux

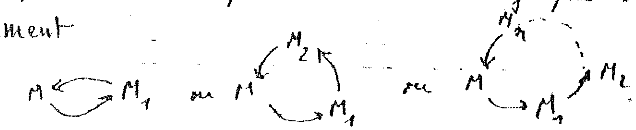
4) Donner ρ, σ tels que $\rho : M \xrightarrow{*} N$, $\sigma : M \xrightarrow{*} N$ et il existe S dans N tel que S est créé par ρ, mais n'est pas créé par σ.

5) Montrer que si $\rho : M \xrightarrow{u} N$ et si v est créé par ρ, alors on a uniquement deux cas en posant $M \downarrow u = (\lambda x.A)B$

a) oubien $u = v1$ et $A[x \backslash B] = \lambda y.C$

b) oubien $v = uv'$ et $A \downarrow u' = xD$ et $B = (\lambda y.C)$

6) Trouver des expressions M dont le graphe des réductions forment



7) Trouver une expression M dont le graphe contient toutes les figures précédentes

⑤ Théorème des développements finis :

Peut-on donner un sens à la réduction simultanée d'un ensemble de radicaux ? Et ainsi fournir une autre preuve de Church-Rosser ?

$\boxed{\text{Définition}}$ Soit $\mathcal{F}$ un ensemble (d'occurrences) de radicaux de M. Alors l'ensemble $Red_M(\mathcal{F})$ des réductions relatives à $\mathcal{F}$ est le sous-ensemble minimal des réductions issues de M contenant

a) la réduction vide

b) $\rho\tau$ si $\rho \in Red_M(\mathcal{F})$ et $\tau : M \xrightarrow{v} N$ avec $v \in \mathcal{F}/\rho$.

Un <u>développement</u> de $\mathcal{F}$ est une réduction ρ relative à $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}/\rho = \emptyset$.

$\boxed{\text{Théorème}}$ Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de radicaux de M. Alors

a) Il n'y a pas de réductions infinies relatives à $\mathcal{F}$

b) Si $\rho : M \twoheadrightarrow N$ et $\tau : M \twoheadrightarrow P$, sont deux développements de $\mathcal{F}$, alors $N = P$

c) De plus, on a $R/\rho = R/\tau$ pour tout radical R de M.

Donc on ne peut contracter indéfiniment des ~~radicaux~~ résidus de $\mathcal{F}$ (pas immédiat, puisque $\mathcal{F}$ peut contenir des radicaux emboîtés). En outre, l'ordre dans lequel on effectue les développements de $\mathcal{F}$ importe peu pour l'expression finale ou pour la relation "résidu". La démonstration de ce théorème n'est pas simple : Curry & Feys [58], Church [41] pour le λI-calcul, Hindley [74], JJL [78], Barendregt [76]....

$\boxed{\text{Notation}}$ L'ordre dans lequel on effectue un développement d'un ensemble $\mathcal{F}$ de radicaux de M n'étant guère important (tant que l'on considère les expressions d'arrivées et l'opération résidu), on écrira $\rho : M \xrightarrow{\mathcal{F}} N$ pour signaler que N est obtenu par un développement de $\mathcal{F}$. On dira que ρ est alors une étape de

réduction parallèle, et on définira la concaténation de réductions parallèles comme auparavant, obtenant ainsi des <u>réductions parallèles</u>. (Remarque : les réductions définies précédemment sont isomorphes à des réductions parallèles particulières, puisqu'il suffit d'associer $M \xrightarrow{u} N$ et $M \xrightarrow{\{u\}} N$). Si ρ est une réduction parallèle de la forme $M \twoheadrightarrow N$ et R est un radical de M, les résidus de R par ρ sont définis comme précédemment (ce qui est cohérent grâce au théorème des dev^{ts} finis). Dernière remarque : on utilise les mêmes lettres pour nommer les réductions parallèles ou non.

$\boxed{\text{Définitions}}$

a) Deux réductions (parallèles) ρ et σ sont <u>coinitiales</u> si elles ont même expression de départ, <u>coextrémales</u> si elles ont même expression d'arrivée

b) Si $\rho : M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} N$ et $\sigma : M \xrightarrow{\mathcal{F}_2} P$, nous désignerons par $\rho \sqcup \sigma$ la réduction parallèle $M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} N \xrightarrow{\mathcal{F}_2'} Q$ où $\mathcal{F}_2' = \mathcal{F}_2/\rho$. (Cette notation prendra plus de sens dans le chapitre "permutations de réductions")

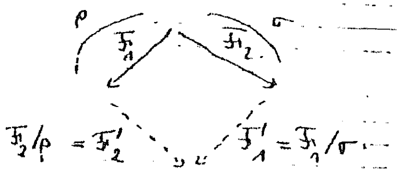
c) La <u>longueur</u> $|\rho|$ d'une réduction parallèle est son nombre d'étapes parallèles, càd $|\rho| = n$ si $\rho : M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n$.

$\boxed{\text{Corollaires}}$

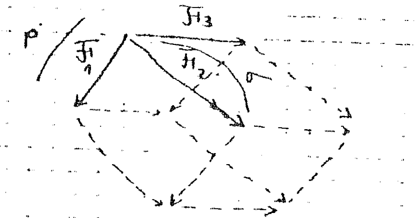
a) <u>Lemme du carré</u> ("lemma of parallel moves" - Curry & Feys) Si ρ et σ sont deux réductions parallèles coinitiales de longueur 1, alors $\rho \sqcup \sigma$ et $\sigma \sqcup \rho$ sont coextrémales.

b) lemme du cube : En outre si R est un radical de l'expression de départ de ρ et σ, on a $R/(\rho \sqcup \sigma) = R/(\sigma \sqcup \rho)$.

Graphiquement :



carré



$\mathcal{F}_3'/(\rho \sqcup \sigma) = \mathcal{F}_3/(\sigma \sqcup \rho)$

cube

Remarquons que l'on obtient grace au lemme du carré une autre démonstration de Church-Rosser, et on peut comparer à celle de Tait et Martin-Löf : $M \rightrightarrows N$ signifie que N s'obtient par un développement d'un $\mathcal{F}$ de N (dans l'ordre intérieur vers extérieur)

Exercices.

1) Montrer que si $w \in u/\rho$ et $w \in v/\rho$, alors $u = v$.

2) Montrer qu'il n'existe pas d'expression M dont le graphe de réductions est exactement

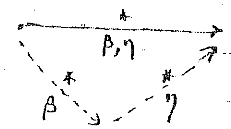
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ M_1 \arrow[dr] & M_2 \arrow[d] & M_3 \arrow[dl] \\ & N & \end{tikzcd}$$

3) Montrer que si toutes les réductions issues de M ne créent aucun radical, alors M est fortement normalisable (Autrement dit, seule l'existence de radicaux créés autorise des réductions infinies)

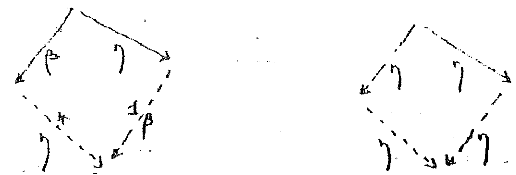
4) Montrer que si $\mathcal{F}$ est l'ensemble de tous les radicaux de M et si $M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1$, alors $M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1'} N$ et $M \xrightarrow{\mathcal{F}} N$ pour un certain $\mathcal{F}_1'$. Comparer à la réduction de Gross.

⑥ Le théorème de Church-Rosser pour les β-η-réductions :

On démontre (voir Curry & Feys) que $\xrightarrow[\beta,\eta]{*}$ est aussi confluent. Cela se fait en deux temps. D'abord on peut retarder les η-réductions, càd



Ensuite, on montre



(où $M \xrightarrow[\beta]{1} N$ ssi $M \xrightarrow[\beta]{} N$ ou $M = N$).

⑧ Théorème de standardisation :

$\boxed{\text{Définition}}$ Si R et S sont deux radicaux de M d'occurrences u et v, alors R est <u>avant</u> S dans <u>l'ordre standard</u> ssi

1) $u = w1u'$, $v = w2v'$ (R, S disjoints et R à gauche de S)
2) ou bien $v = uv'$ (R contient S)

$\boxed{\text{Définition}}$ La réduction $\rho : M = M_0 \xrightarrow{u_1} M_1 \xrightarrow{u_2} M_2 \cdots \xrightarrow{u_n} M_n$ est <u>standard</u> ssi $\forall i, j$ tels que $1 \leq i < j \leq n$, si $u_j \in u'_j / \rho_{i-1, j-1}$, alors u_i est avant u'_j dans l'ordre standard (On veut représenter par $\rho_{i,j}$ la sous-réduction de ρ comprise entre M_i et M_j quand $j \geq i$)

Une réduction standard contracte donc ses radicaux de l'extérieur vers l'intérieur et de la gauche vers la droite.

$\boxed{\text{Définition}}$ Une <u>réduction normale</u> est une réduction qui réduit à chaque étape le radical le plus à gauche et le plus externe (donc le premier dans l'ordre standard)

<u>Remarque</u> : Une réduction normale est standard, mais le contraire est peut-être faux. De plus une réduction normale $M \xrightarrow{*} N$ est entièrement fixée par M et par sa longueur.

<u>Exemples</u> :

$(Ix)(Ix) \to x(Ix) \to xx$ est standard (et normale)

$(Ix)(Ix)(Ix) \to (Ix)x(Ix) \to (Ix)xx$ est standard (mais pas normale)

$(\lambda x. Ix)(Ia) \to (\lambda x. x)(Ia) \to (\lambda x. x)a$ est standard

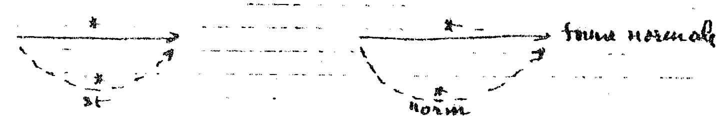
$(\lambda x. Ix)(Ia) \to (\lambda x. x)(Ia) \to (\lambda x. x)a \to a$. n'est pas standard

$\boxed{\text{Notation}}$: $M \xrightarrow[st]{*} N$ s'il existe une réduction standard de M à N.
$M \xrightarrow[norm]{*} N$ s'il existe une réduction normale de M à N

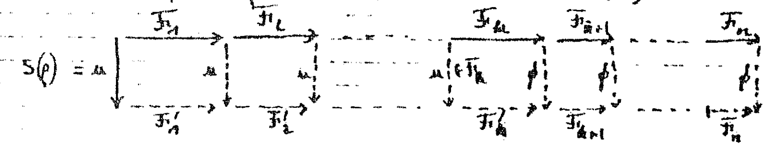
$\boxed{\text{Théorème}}$ (Curry 58) : Si $M \xrightarrow{*} N$, alors $M \xrightarrow[st]{*} N$

$\boxed{\text{Corollaire}}$ Si M a une forme normale N, alors $M \xrightarrow[norm]{*} N$.

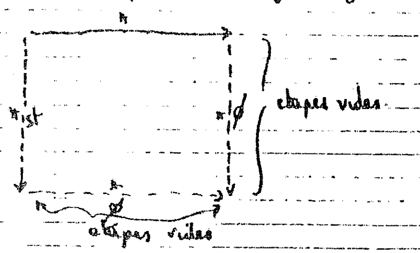
Graphiquement :



<u>Démonstration</u>. (Klop 77) On va montrer que l'on peut standardiser n'importe quelle réduction parallèle $\rho : M \xrightarrow{*} N$. Soit $S(\rho)$ le radical minimum dans l'ordre standard qui a un résidu contracté dans ρ. Soit $u = S(\rho)$ et $\rho : M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} M_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} M_2 \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}_n} M_n$, on montre.



On itère le procédé à partir de la réduction de la ligne inférieure. Ce procédé ne peut être infini grâce au th. des dév^ts finis. D'où



□

Exercices :

1) Soit $\Delta = \lambda x.xx$. Montrer que $\Delta\Delta M_1 M_2 \cdots M_n$ n'a pas de forme normale pour tout $M_1, M_2 \cdots M_n$. Soit $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$, $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$. Montrer que aussi $YIM_1M_2\cdots M_n$ et $YKM_1M_2\cdots M_n$ n'ont pas de formes normales pour tout $M_1, M_2 \cdots M_n$.

2) Montrer le théorème des développements finis dans le λI-calcul.

3) Montrer que si M est une λI-expression et M a une forme normale, alors la réduction normale issue de M est la plus longue des réductions (non parallèles) aboutissant à la forme normale. Montrer que si M est une λI-expression et si M a une forme normale, alors M est fortement normalisable.

4) Définir la réduction "antinormale" qui consiste à contracter toujours le radical le plus interne et le plus à droite. Donner un exemple d'expression qui a une forme normale, non atteinte par la réduction antinormale. Donner un exemple d'expression non fortement normalisable et dont la réduction antinormale atteint la forme normale.

Problème : Soit V un ensemble de variables, F un ensemble de symboles de fonctions (chaque $f \in F$ ayant un nombre d'arguments ou arité fixé, noté $\rho(f)$). Alors l'ensemble $M(F,V)$ des termes correspondants est l'ensemble minimal ~~contenant~~ tel que :

a) $V \subset M(F,V)$

b) Si $f \in F$, $n = \rho(f)$ et $t_1, t_2 \cdots t_n \in M(F,V)$, alors $f(t_1, t_2, \cdots t_n) \in M(F,V)$.

Un schéma de programmes récursifs (spr) (voir cours de Courcelle-Nivat) est défini par un quadruplet $\langle V, F, \Phi, \Sigma \rangle$ où F, Φ sont deux ensembles disjoints de symboles de fonction, V

est un ensemble de variables, Σ un ensemble de règles de récriture, de la forme $\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n) \to t$ où $\varphi \in \Phi$, $\{x_1, x_2 \cdots x_n\} \subset V$, $t \in M(F \cup \Phi, \{x_1, x_2 \cdots x_n\})$ et $n = \rho(\varphi)$. De plus, on exige que pour tout $\varphi \in \Phi$, il y a au plus une règle correspondante.

Une substitution $\sigma : V \to M(F \cup \Phi, V)$ est étendue trivialement, par récurrence sur la structure des termes (ou morphisme), à l'ensemble de tous les termes. Ainsi $t \to t'$ ssi un sous-terme de t est de la forme $\varphi(u_1, u_2, \cdots u_n)$ et est remplacé dans t' par $\sigma(u)$ où $\sigma(x_i) = u_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\varphi(x_1, x_2 \cdots x_n) \to u$ est une des règles de Σ. De même, on définit $t \xrightarrow{*} t'$.

1) Montrer Church-Rosser pour les spr

2) Montrer le théorème de standardisation. En conclure, que "l'appel par nom" dans les spr donne toujours plus de résultat que l'appel par valeur (L'appel par nom correspond à la ~~contraction~~ réduction normale, l'appel par valeur à la dérivation de l'occurrence la plus interne et la plus à gauche)

-III- Résultats d'indécidabilité :

Définition : L'appartenance à un ensemble $A \subset \Lambda^p$ est décidable ssi il existe un programme ALGOL prenant en données p λ-expressions quelconques $M_1, M_2, \ldots M_p$ et donnant le résultat "oui" si $\langle M_1, M_2, \ldots M_p \rangle \in A$ ou le résultat "non" sinon. On dit encore que A est récursif.

Remarquons que le programme demandé se termine sur toute donnée. Le choix du langage ALGOL n'a aucune importance (Il suffit de prendre un langage de programmation suffisamment puissant). Une définition plus rigoureuse est possible, mais demande quelques notions de la théorie de la calculabilité (encore appelée théorie de la récursivité) - voir Rogers ou Yasuhara ou Kleene.

Théorème (Scott 1963) : Soit $A \subset \Lambda$ tel que

1) A est non trivial, c.à.d $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Lambda$,

2) A est fermé par interconvertibilité, c.à.d si $M \in A$ et $M =_\beta N$ alors $N \in A$,

Alors A n'est pas récursif.

Ce théorème correspond au théorème de Rice de la théorie de la récursivité. Sa démonstration est simple (voir Barendregt - thèse). On peut en effet coder toute fonction récursive partielle (c'est à dire toute fonction calculable sur les entiers par un programme ALGOL) par une λ-expression. La base

du codage utilise la représentation de tout entier n par la λ-expression $\lambda f x . \underbrace{f(f(\cdots(f}_{n \text{ fois}} x)\cdots))$.

Corollaires : Les problèmes suivants sont indécidables :

1) M a une forme normale ?

2) $M =_\beta N$?

3) $M \xrightarrow{*} N$?

4) $M =_{\beta,\eta} N$?

Définition : Appelons extension du λ-calcul toute relation $\equiv$ d'équivalence contenant $=_\beta$. Une extension $\equiv$ est cohérente ssi il existe M et N tels que $M \not\equiv N$ (c.à.d $\equiv$ n'est pas universelle)

Corollaire : (Grzegorczyk 1970) Le λ-calcul est essentiellement indécidable, c.à.d n'a pas d'extension cohérente décidable.

Exercices : Montrer que les ensembles suivants ne sont pas récursifs

1) $A = \{M \mid M \xrightarrow{*} \lambda x . N\}$

2) $B = \{M \mid M \xrightarrow{*} x M_1 M_2 \ldots M_n\}$

3) $A \cup B$

IV - Permutations de réductions :

1

Dans ce chapitre, nous considérons principalement des réductions parallèles.

Notations

1) $RED(M) = \{\rho \mid ORG(\rho) = M\}$ (ensemble des réductions issues de M)

2) ϕ_M représente la réduction $M \xrightarrow{\emptyset} M$ (une réduction en parallèle d'un ensemble vide de radicaux). On écrira ϕ plus simplement quand M est clair d'après le contexte

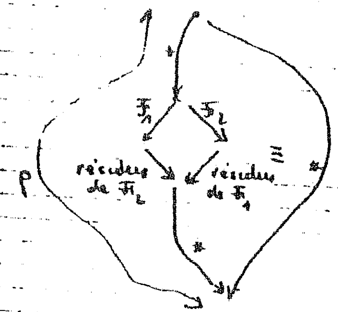
3) $\phi_M^n = \underbrace{\phi_M \phi_M \cdots \phi_M}_{n \text{ fois}}$ (Donc n étapes vides) et de même on écrira plus simplement ϕ^n quand M est clair d'après le contexte.

Définition L'<u>équivalence</u> $\equiv$ par <u>permutations</u> entre deux réductions ρ et σ est définie par

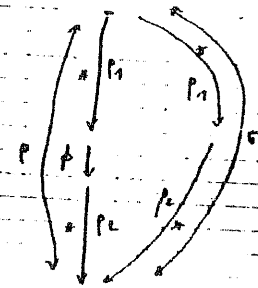
1) $\rho\phi \equiv \phi\rho \equiv \rho$ (élimination des étapes vides)
2) $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho$ si $|\rho| = |\sigma| = 1$ (lemme du carré, voir § II)
3) $\rho\tau_1\sigma \equiv \rho\tau_2\sigma$ si $\tau_1 \equiv \tau_2$ (congruence pour concaténation)
4) $\rho \equiv \tau$ si $\rho \equiv \sigma$ et $\sigma \equiv \tau$ (transitivité)

L'équivalence par permutations est donc la plus petite congruence pour la concaténation respectant le lemme du carré et l'élimination des étapes vides. Graphiquement :

2

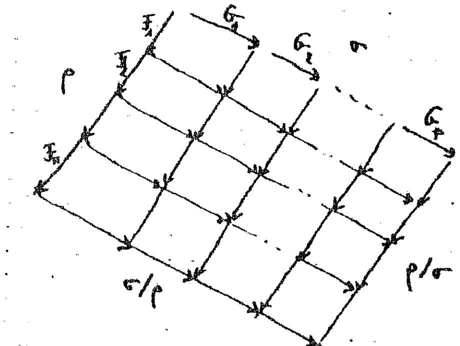


et



Deux réductions équivalentes par permutations sont trivialement coinitiales et coextrémales. Mais la réciproque n'est pas exacte : par exemple, $\rho \equiv \phi$ implique $\rho = \phi^n$ pour un $n \geq 0$, mais si $\sigma : \Delta\Delta \xrightarrow{\{e\}} \Delta\Delta$ où $\Delta = \lambda x.xx$, on a $\sigma \not\equiv \phi$ et pourtant σ et ϕ ont mêmes expressions de départ et d'arrivée. Mais peut-on se rendre compte facilement si $\rho \equiv \sigma$? La relation $\equiv$ est-elle décidable ?

Définition Si ρ et σ sont deux réductions coinitiales, alors le <u>résidu</u> σ/ρ <u>de σ par ρ</u> et le résidu ρ/σ de ρ par σ est défini par



où chaque carré est une application du lemme du carré.

③

Formellement, si $\rho : M \xrightarrow{\mathcal{F}} N$, alors

1) si $|\sigma| = 0$, alors $|\sigma/\rho| = 0$ et $ORG(\sigma/\rho) = N$
2) si $|\sigma| = 1$, alors $\sigma : M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} P$ et $\sigma/\rho : N \xrightarrow{\mathcal{F}_1'} Q$ où $\mathcal{F}_1' = \mathcal{F}_1/\rho$
3) si $|\sigma| > 1$, alors $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ avec $|\sigma_1| = 1$ et $\sigma/\rho = (\sigma_1/\rho)(\sigma_2/(\rho/\sigma_1))$

Remarques: 1) On a généralisé la notion de résidu aux réductions puisque, si $\sigma : M \xrightarrow{\mathcal{F}_1} N$ et ρ est issue de M, il existe un isomorphisme entre $\mathcal{F}_1/\rho$ et σ/ρ.

2) Si $|\sigma| = 0$, alors $\rho/\sigma = \rho$
3) Si $\sigma = \phi^n$, alors $\rho/\sigma = \rho$
4) $\rho/(\sigma\tau) = (\rho/\sigma)/\tau$
5) $\rho/\rho = \phi^n$ avec $n = |\rho|$

$\boxed{\text{Notation}}$ Si ρ et σ sont coinitiales, posons $\rho \sqcup \sigma = \rho(\sigma/\rho)$. Symétriquement, $\sigma \sqcup \rho = \sigma(\rho/\sigma)$

$\boxed{\text{Proposition}}$ (Lemme du cube généralisé - voir §II) Si ρ, σ et τ sont trois réductions coinitiales, on a $\tau/(\rho \sqcup \sigma) = \tau/(\sigma \sqcup \rho)$.

$\boxed{\text{Proposition}}$ On a $\rho \equiv \sigma$ ssi $\rho/\sigma = \phi^n$ et $\sigma/\rho = \phi^p$ pour certains n et p. (Donc $\equiv$ est décidable)

Démonstration: D'abord on a aisément $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho$. Donc, si $\rho/\sigma = \phi^n$ et $\sigma/\rho = \phi^p$, alors $\rho \equiv \rho\phi^p = \rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho = \sigma\phi^n \equiv \sigma$.
Réciproquement, si $\rho \equiv \sigma$, alors on considère les différents cas de la définition de $\equiv$.

1) $\sigma = \rho\phi$. Alors $\sigma/\rho = (\rho\phi)/\rho = (\rho/\rho)(\phi/\tau) = \phi^{n+1}$ où $n = |\rho|$

④

et $\rho/\sigma = \rho/(\rho\phi) = (\rho/\rho)/\phi = \rho/\rho = \phi^n$

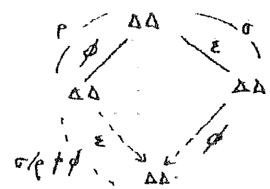
2) $\rho = \tau_1 \sqcup \tau_2$ et $\sigma = \tau_2 \sqcup \tau_1$ avec $|\tau_1| = |\tau_2| = 1$. Alors $\rho/\sigma = \rho/(\tau_1 \sqcup \tau_2) = \rho/(\tau_2 \sqcup \tau_1) = \rho/\rho = \phi^n$ par le lemme du cube. De même $\sigma/\rho = \phi^p$.

3) $\rho = \tau_1\tau_3\tau_2$ et $\sigma = \tau_1\tau_4\tau_2$ avec $\tau_3 \equiv \tau_4$. On a $\tau_3/\tau_4 = \phi^n$ et $\tau_4/\tau_3 = \phi^p$ par récurrence. D'où $\rho/\sigma = \phi^{n_1}\phi^n\phi^{n_2}$ où $n_1 = |\tau_1|$ et $n_2 = |\tau_2|$
De même pour σ/τ.

4) $\rho \equiv \tau$ et $\tau \equiv \sigma$ pour un τ. Alors $\rho/\tau = \phi^m$ et $\tau/\rho = \phi^n$ par récurrence. D'où $\sigma/\rho = (\sigma/\rho)/\phi^n = \sigma/(\rho\phi^n) = \sigma/(\rho \sqcup \tau) = \sigma/(\tau \sqcup \rho) = \sigma/(\tau(\rho/\tau)) = (\sigma/\tau)/(\rho/\tau) = (\sigma/\tau)/\phi^m = \sigma/\tau$. Or, comme $\tau \equiv \sigma$, on a aussi $\sigma/\tau = \phi^p$ par récurrence. D'où $\sigma/\rho = \phi^p$. De même pour ρ/σ. $\square$

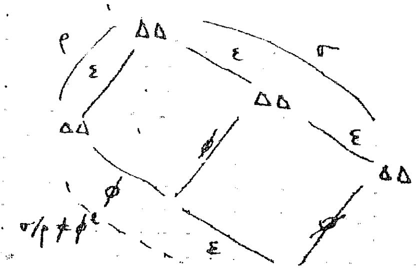
Exemples:

1) $\rho : \Delta\Delta \xrightarrow{\phi} \Delta\Delta$ et $\sigma : \Delta\Delta \xrightarrow{\{\varepsilon\}} \Delta\Delta$, alors $\rho \not\equiv \sigma$ car

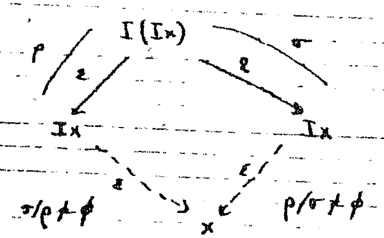


(Rappel: $\Delta = \lambda x.xx$)

2) $\rho : \Delta\Delta \xrightarrow{\{\varepsilon\}} \Delta\Delta$ et $\sigma : \Delta\Delta \xrightarrow{\{\varepsilon\}} \Delta\Delta \xrightarrow{\{\varepsilon\}} \Delta\Delta$, alors $\rho \not\equiv \sigma$ car

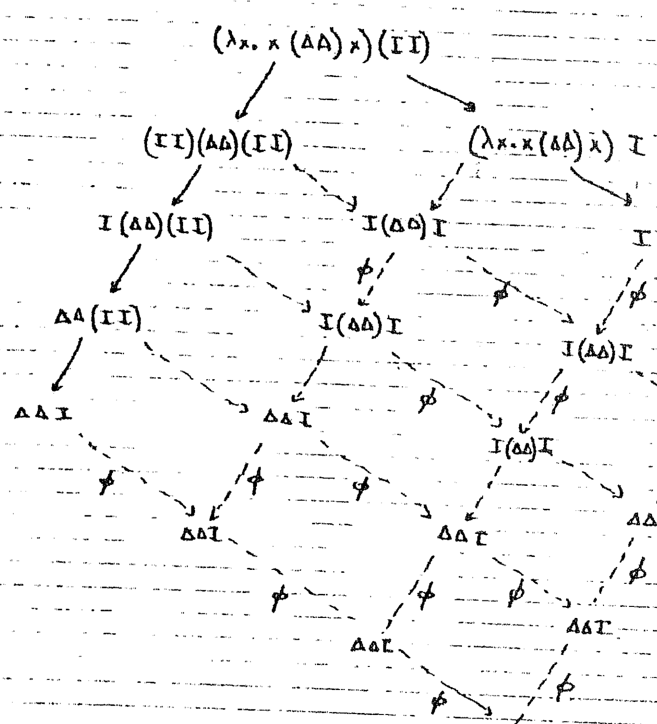


3) $\rho : I(Ix) \xrightarrow{\{\varepsilon\}} Ix$, $\sigma : I(Ix) \xrightarrow{\{1\}} Ix$, alors $\rho \not\equiv \sigma$ car ⑤



(Rappel : $I = \lambda x.x$)

4) $\rho \equiv \sigma$ où ρ, σ sont



⑥

Proposition

1) $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho$
2) $\rho\sigma \equiv \rho\tau$ implique $\sigma \equiv \tau$ (simplifiable à gauche)
3) $\rho \equiv \sigma$ ssi $\forall \tau$. $\tau/\rho = \tau/\sigma$
4) $\rho \equiv \sigma$ implique $\rho/\tau \equiv \sigma/\tau$ pour tout τ.

Ce sont toutes des propriétés algébriques très simples. Montrons la 3ème par exemple. Si $\rho \equiv \sigma$, alors $\sigma/\rho = \phi^m$ et $\rho/\sigma = \phi^n$. D'où $\tau/\rho = \tau/(\rho \sqcup \sigma) = \tau/(\sigma \sqcup \rho) = \tau/\sigma$. Réciproquement, supposons $\tau/\rho = \tau/\sigma$ pour tout τ. Alors $\sigma/\rho = \sigma/\sigma = \phi^m$ si $m = |\sigma|$. De même $\rho/\sigma = \rho/\rho = \phi^n$ si $n = |\rho|$. D'où $\rho \equiv \sigma$.

Définition Si ρ et σ sont coïnitiales, alors ρ est <u>incluse dans</u> σ, noté $\rho \sqsubseteq \sigma$, ssi il existe τ tel que $\rho\tau \equiv \sigma$

On remarque aisément que $\sqsubseteq$ est une relation de préordre.
(réflexive + transitive)

Corollaires

1) $\rho \sqsubseteq \sigma$ ssi $\rho/\sigma = \phi^n$ pour un n (Donc $\sqsubseteq$ est décidable)
2) $\rho \sqsubseteq \sigma \sqsubseteq \rho$ ssi $\rho \equiv \sigma$ (Donc $\sqsubseteq$ admet $\equiv$ comme équivalence associée)
3) $\rho \sqsubseteq \sigma$ implique $EXT(\rho) \xrightarrow{*} EXT(\sigma)$ (La réciproque est fausse)

Théorème (Le treillis des réductions) Pour toute expression M, l'ensemble $RED(M)$ des réductions issues de M a une structure de sup-1/2 treillis, c'est à dire toute paire de réductions ρ et σ admet un plus petit commun majorant $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho$.

Formellement, si ρ et σ sont coinitiales, on a (7)

1) $\rho \sqsubseteq \rho \sqcup \sigma$ et $\sigma \sqsubseteq \rho \sqcup \sigma$

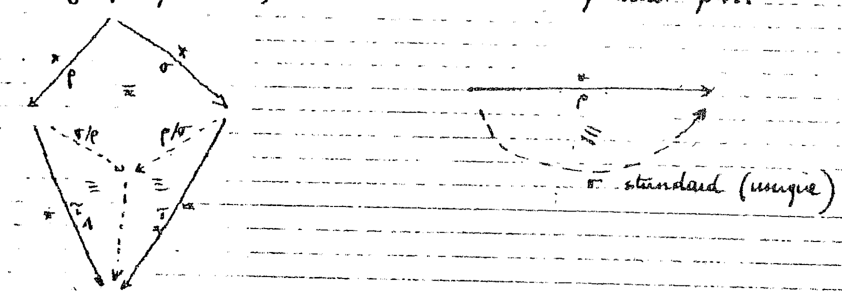
2) Pour tout τ tel que $\rho \sqsubseteq \tau$ et $\sigma \sqsubseteq \tau$, alors $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma \sqcup \rho \sqsubseteq \tau$.

<u>Démonstration</u>: D'abord $\rho \sqsubseteq \rho \sqcup \sigma$ et $\sigma \sqsubseteq \sigma \sqcup \rho$. D'où $\sigma \sqsubseteq \sigma \sqcup \rho \equiv \rho \sqcup \sigma$ et donc $\sigma \sqsubseteq \rho \sqcup \sigma$. Si $\rho \sqsubseteq \tau$ et $\sigma \sqsubseteq \tau$, alors $(\rho \sqcup \sigma)/\tau = (\rho/\tau)((\sigma/\rho)/(\tau/\rho))$ $= (\rho/\tau)(\sigma/(\rho \sqcup \tau)) = (\rho/\tau)(\sigma/(\tau \sqcup \rho)) = (\rho/\tau)((\sigma/\tau)/(\rho/\tau)) = \emptyset^{m+n}$ puisque, comme $\rho \sqsubseteq \tau$ et $\sigma \sqsubseteq \tau$, on a $\rho/\tau = \emptyset^m$ et $\sigma/\tau = \emptyset^n$. $\square$

Il s'agit donc d'une version améliorée du théorème de Church-Rosser puisqu'on a montré qu'il existe une plus petite réduction commune prolongeant deux réductions considérées. Par ailleurs, ce théorème montre qu'à l'intérieur même des calculs il y a une structure de treillis : peut-être cela rend moins étonnants les treillis que l'on retrouve au niveau sémantique. En outre, on peut comparer la simplicité de cette démonstration par rapport à celle de Vuillemin pour les schémas de programmes récursifs.

$\boxed{\text{Théorème}}$ Pour toute réduction ρ, il existe une et une seule réduction standard σ telle que $\rho \equiv \sigma$.

Graphiquement, ces deux théorèmes s'expriment par :



Exercices : (8)

1) Montrer que $\rho\sigma \sqsubseteq \rho\tau$ implique $\sigma \sqsubseteq \tau$

2) Montrer que, si $\rho \sqsubseteq \sigma$, alors $\rho \sqcup \sigma \equiv \sigma$

3) Montrer que $(\rho \sqcup \sigma) \sqcup \tau \equiv \rho \sqcup (\sigma \sqcup \tau)$ où ρ, σ, τ sont coinitiales.

4) Montrer que, si ρ et σ sont coinitiales, alors ρ et σ n'ont pas forcément de plus grand commun minorant (Indication : considérer $M = (\lambda x. Ka(xY))(Kb)$ où $K = \lambda xy.x$ et Y est l'opération récursion)

5) Montrer que si ρ et σ sont coinitiales et $EXT(\rho) = EXT(\sigma)$ est en forme normale, alors $\rho \equiv \sigma$.

6) Montrer que, si ρ est une réduction normale, alors ρ/σ est une reduction normale pour tout σ (à quelques étapes vides près)

7) Montrer qu'il n'existe qu'une seule réduction standard issue d'une expression aboutissant à une forme normale

8) Montrer que, si ρ est standard et $\sigma \sqsubseteq \rho$, alors ρ/σ est standard (à quelques étapes vides près). Cela est-il encore vrai si on n'a pas $\sigma \sqsubseteq \rho$?

9) Soit $\ell(\rho)$ la longueur de la réduction standard σ équivalente à ρ. Montrer que, si $\sigma \sqsubseteq \rho$, alors $\ell(\rho/\sigma) \leq \ell(\rho)$.

10) Même exercice, mais dans le λI-calcul, montrer qu'alors $|\sigma| + \ell(\rho/\sigma) \leq \ell(\rho)$. En déduire qu'alors, on a $|\rho| \leq \ell(\rho)$. Donc, dans le λI-calcul, toute expression normalisable est fortement normalisable.

11) Donner un exemple de suite $\rho \sqsupseteq \rho_1 \sqsupseteq \rho_2 \sqsupseteq \cdots$ strictement décroissante. Donc $\sqsubseteq$ n'est pas bien fondé.

12) Dessiner le treillis des réductions issues de $I(K(Ix)y)$ où $I = \lambda x.x$, $K = \lambda xy.x$. Comparer au graphe des réductions. Considérer les réductions standards.

V Approximations et Arbres de Böhm

(1)

1) SEMANTIQUES COHERENTES ET FORMES NORMALES DE TETE :

Définition : Une sémantique du λ-calcul est une congruence validant la β-règle, c'est à dire une relation d'équivalence $\equiv$ sur les λ-expressions vérifiant :

1) $M \xrightarrow{*} N$ implique $M \equiv N$

2) $M \equiv N$ implique $P[u \leftarrow M] \equiv P[u \leftarrow N]$ pour toute expression P et occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$.

Intuitivement, on veut définir l'équivalence entre deux programmes (càd ici deux λ-expressions). Deux programmes égaux par β-interconvertibilité sont équivalents puisqu'ils se calculent de la même manière et deux programmes mis dans un même contexte donnent deux programmes équivalents. La plus petite sémantique est clairement $=_\beta$ d'après notre définition, puisque $M =_\beta N$ implique $P[u \leftarrow M] =_\beta P[u \leftarrow N]$. Mais est-ce la plus "raisonnable" ? Les programmes peuvent en effet avoir des boucles et ne pas donner de valeur. Par exemple $\Delta\Delta$ et $\Delta\Delta\Delta$ (où $\Delta = \lambda x.xx$) sont-ils équivalents ? (Pourtant $\Delta\Delta \neq_\beta \Delta\Delta\Delta$). Une notion de terminaison existe dans le λ-calcul : les expressions qui ont des formes normales. Deux expressions sans formes normales représentant deux programmes qui ne se terminent, il semble logique de les rendre équivalentes. Mais nous allons constater qu'il faut faire attention pour définir une sémantique des λ-expressions.

Appelons sémantique incohérente toute sémantique $\equiv$ universelle, c'est à dire vérifiant $M \equiv N$ pour toutes expressions M et N.

(2)

Remarque : Toute sémantique $\equiv$ vérifiant $M \equiv N$ pour toutes les expressions M et N qui n'ont pas de formes normales est incohérente.

Démonstration : Soit $\Delta = \lambda x.xx$, $K = \lambda xy.x$, $P = \lambda xyz.xy(\Delta\Delta)$ et $Q = \lambda xyz.xz(\Delta\Delta)$. Alors P et Q n'ont pas de formes normales, donc $P \equiv Q$. D'où $PKMN \equiv QKMN$ puisque $\equiv$ est une sémantique. Or $PKMN \xrightarrow{*} M$ et $QKMN \xrightarrow{*} N$. Donc $M \equiv N$ pour toutes expressions M et N. □

Donc toutes les expressions sans formes normales ne peuvent être toutes identifiées. Nous allons voir qu'il en est de même pour les expressions qui ont une forme normale.

Théorème (Böhm 1968) : Soient M et N deux expressions en forme normale non η-interconvertibles. Alors, il existe une paire de variables x et y ($x \neq y$), une expression P et une occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$ telles que :

$$P[u \leftarrow M] \xrightarrow{*} x \quad \text{et} \quad P[u \leftarrow N] \xrightarrow{*} y$$

La démonstration est compliquée. (On appelle parfois contexte une paire expression P et occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$). La η-interconvertibilité est définie à partir de la η-règle, comme nous l'avons fait pour la β-règle. Par exemple x et $\lambda y.xy$ sont η-interconvertibles.

Corollaire : Toute sémantique $\equiv$ vérifiant $M \equiv N$ pour deux expressions M et N en forme normale non η-interconvertibles est incohérente.

<u>Démonstration</u> : Par le théorème de Böhm, on obtient (3)
$P[u \leftarrow M] \equiv x$ et $P[u \leftarrow N] \equiv y$ pour un contexte P et u bien choisi. (Et on a $x \not\equiv y$). Comme $M \equiv N$, on a $x \equiv y$. D'où $(\lambda xy.x)QR \equiv (\lambda xy.y)QR$ et donc $Q \equiv R$ pour toutes expressions Q et R. □

En résumé, il faut pour obtenir une sémantique cohérente ne pas identifier toutes les expressions qui n'ont pas de forme normale et différencier toutes les expressions qui ont des formes normales non η-interconvertibles. Question : que peut-on identifier ? La réponse est aisée, si au lieu de considérer la forme de l'expression, on regarde son comportement sur l'extérieur.

<u>Définition</u> / Une expression M est <u>totalement indéfinie</u> ssi, pour toutes expressions P et N et occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$, si $P[u \leftarrow M]$ a une forme normale, alors $P[u \leftarrow N]$ a une forme normale.

Autrement dit, dès qu'il existe une expression N telle que $P[u \leftarrow N]$ n'a pas de forme normale, alors $P[u \leftarrow M]$ n'a pas de forme normale non plus. On peut montrer que $\Delta\Delta$, $\Delta\Delta\Delta$, YK … sont totalement indéfinies. Mais, par exemple, les expressions P et Q de la remarque 1 ne sont pas totalement indéfinies. En effet $PKab \xrightarrow{*} a$, mais $\Delta\Delta Kab$ n'a pas de forme normale ; de même pour $QKab \xrightarrow{*} b$.

La base de notre sémantique va être l'identification des expressions totalement indéfinies et heureusement il existe une caractérisation plus sympathique de ces expressions, en introduisant une nouvelle sorte d'expressions : les expressions en forme normale de tête ("head normal form" : Wadsworth 1971).

<u>Définition</u> / Toute λ-expression $M = \lambda x_1 x_2 \cdots x_m . x M_1 M_2 \cdots M_n$ est dite être en <u>forme normale de tête</u> (fnt en abrégé).

Remarquons que l'on a $m, n \geq 0$ et x qui peut être libre ou liée, mais les expressions $M_1, M_2 \cdots M_n$ sont quelconques. Donc une expression en forme normale est une fnt, mais la réciproque n'est pas vraie : par exemple $x(\Delta\Delta)$ est une fnt. Remarquons également que toute expression non en fnt est forcément de la forme $\lambda x_1 x_2 \cdots x_m . (\lambda x.M) N M_1 M_2 \cdots M_n$ où $m, n \geq 0$ et $M, N, M_1, M_2 \cdots M_n$ sont des expressions quelconques. Elle contient un <u>radical de tête</u> (ici $(\lambda x.M)N$).

<u>Remarque 2</u> : Toute expression en fnt n'est pas totalement indéfinie.

<u>Démonstration</u> : Soit $M = \lambda x_1 x_2 \cdots x_m . x M_1 M_2 \cdots M_n$. Supposons x liée c'est à dire $x = x_i$ pour un i entre 1 et m. (Sinon il n'y a qu'à considérer $\lambda x.M$). Soit $N_1, N_2 \cdots N_m$ des expressions quelconques sauf $N_i = \lambda x_1 x_2 \cdots x_m . y$. Alors $M N_1 N_2 \cdots N_m$ a une forme normale mais $\Delta\Delta N_1 N_2 \cdots N_m$ n'a pas de forme normale. □

<u>Définition</u> / M <u>a une fnt</u> ssi il existe N en fnt tel que $M \xrightarrow{*} N$. Deux fnt $M = \lambda x_1 x_2 \cdots x_m . x M_1 M_2 \cdots M_n$ et $N = \lambda x_1 x_2 \cdots x_m . x N_1 N_2 \cdots N_n$ seront dites <u>semblables</u>.

<u>Remarque 3</u> : Si $M \xrightarrow{*} N$ et $M \xrightarrow{*} P$ et si N et P sont en fnt, alors N et P sont deux fnt semblables.

Démonstration : Si $N \xrightarrow{*} N'$, alors N' est une fnt semblable à N. Donc, par Church-Rosser, N et P sont semblables.

Remarque 4 : Si M a une fnt, alors M a une fnt minimale, càd. $M \xrightarrow{*} N$ où N est en fnt et, pour toute fnt P telle que $M \xrightarrow{*} P$, on a $N \xrightarrow{*} P$.

Démonstration : Supposons $M \xrightarrow{*} P$ où P est en fnt. Par le théorème de standardisation, il existe une réduction ρ standard telle que $\rho : M \xrightarrow{*} P$. Maintenant, soit M est en fnt et alors $N = M$, soit M n'est pas en fnt et alors la réduction standard commence par contracter le radical de tête de M (sinon on ne peut obtenir une fnt). Donc $\rho = \rho_h \sigma$ où ρ_h est la réduction contractant toujours le radical de tête jusqu'à obtenir une fnt. Or $\rho_h : M \xrightarrow{*} N$ est une réduction uniquement fonction de M. □

Les fnt d'une expression donnée ont donc un comportement proche de celui des formes normales : elles sont toutes semblables, la réduction normale finit toujours par en obtenir une. De plus, la remarque 2 nous montre qu'une expression qui a une fnt n'est pas totalement indéfinie. Nous verrons plus tard que la réciproque est vraie. Enfin, une sémantique cohérente semble pouvoir être construite à partir des fnt.

Exercices :

1) Trouver le contexte de Bohm pour les paires d'expressions suivantes xab et xac, $\lambda xy.x$ et $\lambda xy.y$, $x(xab)c$ et $x(xad)c$ (Indication : dans ce dernier cas, considérer l'expression $C_k = \lambda x_1 x_2 \dots x_k . x_k x_1 x_2 \dots x_{k-1}$ pour k grand)

2) On peut généraliser le théorème de Böhm à n formes normales distinctes. Trouver le contexte pour xab, xac et xbc.

3) Montrer que Y a une fnt.

2) APPROXIMATIONS D'UNE EXPRESSION :

Quelle est l'information contenue dans une expression sans la calculer ? Introduisons une constante Ω dont la signification intuitive est "aucune information" ou "l'indéfini". Et

Définition / L'approximation directe $\omega(M)$ de M est obtenue en remplaçant tous les radicaux de M par Ω et en appliquant exhaustivement les deux règles :

$$\Omega P \to \Omega \quad \text{et} \quad \lambda x.\Omega \to \Omega. \qquad (\omega\text{-règles})$$

Exemple : $\omega(Ia) = \omega(Iab) = \omega(\lambda xy.Ixy) = \Omega$.
$\omega(x(Ia)b) = x\Omega b$ etc...

Intuitivement, l'indéfini appliqué à toute expression est indéfini ; de même la fonction donnant toujours la valeur indéfini est l'indéfini. (L'ordre dans lequel sont appliquées les ω-règles n'a pas d'importance, càd les ω-règles sont Church-Rosser)

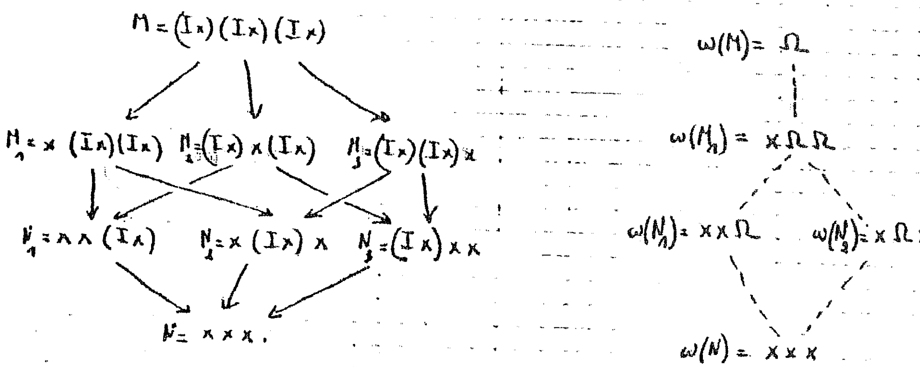
Remarque 5. On a

1) $\omega(M) = \Omega$ ssi M n'est pas en fnt

2) $\omega(M) = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x(\omega(M_1)) \dots (\omega(M_n))$ si $M = \lambda x_1 x_2 \dots x_m . x M_1 \dots M_n$.

L'ensemble $\mathcal{N} = \omega(\Lambda)$ des approximations directes de λ-expressions ne contient pas de β ou ω-radicaux. C'est donc l'ensemble des ω-β-formes normales de l'ensemble $\Lambda(V, \{\Omega\})$ des λ-expressions étendues par la constante Ω.

Considérons $M = (Ix)(Ix)(Ix)$ et l'ensemble $\mathcal{A}(M) = \{\omega(N) \mid M \xrightarrow{*} N\}$ des approximations de M. On a :



$(\Omega = \omega(M) = \omega(M_2) = \omega(M_3) = \omega(N_2) = \omega(N_3))$

Un ordre naturel est induit sur les ω-β-formes normales.

Définition/ Soient $M, N \in \Lambda(V, \{\Omega\})$ deux λ-expressions (pouvant contenir la constante Ω. Alors M est un préfixe de N, noté $M \leq N$, est défini par :

1) $\Omega \leq M$ pour tout M 2) $x \leq x$

3) Si $M \leq N$, alors $\lambda x. M \leq \lambda x. N$

4) Si $M_1 \leq N_1$ et $M_2 \leq N_2$, alors $M_1 M_2 \leq N_1 N_2$

Dans le cas où $a \leq b$ et $a, b \in \mathcal{N}$, on dira aussi que a est moins défini que b

Remarque 6 : Si $M \xrightarrow{*} N$, alors $\omega(M) \leq \omega(N)$.

Proposition/

1) $\mathcal{N}$ a une structure de sup ½ treillis sous condition pour $\leq$.

2) Pour tout M, l'ensemble $\mathcal{A}(M)$ des approximations de M est un sous-treillis de $\mathcal{N}$ (avec même sup et même inf)

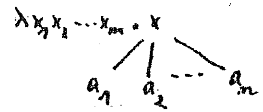
Démonstration : très simple par Church-Rosser et remarque 4. □

3) ARBRES DE BÖHM :

Les ω-β formes normales peuvent être représentées par des arbres :

Ω correspond à une feuille Ω

$\lambda x_1 x_2 \dots x_m . x\, a_1 a_2 \dots a_n$ correspond à un noeud



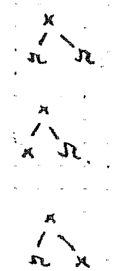
(Attention : ces arbres ne correspondent pas à la représentation en arbre des λ-expressions vue au chapitre I). Par exemple :

Ω correspond à Ω.

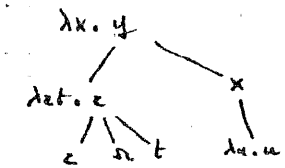
$x\Omega\Omega$ "

$xx\Omega$ "

$x\Omega x$ " etc...



$\lambda x. y(\lambda zt. zz\Omega t)(x(\lambda u. u))$ "



Ces arbres correspondent à ceux considérés par Courcelle ou

Nivat dans les schémas de programmes récursifs, mais dans le λ-calcul, il n'y a pas de différence entre symboles de variables et symboles de fonctions, ni d'arité pour ces derniers. L'ordre $a \lesssim b$ sur $\mathcal{N}$ correspond à l'ordre préfixe sur ces arbres et, comme l'ensemble des approximations d'une expression est un treillis, il semble logique d'associer à toute expression le plus grand arbre correspondant à ces approximations. Par exemple, on associe à $(Ix)(Ix)(Ix)$ l'arbre

$$\begin{array}{ccc} & x & \\ / & & \backslash \\ x & & x \end{array}$$

. Malheureusement, cet arbre peut être infini. Par exemple $Y = \lambda f.\, Y_f$ où $Y_f = (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$.
Alors $Y \xrightarrow{*} \lambda f. f^n(Y_f)$ et $\mathcal{A}(Y) = \{\Omega\} \cup \{\lambda f. f^n(\Omega) \mid n \geq 1\}$.
Donc l'arbre associé est

$$\begin{array}{c} \lambda f.\, f \\ | \\ f \\ | \\ f \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Ces arbres infinis sont appelés _Arbres de Böhm_ par Barendregt (car c'est sur eux que s'appuie la démonstration du théorème de Böhm). Pour parler de ces arbres infinis, nous allons utiliser une technique de complétion (classique ?) et nous pourrons encore les ordonner par ordre préfixe.

Définition/ L'arbre de Böhm de M, noté $BT(M)$, est l'ensemble $\{a \in \mathcal{N} \mid a \lesssim b,\ b \in \mathcal{A}(M)\} = \{a \in \mathcal{N} \mid a \lesssim \omega(N),\ M \xrightarrow{*} N\}$.

En terminologie des treillis, un tel ensemble $A \subset \mathcal{N}$ clos vers le bas et dirigé (càd vérifiant pour tout $a, b \in A$ il existe $c \in A$ tel que $a \lesssim c$ et $b \lesssim c$) est appelé un _idéal_. Et nous avons effectué la complétion de $\mathcal{N}$ par idéaux. En effet, soit $\overline{\mathcal{N}} = \{A \mid A \subset \mathcal{N},\ A \text{ est un idéal}\}$; alors la structure $(\mathcal{N}, \lesssim)$ s'étend aisément par $(\overline{\mathcal{N}}, \subset)$. En outre, on vérifie aisément qu'à tout idéal de $\mathcal{N}$ correspond un arbre (fini ou infini)

4) SEMANTIQUE PAR APPROXIMATIONS:

Définition/ Une _sémantique monotone_ des λ-expressions sera toute relation $\sqsubseteq$ de préordre (càd reflexive et transitive) vérifiant

1) $M \xrightarrow{*} N$ implique $M \equiv N$ (càd $M \sqsubseteq N \sqsubseteq M$)
2) $M \sqsubseteq N$ implique $P[u \leftarrow M] \sqsubseteq P[u \leftarrow N]$ pour toute expression P et occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$

Une sémantique monotone $\sqsubseteq$ des λ-expressions (étendues par la constante Ω) est _continue par rapport à ses approximations_ ssi elle vérifie ; pour tout M

1) $\Omega \sqsubseteq M$
2) $M \equiv \bigsqcup BT(M)$, c'est à dire M est le plus petit commun majorant de l'ensemble $BT(M)$ modulo $\equiv$.

Définition/ Appelons _sémantique par approximations_ la relation $\sqsubseteq$ définie par :

$$M \sqsubseteq N \quad \text{ssi} \quad BT(M) \subset BT(N).$$

De plus, on écrira $M \equiv N$ pour $BT(M) = BT(N)$.

Exercices:

1) Montrer que $M \sqsubseteq N$ pour tout N ssi M n'a pas de fnt

2) Montrer que, si M a une forme normale et $M \sqsubseteq N$, alors N a la même forme normale

3) Montrer que, si M a une fnt et $M \sqsubseteq N$, alors N a une fnt semblable à celle de M.

4) Montrer que $Yf \equiv Yf^2$

5) Montrer que $Y(f \circ g) \equiv f(Y(g \circ f))$ où $f \circ g = \lambda x. f(g(x))$

6) Montrer que toute sémantique monotone $\sqsubseteq'$ vérifiant $\Omega \sqsubseteq' M$ pour tout M vérifie également $\Omega M \equiv' \Omega$ pour tout M. Qu'en est-il pour $\lambda x. \Omega \equiv' \Omega$?

Théorème 1: Si $M \xrightarrow{*} N$, alors $M \equiv N$

Démonstration: D'abord $N \sqsubseteq M$ puisque trivialement $BT(N) \subset BT(M)$. Maintenant, si $a \in BT(M)$, alors $\exists M'.\ M \xrightarrow{*} M'$ et $a \lesssim \omega(M')$. Comme $M \xrightarrow{*} N$, par Church-Rosser il existe N' tel que $M' \xrightarrow{*} N'$ et $N \xrightarrow{*} N'$. Donc $a \lesssim \omega(M') \lesssim \omega(N')$ et $a \in BT(N)$. Donc $M \sqsubseteq N$. □

Maintenant nous montrons que $\sqsubseteq$ définit une sémantique monotone. Il suffit de montrer que, si $M \sqsubseteq N$, alors $P[u \leftarrow M] \sqsubseteq P[u \leftarrow N]$ pour tout P et $u \in O(P)$. Cela n'est pas simple a priori, car on ne connait par hypothèse que le comportement de M par rapport à N et il faut en déduire que pour tout Q tel que $P[u \leftarrow M] \xrightarrow{*} Q$, il existe R tel que $P[u \leftarrow N] \xrightarrow{*} R$ et $\omega(Q) \lesssim \omega(R)$. Or on veut savoir ce qu'est devenu M dans Q pour arriver à fabriquer un R ! Auparavant, on montre facilement les lemmes suivants:

Lemmes:

1) $M \lesssim N$ implique $M \sqsubseteq N$

2) Si $a \in BT(M)$, alors $P[u \leftarrow a] \sqsubseteq P[u \leftarrow M]$

Démonstration:

1) Si $M \xrightarrow{*} M'$, alors on montre facilement qu'il existe N' tel que $N \xrightarrow{*} N'$ et $M' \lesssim N'$. D'où $\omega(M') \lesssim \omega(N')$ et $M \sqsubseteq N$.

2) Comme $a \in BT(M)$, il existe M' tel que $a \lesssim \omega(M')$ et $M \xrightarrow{*} M'$. Donc $a \lesssim M'$. Or $P[u \leftarrow M] \xrightarrow{*} P[u \leftarrow M'] \gtrsim P[u \leftarrow a]$. Il en résulte $P[u \leftarrow a] \sqsubseteq P[u \leftarrow M'] \equiv P[u \leftarrow M]$. □

Soit $S \subset \Lambda$ un ensemble dirigé de λ-expressions (c à dire vérifiant pour tout $M, N \in S$ il existe $P \in S$ tel que $M \sqsubseteq P$ et $N \sqsubseteq P$). Nous noterons $\sqcup S$ pour $\bigcup BT(S)$ (On vérifie facilement que cet ensemble est un idéal de $\mathcal{N}$ et est donc la borne supérieure de $BT(S)$ dans $\bar{\mathcal{N}}$, voir page 10). Et nous écrirons $M \equiv \sqcup S$ pour $BT(M) = \bigcup BT(S)$; de même $M \sqsubseteq \sqcup S$ pour $BT(M) \subset \bigcup BT(S)$....

Les lemmes précédents donnent si $M \sqsubseteq N$:

$$\sqcup \{P[u \leftarrow a] \mid a \in BT(M)\} \sqsubseteq \sqcup \{P[u \leftarrow b] \mid b \in BT(N)\} \sqsubseteq P[u \leftarrow N]$$

Il ne reste plus qu'à montrer

$$P[u \leftarrow M] \sqsubseteq \sqcup \{P[u \leftarrow a] \mid a \in BT(M)\}$$

Comme le lemme nous a donné l'inégalité inverse, cela revient à montrer

$$P[u \leftarrow M] \equiv \sqcup \{P[u \leftarrow a] \mid a \in BT(M)\} \quad ??$$

Autrement dit, est ce que l'opération de "contexte" est continue ? La démonstration de cette propriété de continuité est délicate car elle fait intervenir une propriété des réductions, qui est la suivante:

$$\begin{tikzcd}
& P[u\leftarrow M] \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, dashed, "*"] & \\
Q \arrow[dr, dashed, "*"'] & & P[u\leftarrow N] \arrow[dl, dashed, "*"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

cette réduction ne réduisant jamais un résidu d'un radical interne à N dans $P[u\leftarrow N]$.

· Une proposition plus simple lui est équivalente :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "*"] \arrow[dr, dashed, "*"', "ie"] & Q \arrow[d, dashed, "*"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

où une réduction $P \xrightarrow[ie]{*} R$ de <u>l'intérieur vers l'extérieur</u> est une réduction

$$P = P_0 \xrightarrow{R_1} P_1 \xrightarrow{R_2} P_2 \dots \xrightarrow{R_n} P_n = R$$

telle que, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, le radical R_j n'est pas résidu (le long de cette réduction) d'un radical S_i interne à R_i dans P_{i-1}. (C'est donc le contraire de standard) Cette propriété a été posée par P. Welch (1973) et démontrée dans JJL (1974). Modulo la démonstration de cette propriété, on obtient :

<u>Théorème 2.</u> $P[u\leftarrow M] \equiv \sqcup \{P[u\leftarrow a] \mid a \in BT(M)\}$

<u>Théorème 3</u> : Si $M \sqsubseteq N$, alors $P[u\leftarrow M] \sqsubseteq P[u\leftarrow N]$.

<u>Corollaire</u> : $\sqsubseteq$ est la plus petite sémantique continue par rapport à ses approximations.

Exercices :

1) Montrer que si M n'a pas de fnt, alors M est totalement indéfini.

2) Montrer que $\Omega M \equiv \Omega$ et $\lambda x.\Omega \equiv \Omega$.

3) Donner M et N telles que $MP \equiv NP$ pour tout P et $M \not\equiv N$. (Donc $\equiv$ n'est pas extensionnel)

4) Montrer qu'en général $M \not\equiv \lambda x. Mx$ quand $x \notin VARLIB(M)$. Qu'en est-il si $M \equiv \lambda y. M_1$.

5) Soit $Y_0 = Y = \lambda f.(\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$, $Y_{n+1} = Y_n(\lambda xy.y(xy))$ pour $n \geq 0$. Montrer que $Y \equiv Y_n$ pour tout $n \geq 0$; pourtant toutes ces expressions Y_n ne sont pas interconvertibles. (Wadsworth 1971)

6) Si $M \lesssim P$ et $N \lesssim P$ (ou encore si M et N sont compatibles), montrer que $BT(M \sqcap N) = BT(M) \cap BT(N)$ (où $\sqcap$ est le plus grand commun minorant pour $\lesssim$) (Autrement dit BT est stable, voir Berry 1978) Qu'en est-il si M et N ne sont pas compatibles ?

7) (Barendregt 1971) Une expression <u>close</u> M (càd telle que $VARLIB(M) = \emptyset$) est <u>solvable</u> ssi

$\forall P\ \exists N_1, N_2 \cdots N_n$ tels que $MN_1N_2\cdots N_n =_\beta P$

(en abrégé :

$\forall P\ \exists \vec{N}$ tel que $M\vec{N} =_\beta P$)

Montrer que, pour tout M clos, les quatres clauses suivantes sont équivalentes :

1) M a une fnt

2) $\exists \vec{N}$. $M\vec{N}$ a une forme normale

3) $\exists \vec{N}$. $M\vec{N} =_\beta I = \lambda x.x$

4) M est solvable.

8) (Barendregt 1974) Montrer que, dans le λI-calcul, M est solvable ssi M a une forme-normale.

9) Soit R un préordre sur $\mathcal{N}$ (reflexif + transitif) compatible (15) avec la structure de $\mathcal{N}$, c à d vérifiant

$$\begin{cases} a_1 R b_1, \cdots a_n R b_n \text{ implique } x a_1 a_2 \cdots a_n \; R \; x b_1 b_2 \cdots b_n \\ a R b \text{ implique } \lambda x . a \; R \; \lambda x . b . \end{cases}$$

Soit $M \leqslant_R N$ ssi $\forall a \in BT(M) \; \exists b \in BT(N)$ tel que $a R b$.
Montrer que si M est clos, alors

$$\forall \vec{P}. \; M\vec{P} \leqslant_R N\vec{P} \quad \text{ssi} \quad \forall P, u \in \mathcal{O}(P) \quad P[u \leftarrow M] \leqslant_R P[u \leftarrow N]$$

10) (Suite) : Soit $M \leqslant_R N$ défini par : M a une forme normale implique que N a une forme normale. Donner un exemple de M et N tels que $M \leqslant_R N$ et $M \not\sqsubseteq N$.

11) (Suite) Soit $M \leqslant_R N$ défini par : M a une fnt implique N a une fnt. Donner un exemple de M et N vérifiant $M \leqslant_R N$ et $M \not\sqsubseteq N$

12) (Suite 3) Soit $M \leqslant_R N$ défini par : M a une fnt implique N a une fnt semblable. Donner un exemple de M et N vérifiant $M \leqslant_R N$ et $M \not\sqsubseteq N$ (Indication : Prendre $M = \lambda x . xx$ et $N = \lambda x . x(\lambda y . xy)$). (Comparer à Hyland 1975)

<u>Théorème 4</u> : (Barendregt, Longo 1979) : $M \sqsubseteq N$ ssi $M \sqsubseteq_{T^\omega} N$ où T^ω est le modèle de Plotkin.

<u>Démonstration</u> : il faut connaître T^ω. $\square$

-VI- Approximations et η-règle. (1)

1- APPROXIMATIONS ET LA RELATION DE J. MORRIS:

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte de l'aspect fonctionnel des λ-expressions. En effet, dans la sémantique précédente, nous pourrions avoir $MP \equiv NP$ pour tout P, sans avoir $M \equiv N$. (Prendre $M = x$ et $N = \lambda y.xy$). Ce phénomène est pris en compte par la η-règle de conversion (voir chapitre I). (Dans l'exemple précédent on a $\lambda y.xy \xrightarrow[\eta]{} x$). On peut rajouter cette η-règle à la construction sémantique du chapitre précédent de manière à obtenir une sémantique validant à la fois β et η-règles. Mais ceci demande quelques précautions.

Notons $\xrightarrow[\beta,\eta]{*}$ une suite quelconques de β et η réductions, $=_{\beta\eta}$ l'interconvertibilité par β et η, $=_\eta$ l'interconvertibilité par η seul. Dans le chapitre 2, on a signalé que $\xrightarrow[\beta,\eta]{*}$ est Church-Rosser et que $\xrightarrow[\eta]{*}$ l'est aussi. De plus, comme $\xrightarrow[\eta]{}$ raccourcit la longueur d'une expression, toute expression a clairement une η-forme normale.

A présent, si on veut reconstruire les Arbres de Böhm avec la η-règle, il faut reconsidérer l'ensemble $\mathcal{N}$ des ω-β formes normales et l'ordre $\leq$ "moins défini que" que l'on avait défini. En effet, on aimerait identifier x et $\lambda y.xy$. Donc il semblerait logique de dire que $\lambda y.x\Omega$ est moins défini que x. De même $x\Omega$ est identique à $\lambda y.x\Omega y$, donc on voudrait $x\Omega$ moins défini que $\lambda y.xyy$; etc... Quel est donc l'ordre correspondant sur $\mathcal{N}$, ou plutôt sur $\mathcal{N}^e$ l'ensemble des ω-β-η formes normales?

Notation/ La η-forme normale de l'approximation directe de M est notée $\omega^e(M)$

(2)

Donc $\omega(M) \xrightarrow[\eta]{*} \omega^e(M)$ pour tout M. Par exemple $\omega^e(\lambda xy.z(Ix)xy) = z\Omega$. L'ensemble $\mathcal{N}^e$ des ω-β-η formes normales vérifie donc $\mathcal{N}^e = \omega^e(\Lambda)$. Pour ordonner $\mathcal{N}^e$, il nous sera plus commode d'introduire d'abord quelques notations (habituelles) sur les relations binaires.

Rappels/ Soient $r, s \subset \Lambda\times\Lambda$ deux relations binaires entre λ-expressions. Nous notons:

1) $r \cup s$ la relation telle que $M(r\cup s)N$ ssi MrN ou MsN
2) rs " " $MrsN$ ssi $\exists P.\ MrP$ et PsN
3) $r^n = r \times \cdots \times r$ (n fois) (Si $n=0$, alors r est la relation identité)
4) $r^* = r^0 \cup r^1 \cup r^2 \cup r^3 \cup \cdots$ (fermeture transitive)
5) $r \subset s$ ssi MrN implique MsN pour tout M et N.

Définition/ Soient $a, b \in \mathcal{N}$ (càd a et b sont deux ω-β formes normales) Posons $a \leq^e b$ ssi $a\ (\leq \cup =_\eta)^*\ b$.

Donc $a \leq^e b$ ssi il existe $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathcal{N}$ tels que $a =_\eta a_1 \leq a_2 =_\eta a_3 \leq a_4 \cdots a_{n-1} \leq a_n =_\eta b$. La relation $\leq^e$ est triviallement réflexive et transitive. Elle devient antisymétrique dans le cas où $a, b \in \mathcal{N}^e$. En effet, on peut simplifier la relation $\leq^e$ grâce aux lemmes suivants.

Lemmes/ Sur l'ensemble des λ-expressions (étendues par Ω), on a:

1) $\xrightarrow[\eta]{} \leq\ \subset\ \leq \xrightarrow[\eta]{}$
2) $\leq \xleftarrow[\eta]{}\ \subset\ \xleftarrow[\eta]{} \leq$
3) $\xrightarrow[\eta]{} \xleftarrow[\eta]{}\ \subset\ \xleftarrow[\eta]{} \xrightarrow[\eta]{}$ (Anti-Church-Rosser pour $\xrightarrow[\eta]{}$)

Corollaire/ Soient $a,b \in \mathcal{N}^e$. Alors $a \lesssim^e b$ ssi il existe $a', b' \in \mathcal{N}$ tels que $a \xleftarrow[\eta]{*} a' \lesssim b' \xrightarrow[\eta]{*} b$.

Donc, par exemple :

$x\Omega \xleftarrow[\eta]{*} \lambda y.x\Omega y \lesssim \lambda y.xyy$

$\lambda y.x\Omega \lesssim \lambda y.xy \xrightarrow[\eta]{*} x$, etc...

On peut montrer que $\lesssim^e$ est décidable sur $\mathcal{N}^e$ grâce à la caractérisation suivante :

Lemme/ $\lesssim^e$ est défini sur $\mathcal{N}^e$ par :

1) $\Omega \lesssim^e a$ pour tout $a \in \mathcal{N}^e$.

2) $\lambda x_1 x_2 \cdots x_m . x a_1 a_2 \cdots a_n \lesssim^e \lambda x_1 x_2 \cdots x_p . x b_1 b_2 \cdots b_q$ ssi $m - n = p - q$ et, en posant $r = \mathrm{Max}\{m,p\}$ et $a'_1 = a_1, a'_2 = a_2, \cdots a'_n = a_n, a'_{n+1} = x_{m+1}, \cdots a'_r = x_r$ et $b'_1 = b_1, b'_2 = b_2, \cdots b'_q = b_q, b'_{q+1} = x_{p+1}, \cdots b'_r = x_r$, on a $a'_i \lesssim^e b'_i$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$.

Comme au chapitre V, on développe la construction de la sémantique :

Proposition/ Si $M \xrightarrow[\beta,\eta]{*} N$, alors $\omega^e(M) \lesssim^e \omega^e(N)$.

Démonstration : D'abord, si $M \xrightarrow{*} N$, alors $\omega^e(M) \xleftarrow[\eta]{*} \omega(M) \lesssim \omega(N) \xrightarrow[\eta]{*} \omega^e(N)$. Donc $\omega^e(M) \lesssim^e \omega^e(N)$. Il reste à montrer que $M \xrightarrow[\eta]{} N$ implique $\omega^e(M) \lesssim^e \omega^e(N)$. □

Considérons maintenant les arbres de Böhm ; ~~[illegible]~~

Définition/ $BT^e(M) = \{a \in \mathcal{N}^e \mid a \lesssim^e \omega^e(N), M \xrightarrow[\beta,\eta]{*} N\}$,

$M \sqsubseteq^e N$ ssi $BT^e(M) \subset BT^e(N)$,

$M \equiv^e N$ ssi $M \sqsubseteq^e N \sqsubseteq^e M$.

Hyland a montré que $\sqsubseteq^e$ correspondait à une relation considérée par Morris (1968) :

Théorème 1 (Hyland 1975) : $M \sqsubseteq^e N$ ssi, pour toute expression P et occurrence $u \in \mathcal{O}'(P)$, si $P[u \leftarrow M]$ a une forme normale, alors $P[u \leftarrow N]$ a aussi une forme normale.

Démonstration : identique à celle du théorème de Böhm. □

On en déduit :

Théorème 2 : $\sqsubseteq^e$ est une sémantique continue par rapport à ses approximations (voir chapitre II).

Exercices :

1) Montrer que, si $a,b \in \mathcal{N}$, alors $a \lesssim^e b$ ssi il existe a' et b' vérifiant $a =_\eta a' \lesssim b' =_\eta b$.

2) Montrer que ~~[illegible]~~ l'on n'a pas $\lesssim \xrightarrow[\eta]{} \subset \xrightarrow[\eta]{} \lesssim$ et $\xleftarrow[\eta]{} \lesssim \subset \lesssim \xleftarrow[\eta]{}$.

3) Montrer que, quand $a,b \in \mathcal{N}$, on a $a \lesssim b$ ssi, pour tout N tel que $b = \omega(N)$, il existe M tel que $a = \omega(M)$ et $M \xrightarrow{*} N$.

4) Montrer que, quand $a,b \in \mathcal{N}^e$, on a $a \lesssim^e b$ ssi, pour tout N tel que $b = \omega^e(N)$, il existe M tel que $a = \omega^e(M)$ et $M \xrightarrow[\beta,\eta]{*} N$.

5) En déduire que $BT(M) = \{\omega(P) \mid M =_\beta N\}$ et $BT^e(M) = \{\omega^e(N) \mid M =_{\beta,\eta} N\}$

6) Montrer qu'en général $BT^e(M) \neq \{a \in \mathcal{N}^e \mid a \lesssim N, M =_{\beta,\eta} N\}$ (Comparer à Hyland, 1975) (Indication : Considérer $x\Omega$ et $M = \lambda y.xyy$).

7) Soient $I = \lambda x.x$ et $J = Y(\lambda f x y . x(f y))$ où $Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$. Montrer que $J \sqsubseteq^e I$, mais $J \not\equiv_e I$.

8) Montrer que $M \sqsubseteq^e N$ ssi, pour toute expression P et occurrence $u \in \mathcal{O}(P)$, si $P[u \leftarrow M]$ a une forme normale, alors $P[u \leftarrow N]$ a la même β-η-forme normale (Indication : se servir du théorème de Böhm)

9) Montrer que $M \equiv^e \Omega$ ssi M n'a pas de fnt

10) Montrer que, si M a une forme normale, et si $M \equiv^e N$, alors N a aussi une forme normale. Idem pour $M \sqsubseteq^e N$. Montrer que M est maximal pour $\sqsubseteq^e$.

2 - APPROXIMATIONS ET LE MODELE D_∞ :

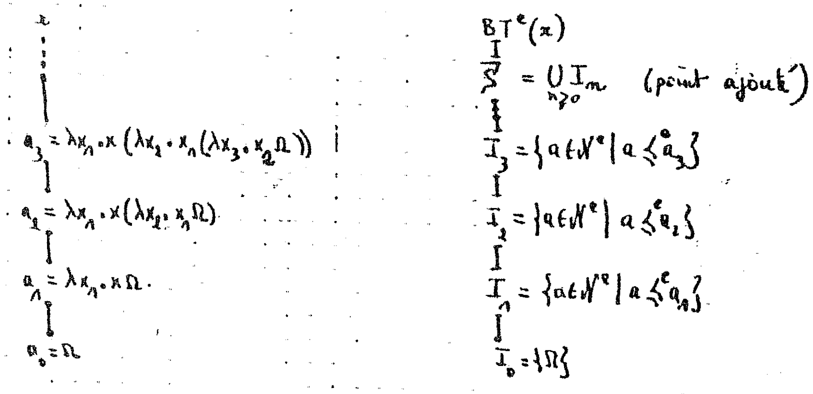
Mais, nous n'avons pas tenu compte d'une légère difficulté. En effet, en se servant de la terminologie des treillis, nous avons effectué la complétion de $\mathcal{N}^e$ par idéaux (voir chapitre V). Rappel : $I \subset \mathcal{N}^e$ est un idéal ssi I est clos vers le bas (càd $a \in I$ et $b \lesssim^e a$ implique $b \in I$) et dirigé (càd $a, b \in I$ implique qu'il existe $c \in I$ vérifiant $a \lesssim^e c$ et $b \lesssim^e c$) ; et $\lesssim^e$ sur $\mathcal{N}^e$ a été étendu en $\subset$ sur les idéaux de $\mathcal{N}^e$. Tout cela est identique à la construction du chapitre V.

Mais $\lesssim^e$ sur $\mathcal{N}^e$ a un comportement différent de $\lesssim$ sur $\mathcal{N}$. En effet, tous les points de $\mathcal{N}$ sont isolés par rapport à $\lesssim$, càd que, pour tout $a \in \mathcal{N}$ et pour tout sous ensemble S' dirigé de $\mathcal{N}$ vérifiant $a \lesssim \sqcup S'$, on a $a \lesssim b$ pour un $b \in S'$. Mais, dans $\mathcal{N}^e$ pour $\lesssim^e$, tous les points ne sont pas isolés. Par exemple :

$$S' = \{\Omega, \lambda y.x\Omega, \lambda y.x(\lambda z.y\Omega), \lambda y.x(\lambda z.y(\lambda t.z\Omega)), \ldots\}$$

Alors $x = \sqcup S'$, càd x est la limite (ou le plus petit commun majorant) de S' et pourtant $x \notin S'$.

Donc, dans l'exemple précédent, l'ensemble $\overline{S} = \{a \in \mathcal{N}^e \mid a \lesssim^e b, b \in S'\}$ est strictement contenu dans $BT^e(x) = \{a \in \mathcal{N}^e \mid a \lesssim^e x\}$. En fait $BT^e(x) = \overline{S} \cup \{x\}$ et $x \notin \overline{S}$. (voir exercice 7 précédent). La complétion par idéaux effectuée plus haut revient donc à rajouter entre tous les points de S' et x un nouveau point (voir figure) :



Dans $\mathcal{N}^e$ avec $\lesssim^e$ — Dans idéaux de $\mathcal{N}^e$ avec $\subset$

Figure

On peut faire une autre complétion (voir Courcelle-Raoult) en préservant les limites. Techniquement, cela revient à considérer les idéaux fermés de $\mathcal{N}^e$.

Définition / Soit S un sous-ensemble dirigé de $\mathcal{N}^e$. La clôture de S, notée $\mathcal{C}l(S)$, est le sous-ensemble (dirigé) de $\mathcal{N}^e$ défini par :

1) s'il existe $a \in \mathcal{N}^e$ tel que $a = \sqcup S$, alors $\mathcal{C}l(S) = S \cup \{a\}$
2) sinon $\mathcal{C}l(S) = S$

Bien entendu, par $\sqcup S$, nous signifions le plus petit commun majorant de S. Donc, si on reprend l'ensemble $S' = \{a_n\}$ considéré dans la figure précédente, on a $Cl(S') = S' \cup \{x\}$. On peut maintenant définir une autre sémantique des λ-expressions:

Définition/

1) $BT_f^e(M) = Cl(BT^e(M))$
2) $M \sqsubseteq_f^e N$ ssi $BT_f^e(M) \subset BT_f^e(N)$
3) $M \equiv_f^e N$ ssi $M \sqsubseteq_f^e N \sqsubseteq_f^e M$.

Cette sémantique est celle de Nakajima (1975). Hyland, Nakajima, Wadsworth ont montré le théorème suivant;

Théorème 3: $M \sqsubseteq_f^e N$ ssi $M \sqsubseteq_{D_\infty} N$ où D_∞ est le modèle de Scott (voir cours de Berry)

Théorème 4 (Hyland, Wadsworth 1973): $M \sqsubseteq_f^e N$ ssi, pour toute expression P et occurrence $u \in O(P)$, si $P[u \leftarrow M]$ a une fnt, alors $P[u \leftarrow N]$ a aussi une fnt.

Démonstration. identique à celle du théorème de Böhm. □

On en déduit:

Théorème 5: $\sqsubseteq_f^e$ est une sémantique continue par rapport à ses approximations.

Exercices:

1) Montrer que $M \sqsubseteq N$ implique $M \sqsubseteq^e N$ implique $M \sqsubseteq_f^e N$.
2) Montrer que $I \equiv_f^e J = Y(\lambda f x y . x(f y))$. (voir exercice 7 plus haut)

3) Montrer que seul Ω est violé dans $\mathcal{N}^e$ pour $\leq^e$.
4) Montrer que $\mathcal{N}^e$ est un demi-sup treillis sous condition vis à vis de $\leq^e$.
5) Montrer que $M =_{\beta,\eta} N$ implique $M \equiv^e N$.
6) Montrer que $\equiv_f^e$ est une sémantique maximale cohérente, c'est à dire toute sémantique identifiant plus que $\equiv_f^e$ est incohérente. (Indication: considérer le théorème 4)
7) Montrer que $\equiv_f^e$ est la seule sémantique maximale cohérente identifiant les expressions totalement indéfinies.

3- APPROXIMATIONS ET LE MODELE $P\omega$:

Enfin, il est possible d'ordonner encore différemment les ω-β formes normales de $\mathcal{N}$. Le principe est de décréter x moins défini que $\lambda y.xy$, mais pas l'inverse.

Définition/ Soient $a, b \in \mathcal{N}$. Posons $a \leq' b$ ssi $a\,(\leq \cup \xleftarrow{*}_{\eta})^*\, b$.

Par exemple $x\Omega \leq' \lambda y.xyy$. Grâce aux lemmes de la page 2, on a:

Corollaire/ Soient $a, b \in \mathcal{N}$. Alors $a \leq' b$ ssi il existe $a' \in \mathcal{N}$ tel que $a \xleftarrow{*}_{\eta} a' \leq b$.

Définition/ $BT'(M) = \{a \in \mathcal{N} \mid a \leq' \omega(N), M \xrightarrow{*} N\}$,
$M \sqsubseteq' N$ ssi $BT'(M) \subset BT'(N)$ et $M \equiv' N$ ssi $M \sqsubseteq' N \sqsubseteq' M$.

Théorème 6/ (Hyland 1975) $M \sqsubseteq' N$ ssi $M \sqsubseteq_{P\omega} N$ où $P\omega$ est le modèle de Scott et Plotkin.