JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

De la ligne géodésique sur un ellipsoïde, et des différents usages d'une transformation analytique remarquable

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 267-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__267_0>

DE LA LIGNE GÉODÉSIQUE SUR UN ELLIPSOÏDE,

ET

DES DIFFÉRENTS USAGES D'UNE TRANSFORMATION ANALYTIQUE REMARQUABLE;

Par M. JACOBI [*].

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 18 avril 1839.)

La surface de la Terre n'étant pas une surface de révolution, on a souvent essayé de rattacher un ellipsoïde osculateur à trois axes inégaux aux triangulations faites en un point de cette surface; cela rend plus intéressant le problème dont l'objet est de déterminer la ligne géodésique sur un tel ellipsoïde, problème qui semble présenter les plus grandes difficultés analytiques. En effet, l'équation différentielle du second ordre dont ce problème dépend, quand on choisit les variables dont on fait ordinairement usage, paraît d'une forme si compliquée, qu'on est facilement rebuté de le traiter. Après plusieurs tentatives inutiles, je suis cependant parvenu, en employant des artifices particuliers, à intégrer complétement cette équation, c'est-à-dire à la ramener aux quadratures, comme je l'ai annoncé à l'Académie des Sciences de Paris le 28 décembre 1838 (voir les *Comptes rendus,* tome VIII, page 284). Je vais maintenant faire connaître la forme du résultat plus explicitement. Soit l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1;$$

a étant la plus petite des trois constantes a, b, c; b la moyenne, et c la plus grande. Comme on peut exprimer les trois coordonnées d'un point

---

[*] Cet article est traduit de l'allemand. *Voir* le tome XIX (page 309) du Journal de M. Crelle. *J. L.*

d'une surface donnée en fonction de deux variables, je choisis ici les angles φ et ψ qui déterminent les coordonnées par les formules

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \sin\varphi \sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a},$$

$$y = \sqrt{b} \cos\varphi \sin\psi,$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cos\psi \sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}.$$

La ligne géodésique sur l'ellipsoïde donné est alors déterminée par l'équation suivante entre les deux angles φ et ψ,

$$\alpha = \int \frac{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}\, d\varphi}{\sqrt{c - a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi}\,\sqrt{(b-a)\cos^2\varphi - \beta}} - \int \frac{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi}\, d\psi}{\sqrt{b\cos^2\psi + c\sin^2\psi - a}\,\sqrt{(c-b)\sin^2\psi + \beta}}.$$

Cette équation est, comme on le voit, d'une forme très-simple. Une fonction de l'angle φ est égale à une fonction de l'angle ψ. Ces deux fonctions sont elles-mêmes des intégrales *abéliennes* et de la forme qui se présente immédiatement après les fonctions elliptiques. Les deux intégrales abéliennes, quoiqu'elles paraissent ici de formes trigonométriques différentes, sont cependant les mêmes au fond, de sorte qu'on peut, par de simples substitutions, les transformer en des intégrales dans lesquelles les valeurs de la variable se trouvent seulement comprises dans des intervalles différents. Les quantités α et β sont les deux constantes arbitraires que l'intégrale complète de l'équation différentielle du second ordre doit contenir. La constante α est nulle quand on fait commencer les intégrales depuis les valeurs de φ et ψ, qui répondent au point de l'ellipsoïde d'où l'on tire la ligne géodésique; l'autre constante arbitraire β n'entre que dans l'un des trois radicaux qui se trouvent comme facteurs sous le signe d'intégration : on la détermine algébriquement par la direction initiale qu'on donne à la ligne géodésique.

On obtient des résultats tout-à-fait semblables pour la rectification de la ligne géodésique. Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, une des deux intégrales abéliennes se change en un arc de cercle, l'autre en une intégrale elliptique de troisième espèce, par où l'on obtient, pour l'ellipsoïde de révolution, l'équation connue de la ligne géodésique.

Le procédé que j'ai employé, et qui consiste à exprimer les trois coordonnées d'un point de l'ellipsoïde par deux angles φ et ψ, est le même auquel on est conduit, quand on détermine le point de l'ellipsoïde par l'intersection des deux lignes de courbure sur lesquelles il se trouve, ou, ce qui revient au même, d'après la belle remarque de M. Charles Dupin, quand on considère ce point comme l'intersection de l'ellipsoïde avec les deux hyperboloïdes qui passent par le même point et dont les sections principales ont les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde. Legendre a le premier employé les formules de Monge relatives à cet objet comme instrument analytique pour ramener l'aire de la surface de l'ellipsoïde à la rectification de l'ellipse, ainsi qu'autrefois Archimède avait ramené la mesure de la surface sphérique à celle de la circonférence du cercle [*]. Euler s'était servi déjà de formules semblables, mais bornées au cas du plan, dans son travail célèbre sur le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton; car les deux variables qu'il a choisies reviennent, d'après une remarque de Legendre, à considérer le point attiré comme l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole qui passent par ce point et qui ont pour foyers communs les deux centres d'attraction.

On peut faire une autre application remarquable du moyen indiqué plus haut, d'exprimer les coordonnées d'un point d'un ellipsoïde, au

---

[*] J'ai montré, dans le tome VIII du Journal de M. Crelle, qu'on peut arriver aux résultats de Legendre d'une manière très-simple et élémentaire, quand on exprime les coordonnées d'un point d'un ellipsoïde par les deux angles qui déterminent la direction de la normale en ce point. M. Dirichlet a récemment donné, dans un Mémoire lu à l'Académie, une autre méthode, aussi neuve qu'élégante et générale, qui conduit au même but.

problème de figurer la surface de l'ellipsoïde sur une carte, de manière que les parties infiniment petites demeurent semblables.

C'est ainsi que Lambert, dans ses Mémoires, a traité le problème des cartes-projections; et Lagrange a donné, dans les Mémoires de cette Académie, la solution générale pour toutes les surfaces de révolution, solution que M. Gauss a étendue à toutes les surfaces, dans un Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague et imprimé dans le *Journal astronomique* de Schumacher.

Si l'on exprime l'élément d'une courbe tracée sur la surface par

$$\sqrt{\mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dtdu + \mathrm{C}du^2},$$

t et u étant les deux variables par lesquelles on détermine un point de la surface donnée, on a l'expression quadratique

$$\mathrm{A}dt^2 + 2\mathrm{B}dt\,du + \mathrm{C}du^2,$$

à décomposer en deux facteurs

$$\mathrm{P}dt + (\mathrm{Q} + \sqrt{\mathrm{R}})du,$$

et

$$\mathrm{P}dt + (\mathrm{Q} - \sqrt{\mathrm{R}})du.$$

La solution du problème dépend donc, d'après la théorie donnée par M. Gauss, de l'intégration de l'équation

$$\mathrm{P}dt + (\mathrm{Q} + \sqrt{\mathrm{R}})du = 0,$$

dans laquelle P, Q, R sont des fonctions données de t et u.

Pour les surfaces de révolution, cette équation peut toujours s'intégrer et l'on tombe sur les formules données par Lagrange. J'observe encore, ce qu'il est aisé de voir, qu'il en est de même, en général, pour les surfaces coniques et cylindriques. Quoique l'on traite ainsi facilement toutes les surfaces particulières du second ordre, le problème pour la surface générale du second ordre présente néanmoins des obstacles insurmontables par le choix ordinaire des variables, à cause de la forme compliquée de l'équation différentielle à intégrer. Mais si l'on prend l'expression de l'élément d'une courbe tracée sur l'ellipsoïde, telle que je l'ai donnée dans le tome VIII du Journal de M. Crelle, les variables se séparent d'elles-mêmes dans l'équation différentielle, et le problème est ramené à de simples quadratures et même à des transcendantes abéliennes.

On peut aisément étendre les formules relatives à trois variables, dans les problèmes indiqués plus haut, à un nombre quelconque de variables, et l'on généralise ainsi d'une manière remarquables des théorèmes importants. J'ai de cette manière étendu la célèbre relation découverte par Legendre, entre les intégrales complètes de deux fonctions elliptiques du premier et du second ordre, dont les modules sont compléments l'un de l'autre, à toutes les intégrales abéliennes. Mais la même substitution m'a aussi conduit au théorème même d'Abel, par une voie et par des considérations tout-à-fait différentes de celles d'Abel, et qui tirent leur origine d'un problème de mécanique.

Les formules d'Euler, pour l'orbite d'un point attiré par deux centres fixes, contiennent des transcendantes elliptiques. Si l'une des masses ou chaque masse est nulle, l'orbite est une ellipse ou une ligne droite, et par conséquent son équation est algébrique. Mais, par l'évanouissement d'une masse ou des deux masses, les intégrales elliptiques ne cessent pas d'être des intégrales elliptiques; de sorte qu'on représente le mouvement elliptique d'une planète, ou même le mouvement rectiligne d'un point, par une équation entre des intégrales elliptiques. Cette forme n'est pas sans intérêt; car nous avons ici, pour le mouvement elliptique, des formules qui n'éprouvent qu'une légère altération quand il survient encore un second centre attirant. Il y a donc deux manières de traiter le même problème, dont l'une donne la solution sous forme transcendante, l'autre sous forme algébrique; en d'autres termes l'on a une nouvelle méthode pour trouver le théorème fondamental sur l'addition des intégrales elliptiques. Dans sa solution du problème mécanique, dans les anciens Mémoires de cette Académie, Euler n'a employé le théorème fondamental qu'il a découvert qu'à la vérification des formules trouvées pour les cas particuliers. Il m'a paru important d'établir la liaison des deux méthodes qui donnent la forme transcendante et la forme algébrique, pour passer directement de l'une à l'autre. En opérant l'extension facile des formules employées pour deux variables à un nombre quelconque de variables, je rencontrai le théorème d'Abel, et même sous une forme nouvelle, remarquable et élégante. En même temps s'offrit à moi un moyen simple d'arriver directement, par des multiplications convenables, aux intégrales algébriques d'un système d'équations différentielles ordinaires, que j'avais précédemment posées dans le Journal de M. Crelle, concernant les transcendantes abéliennes; ce qui m'avait paru auparavant bien désirable, mais aussi très-difficile, à cause de la grande complication du sujet.

Un des mathématiciens les plus pénétrants, M. Lamé, correspondant de cette Académie, a récemment employé les substitutions que j'ai mentionnées à la solution de problèmes de physique très-difficiles.