JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 345-378.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__345_0>

Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer;

Par J. LIOUVILLE.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 1er juin 1846.)

§ I.

1. Soit M un point matériel assujetti à demeurer constamment dans un plan ou sur une surface donnée, et dans le mouvement duquel le principe des forces vives ait lieu, en sorte que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2U + C, \tag{1}$$

C étant une constante, ds l'élément parcouru pendant le temps dt, et U la fonction des forces accélératrices. Les coordonnées du point M et la fonction U pourront s'exprimer au moyen de deux variables seulement. Désignons ces variables par α, β, et admettons qu'elles soient telles que l'expression de ds^2 prenne la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \tag{2}$$

où λ représente une fonction de α, β. On aura ainsi

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\lambda}(2U + C); \tag{3}$$

et les équations du mouvement seront, comme on sait,

$$\frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\alpha},$$

$$\frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{d\beta}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] + \frac{dU}{d\beta},$$

ou, plus simplement, à cause de l'équation (3),

$$(4) \qquad \frac{d.\lambda\frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{d\alpha}(2\mathrm{U}+\mathrm{C}) + \frac{d\mathrm{U}}{d\alpha},$$

$$(5) \qquad \frac{d.\lambda\frac{d\beta}{dt}}{dt} = \frac{1}{2\lambda}\frac{d\lambda}{d\beta}(2\mathrm{U}+\mathrm{C}) + \frac{d\mathrm{U}}{d\beta}.$$

Voyons dans quels cas nous parviendrons à les intégrer.

2. Après avoir multiplié les deux membres de l'équation (4) par $2\lambda d\alpha$, on peut l'écrire

$$d.\lambda^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{d.(2\mathrm{U}+\mathrm{C})\lambda}{d\alpha}d\alpha.$$

Si donc l'expression de $(2\mathrm{U}+\mathrm{C})\lambda$ se trouve être de la forme

$$(6) \qquad (2\mathrm{U}+\mathrm{C})\lambda = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta),$$

l'intégration s'effectuera d'elle-même, et l'on aura

$$(7) \qquad \lambda^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = f(\alpha) - \mathrm{A},$$

A étant une constante arbitraire. Dans ce même cas, on tire des équations (3) et (6)

$$\lambda^2\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta).$$

Donc, en retranchant l'équation (7),

$$(8) \qquad \lambda^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = \mathrm{A} - \mathrm{F}(\beta).$$

Des équations (7) et (8) on conclut immédiatement, pour la trajectoire décrite par le mobile, l'équation suivante,

$$(9) \qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{f(\alpha)-\mathrm{A}}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\mathrm{A}-\mathrm{F}(\beta)}},$$

où les variables sont séparées. On aura ensuite aisément l'expression du temps par une quadrature, et le problème que nous nous proposions sera résolu.

3. Il n'est pas plus général, mais il pourra être plus commode, d'employer, au lieu de α, β, deux autres variables μ, ν telles que l'on ait

$$ds^2 = \lambda(m d\mu^2 + n d\nu^2), \tag{10}$$

m étant une fonction quelconque de μ seulement, et n une fonction de ν, tandis que λ peut contenir à la fois μ et ν. Pour rentrer dans l'hypothèse précédente, il suffirait de poser

$$\alpha = \int \sqrt{m}.d\mu, \quad \beta = \int \sqrt{n}.d\nu,$$

ce qui fournit μ en fonction de α, et ν en fonction de β. La condition d'intégrabilité (6) peut alors s'écrire

$$(2U + C)\lambda = f(\mu) - F(\nu), \tag{11}$$

où, bien entendu, f et F ne désignent plus les mêmes fonctions que tout à l'heure; et l'équation différentielle de la trajectoire devient

$$\frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{f(\mu) - A}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{A - F(\nu)}}. \tag{12}$$

4. La suite des points pour lesquels une des variables coordonnées α, β ou μ, ν conserve même valeur sur la surface à laquelle le mobile M est attaché, forme une courbe. Par chaque point de la surface on peut ainsi faire passer deux courbes appartenant aux deux systèmes respectifs

$$\alpha \text{ ou } \mu = \textit{constante}, \quad \beta \text{ ou } \nu = \textit{constante},$$

et regarder ce point comme déterminé par l'intersection des deux courbes. Je dis que cette intersection s'effectue à angle droit.

En effet, la formule (10), qui fournit généralement la distance ds des deux points (α, β), $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$, donne, lorsqu'on y fait $d\beta = 0$ ou $d\alpha = 0$, les distances ds' et ds'' du point (α, β) aux points $(\alpha + d\alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta + d\beta)$; on en déduit

$$ds'^2 = \lambda d\alpha^2, \quad ds''^2 = \lambda d\beta^2;$$

donc

$$ds^2 = ds'^2 + ds''^2.$$

Mais on voit immédiatement, par la géométrie, que

$$ds^2 = ds'^2 + ds''^2 - 2ds'ds''\cos\upsilon,$$

υ étant l'angle de ds' avec ds''; donc

$$\cos\upsilon = 0,$$

et les éléments ds', ds'' sont à angle droit l'un sur l'autre, ce qu'il fallait démontrer [*].

Soit i l'angle que ds fait avec ds''; on aura

$$(13)\qquad \cos i = \frac{ds''}{ds},\quad \sin i = \frac{ds'}{ds},\quad \tang i = \frac{d\alpha}{d\beta};$$

et, en remplaçant $d\alpha$ par $\tang i d\beta$, on pourra donner à l'équation (9) de la trajectoire cette forme remarquable

$$(14)\qquad f(\alpha)\cos^2 i + \mathrm{F}(\beta)\sin^2 i = \mathrm{A}.$$

En employant μ et ν, on aurait semblablement

$$(15)\qquad ds'^2 = \lambda m d\mu^2,\quad ds''^2 = \lambda n d\nu^2,\quad \tang i = \frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{n}.d\nu},$$

et pour l'équation de la trajectoire déduite de la formule (12),

$$(16)\qquad f(\mu)\cos^2 i + \mathrm{F}(\nu)\sin^2 i = \mathrm{A}.$$

5. Mais notre méthode ne fournit l'équation de la trajectoire que quand on suppose satisfaite la condition d'intégrabilité exprimée par l'équation (6), ou, si l'on veut, par l'équation (11). Or l'équation (6) ou (11) peut avoir lieu de deux manières distinctes :

---

[*] Si l'on conçoit une série de lignes (α) répondant à des valeurs successives du paramètre séparées par l'intervalle constant $d\alpha$, puis une série orthogonale (β) dans laquelle on suppose aussi la différentielle $d\beta$ constante, la surface se trouvera partagée en rectangles $ds'ds''$, et le rapport des côtés ds', ds'' sera celui de $d\alpha$ à $d\beta$; ce rapport aura donc partout même valeur, et les rectangles seront semblables entre eux; on pourra même les réduire à des carrés, en prenant $d\alpha = d\beta$.

1°. Quelle que soit la valeur de la constante C; et cela suppose les quantités λ, λU, toutes deux de la forme du second membre, c'est-à-dire toutes deux exprimables par la somme algébrique de deux fonctions, l'une de α ou μ, l'autre de β ou ν;

2°. Pour une valeur particulière de C; ce qui suppose une valeur aussi particulière de la force vive, en sorte que, dans ce cas, la solution du problème exige qu'une certaine condition relative à l'origine du mouvement soit satisfaite.

Dans le second cas, la valeur de λ peut être quelconque, pourvu que celle de $2U + C$ satisfasse à la condition (6) ou (11). Le premier cas sous ce rapport est bien moins étendu; mais, par un autre côté, il est de beaucoup le plus important. S'il faut, en effet, se borner à une valeur de λ de la forme $f(\alpha) - F(\beta)$ ou $f(\mu) - F(\nu)$, du moins il n'y a alors aucune restriction relative aux conditions initiales du mouvement.

C'est à ce premier cas seul que nous allons désormais nous attacher.

L'expression du temps à laquelle on arrive quand il a lieu mérite d'être rapportée. Servons-nous des variables α, β, et soient, conformément à l'hypothèse,

$$\lambda = \varphi(\alpha) - \varpi(\beta), \quad \lambda U = \mathrm{f}(\alpha) - \mathcal{F}(\beta), \tag{17}$$

ce qui revient à faire, dans la formule (6),

$$f(\alpha) = 2\,\mathrm{f}(\alpha) + C\varphi(\alpha), \quad F(\beta) = 2\,\mathcal{F}(\beta) + C\varpi(\beta). \tag{18}$$

On aura, en vertu des équations (7) et (8),

$$dt = \frac{[\varphi(\alpha) - \varpi(\beta)]\,d\alpha}{\sqrt{2\,\mathrm{f}(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} = \frac{[\varphi(\alpha) - \varpi(\beta)]\,d\beta}{\sqrt{A - 2\mathcal{F}(\beta) - C\varpi(\beta)}}, \tag{19}$$

d'où l'on conclut, d'une part, l'équation

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{2\,\mathrm{f}(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{A - 2\mathcal{F}(\beta) - C\varpi(\beta)}}, \tag{20}$$

qui, intégrée, détermine la trajectoire du mobile, et, d'autre part, la formule

$$dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{2\,\mathrm{f}(\alpha) + C\varphi(\alpha) - A}} - \frac{\varpi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{A - 2\mathcal{F}(\beta) - C\varpi(\beta)}}, \tag{21}$$

où les variables sont aussi séparées, de sorte qu'on pourra avoir l'expression de t sans supposer d'abord qu'une des variables α, β est exprimée au moyen de l'autre.

J'ajouterai qu'en désignant par B et ε deux constantes arbitraires, et par Θ l'intégrale

$$(22)\qquad \int \left[d\alpha \sqrt{2\mathrm{f}(\alpha) + \mathrm{C}\varphi(\alpha) - \mathrm{A}} + d\beta \sqrt{\mathrm{A} - 2F(\beta) - \mathrm{C}\varpi(\beta)}\right],$$

on peut donner à l'équation de la trajectoire et à l'expression du temps la forme suivante :

$$(23)\qquad \frac{d\Theta}{d\mathrm{A}} = \mathrm{B}, \quad t = 2\frac{d\Theta}{d\mathrm{C}} + \varepsilon;$$

c'est ce qu'il est aisé de vérifier. Cette forme, au reste, était indiquée à priori par les beaux théorèmes de M. Jacobi.

Dans le cas d'un mobile qui n'est sollicité par aucune force accélératrice (la trajectoire est alors une ligne géodésique), on a $\mathrm{U} = 0$; on peut donc prendre $\mathrm{f}(\alpha) = 0$, $F(\beta) = 0$. Ainsi, en représentant par a le rapport des deux constantes A, C, on a alors

$$(24)\qquad \frac{d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a - \varpi(\beta)}}.$$

Dans ce même cas, l'expression de ds se déduit immédiatement de celle de dt, car

$$(25)\qquad ds = \sqrt{\mathrm{C}}.dt = \frac{\varphi(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) - a}} - \frac{\varpi(\beta)\,d\beta}{\sqrt{a - \varpi(\beta)}}.$$

En ayant égard à l'équation entre α et β, on peut encore écrire

$$(26)\qquad ds = d\alpha\sqrt{\varphi(\alpha) - a} + d\beta\sqrt{a - \varpi(\beta)},$$

en sorte que l'équation de la trajectoire revient alors à celle-ci :

$$(27)\qquad \delta ds = 0,$$

la variation ou différentielle δ étant relative à la constante arbitraire a.

6. Tout ce qu'on vient de dire reste vrai en employant les variables μ, ν au lieu de α, β, et remplaçant en conséquence $d\alpha$ par $\sqrt{m}.d\mu$, $d\beta$

par $\sqrt{n}.d\nu$. En posant donc

$$(28) \qquad \lambda = \varphi(\mu) - \varpi(\mu), \quad \lambda \mathrm{U} = \mathrm{f}(\mu) - F(\nu),$$

ce qui revient à prendre, dans la formule (11),

$$(29) \qquad f(\mu) = 2\mathrm{f}(\mu) + \mathrm{C}\varphi(\mu), \quad \mathrm{F}(\nu) = 2F(\nu) + \mathrm{C}\varpi(\nu),$$

on a cette équation de la trajectoire,

$$(30) \qquad \frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{2\mathrm{f}(\mu) + \mathrm{C}\varphi(\mu) - \mathrm{A}}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{\mathrm{A} - 2F(\nu) - \mathrm{C}\varpi(\nu)}},$$

à laquelle, du reste, on peut, d'après l'équation (16), donner aussi la forme

$$(31) \qquad [2\mathrm{f}(\mu) + \mathrm{C}\varphi(\mu)]\cos^2 i + [2F(\nu) + \mathrm{C}\varpi(\nu)]\sin^2 i = \mathrm{A}.$$

Et, dans le cas particulier de $\mathrm{f}(\mu) = 0$, $F(\nu) = 0$, c'est-à-dire des lignes géodésiques, il vient plus simplement

$$(32) \qquad \frac{\sqrt{m}.d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu) - a}} = \frac{\sqrt{n}.d\nu}{\sqrt{a - \varpi(\nu)}},$$

ou, si l'on veut,

$$(33) \qquad \varphi(\mu)\cos^2 i + \varpi(\nu)\sin^2 i = a,$$

a désignant toujours le rapport des deux constantes arbitraires A, C; l'arc ds de ces lignes géodésiques est, en outre, donné par la formule

$$(34) \qquad ds = d\mu\sqrt{m}\sqrt{\varphi(\mu) - a} + d\nu\sqrt{n}\sqrt{a - \varpi(\nu)}.$$

Passons aux applications.

§ II.

7. Supposons d'abord le point M dans un plan. En rapportant ce point à deux axes rectangulaires, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

formule qui comporte l'application de notre méthode, mais qui ne conduirait qu'à une conclusion évidente à priori, savoir, que les équations du mouvement s'intègrent quand la fonction des forces est de la forme

$$U = \text{Fonct.}(x) - \text{fonct.}(y).$$

Mais on obtiendra des résultats intéressants en substituant aux coordonnées rectangulaires x, y les coordonnées *elliptiques* μ, ν, demi-axes d'ellipses et d'hyperboles homofocales représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1.$$

Cela donne

$$b^2 x^2 = \mu^2 \nu^2, \quad b^2 y^2 = (\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2),$$

et

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{d\nu^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

En comparant à la formule (10), on a donc ici

$$m = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad n = \frac{1}{b^2 - \nu^2}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ étant composée, comme nous le demandons, d'une fonction de μ jointe à une fonction de ν, nous pouvons prendre pour λU une autre expression quelconque de la même espèce. Ainsi, toutes les fois que l'on aura

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2},$$

les équations du mouvement seront ramenées aux quadratures par nos formules.

D'après la valeur de λ, comparée à la première des formules (28) du nº **6**, on peut prendre

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \varpi(\nu) = \nu^2,$$

et appliquer la formule (30). Ainsi l'équation de la trajectoire sera

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{2f(\mu) + C\mu^2 - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{A - 2F(\nu) - C\nu^2}},$$

ou bien, en introduisant l'angle i et se servant de la formule (31),

$$[2f(\mu) + C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\nu^2]\sin^2 i = A.$$

Ici i désigne l'angle que la trajectoire fait en chaque point avec l'ellipse correspondante (μ). L'élément ds'' de cette ellipse a pour valeur

$$ds'' = \sqrt{\lambda n}.d\nu = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}}\,d\nu,$$

et l'élément ds' de l'hyperbole orthogonale s'exprime par

$$ds' = \sqrt{\lambda m}.d\mu = \frac{\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}}\,d\mu;$$

enfin on a

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{b^2-\nu^2}.d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}.d\nu}.$$

Il faut aussi observer qu'on doit donner à ν et $\sqrt{b^2-\nu^2}$ des valeurs tantôt positives, tantôt négatives, et que, cela étant, on pourra prendre

$$bx = \mu\nu, \quad by = \sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}.$$

Au reste, comme on a essentiellement $\nu^2 > b^2$, rien n'empêche de faire

$$\nu = b\cos\theta;$$

de là résultera

$$x = \mu\cos\theta, \quad y = \sqrt{\mu^2-b^2}.\sin\theta,$$

et dans ces formules les quantités μ et $\sqrt{\mu^2-b^2}$ resteront toujours positives, tandis que $\sin\theta$ et $\cos\theta$ prendront naturellement leurs signes ordinaires d'après les valeurs de l'angle θ.

8. Soit, comme exemple des formules précédentes,

$$f(\mu) = g\mu + g'\mu + k(\mu^4 - b^2\mu^2),$$
$$F(\nu) = g\nu - g'\nu + k(\nu^4 - b^2\nu^2),$$

g, g', k étant des constantes. Cela nous donnera

$$\mathrm{U} = \frac{g}{\mu+\nu} + \frac{g'}{\mu-\nu} + k(\mu^2+\nu^2-b^2).$$

Mais $\mu+\nu$ et $\mu-\nu$ expriment les distances r, r' du point M aux deux foyers communs F, F′ des ellipses et des hyperboles qui forment notre système actuel de coordonnées; de plus, on a

$$\mu^2 + \nu^2 - b^2 = x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$

R étant la distance du point M au centre O, milieu de FF′. De là cette expression nouvelle de U,

$$\mathrm{U} = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + k\mathrm{R}^2.$$

C'est précisément celle qui convient au cas d'un mobile attiré ou repoussé, suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances, par deux points fixes F, F′ dont les actions à l'unité de distance peuvent être inégales, et proportionnellement à la distance par un troisième point O placé au milieu de FF′.

On sait qu'Euler a donné le premier la solution de ce problème dans le cas où les deux points fixes F, F′ agissent seuls, et que Lagrange a ensuite montré comment on peut aussi tenir compte de l'action du point O, même en supposant que le mobile peut décrire librement dans l'espace une courbe quelconque. Nous opérerons ailleurs de cette dernière extension; mais, en continuant à nous réduire à une trajectoire plane, nous pouvons déjà donner aux solutions d'Euler et de Lagrange une plus grande généralité. Ainsi rien ne nous empêche d'ajouter deux actions en raison inverse du cube de la distance, émanant, avec une énergie inégale si l'on veut, des deux axes rectangulaires Ox, Oy dont le premier coïncide avec FF′, et s'exerçant chacune suivant la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe correspondant, genre de forces dont Newton n'a pas dédaigné de s'occuper dans le livre des *Principes*. Il suffira de prendre dans $\mathrm{f}(\mu)$ ces deux termes de plus,

$$\frac{h}{\mu^2} + \frac{h'}{\mu^2 - b^2},$$

et dans $F(\nu)$ ces deux-ci,

$$\frac{h}{\nu^2} - \frac{h'}{b^2 - \nu^2}.$$

Mais il est inutile de s'arrêter à tous ces détails. La formule

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}$$

en dit assez par elle-même. Il y aura même plus d'intérêt, sous un certain point de vue, à particulariser de plus en plus la formule

$$U = \frac{g}{\mu + \nu} + \frac{g'}{\mu - \nu} + k(\mu^2 + \nu^2 - b^2) = \frac{g}{r} + \frac{g'}{r'} + kR^2.$$

Soient $g = o$, $g' = o$, $k = o$, d'où $U = o$; la trajectoire du mobile doit évidemment se réduire alors à une ligne droite, puisque le point M n'est sollicité par aucune force. Mais nos formules donnent alors (en représentant par a le rapport des deux constantes arbitraires A et C),

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - a)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a - \nu^2)}},$$

ou encore

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = a.$$

Il faut en conclure une proposition, bien connue du reste, savoir, que l'une ou l'autre équation est propre à représenter une ligne droite en coordonnées elliptiques, et cela quelle que soit la position des axes principaux communs aux coniques qui le composent et l'excentricité $2b$. Ces équations ne sont, au surplus, qu'un cas particulier des formules (32), (33); et la formule (34) donne, en outre, pour l'élément ds de la droite, l'expression suivante :

$$ds = \frac{d\mu\sqrt{\mu^2 - a}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} + \frac{d\nu\sqrt{a - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Remarquons aussi que les droites en nombre infini qui répondent à une même valeur de a sont toutes tangentes à une même conique déterminée par l'équation $\mu^2 = a$ ou $\nu^2 = a$, suivant que l'on a $a > b^2$ ou $a < b^2$.

En faisant seulement $g = o$, $g' = o$, et laissant k quelconque, le mobile M serait soumis à l'action d'une seule force proportionnelle à la distance OM. La trajectoire pourrait donc être une conique quelconque ayant son centre au point O. Nos formules nous donneraient dès lors l'équation d'une telle conique exprimée en coordonnées μ, ν.

Enfin elles donnent l'équation générale des coniques qui ont un foyer commun F, en prenant $g' = o$, $k = o$, et laissant g quelconque.

Cette équation est

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{2g\mu + C\mu^2 - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{A - 2g\nu - C\nu^2}},$$

ou bien

$$(2g\mu + C\mu^2)\cos^2 i + (2g\nu + C\nu^2)\sin^2 i = A;$$

en posant

$$g = lC, \quad A = (a - l^2)C,$$

elle prend la forme suivante

$$(\mu + l)^2 \cos^2 i + (\nu + l)^2 \sin^2 i = a,$$

et devient tout à fait analogue à celle de la ligne droite qu'on retrouve lorsque $l = 0$.

M. Jacobi a signalé, au point de vue analytique, l'importance des cas particuliers dont nous venons de dire un mot, et qui conduisent, par exemple, au théorème fondamental d'Euler pour les fonctions elliptiques. Nous croyons pouvoir affirmer que leur importance n'est pas moindre au point de vue de la Géométrie.

9. Nous pouvons introduire les rayons vecteurs r et r' au lieu de μ et ν dans la formule

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2};$$

ayant, en effet,

$$\mu = \tfrac{1}{2}(r + r'), \quad \nu = \tfrac{1}{2}(r - r'), \quad \mu^2 - \nu^2 = rr',$$

nous trouverons

$$U = \frac{\text{Fonct.}(r + r') - \text{fonct.}(r - r')}{rr'},$$

d'où l'on conclura, si l'on veut, l'expression générale de U, pour laquelle notre méthode réussit, en fonction de coordonnées rectangulaires x, y relatives à deux axes situés dans le plan où le point M se meut, mais d'ailleurs quelconques; il n'y a qu'à remplacer r et r' par

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{(x - p')^2 + (y - q')^2},$$

p, q, p', q' étant des constantes.

En supposant que la fonction des forces soit donnée pour un problème particulier et qu'on veuille savoir si elle rentre dans notre formule, on ne sera pas absolument obligé, comme on voit, d'introduire μ et ν; il suffira de chercher si, en la désignant par U, on a

$$\frac{d^2.rr'U}{dr^2} = \frac{d^2.rr'U}{dr'^2},$$

ou, mieux encore, si l'équation aux différences partielles en x, y, dans laquelle celle que nous venons d'écrire se transforme, est vérifiée à l'aide de valeurs convenables de p, q, p', q'.

10. Supposons que les deux foyers F, F' se rapprochent indéfiniment de manière à coïncider enfin avec le point O, et voyons ce que devient, dans ce cas, la formule

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Pour cela observons que, quand les foyers F, F' sont très-près l'un de l'autre, la valeur de b est très-petite; c'est en posant $b = 0$ que nous exprimerons qu'ils viennent se confondre avec le point O. Alors nos ellipses deviendront des cercles de rayon μ, ayant un centre commun O, et nos hyperboles se transformeront en lignes droites passant par le point O. Supposons donc d'abord la valeur de b très-petite, et soit (à cause de $\nu^2 < b^2$, comme on l'a déjà expliqué),

$$\nu = b\cos\theta, \quad \text{d'où} \quad x = \mu\cos\theta, \quad y = \sqrt{\mu^2 - b^2}.\sin\theta,$$

formules qui à la limite $b = 0$ deviendront celles des coordonnées polaires ordinaires. A cette même limite, $\mu^2 - \nu^2$ ou $\mu^2 - b^2\cos^2\theta$ se réduira à μ^2 dans l'expression de U; quant à la fonction $F(\nu)$, on peut la remplacer par $\Psi\left(\frac{\nu}{b}\right) = \Psi(\cos\theta)$. La valeur de U se composera donc de deux termes: l'un fonction de μ, qui répond à une force dirigée vers le point O et agissant d'après une fonction quelconque de la distance; l'autre qu'on peut exprimer en x, y, et qui devient alors une fonction homogène quelconque du degré -2 par rapport à ces coordonnées.

On discuterait d'une manière semblable le cas où un des deux foyers s'éloigne de l'autre à l'infini.

Et d'abord si, laissant le centre O fixe, on agrandit indéfiniment la distance FF', chacune de nos ellipses se réduira à deux droites parallèles entre elles, et chacune de nos hyperboles aussi à deux droites perpendiculaires sur les précédentes, de sorte que l'on retombera sur les coordonnées rectangles ordinaires. On pourrait même n'avoir qu'une seule droite pour chaque conique en éloignant la seconde droite, et, par conséquent, le centre O lui-même à l'infini.

En laissant un foyer fixe et transportant l'autre à l'infini dans une direction déterminée, on obtiendra un système particulier assez remarquable où les points du plan résulteront de l'intersection de deux séries de paraboles ayant toutes même axe et même foyer, mais tournées diversement de manière à former deux groupes rectangulaires entre eux. Mais il est plus simple de traiter directement ce cas particulier que de le déduire des formules générales. Il répond à la transformation analytique suivante

$$x + y\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2, \quad x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta,$$

qui donne

$$dx^2 + dy^2 \quad \text{ou} \quad ds^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

La fonction des forces pour laquelle notre méthode d'intégration réussit est, par conséquent,

$$\mathrm{U} = \frac{\text{Fonct. }(\alpha) - \text{fonct. }(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

11. Il est bon d'observer que nos formules analytiques pour le mouvement d'un point dans un plan s'étendent au cas du mouvement sur une surface développable. En effet, si l'on applique le plan sur une telle surface, les coordonnées μ, ν ou α, β, dont nous venons de faire usage, pourront encore servir à déterminer les points M dans leurs nouvelles positions; les éléments ds ne changeront pas de longueur; on aura encore

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et les équations du mouvement données par les formules (3) et (4) resteront les mêmes. La possibilité d'intégrer répondra donc toujours à la même formule

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Mais, bien qu'analytiquement identique pour un plan et pour une surface développable, cette formule devra, on le conçoit, se présenter avec une signification géométrique et mécanique complétement différente. En général, et avec la même différence quant au fond des choses, des formules d'analyse identiques entre elles serviront pour le mouvement d'un point sur deux surfaces susceptibles d'être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

On peut encore généraliser sous un autre point de vue les résultats contenus dans ce paragraphe. Observons, en effet, que quand on est parvenu à déterminer le mouvement d'un point libre dans un plan ou dans l'espace sous l'action de forces données X, Y, ou X, Y, Z, parallèles à des axes rectangulaires, on a par cela même déterminé aussi implicitement le mouvement d'un point sollicité par les mêmes forces suivant des axes obliques. Les équations du mouvement étant les mêmes dans les deux cas, toute méthode d'intégration qui a réussi pour l'un réussira pour l'autre, en donnant lieu à des calculs semblables, mais avec une signification géométrique et mécanique différente. Reportons-nous, par exemple, aux formules du n° **9**, et nous en conclurons que les équations du mouvement d'un mobile dans le plan yOx de deux axes *obliques* Ox, Oy parallèlement auxquels agissent deux forces $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, s'intègrent toutes les fois qu'on a

$$U = \frac{\text{Fonct.}\,(r + r') - \text{fonct.}\,(r - r')}{rr'},$$

où r et r' désignent les deux quantités

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}, \quad \sqrt{(x-p')^2 + (y-q')^2},$$

p, q, p', q' étant des constantes. Mais r et r' n'expriment plus les distances du point (x, y) à deux points fixes.

§ III.

12. Nous avons réussi à appliquer la méthode générale du § I au mouvement d'un point dans un plan, dans un cas très-étendu, en employant des coordonnées elliptiques μ, ν, ou plutôt

$$\alpha = \int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}}, \quad \beta = \int \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}.$$

Ce système de coordonnées, d'après lequel les points du plan sont déterminés par la rencontre d'une série d'ellipses et d'hyperboles homofocales, nous a conduit à une valeur de ds^2 de la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et de plus λ s'est trouvé être la différence de deux fonctions, l'une de α, et l'autre de β. Mais ne pouvait-on pas arriver d'une manière directe, par la force même de l'analyse, au système cité, dont nous n'avons jusqu'ici, pour ainsi dire, fait usage que par hasard; et d'ailleurs est-il le seul pour lequel on obtienne dans un plan, une telle valeur de ds^2? Cette question mérite d'être discutée avec soin, puisque c'est à la forme seule des expressions de ds^2 et de λ que tient le succès de notre méthode d'intégration.

13. Soient donc les coordonnées rectangulaires x et y d'un point quelconque du plan, exprimées par des variables α, β. On demande d'abord que ds^2 ou $dx^2 + dy^2$ soit de la forme

$$dx^2 + dy^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

λ étant une fonction de α, β. Or on a

$$dx = \frac{dx}{d\alpha}\, d\alpha + \frac{dx}{d\beta}\, d\beta,$$

$$dy = \frac{dy}{d\alpha}\, d\alpha + \frac{dy}{d\beta}\, d\beta.$$

La condition énoncée se décompose donc en deux autres; il faut qu'on ait tout à la fois

$$(a) \qquad \frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} = 0,$$

et

$$(b)\qquad \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\beta}\right)^2.$$

On satisfait à la première quel que soit u, en prenant

$$\frac{dy}{d\alpha} = u\frac{dx}{d\alpha},\quad \frac{dy}{d\beta} = -\frac{1}{u}\frac{dx}{d\beta};$$

et alors la seconde nous donne

$$\left(\frac{dx}{d\beta}\right)^2 = u^2\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{dx}{d\beta} = \pm u\frac{dx}{d\alpha} = \pm\frac{dy}{d\alpha},$$

ce qui, à cause de l'équation

$$\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} = 0,$$

donne

$$\frac{dy}{d\beta} = \mp\frac{dx}{d\alpha}.$$

Dans le système

$$\frac{dx}{d\beta} = \pm\frac{dy}{d\alpha},\quad \frac{dy}{d\beta} = \mp\frac{dx}{d\alpha},$$

il est indifférent de prendre à la fois les signes supérieurs, ou à la fois les signes inférieurs, puisque cela revient à changer y de signe. Nous prendrons donc d'une manière déterminée

$$\frac{dx}{d\beta} = -\frac{dy}{d\alpha},\quad \frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha};$$

et, en posant

$$x + y\sqrt{-1} = \zeta,$$

nous en conclurons

$$\frac{d\zeta}{d\beta} = \sqrt{-1}\,\frac{d\zeta}{d\alpha}.$$

Donc la valeur de ζ ne peut être que de la forme

$$\zeta = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

Réciproquement, si l'on pose

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

en prenant pour x la partie réelle du second membre, et pour y le coefficient de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\frac{dx}{d\beta} + \sqrt{-1}\frac{dy}{d\alpha} = \sqrt{-1}\left(\frac{dx}{d\beta} + \sqrt{-1}\frac{dy}{d\alpha}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{d\beta} = -\frac{dy}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha};$$

les conditions (a) et (b) seront donc satisfaites.

14. Le système que nous venons d'obtenir est incomparablement plus étendu que celui des coordonnées elliptiques. Il fournit pour ds^2 une valeur de la forme

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et peut ainsi, sous un certain point de vue, être de quelque utilité dans des cas particuliers, comme on l'a expliqué au nº 5 du § I. Mais il ne donne pas, en général,

$$\lambda = f(\alpha) - F(\beta),$$

condition que nous désirons aussi remplir. Or le système elliptique est le seul pour lequel on trouve à la fois

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad \text{et} \quad \lambda = f(\alpha) - F(\beta).$$

C'est ce que nous allons démontrer.

15. La démonstration de la proposition qui nous occupe est assez simple, lorsque la fonction $\psi(\alpha)$ est essentiellement réelle, de telle sorte que l'équation

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

entraîne cette autre,

$$x - y\sqrt{-1} = \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

ce qui pourrait ne pas arriver, si la fonction ψ contenait des imaginaires indépendamment de la substitution de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ à α. On a alors immédiatement

$$dx^2 + dy^2 = \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

et la condition que

$$\lambda = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta)$$

donne

$$\psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta).$$

Je différentie cette équation une fois par rapport à α et deux fois par rapport à β; je trouve ainsi

$$\left.\begin{aligned}&\psi^{\text{iv}}(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,\psi'(\alpha-\beta\sqrt{-1}) - \psi'''(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,\psi''(\alpha-\beta\sqrt{-1})\\ -&\psi''(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,\psi'''(\alpha-\beta\sqrt{-1}) + \psi'(\alpha+\beta\sqrt{-1})\,\psi^{\text{iv}}(\alpha-\beta\sqrt{-1})\end{aligned}\right\} = 0,$$

d'où, en posant $\beta = 0$,

$$\psi^{\text{iv}}(\alpha)\,\psi'(\alpha) = \psi''(\alpha)\,\psi'''(\alpha).$$

De là on tire

$$\frac{\psi^{\text{iv}}(\alpha)}{\psi'''(\alpha)} = \frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

et, par suite,

$$\psi'''(\alpha) = c\,\psi'(\alpha),$$

c étant une constante essentiellement réelle, puisque la fonction ψ l'est elle-même.

On peut avoir $c = a^2$ ou $c = -a^2$. Dans la première hypothèse, l'intégration donne

$$\psi(\alpha) = \mathrm{G}e^{a\alpha} + \mathrm{H}e^{-a\alpha} + \mathrm{K},$$

G, H, K étant des constantes réelles Et de là

$$x + y\sqrt{-1} = \mathrm{G}e^{a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + \mathrm{H}e^{-a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + \mathrm{K}.$$

On peut supprimer sans inconvénient la constante K; cela revient à remplacer x par $x + \mathrm{K}$. Cette suppression faite, la comparaison des parties réelles et imaginaires dans les deux membres donne

$$x = (Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha}) \cos a\beta,$$
$$y = (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha}) \sin a\beta,$$

d'où, tirant les sinus et cosinus, et égalant à 1 la somme de leurs carrés,

$$\frac{x^2}{(Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha})^2} + \frac{y^2}{(Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha})^2} = 1.$$

En donnant à α successivement différentes valeurs, cette équation représente une série d'ellipses ayant le même centre et dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites; de plus, ces ellipses ont les mêmes foyers, car la différence des carrés de leurs demi-axes est

$$(Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha})^2 - (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha})^2 = 4GH = \text{constante}.$$

En tirant des mêmes équations

$$x = (Ge^{a\alpha} + He^{-a\alpha}) \cos a\beta,$$
$$y = (Ge^{a\alpha} - He^{-a\alpha}) \sin a\beta,$$

les valeurs de $e^{a\alpha}$, $e^{-a\alpha}$, comme si c'étaient deux inconnues, on trouve

$$e^{a\alpha} = \frac{x \sin a\beta + y \cos a\beta}{2G \sin a\beta \cos a\beta}, \quad e^{-a\alpha} = \frac{x \sin a\beta - y \cos a\beta}{2H \sin a\beta \cos a\beta},$$

d'où, en faisant le produit,

$$\frac{x^2}{4GH \cos^2 a\beta} - \frac{y^2}{4GH \sin^2 a\beta} = 1.$$

Quand on donne à β différentes valeurs, cette équation représente une série d'hyperboles, évidemment homofocales avec les ellipses précédentes.

Au surplus, le premier système de courbes étant connu, le second pouvait être regardé comme connu aussi, puisque ces deux systèmes doivent se couper orthogonalement.

Dans l'hypothèse de $c = -a^2$, une discussion analogue conduit à la même conclusion. En exprimant α et β en x et y, les équations

$$\alpha = \textit{constante}, \quad \beta = \textit{constante}$$

représentent encore deux systèmes de sections coniques homofocales, en sorte que nous retombons de nouveau dans les coordonnées elliptiques du § II.

16. Le calcul devient plus compliqué lorsqu'on suppose que la fonction ψ renferme des imaginaires indépendamment de celle contenue dans la variable. Voici comment on peut procéder alors.

De même qu'en posant

$$\zeta = x + y\sqrt{-1},$$

au nº **13**, on a obtenu

$$\frac{d\zeta}{d\beta} = \sqrt{-1}\,\frac{d\zeta}{d\alpha},$$

et, par suite,

$$x + y\sqrt{-1} = \psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

de même, en posant

$$\zeta = x - y\sqrt{-1},$$

on aurait trouvé

$$\frac{d\zeta}{d\beta} = -\sqrt{-1}\,\frac{d\zeta}{d\alpha},$$

et, par conséquent,

$$x - y\sqrt{-1} = \pi(\alpha - \beta\sqrt{-1}).$$

Cherchons quelle relation existe entre les fonctions π et ψ.

On a ici

$$dx^2 + dy^2 = \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

La condition

$$\lambda = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta)$$

donne donc

$$\psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta).$$

En différentiant cette équation une fois par rapport à α, puis une seconde fois par rapport à β, il vient

$$\psi'''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\pi'(\alpha - \beta\sqrt{-1}) - \psi'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,\pi'''(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = 0.$$

Une nouvelle différentiation par rapport à β donne ensuite

$$\left.\begin{array}{l}\psi^{\text{IV}}(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi'(\alpha-\beta\sqrt{-1})-\psi'''(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi''(\alpha-\beta\sqrt{-1})\\ -\psi''(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi'''(\alpha-\beta\sqrt{-1})+\psi'(\alpha+\beta\sqrt{-1})\pi^{\text{IV}}(\alpha-\beta\sqrt{-1})\end{array}\right\}=0.$$

En faisant $\beta = 0$, on a donc ces deux équations :

$$\psi'''(\alpha)\pi'(\alpha)-\psi'(\alpha)\pi'''(\alpha)=0,$$

et

$$\psi^{\text{IV}}(\alpha)\pi'(\alpha)-\psi'''(\alpha)\pi''(\alpha)-\psi''(\alpha)\pi'''(\alpha)+\psi'(\alpha)\pi^{\text{IV}}(\alpha)=0.$$

De la première on tire

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}=\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)};$$

et la seconde, divisée par $\psi'(\alpha)\pi'(\alpha)$, fournit

$$\frac{\psi^{\text{IV}}(\alpha)}{\psi'(\alpha)}-\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\frac{\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}-\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}+\frac{\pi^{\text{IV}}(\alpha)}{\pi'(\alpha)}=0,$$

laquelle, en remplaçant

$$\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}$$

par son égale

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$$

dans le troisième terme, et opérant une substitution inverse dans le second, prend cette forme intégrable

$$\frac{\psi'(\alpha)\psi^{\text{IV}}(\alpha)-\psi'''(\alpha)\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)^2}+\frac{\pi'(\alpha)\pi^{\text{IV}}(\alpha)-\pi'''(\alpha)\pi''(\alpha)}{\pi'(\alpha)^2}=0,$$

d'où résulte

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}+\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}=\text{constante}.$$

Comme on a déjà

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}=\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)},$$

nous devons en conclure que

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)}\quad\text{et}\quad\frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)}$$

ont séparément des valeurs constantes. En conséquence, nous ferons

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)} = \frac{\pi'''(\alpha)}{\pi'(\alpha)} = a^2,$$

la constante a pouvant être imaginaire.

En désignant par g, h, k des constantes qui peuvent aussi être imaginaires, l'équation linéaire

$$\psi'''(\alpha) = a^2 \psi'(\alpha)$$

donne, par l'intégration,

$$\psi(\alpha) = g e^{a\alpha} + h e^{-a\alpha} + k,$$

et l'on aura de même

$$\pi(\alpha) = g_1 e^{a\alpha} + h_1 e^{-a\alpha} + k_1.$$

En remplaçant α par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ dans $\psi(\alpha)$, et par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ dans $\pi(\alpha)$, on obtiendra les valeurs de

$$x + y\sqrt{-1} = g e^{a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + h e^{-a(\alpha+\beta\sqrt{-1})} + k,$$
$$x - y\sqrt{-1} = g_1 e^{a(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + h e^{-a(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + k_1.$$

Mais la valeur de $x + y\sqrt{-1}$ doit fournir celle de $x - y\sqrt{-1}$ en substituant aux imaginaires a, g, h, k, $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ les imaginaires conjuguées a', g', h', k', $\alpha - \beta\sqrt{-1}$. De là

$$x - y\sqrt{-1} = g' e^{a'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + h' e^{-a'(\alpha-\beta\sqrt{-1})} + k',$$

valeur qui ne peut s'accorder avec celle déjà donnée que si l'on a $a' = a$, ce qui suppose a réelle, ou $a' = -a$, ce qui suppose a de la forme $b\sqrt{-1}$. Mais, comme cette dernière hypothèse rentre dans la première en changeant α en β, et β en $-\alpha$, nous ne nous occuperons que de la première. De plus, dans la valeur de $x + y\sqrt{-1}$, nous supprimerons la constante k, ce qui revient à ajouter une simple constante aux coordonnées x, y; enfin, nous écrirons les imaginaires g, h sous la forme accoutumée

$$g = \mathrm{G}e^{\gamma\sqrt{-1}}, \quad h = \mathrm{H}e^{\gamma\sqrt{-1}}.$$

Nous aurons ainsi

$$x + y\sqrt{-1} = \mathrm{G}e^{a\alpha + (a\beta + \sigma)\sqrt{-1}} + \mathrm{H}e^{-a\alpha - (a\beta - \tau)\sqrt{-1}}.$$

Mais cette formule peut encore être simplifiée. Multiplions, en effet, les deux membres par $e^{\theta\sqrt{-1}}$, où nous supposons

$$\theta = -\tfrac{1}{2}(\sigma + \tau),$$

et faisons

$$x\cos\theta - y\sin\theta = x_1, \quad x\sin\theta + y\cos\theta = y_1, \quad \tfrac{1}{2}(\sigma - \tau) = a\omega;$$

nous obtiendrons

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = \mathrm{G}e^{a[\alpha + (\beta+\omega)\sqrt{-1}]} + e^{-a[\alpha + (\beta+\omega)\sqrt{-1}]}.$$

Il est clair que x_1, y_1 sont les coordonnées du point M par rapport à des axes rectangulaires comme les anciens. En adoptant d'avance ces axes, x_1 et y_1 se réduiront à x et y. On trouvera alors, en séparant les quantités réelles des imaginaires,

$$x = (\mathrm{G}e^{a\alpha} + \mathrm{H}e^{-a\alpha})\cos a(\beta + \omega),$$
$$y = (\mathrm{G}e^{a\alpha} - \mathrm{H}e^{-a\alpha})\sin a(\beta + \omega),$$

et ces formules, qui ne diffèrent de celles du numéro précédent que par le changement insignifiant de β en $\beta + \omega$, nous conduiront comme elles à des coniques homofocales et au système elliptique du § II.

Nous sommes donc en droit d'affirmer que ce système est le seul pour lequel on ait à la fois

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad \text{et} \quad \lambda = f(\alpha) - \mathrm{F}(\beta),$$

et, par conséquent, le seul dont nous puissions faire usage pour appliquer la méthode du § Ier au mouvement d'un point dans un plan. Nous avons déjà fait observer que les coordonnées rectangles ordinaires y sont comprises comme cas particulier, ainsi que les coordonnées polaires et les coordonnées paraboliques dont on a dit un mot à la fin du n° **10**.

§ IV.

17. Occupons-nous à présent du mouvement du point M sur une sphère de rayon ρ, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Nous avons, dans le cas du plan, regardé chaque point M comme déterminé par la rencontre de deux coniques homofocales. Nous opérerons de la même manière sur la surface de la sphère; seulement nos coniques seront ici naturellement des coniques sphériques. Désignons par b et c deux constantes prises à volonté une fois pour toutes, c étant $> b$; et, pour exprimer x, y, z au moyen de deux variables μ et ν, prenons

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0.$$

En donnant à μ et ν diverses valeurs, on obtient par ces deux dernières équations deux systèmes de cônes qui se coupent à angle droit et qui déterminent sur la sphère deux systèmes, aussi orthogonaux, de coniques sphériques dont l'intersection donne les différents points de la surface. Les valeurs de x, y, z en μ et ν sont

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\rho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\rho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On suppose, bien entendu, $\nu^2 < b^2$, μ compris entre b et c, et on prend ν et les radicaux contenus dans les formules avec des signes convenables. Pour plus de clarté, introduisons deux angles θ et ψ, et posons

$$\nu = b\cos\theta, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}.$$

De là résultera

$$x = \frac{\rho\cos\theta}{c}\sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi},$$

$$y = \rho\sin\theta\cos\psi, \quad z = \frac{\rho\sin\theta}{c}\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}.$$

Les radicaux qui restent demeureront toujours positifs, et les signes de $\cos\theta$, etc., détermineront ceux de x, y, z, d'après les valeurs des angles θ et ψ. Pour parcourir la surface entière de la sphère, il suffit de faire varier θ dans l'étendue d'une demi-circonférence et ψ dans l'étendue d'une circonférence entière. Si donc il s'agissait d'une intégration relative à cette surface, on prendrait o et π pour limites de θ, o et 2π pour limites de ψ; mais, dans le problème du mouvement d'un mobile, on peut être obligé de considérer des valeurs de θ et ψ plus grandes ou plus petites, et même des valeurs allant en croissant ou en décroissant indéfiniment.

Au reste, c'est dans les applications particulières que l'usage des angles θ et ψ peut surtout être utile. Tant que l'on demeure dans une certaine généralité, l'emploi des variables μ et ν me paraît plus commode.

18. D'après les valeurs de x, y, z, on trouve sans difficulté

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{\rho^2 d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{\rho^2 d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\right].$$

En comparant à la formule (10) du § I^er^, on a donc ici

$$m = \frac{\rho^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad n = \frac{\rho^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ (qui est, au reste, d'une forme entièrement semblable à celle pour le cas du plan) se trouvant composée, comme le demande la méthode du paragraphe cité, d'une fonction de μ jointe à une fonction de ν, nous pourrons prendre pour λU une autre expression quelconque de la même espèce. Ainsi, toutes les fois que l'on aura

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2},$$

les équations du mouvement du point M sur la sphère se ramèneront aux quadratures par nos formules.

D'après la valeur actuelle de λ, comparée à la première des formules (28) du n° 6, on peut prendre

$$\varphi(\mu) = \mu^2, \quad \varpi(\nu) = \nu^2,$$

et appliquer la formule (30). Ainsi l'équation de la trajectoire sera

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\sqrt{2\mathrm{f}(\mu) + \mathrm{C}\mu^2 - \mathrm{A}}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\sqrt{\mathrm{A} - 2F(\nu) - \mathrm{C}\nu^2}},$$

ou bien, en introduisant l'angle i de la formule (31),

$$[2f(\mu) + C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\nu^2]\sin^2 i = A.$$

Ici i désigne l'angle que la trajectoire fait en chaque point avec la conique sphérique correspondante (μ). L'élément ds'' de cette conique a pour valeur

$$ds'' = \frac{\rho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}.d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

et l'élément ds' de la conique orthogonale s'exprime par

$$ds' = \frac{\rho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}};$$

enfin on a

$$\tang i = \frac{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}\frac{d\mu}{d\nu}.$$

Je ne m'étendrai pas sur les applications des formules relatives à la trajectoire. Je me bornerai au cas de

$$f(\mu) = 0, \quad F(\nu) = 0;$$

c'est celui d'un mobile qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Il est évident que la trajectoire est alors un grand cercle de la sphère. Les équations

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - a)(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{(a - \nu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

et

$$\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i = a,$$

qui se déduisent des formules (32) et (33) propres à ce cas, représentent donc un grand cercle quelconque, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à b et c. D'après la formule (34), l'élément ds de ce grand cercle s'exprime par

$$ds = \frac{\rho\,d\mu\sqrt{\mu^2 - a}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} + \frac{\rho\,d\nu\sqrt{a - \nu^2}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

Remarquons enfin que les cercles en nombre infini qui répondent à une même valeur de a sont tous tangents à la conique sphérique déterminée par l'équation $\mu^2 = a$ ou $\nu^2 = a$, suivant que l'on a $a > b^2$ ou $a < b^2$.

19. On peut introduire, au lieu de μ et ν, les angles ψ et θ dans la formule

$$U = \frac{f(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2},$$

qui devient ainsi

$$U = \frac{\text{Fonct.}\,(\psi) - \text{fonct.}\,(\theta)}{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi - b^2\cos^2\theta}.$$

Cette forme est la plus convenable pour la discussion des cas particuliers où l'on prend $b = 0$ ou $b = c$; le numérateur, en effet, reste le même, et le dénominateur peut être supposé égal à $\cos^2\psi$ dans le premier cas, et à $\sin^2\theta$ dans le second. Soit, pour fixer les idées, $b = c$; la valeur de U, pour laquelle la méthode du § Ier réussit, est

$$U = \frac{\text{Fonct.}\,(\psi) - \text{fonct.}\,(\theta)}{\sin^2\theta},$$

et l'on a d'ailleurs

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta\cos\psi,\quad z = \rho\sin\theta\sin\psi,$$

en sorte que θ et ψ sont les angles des coordonnées polaires ordinaires dans le cas de trois dimensions. En faisant Fonct. $(\psi) = 0$, la formule comprend encore, comme cas très-particulier, le pendule conique.

§ V.

20. L'extrême ressemblance qu'on a pu observer entre les formules pour le plan et celles pour la sphère, se conserve en passant à un ellipsoïde quelconque.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde sur lequel le point M doit se mouvoir, et

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

celles des hyperboloïdes homofocaux qui en déterminent les lignes de courbure. Nous regarderons μ et ν comme des variables en fonction desquelles nous exprimerons x, y, z.

Un calcul très-simple donne

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}};$$

on doit donner aux diverses quantités entrant dans ces équations des signes convenables, comme l'indiqueront nettement, si l'on veut, les formules

$$x = \frac{\rho\cos\theta}{c}\sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi},$$
$$y = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sin\theta\cos\psi,$$
$$z = \sqrt{\rho^2 - c^2}.\frac{\sin\theta\sqrt{c^2 - b^2\cos^2\psi}}{c},$$

que l'on obtient en faisant, comme pour la sphère,

$$\nu = b\cos\psi, \quad \mu = \sqrt{c^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}.$$

21. On trouve sans difficulté, d'après les valeurs de x, y, z,

$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left[\frac{(\rho^2 - \mu^2)d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)} + \frac{(\rho^2 - \nu^2)d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\right].$$

En comparant à la formule (10) du § I$^{\text{er}}$, on a donc ici

$$m = \frac{\rho^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}, \quad n = \frac{\rho^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}, \quad \lambda = \mu^2 - \nu^2.$$

La valeur de λ ayant la forme voulue pour le succès de la méthode du paragraphe cité, il ne reste plus qu'à prendre λU de même forme, en posant

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Ainsi, toutes les fois que U sera susceptible d'une telle expression, les équations du mouvement d'un point matériel sur l'ellipsoïde se ramèneront aux quadratures par nos formules. L'équation de la trajectoire sera, dans ce cas,

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}.d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\sqrt{2\mathrm{f}(\mu) + \mathrm{C}\mu^2 - \mathrm{A}}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}.d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\sqrt{\mathrm{A} - 2F(\nu) - \mathrm{C}\nu^2}},$$

ou bien

$$[2f(\mu) + C\mu^2]\cos^2 i + [2F(\nu) + C\nu^2]\sin^2 i = A,$$

i étant l'angle que la trajectoire fait en chaque point (μ, ν) avec l'élément ds'' de la ligne de courbure correspondante (μ), je veux dire de la ligne de courbure qui passe par ce point et le long de laquelle la valeur de μ reste constante.

En faisant

$$f(\mu) = g\mu^4, \quad F(\nu) = g\nu^4,$$

on traiterait, comme il est aisé de le voir, le cas d'un point M attiré ou repoussé par le centre de l'ellipsoïde avec une force proportionnelle à la distance du point M à ce centre.

En faisant

$$f(\mu) = 0, \quad F(\nu) = 0,$$

on retrouve naturellement l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = a,$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}.d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - a)}} = \frac{\sqrt{\rho^2 - \nu^2}.d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(a - \nu^2)}},$$

de la ligne géodésique tangente à la ligne de courbure que détermine, suivant la grandeur de a, l'une ou l'autre des deux équations $\mu^2 = a$, $\nu^2 = a$. Et pour l'élément ds de cette ligne on obtiendra la formule

$$ds = \frac{\sqrt{\mu^2 - a}\sqrt{\rho^2 - \mu^2}}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)}} d\mu + \frac{\sqrt{a - \nu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\nu,$$

qui rentre, au fond, dans celle que j'ai donnée autrefois, comme on peut s'en assurer, en ayant égard à la différence des notations et à l'équation entre μ et ν.

§ VI.

22. Nous dirons actuellement deux mots du cas où le point M se meut sur une surface de révolution quelconque.

Prenons l'axe de la surface pour axe des x, et désignons par u sa distance au point M, en sorte que u soit une fonction de x fournie par l'équation du méridien. Représentons de plus par β l'angle que le méridien qui passe par le point M fait avec un méridien fixe. On aura

$$ds^2 = dx^2\left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] + u^2\, d\beta^2.$$

Si donc nous faisons

$$\alpha = \int \frac{dx}{u}\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2},$$

il nous viendra

$$ds^2 = u^2\,(d\alpha^2 + d\beta^2) = \lambda\,(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

en posant $\lambda = u^2$. En comparant cette valeur de λ aux formules (17) du n° **6**, on prendra

$$\varphi(\alpha) = u^2, \quad \varpi(\beta) = 0,$$

et

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{f}(\alpha) - F(\beta)}{u^2}.$$

Telle est la fonction des forces pour laquelle notre méthode d'intégration réussira.

Dans le cas particulier des lignes géodésiques, on trouvera pour équation de la trajectoire

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{u^2 - a}} = \frac{d\beta}{\sqrt{a}},$$

ce qui revient à l'équation connue

$$u \cos i = \text{constante},$$

où i désigne l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe successivement les parallèles de la surface.

§ VII.

23. Nous prendrons pour dernier exemple la surface héliçoïde dont l'équation est

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\, z.$$

Cette équation est satisfaite par

$$x = \mu \cos \nu, \quad y = \mu \sin \nu, \quad z = \nu,$$

ce qui donne

$$ds^2 = (\mu^2 + 1)\left(\frac{d\mu^2}{\mu^2 + 1} + d\nu^2\right),$$

et permet l'application de nos formules en posant

$$\lambda = \mu^2 + 1, \quad m = \frac{1}{\mu^2 + 1}, \quad n = 1,$$

puis

$$U = \frac{\mathrm{f}(\mu) - F(\nu)}{\mu^2 + 1}.$$

Avec cette valeur de U l'équation de la trajectoire est

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}\sqrt{2\mathrm{f}(\mu) + C(\mu^2 + 1) - A}} = \frac{d\nu}{\sqrt{A - 2F(\nu)}}.$$

On déduit ce résultat de la formule (30) en y faisant $\varphi(\mu) = \mu^2 + 1$, $\varpi(\nu) = 0$, ce qui donne bien $\lambda = \varphi(\mu) - \varpi(\nu)$.

Dans le cas particulier des lignes géodésiques, les formules (32), (33) et (34) fournissent

$$\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 + 1)(\mu^2 + 1 - a)}} = \frac{d\nu}{\sqrt{a}},$$

ou

$$(\mu^2 + 1)\cos^2 i + \sin^2 i = a,$$

pour l'équation de la trajectoire, et

$$ds = d\mu \frac{\sqrt{\mu^2 + 1 - a}}{\sqrt{\mu^2 + 1}} + d\nu\sqrt{a}$$

pour l'élément de son arc, qui s'exprime ainsi par une intégrale elliptique. Ici i désigne l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe successivement les lignes de la surface pour lesquelles on a $\mu =$ constante; ces lignes sont des hélices : $\nu =$ constante donne des lignes droites. Pour

$$\mu^2 + 1 = a,$$

la formule dont l'angle i dépend donne

$$\sin^2 i = \frac{\mu^2 + 1 - a}{\mu^2} = 0,$$

sauf le cas de $a = 1$. Les lignes géodésiques en nombre infini qui répondent à une même valeur de a sont donc, en général, toutes tangentes à l'hélice déterminée par l'équation

$$\mu^2 + 1 = a,$$

et quoique cette hélice ne soit pas une ligne de courbure, on peut prévoir qu'elles ont des propriétés analogues jusqu'à un certain point à celles des lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure sur l'ellipsoïde.

§ VIII.

24. La méthode que j'ai développée dans ce Mémoire est une simple extension de celle dont j'avais fait usage dans mes premières recherches sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde, en cherchant à démontrer une belle formule de M. Jacobi. Elle me paraît propre à entrer dans les Traités élémentaires, et c'est surtout par cette raison que je m'y suis arrêté avec quelque détail. Il m'a semblé d'ailleurs utile de montrer comment l'analyse même des équations du mouvement d'un point dans un plan aurait pu conduire d'une manière très-directe à ces coordonnées elliptiques auxquelles les géomètres ont reconnu tant de propriétés, et qui, du reste, ont été d'abord employées précisément dans un problème de mécanique. Dans un second Mémoire je traiterai par une autre méthode (mais toujours en prenant mon point de départ dans les recherches de M. Jacobi) la question du mouvement d'un point libre dans l'espace. Je montrerai en particulier que les intégrations s'effectuent quand le mobile est sollicité parallèlement à trois axes Ox, Oy, Oz, rectangulaires ou obliques, par les forces respectives

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz},$$

U étant une fonction de x, y, z, exprimée par la formule

$$U = \frac{(\mu^2 - \nu^2) f(\rho) + (\rho^2 - \nu^2) F(\mu) + (\rho^2 - \mu^2) \varphi(\nu)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)},$$

où ρ, μ, ν sont des fonctions de x, y, z déterminées par l'équation

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

qui est du troisième degré en ρ^2 et dont ρ^2, μ^2, ν^2 désignent les trois racines; b, c sont des constantes quelconques, et $f(\rho)$, $F(\mu)$, $\varphi(\nu)$ des fonctions quelconques aussi de leurs variables respectives. Je ne sache pas que M. Jacobi ait donné ce théorème, mais on le démontre facilement en faisant usage d'une équation aux différences partielles, conformément à la théorie développée par l'illustre géomètre dans le tome III du présent Journal.