Kommunikation als Spiel zwischen rationalen Agenten

Stefan Partusch

Hauptseminar „Logik des geteilten Wissens“,
Centrum für Informations- und Sprachverarbeitung,
Ludwig-Maximilians-Universität München

18. Juni 2008

Spieltheorie

In einem spieltheoretischen Spiel agieren zwei oder mehr rationale Agenten gleichzeitig oder der Reihe nach und versuchen unter Berücksichtigung der möglichen Aktionen der anderen Agenten, die für sie beste Aktion zu finden.

Motivation: Kommunikation als Spiel

Auch Kommunikation lässt sich als ein solches Spiel auffassen. Denn bei erfolgreicher sprachlicher Kommunikation berücksichtigt ein Sprecher bei der Wahl seiner Worte die Interpretationsfähigkeit des Zuhörers. Der Zuhörer wiederum berücksichtigt bei seiner Interpretation des Gesagten die Möglichkeiten des Sprechers. Die besten Aktionen sind für beide die, die zu erfolgreicher, effizienter Kommunikation führen.

Spieltheorie

Ein Spiel besteht allgemein aus Spielern und Spielregeln. Im Modell also aus ...

- einer Menge von Spielern
- einer Menge von Spielzügen/Spielzuständen
- einer Ordnungsrelationen der Spielzustände
- einer Funktion von Spielzuständen auf Spieler
- einer Menge von möglichen Aktionen der Spieler
- einer Funktion von Spielzuständen auf Aktionen
- einer Auszahlungsfunktion, dem Ergebnis des Spiels

Ein Spiel ist eine Struktur über die alle Agenten Common Knowledge besitzen. Spiele werden häufig in einer (Auszahlungs-)Matrix, der Normalform, dargestellt.

Beispiel: Gefangenendilemma

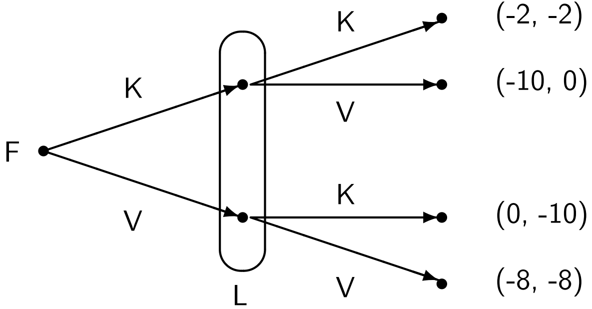
Das bekannteste Beispiel für ein spieltheoretisches Spiel ist das Gefangenendilemma. Zwei Gefangene können gegenüber der Polizei zusammenhalten (kooperieren) oder sich gegenseitig verraten. Je nachdem wie sich beide Verhalten, ergeben sich unterschiedliche Haftstrafen:

		Louie	
		Kooperieren	*Verraten*
Fat Tony	*Kooperieren*	$-2, -2$	$-10, 0$
	Verraten	$0, -10$	$-8, -8$

Was ist *rationales* Verhalten aus Sicht des einzelnen Gefangenen? Strategie, Nutzenmaximierung, ...

Extensivform

Neben der Normalform können Spiele auch als Bäume dargestellt werden. Diese Darstellung wird als Extensivform bezeichnet. Das Gefangenendilemma in Extensivform:



Für Kommunikation als Spiel ist die Extensivform am besten geeignet.

Was ist Kommunikation?

- Ein Agent $\mathcal{A}$ intendiert die Übermittlung einer Proposition p durch die Äußerung φ an einen anderen Agenten $\mathcal{B}$.
- $\mathcal{B}$ muss aufgrund von φ auf p schließen.
- φ jedoch ist in der Regel ambig, also mehrdeutig. Z. B.:
  - Bank (Sitzgelegenheit) vs Bank (Geldinstitut);
  - A sagt zu B, dass er heute vorbeikommen kann;
  - Die Katze frisst die Maus; Die Maus frisst die Katze;
- Propositionen für $\varphi =$ „Alle Männer lieben eine Frau“:
  - $p : \forall x(mann(x) \rightarrow \exists y(frau(y) \wedge liebt(x, y)))$
  - $p' : \exists y(frau(y) \wedge \forall x(mann(x) \rightarrow liebt(x, y)))$

Strategische Inferenz

Die Problematik ist $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bekannt. Daher versuchen sie über strategische Inferenz φ und dessen Interpretation so zu wählen, dass die Kommunikation dennoch erfolgreich ist. Sie spielen ein Spiel.

Wie wahrscheinlich eine Proposition gegeben φ ist, hängt bedeutend von der Situation ab, in der φ geäußert wird.

Ein großer Unterschied zum Gefangenendilemma ist aber, dass die Agenten zusammenarbeiten! Beide haben also denselben Nutzen.

Hintergrund-Annahmen

1. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind rational.
2. $\mathcal{L}$ ist eine gemeinsame Sprache.
3. Die Funktion m ordnet jedem Satz aus $\mathcal{L}$ eine Menge von Propositionen zu. $m : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{P}(Prop)$ mit *Prop* als Menge aller Propositionen.
4. Diese Annahmen sind *Common Knowledge*: $C1$, $C2$, $C3$, $C4$.

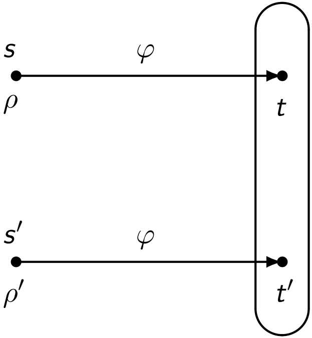
Situations-Annahmen

1. $\mathcal{A}$ intendiert p an $\mathcal{B}$ zu übermitteln.
2. $\mathcal{A}$ äußert φ.
3. $\mathcal{B}$ intendiert φ zu interpretieren.
4. $\mathcal{B}$ nimmt φ wahr und interpretiert es.
5. $m(\varphi) = \{p, p'\}$.
6. p ist wahrscheinlicher als p' ($\rho' < \rho$).
7. p und p' eindeutig auszudrücken ist aufwendiger als es mehrdeutig zu tun.
8. $K_{\mathcal{A}}1, C2, K_{\mathcal{B}}3, C4, C5, C6, C7$ ... $C6$?

Das Spiel beginnt

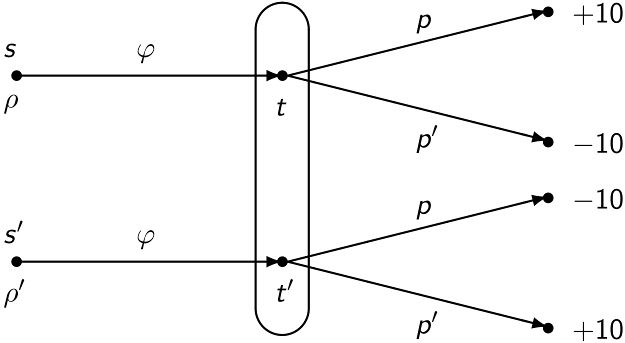
- $\mathcal{A}$ möchte $p = \forall x(mann(x) \rightarrow \exists y(frau(y) \land liebt(x, y)))$ an $\mathcal{B}$ übermitteln. Er hat dazu mehrere Möglichkeiten. Nehmen wir zwei an:
  - φ = „Jeder Mann liebt eine Frau";
  - μ = „Jeder Mann liebt eine Frau. Dabei muss es sich nicht immer um dieselbe Frau handeln";
- $\mathcal{A}$ hat also zwei Möglichkeiten in seinem „Choice set": $CS(p) = \{\varphi, \mu\}$;
- Allgemein: $CS(p) = \{\varphi \in \mathcal{L} | p \in m(\varphi)\}$;
- Wähle $\mathcal{A}$ zunächst φ. Dies ergibt das lokale Spiel $g(\varphi)$;
- Man beachte, dass im Beispiel $m(\varphi) = \{p, p'\}$!

Das lokale Spiel $g(\varphi)$



$\mathcal{A}$ kann sich in s befinden und p meinen oder in s' und p' meinen. ρ und ρ' sind die Wahrscheinlichkeiten dafür. Nachdem $\mathcal{A}$ dann φ geäußert hat, versucht $\mathcal{B}$ zwischen t und t' zu entscheiden. Da φ ambig ist, kann $\mathcal{B}$ dies nicht eindeutig.

Das lokale Spiel $g(\varphi)$



$\mathcal{B}$ muss die Proposition p oder p' als Interpretation von φ wählen. Davon hängt der Erfolg der Kommunikation ab.

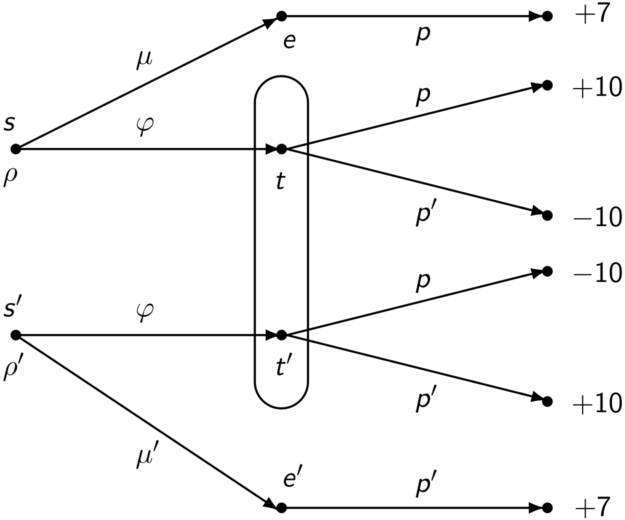
Die Bewertungsfunktion

- Die Bewertungsfunktion v ist angemessen zu wählen.
- Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ am Erfolg gleichermaßen interessiert sind, soll $v^{\mathcal{A}} = v^{\mathcal{B}} = v$ gelten.
- Eine erfolgreiche Kommunikation liefert den höchsten Wert:
    - v(Pfad von s mit φ und p) $= +10$
    - v(Pfad von s' mit φ und p') $= +10$
- Eine fehlgeschlagene Kommunikation den geringsten:
    - v(Pfad von s mit φ und p') $= -10$
    - v(Pfad von s' mit φ und p) $= -10$
- Die Agenten sind gemäß Annahme rational und damit der Spieltheorie nach Nutzenmaximierer. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ versuchen also den höchsten Wert zu erreichen.

Die Bewertungsfunktion

- Problem: v(s mit φ und p) $=$ v(s' mit φ und p') $= +10$. Wie kann $\mathcal{B}$ hier die richtige Wahl treffen?
- Gemäß der Annahmen gilt $\rho' < \rho$. Es ist für $\mathcal{B}$ also rationaler gegeben φ auf p zu schließen.
- Da $Cg(\varphi)$ kann $\mathcal{A}$ daher aus $CS(p)$ zuversichtlich φ wählen.
- Doch ist dann p' nicht mehr durch φ kommunizierbar.
- Allerdings ist auch $\mu' \in CS(p')$! Jedoch ist μ' auch aufwendiger, daher: v(s' mit μ' und p') $<$ v(s mit φ und p).
- Da erfolgreiche Kommunikation immer besser sein soll als fehlgeschlagene, gilt z. B. außerdem: v(Pfad von s' mit μ' und p') $>$ v(Pfad von s mit φ und p').

Das lokale Spiel $g(\varphi)$



Strategien

Eine Strategie ist eine Funktion von „Entscheidungsknoten“ zu Aktionen. Zum Beispiel $\{(s,\varphi),(s',\varphi)\}$.

- $\mathcal{A}$ hat in $g(\varphi)$ folgende Strategien zur Auswahl:
  1. $s \mapsto \varphi,\quad s' \mapsto \mu' \quad\cong\quad \langle\varphi,\mu'\rangle$
  2. $s \mapsto \varphi,\quad s' \mapsto \varphi \quad\cong\quad \langle\varphi,\varphi\rangle$
  3. $s \mapsto \mu,\quad s' \mapsto \mu' \quad\cong\quad \langle\mu,\mu'\rangle$
  4. $s \mapsto \mu,\quad s' \mapsto \varphi \quad\cong\quad \langle\mu,\varphi\rangle$
- $\mathcal{B}$ dagegen hat in $g(\varphi)$ folgende Strategien zur Auswahl:
  1. $e \mapsto p,\quad t,t' \mapsto p,\quad e' \mapsto p' \quad\cong\quad \langle p\rangle$
  2. $e \mapsto p,\quad t,t' \mapsto p',\quad e' \mapsto p' \quad\cong\quad \langle p'\rangle$

Strategien

Ein Paar (a, b), bei dem a eine Strategie von $\mathcal{A}$ und b eine Strategie von $\mathcal{B}$ ist, heißt gemeinsame Strategie oder Strategieprofil.

Die Gesamtheit aller Strategieprofile nennt man Strategieraum.

Die Lösung eines lokalen Spiels ist eine gemeinsame Strategie. Intuitiv haben wir uns bereits $(\langle\varphi, \mu'\rangle, \langle p\rangle)$ als optimale Lösung für $g(\varphi)$ überlegt.

Nash-Gleichgewicht

Das Nash-Gleichgewicht ist ein Lösungskonzept, um optimale Strategieprofile im Strategieraum zu finden.

Sei N die Menge der Agenten und $z|z^{k'}$ mit $k \in N$ das Strategieprofil z, in dem z^k durch $z^{k'}$ ersetzt wurde.

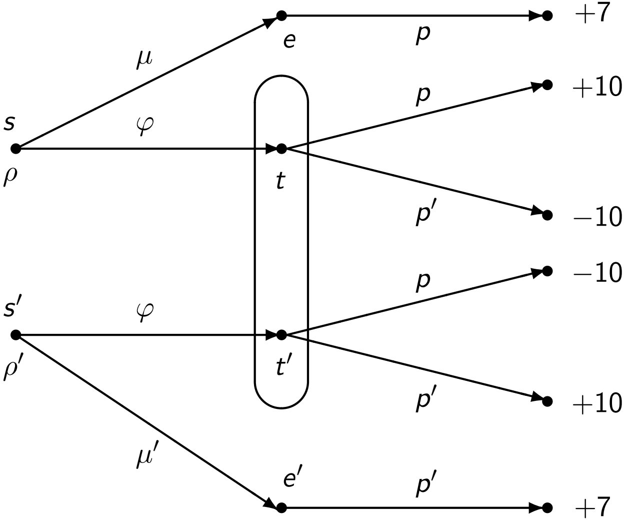
Definition

Sei $\mathcal{Z}^k$ die Menge der Strategien eines Agenten k und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in N$, dann ist $z = (z^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{B}})$ ein Nash-Gleichgewicht, wenn $\forall k \in N$ und $z^{k'} \in \mathcal{Z}^k$ gilt, dass $v^k(z) \geq v^k(z|z^{k'})$.

Nash-Gleichgewicht

- Die Plausibilität des Nash-Gleichgewichts liegt in der Rationalität eines Nutzenmaximierers. Nur wenn kein Agent durch einseitige Abweichung einen Vorteil erreichen kann, befindet sich ein Strategieprofil im Nash-Gleichgewicht.
- Beispiel: $(\langle \mu, \mu' \rangle, \langle p \rangle)$ in $g(\varphi)$.
- Nash-Gleichgewichte in $g(\varphi)$: $(\langle \varphi, \mu' \rangle, \langle p \rangle)$, $(\langle \mu, \varphi \rangle, \langle p' \rangle)$.

Das lokale Spiel $g(\varphi)$



Pareto-Dominanz

- Problem: Für das Beispiel $g(\varphi)$ gibt es offensichtlich zwei Nash-Gleichgewichte.
- Lösungsmöglichkeit: Ergibt ein Strategieprofil für mindestens einen Agenten eine höhere Auszahlung und für keinen Agenten eine geringere, ist dieses eine Lösung des Spiels.

Definition

Eine Strategie z Pareto-dominiert eine andere Strategie z', wenn gilt, dass $v^k(z) > v^k(z')$ für $\forall k \in N$.

Definition

Eine Strategie ist ein Pareto-Nash-Gleichgewicht, wenn sie ein Nash-Gleichgewicht ist und von keinem anderem Nash-Gleichgewicht Pareto-dominiert wird.

Erwartete Auszahlungswerte

Die Auszahlungsfunktion soll nun unter Beachtung der Wahrscheinlichkeiten der Propositionen definiert werden. Sie kann dadurch als Heuristik für die Bewertung von Strategien dienen. Die so berechneten Werte heißen erwartete Auszahlungswerte (*expected payoff*).

Definition

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß ρ: Anfangszustände $\mapsto [0,1]$ und ein Strategieprofil *str* ist: $v^e(str) := \sum_{s \in \text{Anf.zust.}} \rho(s) \cdot v(str(s))$.

Dabei sei $v(str(s))$ der Wert der durch den Anfangszustand s und die Strategie *str* bestimmten Auszahlung.

Pareto-Nash-Gleichgewicht von $g(\varphi)$

Seien $\rho(s) = \rho = 0,9$ und $\rho(s') = \rho' = 0,1$, dann ergeben sich folgende erwartete Auszahlungswerte für die Nash-Gleichgewichte:

- $v^e((\langle \varphi, \mu' \rangle, \langle p \rangle)) = \rho \cdot 10 + \rho' \cdot 7 = 0,9 \cdot 10 + 0,1 \cdot 7 = 9,7$
- $v^e((\langle \mu, \varphi \rangle, \langle p' \rangle)) = \rho \cdot 7 + \rho' \cdot 10 = 0,9 \cdot 7 + 0,1 \cdot 10 = 7,3$

Das Pareto-Nash-Gleichgewicht von $g(\varphi)$ ist also das Strategieprofil $(\langle \varphi, \mu' \rangle, \langle p \rangle)$.

Das globale Spiel $G(p)$

Das lokale Spiel $g(\varphi)$ hängt offensichtlich von der Wahl von φ durch $\mathcal{A}$ ab. Wie trifft $\mathcal{A}$ diese Wahl? $\mathcal{A}$ konstruiert zu jedem $\psi \in CS(p)$ ein lokales Spiel $g(\psi)$ und bewertet es:

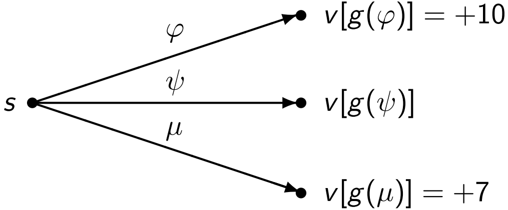
Definition

Sei *str* ein Pareto-Nash-Gleichgewicht von $g(\psi)$, dann sei $v[g(\psi)] := v(str)$

Dabei muss sich $\mathcal{A}$ nicht auf v^e als Heuristik verlassen, da er die von ihm beabsichtigte Proposition kennt.

Das globale Spiel $G(p)$

$\mathcal{A}$ muss nun nur noch die Äußerung φ mit der höchsten Auszahlung wählen und äußern:



Daraufhin muss $\mathcal{B}$ seinerseits $g(\varphi)$ konstruieren und die beste Interpretation nach v^e wählen. Existieren mehrere Pareto-Nash-Gleichgewichte, muss $\mathcal{B}$ raten.

Literatur

Parikh, P. (2001). *Use of Language*. CSLI Publications, Stanford.

Benz, A. et al (2006). An Introduction to Game Theory for Linguists. In Benz, A. et al, eds., *Game Theory and Pragmatics*, Palgrave Macmillan, Hampshire.