Vollständigkeit der Logik geteilten Wissens

Hans Leiß

LMU München, CIS

Seminar Geteiltes Wissen
SS 2008

7.5.2008

Inhalt

Modellklassen $\mathcal{M}_n, \mathcal{M}_n^r, \ldots$, Sprachen $\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n^C$, Allgemeingültigkeit

Axiomensystem K_n und Gültigkeit von $\mathcal{L}_n$-Formeln in $\mathcal{M}_n$

Axiomensysteme und Gültigkeit von $\mathcal{L}_n$-Formeln in $\mathcal{M}_n^r, \ldots, \mathcal{M}_n^{rst}$

Axiomensystem K_n^C und Gültigkeit von $\mathcal{L}_n^C$-Formeln in $\mathcal{M}_n$

Anwendung auf das logische Puzzle (mit 2 Kindern)

Sprachen

- $\mathcal{L}_n(\Phi)$ Sprache mit Formeln

$$\varphi, \psi ::= p(\in \Phi) \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_1\varphi \mid \ldots \mid K_n\varphi$$

- $\mathcal{L}_n^C(\Phi)$ Sprache mit Formeln

$$\varphi, \psi ::= p(\in \Phi) \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_1\varphi \mid \ldots \mid K_n\varphi \mid C\varphi$$

Modellklassen

- $\mathcal{M}_n$: Klasse aller Modelle $M = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi)$ mit $\mathcal{K}_i \subseteq S \times S$ und $\pi : S \rightarrow \Phi \rightarrow \mathbb{B}$
- $\mathcal{M}_n^{rst} \subseteq \mathcal{M}_n$: alle $\mathcal{K}_i$ sind reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Gültigkeit:

1. *in M gilt φ (lokal) in der Welt s*, $(M, s) \models \varphi$, definiert mit Hilfe von

$$(M, s) \models K_i\varphi :\Longleftrightarrow \text{ für alle } t \text{ mit } (s, t) \in \mathcal{K}_i \text{ ist } (M, t) \models \varphi,$$

2. *in M gilt φ (global) in allen Welten*,

$$M \models \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } s \in S \text{ ist } (M, s) \models \varphi,$$

3. *in $\mathcal{M}$ gilt φ allgemein*,

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } M \in \mathcal{M} \text{ ist } M \models \varphi.$$

Beachte: wenn $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \models \varphi$ ist, so auch $\mathcal{M}' \models \varphi$.

Bedeutung von $C\varphi$

- $E\varphi := K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi$
- $E^0\varphi := \varphi$, $E^{k+1}\varphi := E(E^k\varphi)$
- $(M, s) \models C\varphi :\iff$ für alle $k \in \mathbb{N}$: $(M, s) \models E^k\varphi$

Lemma

Sei $\mathcal{E} := \mathcal{K}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_n$ und $\mathcal{C} := \mathcal{E}^+$ die transitive Hülle von $\mathcal{E}$.

$$(M, s) \models E\varphi \iff \textit{für alle } t \textit{ mit } (s, t) \in \mathcal{E} \textit{ ist } (M, t) \models \varphi$$

$$(M, s) \models C\varphi \iff \textit{für alle } t \textit{ mit } (s, t) \in \mathcal{C} \textit{ ist } (M, t) \models \varphi$$

Ein Axiomensystem ist besteht aus einer (effektiv aufzählbaren) Menge von Aussagen, den Axiomen, und Schlußregeln

$$\frac{\varphi_1, \ \dots, \ \varphi_k}{\varphi} \text{ (R)}.$$

Ein Beweis ist eine Folge $\vec{\varphi}$ von Aussagen, die Axiome sind oder aus vorangehenden Folgengliedern nach einer Schlußegeln hervorgehen.

Das Axiomensystem ist korrekt für $\mathcal{M}$, wenn alle seine Axiome in $\mathcal{M}$ allgemeingültig sind und alle seine Schlußregeln die Allgemeingültigkeit übertragen, d.h. für (R)

$$\mathcal{M} \models \varphi_1, \dots, \mathcal{M} \models \varphi_n \Longrightarrow \mathcal{M} \models \varphi$$

Das Axiomensystem ist vollständig für $\mathcal{M}$, wenn jede in $\mathcal{M}$ allgemeingültige Aussage φ einen Beweis $\vec{\psi}\varphi$ hat.

Axiomensystem K_n für die Gültigkeit in $\mathcal{M}_n$

mit Aussagen $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)$ und $K \in \{K_1, \dots, K_n\}$:

A1. (Tautologie) φ,
wenn φ aus einer aussagenlogischen Tautologie entsteht, indem man deren Aussagevariablen durch $\mathcal{L}_n(\Phi)$-Aussagen ersetzt

A2. (Distribution) $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$ (K)

R1. Modus Ponens: $\dfrac{\varphi, \quad (\varphi \to \psi)}{\psi}$ (MP)

R2. Verallgemeinerung: $\dfrac{\varphi}{K\varphi}$ (KG)

Beispiel eines Beweises, als Baum dargestellt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q) \to p}\,(\mathrm{A1})}{K_i((p \wedge q) \to p)}\,(\mathrm{KG}) \qquad \dfrac{}{K_i((p \wedge q) \to p) \to (K_i(p \wedge q) \to K_i p)}\,(\mathrm{A2})}{K_i(p \wedge q) \to K_i p}$$

Korrektheit von K_n bezüglich $\mathcal{M}_n$

Theorem

Jede in K_n beweisbare Aussage ist allgemeingültig in $\mathcal{M}_n$: Ist $K_n \vdash \varphi$, so ist $\mathcal{M}_n \models \varphi$.

Beweis Durch Induktion über die Länge eines Beweises von φ.
Allgemeingültigkeit der Axiome:
A1: selbst machen.
A2: Sei $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$, der Menge aller Welten von M. Um

$$(M, s) \models K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$$

zu zeigen, sei $(M, s) \models K_i(\varphi \to \psi)$ und $(M, s) \models K_i\varphi$. Um $(M, s) \models K_i\psi$ zu zeigen, sei $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Nach den Annahmen ist $(M, t) \models (\varphi \to \psi)$ und $(M, t) \models \varphi$, also auch $(M, t) \models \psi$. Daher gilt ψ in jeder von s $\mathcal{K}_i$-erreichbaren Welt, d.h. $(M, s) \models K_i\psi$.

Korrektheit der Schlußregeln:

- R1 Da $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ die Einsetzung in eine AL-Tautologie ist, haben wir $M \models (\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ für jedes $M \in \mathcal{M}_n$. Daraus folgt, daß $M \models \psi$, wenn $M \models (\varphi \rightarrow \psi)$ und $M \models \varphi$ gelten. Also ist R1 korrekt.
- R2 Sei $M \models \varphi$. Um $M \models K_i\varphi$ zu zeigen, sei $s \in S$ und $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Da φ in M global gilt, ist $(M, t) \models \varphi$; daher $(M, s) \models K_i\varphi$. Da s beliebig war, haben wir $M \models K_i\varphi$. $\square$

Bem. R1 und R2 sind korrekt für jedes $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$. Denn um die Gültigkeit der Konklusion φ in einer Welt M zu zeigen, wurde nur die Gültigkeit der Prämissen *in* M benutzt.

Beachte, daß man für R2 nicht wie für R1 argumentieren kann: die Aussage $\varphi \rightarrow K_i\varphi$ ist i.a. nicht allgemeingültig. Daher ist auch das Deduktionstheorem der Aussagen- und Prädikatenlogik,

$$\text{Ist } \Psi \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \text{ so ist auch } \Psi \vdash \varphi \rightarrow \psi,$$

für die Axiomatisierung K_n der Wissenslogik falsch:

- wir haben $p \vdash K_i p$, aber
- $M \not\models p \rightarrow K_i p$ für die Struktur $M = (\{s,t\}, \mathcal{K}_i, \pi)$ mit $(M,s) \models p$, $(s,t) \in \mathcal{K}_i$, und $(M,t) \models \neg p$.
- wegen der Korrektheit von K_n ist also $\not\vdash p \rightarrow K_i p$.

Vollständigkeit von K_n bezüglich $\mathcal{M}_n$

Die Vollständigkeit zeigt man indirekt: wenn φ nicht beweisbar ist, ist φ nicht allgemeingültig, d.h. $\neg\varphi$ muß in einem (M, s) wahr sein. Man versucht daher, aus φ ein solches (M, s) zu konstruieren.

- Eine Menge F von $\mathcal{L}$-Formeln heißt konsistent, wenn für jedes endliche $E \subseteq F$ die Aussage $\neg \bigwedge E$ nicht beweisbar ist[1].
- Ein konsistentes $F \subseteq \mathcal{L}$ heißt maximal konsistent, wenn für kein $\varphi \in \mathcal{L} \setminus F$ auch $F \cup \{\varphi\}$ konsistent ist.

Mit F ist auch jede Teilmenge von F konsistent.

[1] $\bigwedge \emptyset := \top$

Lemma

Sei AX ein Axiomensystem für eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_n(\Phi)$, die unter $\neg, \wedge$ abgeschlossen ist.

1. *Wenn AX die Axiome $A1$ und die Regel $R1$ umfaßt, gibt es zu jeder konsistenten Menge $F' \subseteq \mathcal{L}$ eine maximal konsistente Obermenge $F \supseteq F'$.*
2. *Ist $F \subseteq \mathcal{L}$ maximal konsistent, so gelten für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$:*
   - 2.1 *Es ist $\varphi \notin F$ genau dann, wenn $\neg\varphi \in F$.*
   - 2.2 *Es ist $(\varphi \wedge \psi) \in F$ genau dann, wenn $\varphi \in F$ und $\psi \in F$.*
   - 2.3 *Ist $\varphi \in F$ und $(\varphi \rightarrow \psi) \in F$, so ist $\psi \in F$.*
   - 2.4 *Ist φ beweisbar, so ist $\varphi \in F$.*

Beweis

1. Sei $\{\, \psi_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}$ eine Aufzählung aller Formeln von $\mathcal{L}$.
   Konstruiere durch

   $$F_0 := F', \qquad F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{\psi_i\} & \text{falls das konsistent ist} \\ F_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

   eine aufsteigende Kette $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_i \subseteq F_{i+1} \subseteq \cdots$ von konsistenten Formelmengen, und wähle

   $$F := \bigcup \{\, F_i \mid i \in \mathbb{N} \,\} \supseteq F'.$$

   - F ist konsistent: für jedes endliche $E \subseteq F$ gibt es große i mit $E \subseteq F_i$, und da F_i konsistent ist, ist $\neg \bigwedge E$ unbeweisbar.
   - F ist maximal konsistent: Angenommen, es gäbe $\varphi = \psi_k \in \mathcal{L} \setminus F$, sodaß $F \cup \{\varphi\}$ konsistent wäre. Da $\varphi \notin F_{k+1}$ ist, kann $F_k \cup \{\varphi\}$ nicht konsistent sein, also auch $F \cup \{\varphi\}$ nicht, entgegen der Annahme. Also ist F maximal konsistent.

2. Wir zeigen nur 2.4: Sei F maximal konsistent und φ beweisbar. Wäre $\varphi \notin F$, so wäre nach 2.1 $\neg\varphi \in F$. Da F konsistent ist, dürfte $\neg \bigwedge\{\neg\varphi\}$, also $\neg\neg\varphi$, nicht beweisbar sein. Aber da φ beweisbar und $(\varphi \to \neg\neg\varphi)$ eine Tautologie ist, ist mit (MP) auch $\neg\neg\varphi$ beweisbar. Also muß $\varphi \notin F$ falsch sein. $\square$

Satz

(Vollständigkeitssatz) Jede in $\mathcal{M}_n$ allgemeingültige Aussage ist in K_n beweisbar: ist $\mathcal{M}_n \models \varphi$, so ist $K_n \vdash \varphi$.

Beweis (indirekt). Angenommen, φ sei nicht beweisbar. Mit φ ist auch $\neg\neg\varphi$ nicht beweisbar, also $\neg\varphi$ konsistent.
Sei $M^c = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi) \in \mathcal{M}_n$ die kanonische Struktur mit

$$
\begin{aligned}
S &:= \{\, V \mid V \subseteq \mathcal{L} \text{ ist maximal konsistent (mit } K_n) \,\}. \\
\pi(V)(p) &:= \begin{cases} \textbf{true}, & \text{falls } p \in V, \\ \textbf{false}, & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathcal{K}_i &:= \{\, (V, W) \in S \times S \mid V/K_i \subseteq W \,\}, \quad \text{mit} \\
& \quad\; V/K_i := \{\, \psi \mid K_i\psi \in V \,\}.
\end{aligned}
$$

In V hält Agent i alle W für möglich, die Erweiterungen dessen sind, was er laut V weiß.

Durch Induktion über den Aufbau von φ sieht man:

$$\text{Für alle } V \in S \text{ gilt:} \quad (M^c, V) \models \varphi \iff \varphi \in V. \tag{1}$$

Da S ein $F \supseteq \{\neg\varphi\}$ enthält, ist $(M^c, F) \models \neg\varphi$, also φ nicht allgemeingültig.

Für $K_i\psi$ betrachten wir die Richtungen von (1) getrennt:

1. $K_i\psi \in V \implies (M^c, V) \models K_i\psi$:
   Ist $K_i\psi \in V$ und $(V, W) \in \mathcal{K}_i$, so ist $\psi \in V/K_i \subseteq W$, und daher induktiv $(M^c, W) \models \psi$.

2. $(M^c, V) \models K_i\psi \implies K_i\psi \in V$:
Sei $(M^c, V) \models K_i\psi$. Für jedes $(V, W) \in \mathcal{K}_i$ ist $(M, W) \models \psi$, also induktiv $\psi \in W$. Das heißt, jedes maximal konsistente $W \supseteq V/K_i$ enthält ψ; folglich ist $V/K_i \cup \{\neg\psi\}$ inkonsistent.

Es gibt also $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V/K_i$ mit $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi)$. Nach A1 und R1 ist $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \to \psi$ und

$$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots \to (\varphi_k \to \psi)\ldots)),$$

und mit R2, A2 und R1 auch

$$\vdash K_i\varphi_1 \to (K_i\varphi_2 \to (\ldots \to (K_i\varphi_k \to K_i\psi)\ldots)).$$

Nach dem Lemma ist diese Formel in V, und nach Wahl der φ_j auch alle $K_i\varphi_j$. Mit $K_i\varphi_j \in V$ und $(K_i\varphi_j \to \chi) \in V$ ist aber $\chi \in V$, nach dem Lemma. Es folgt $K_i\psi \in V$. $\square$

Axiomensysteme für die Gültigkeit in $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$

Für die Allgemeingültigkeit in gewissen Teilklassen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$ braucht man weitere Axiome.

Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)$ und $K \in \{K_1, \ldots, K_n\}$:

A3.	(Wissen/Wahrheit)	$K\varphi \to \varphi$,	(T)
A4.	(Positive Introspektion)	$K\varphi \to KK\varphi$	(4)
A5.	(Negative Introspektion)	$\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$,	(5)
A6.	(Konsistenz)	$\neg K \neg \top$	(D)
A7.	(Symmetrie)	$\varphi \to K\neg K\neg\varphi$	

Die Axiome hängen mit Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelationen $\mathcal{K}_i$ der Modelle zusammen; diese muß man bei der Konstruktion des kanonischen Modells M^c sicherstellen.

Satz

Sei T_n das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A3, und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. T_n ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^r \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven Erreichbarkeitsrelation.

Beweis: Korrektheit: A3 ist allgemeingültig für $\mathcal{M}_n^r$: ist $M \in \mathcal{M}_n^r$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models K_i\varphi$, so ist $(M, t) \models \varphi$ für jedes t mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$, und da $\mathcal{K}_i$ reflexiv ist, gilt das auch für $t = s$.

Vollständigkeit: Das kanonische Modell M^c liegt in $\mathcal{M}_n^r$: Zu zeigen ist, daß $(V, V) \in \mathcal{K}_i$ ist für jedes $V \in S$, d.h. daß $V/K_i \subseteq V$ oder daß für jedes $K_i\varphi \in V$ auch $\varphi \in V$ ist. Da $K_i\varphi \rightarrow \varphi$ nach A3 beweisbar ist, liegt es nach Lemma 3 in jedem V von M^c, und daher mit $K_i\varphi \in V$ auch $\varphi \in V$, wieder nach Lemma 3. $\square$

Satz

Sei $S4_n$ (oder $KT4_n$) das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A3, A4 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $S4_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rt} \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven transitiven Erreichbarkeitsrelationen.

Beweis: (Korrektheit) Allgemeingültigkeit von A4 für $\mathcal{M}_n^{rt}$: Sei $M \in \mathcal{M}_n^{rt}$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models K_i\varphi$. Ist $r \in S$ von s in zwei $\mathcal{K}_i$-Schritten erreichbar, so auch in einem Schritt, da $\mathcal{K}_i$ transitiv ist, also gilt $(M, r) \models \varphi$. Es folgt $(M, s) \models K_iK_i\varphi$.

(Vollständigkeit): $M^c \in \mathcal{M}_n^{rt}$, d.h. alle $\mathcal{K}_i$ von M^c sind reflexiv und transitiv: Nach dem Beweis des vorigen Satzes ist $\mathcal{K}_i$ reflexiv. $\mathcal{K}_i$ ist transitiv: Sei $(U, V) \in \mathcal{K}_i$ und $(V, W) \in \mathcal{K}_i$. Dann ist $U/K_i \subseteq V$ und $V/K_i \subseteq W$. Sei $K_i\varphi \in U$. Nach Lemma 3 liegt das Axiom $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$ in U und somit auch $K_iK_i\varphi \in U$. Folglich ist $K_i\varphi \in U/K_i \subseteq V$, und dann $\varphi \in V/K_i$. Da $K_i\varphi \in U$ beliebig war, ist $U/K_i \subseteq W$ gezeigt, und damit $(U, W) \in \mathcal{K}_i$. $\square$

Eine wichtige Teilklasse von $\mathcal{M}_n$ sind die Kripke-Strukturen, wo alle $\mathcal{K}_i$ Äquivalenzrelationen sind. Ihre Beziehung zu den Axiomen A5 und A6 wird über folgende Eigenschaften von Relationen klar.

Eine Relation $\mathcal{K} \subseteq S \times S$ heißt

- linkstotal, wenn es zu jedem $s \in S$ ein $t \in S$ mit $(s, t) \in \mathcal{K}$ gibt, und
- euklidisch, wenn zu jedem $(r, s), (r, t) \in \mathcal{K}$ auch $(s, t) \in \mathcal{K}$ ist.

Lemma

Für eine Relation $\mathcal{K} \subseteq S \times S$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *$\mathcal{K}$ ist total, symmetrisch und transitiv.*
2. *$\mathcal{K}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*
3. *$\mathcal{K}$ ist reflexiv und euklidisch.*

Satz

Sei $S5_n$ (oder $KT45_n$) das Axiomensystem aus A1, A2, A3, A4, A5 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $S5_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rst} \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven, symmetrischen und transitiven Erreichbarkeitsrelationen.

A5 entspricht der Eigenschaft "euklidisch"

Satz

Sei $KD45_n$ das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A4, A5, A6 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $KD45_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{elt}$ aller Kripke-Strukturen, deren Erreichbarkeitsrelationen euklidisch, linkstotal und transitiv sind.

A6 entspricht der Eigenschaft "linkstotal".

A7 entspricht der Eigenschaft "symmetrisch".

Axiomensystem K_n^C für die Allgemeingültigkeit in $\mathcal{M}_n$

Für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n^C(\Phi)$:

C1. $E\varphi \leftrightarrow (K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi)$

C2. $C\varphi \rightarrow E(\varphi \wedge C\varphi)$

RC1. (Induktion) $$\frac{\varphi \rightarrow E(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \rightarrow C\psi} \text{ (Ind)}$$

Satz

Seien K_n^C, T_n^C, $S4_n^C$, $S5_n^C$ und $KD45_n^C$ die Erweiterungen der Axiomensysteme K_n, T_n, $S4_n$, $S5_n$ und $KD45_n$ um die Axiome C1, C2 und die Regel RC1, jeweils für $\mathcal{L}_n^C(\Phi)$-Formeln.

1. *K_n^C ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n$.*
2. *T_n^C ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^r$.*
3. *$S4_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rt}$.*
4. *$S5_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rst}$.*
5. *$KD45_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{elt}$.*

Beweis: Betrachte $E\varphi$ nur als eine Abkürzung und ignoriere C1. Für $M = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi) \in \mathcal{M}_n$ sei

$$\mathcal{E} := \mathcal{K}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_n \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C} := \mathcal{E}^+.$$

1.a K_n^C ist korrekt für $\mathcal{M}_n$:
Allgemeingültigkeit von C2, d.h. $\mathcal{M}_n \models C\varphi \rightarrow E(\varphi \wedge C\varphi)$.

Sei $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models C\varphi$. Nach Lemma **??** bedeutet $(M, s) \models C\varphi$, daß $(M, r) \models \varphi$ für alle $r \in S$ mit $(s, r) \in \mathcal{C}$.
Um $(M, s) \models K_i(\varphi \wedge C\varphi)$ zu zeigen, sei $t \in S$ mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$.
Wegen $(s, t) \in \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{C}$ gilt $(M, t) \models \varphi$. Für jedes $r \in S$ mit $(t, r) \in \mathcal{C}$ ist $(s, r) \in (\mathcal{K}_i ; \mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$, so daß $(M, r) \models \varphi$ und deshalb auch $(M, t) \models C\varphi$ gilt.
Daher ist $(M, t) \models \varphi \wedge C\varphi$, und folglich $(M, s) \models \mathcal{K}_i(\varphi \wedge C\varphi)$. $\square$

Korrektheit der Regel RC1: Sei $\mathcal{M}_n \models \varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$. Um die Allgemeingültigkeit von $\varphi \to C\psi$ zu zeigen, wähle $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models \varphi$. Mit der Annahme folgt $(M, s) \models E(\psi \wedge \varphi)$.

Sei $(s, t) \in \mathcal{C} = \mathcal{E}^+$, mit einem $\mathcal{E}$-Weg der Länge $n \geq 1$. Wir zeigen $(M, t) \models \psi$ durch Induktion über n. Daraus folgt $(M, s) \models C\psi$.

Für $n = 1$ ist $(s, t) \in \mathcal{E}$, also $(M, t) \models \psi$, da $(M, s) \models E(\psi \wedge \varphi)$.

Für $n = m + 1 > 2$ sei $r \in S$ mit $(s, r) \in \mathcal{E}$ und $(r, t) \in \mathcal{E}^m$. Wegen $(M, s) \models E(\psi \wedge \varphi)$ ist $(M, r) \models \varphi$, und nach Induktionsannahme gilt dann $(M, t) \models \psi$. $\square$

1.b K_n^C ist vollständig für $\mathcal{M}_n$:
Wir zeigen, daß es für jede konsistente Aussage $\chi \in \mathcal{L}_n^C$ ein endliches $M_\chi \in \mathcal{M}_n$ und eine Welt s_χ mit $(M_\chi, s_\chi) \models \chi$ gibt.

Zu $\chi \in \mathcal{L}_n^C$ sei $Sub(\chi)$ die Menge der Teilformeln von

$$\{\chi\} \cup \{\, C\varphi \to E(\varphi \wedge C\varphi) \mid C\varphi \text{ ist Teilformel von } \chi \,\},$$

(mit $E\psi := \bigwedge_{i=1}^n K_i\psi$), und

$$Sub^+(\chi) := Sub(\chi) \cup \{\, \neg\psi \mid \psi \in Sub(\chi) \,\}.$$

Definiere das (endliche!) $M_\chi := (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi)$ durch

$$\begin{aligned}
S &:= Con(\chi) := \{\, V \subseteq Sub^+(\chi) \mid V \text{ ist maximal konsistent} \,\} \\
\mathcal{K}_i &:= \{\, (V, W) \in S \times S \mid V/K_i \subseteq W \,\}, \\
\pi(V)(p) &:= \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in V, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Für s_χ wähle ein $V \in S$ mit $V \supseteq \{\chi\}$.

Durch Induktion über die Teilformeln φ von χ zeigt man:

$$\text{Für alle } V \in S \text{ gilt:} \quad (M, V) \models \varphi \iff \varphi \in V. \tag{2}$$

Wir setzen den Beweis von Satz 1 auf die neuen Formeln fort.

$C\psi \in V \Longrightarrow (M, V) \models C\psi$:

Sei $C\psi \in V$, und $(V, W) \in S \times S$ mit $V = V_0$, $W = V_{m+1}$, und $V_j / K_{i_j} \subseteq V_{j+1}$ für $j \leq m$. Da V maximal konsistent ist, ist das Axiom $C\psi \to E(\psi \wedge C\psi)$ in V, also nach Lemma 3 auch $E(\psi \wedge C\psi) \in V$ und $K_{i_0}(\psi \wedge C\psi) \in V$. Folglich sind $\psi, C\psi \in V/K_{i_0} \subseteq V_1$. Durch Induktion über m folgt: $\psi, C\psi \in W$. Da W maximal konsistent und $|\psi| < |C\psi|$ ist, hat man induktiv nach (2) schon $(M, W) \models \psi$. Damit ist $(M, V) \models C\psi$ gezeigt.

$(M, V) \models C\psi \Longrightarrow C\psi \in V$:

Sei $(M, V) \models C\psi$. Es genügt, eine Aussage φ zu finden mit

$$\vdash \bigwedge V \to \varphi, \tag{3}$$

$$\vdash \varphi \to \bigwedge_{i=1}^{n} K_i(\psi \wedge \varphi) \tag{4}$$

Denn dann ist wegen (4) und RC1 auch

$$\vdash \varphi \to C\psi,$$

also mit (3) auch $\vdash \bigwedge V \to C\psi$. Wäre nun $C\psi \notin V$, so wäre $\neg C\psi \in V$ nach Lemma 3, daher zusammen

$$\vdash \bigwedge V \to C\psi \wedge \neg C\psi.$$

Aber dann wäre V nicht konsistent. Daher muß $C\psi \in V$ sein.

Sei dazu $\mathcal{W} := \{\, W \in S \mid (M, W) \models C\psi \,\}$ und

$$\varphi := \bigvee \{\, \bigwedge W \mid W \in \mathcal{W} \,\}$$

Wegen $V \in \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge V \to \varphi$, also (3). Da die Formel in (4) aussagenlogisch äquivalent zur Konjunktion der Formeln in

$$\text{Beh.}: \quad \vdash \varphi \to K_i(\psi \wedge \varphi) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

ist, genügt es, (5) zu zeigen. Dazu behaupten wir:

(i) Für $W \in \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i\psi$.

(ii) Für $U \notin \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i \neg \bigwedge U$.

(iii) Für $W \in \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i(\psi \wedge \bigwedge\{\, \neg \bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W} \,\})$.

(iv) $\vdash \varphi \leftrightarrow \bigwedge\{\, \neg \bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W} \,\}$.

Aus (iii) und (iv) erhält man $\vdash \bigwedge W \to K_i(\psi \wedge \varphi)$ für alle $W \in \mathcal{W}$, daraus (5).

Beweis von (i):

Wegen $(M, W) \models C\psi$ ist auch $(M, W) \models K_i\psi$. Im Beweis von Satz 1 wurde gezeigt, wie daraus

$$\vdash K_i\varphi_1 \to \ldots \to K_i\varphi_k \to K_i\psi$$

für $W/K_i = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ folgt. Wegen $K_i\varphi_j \in W$ ist natürlich

$$\vdash \bigwedge W \to K_i\varphi_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, k, \tag{6}$$

woraus mit aussagenlogischen Beweisschritten $\vdash \bigwedge W \to K_i\psi$ folgt.

Beweis von (ii):

Wegen $(M, W) \models C\psi$ und $(M, U) \not\models C\psi$ muß $(W, U) \notin \mathcal{K}_i$ sein, also $W/K_i \not\subseteq U$. Daher gibt es ein $K_i\varphi_j \in W$ mit $\varphi_j \notin U$, also $\neg\varphi_j \in U$ nach Lemma 3. Also ist

$$\vdash \bigwedge W \to K_i\varphi_j \quad \text{und} \quad \vdash \bigwedge U \to \neg\varphi_j.$$

Mit aussagenlogischen Schritten und R2 folgt

$$\vdash K_i\varphi_j \to K_i\neg \bigwedge U$$

Zusammen ergibt das die Behauptung $\vdash \bigwedge W \to K_i\neg \bigwedge U$.

Beweis von (iii):

Das folgt aus (i) und (ii) mit $\vdash (K_i\varphi \wedge K_i\psi) \leftrightarrow K_i(\varphi \wedge \psi)$, wozu man die Distributivität A2 und die Regel R2 braucht.

Beweis von (iv):

Sei $\overline{\varphi} := \bigvee\{\bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W}\}$ und $\sigma := \bigvee\{\bigwedge W \mid W \in S\}$. Da die Formel die Einsetzung in eine Tautologie ist, ist

$$\vdash \sigma \leftrightarrow (\varphi \vee \overline{\varphi}),$$

Für $U, W \in S$ mit $U \neq W$ ist $U \cup W \subseteq Sub(\chi)^+$ inkonsistent, also $\vdash \neg(\bigwedge W \wedge \bigwedge U)$. Daraus folgt mit den De Morgan'schen Regeln der Aussagenlogik, daß

$$\vdash \neg(\varphi \wedge \overline{\varphi}).$$

Wenn wir $\vdash \sigma$ zeigen können, erhalten wir $\vdash (\varphi \vee \overline{\varphi})$, zusammen also $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\overline{\varphi}$, was AL-äquivalent zur Behauptung (iv) ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\vdash \sigma$. Wegen

$$\vdash \bigvee\{\,\bigwedge W \mid W \in S\,\} \leftrightarrow \neg \bigwedge\{\,\neg \bigwedge W \mid W \in S\,\}$$

bedeutet $\vdash \sigma$, daß $\Psi := \{\,\neg \bigwedge W \mid W \in S\,\}$ inkonsistent ist. Angenommen, Ψ wäre konsistent. Bis auf AL-Umformungen ist Ψ eine Menge von Disjunktionen, denn

$$\vdash \neg \bigwedge W \leftrightarrow \bigvee\{\,\neg\psi \mid \psi \in W\,\}.$$

Für $(\chi_1 \vee \chi_2) \in \Psi$ ist $\Psi \cup \{\chi_1\}$ oder $\Psi \cup \{\chi_2\}$ konsistent.
Zu jedem $W \in S$ gibt es also ein $\psi_W \in W$, so daß
$\Psi \cup \{\,\neg\psi_W \mid W \in S\,\}$ konsistent ist und

$$\{\,\neg\psi_W \mid W \in S\,\} \subseteq \mathit{Sub}^+(\chi)$$

zu einem maximal konsistenem $V \in S$ erweitert werden kann. Aber dann wäre $\psi_V \in V$ und $\neg\psi_V \in V$, also V inkonsistent. Daher muß Ψ inkonsistent, also σ beweisbar sein. $\square$

Beispiel (in $K^C_{A,B}$, *ohne* Axiom $A3$ oder $C\varphi \to \varphi$)

Für $i \in \{A, B\}$ sei p_i die Aussage, daß Kind i schmutzig ist. A argumentiert intuitiv wie folgt: B weiß nicht, ob p_B, weiß aber, daß $(p_A \vee p_B)$. Wäre $\neg p_A$, so wüßte B das, also wüßte B sogar p_B. Da er das aber nicht weiß, muß $\neg p_A$ falsch, also p_A wahr sein.

1. Jeder gibt an, nicht zu wissen, ob er schmutzig ist; also ist es geteiltes Wissen, daß niemand weiß, ob er selber schmutzig ist:

$$C(\neg K_A p_A \wedge \neg K_A \neg p_A) \wedge C(\neg K_B p_B \wedge \neg K_B \neg p_B), \tag{7}$$

2. Da alle einander ansehen, ist es geteiltes Wissen, daß jeder weiß, daß die anderen wissen, ob er schmutzig ist; schwächer:

$$C(\neg p_A \to K_B \neg p_A) \wedge C(\neg p_B \to K_A \neg p_B). \tag{8}$$

3. Die Aussage des Vaters macht es zum geteilten Wissen, daß mindestens ein Kind schmutzig ist: (und macht (7) falsch!)

$$C(p_A \vee p_B) \tag{9}$$

Wir haben (weil die Zeit ignoriert wurde)

$$K_A(K_B(p_A \vee p_B)) \qquad \text{(nach 9)} \tag{10}$$

$$K_A(\neg p_A \rightarrow K_B \neg p_A) \qquad \text{(nach 8)} \tag{11}$$

$$K_A(\neg p_A \rightarrow K_B p_B) \qquad \text{(nach 10,11,D)} \tag{12}$$

$$K_A(\neg K_B p_B) \qquad \text{(nach 7)} \tag{13}$$

$$K_A p_A. \qquad \text{(nach } 12, 13\text{)} \tag{14}$$

Mit K_B statt K_A erhält man Ep_A, analog Ep_B, also $E(p_A \wedge p_B)$.
Ist $C\varphi$ die Zusammenfassung von (7) – (9), so wurde

$$\vdash C\varphi \rightarrow E(p_A \wedge p_B)$$

gezeigt. Nach (C 1) ist $C\varphi \rightarrow E(\varphi \wedge C\varphi)$, also

$$\vdash C\varphi \rightarrow E((p_A \wedge p_B) \wedge C\varphi),$$

und durch Anwenden von (RC 1) ergibt das

$$\vdash C\varphi \rightarrow C(p_A \wedge p_B).$$

Literatur:

R.Fagin, J.Y.Halpern, Y.Moses, M.Y.Vardi.
Reasoning about Knowledge. Chapter 3
MIT Press 2003.