Vollständige Axiomatisierung der Wissenslogik

Seminar „Logik des geteilten Wissens“
SS 2006, CIS, Universität München
Hans Leiß

1.6.2006, leicht ergänzt 2.6.2008

Um über das Wissen einzelner Agenten oder ihr geteiltes Wissen sichere Aussagen treffen oder argumentieren zu können, braucht man eine Reihe von allgemein gültigen, also auf alle Situationen und Agenten zutreffenden, Aussagen, sowie Schlußregeln, die von gültigen Aussagen wieder zu gültigen Aussagen führen.

1 Formeln, Modelle, Allgemeingültigkeit

Sei Φ eine abzählbare Menge von atomaren Aussagen, aus denen die Formeln der Sprache $\mathcal{L}_n(\Phi)$ nach der Grammatik

$$\varphi, \psi \ := \ p \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_1\varphi \mid \ldots \mid K_n\varphi$$

gebildet werden, wobei p über Φ läuft. Mit $\mathcal{L}_n^C(\Phi)$ sind die entsprechend durch

$$\varphi, \psi \ := \ p \mid \top \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_1\varphi \mid \ldots \mid K_n\varphi \mid C\varphi$$

gebildeten Formeln gemeint, die zusätzlich den Operator C (für *es ist geteiltes Wissen der Agenten, daß*) erlauben. Dessen Bedeutung wird durch

$$C\varphi = \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} E^k\varphi \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} E^0\varphi := \varphi, \quad E^{k+1}\varphi := E(E^k\varphi), \\ E\psi := K_1\psi \wedge \cdots \wedge K_n\psi \end{array}$$

auf die Bedeutung der Operatoren K_i (für *Agent i weiß, daß*) zurückgeführt.

Als Interpretationen oder *Modelle* M werden Strukturen der Form

$$M = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi)$$

erlaubt, mit eine Menge S von Welten (oder Situationen, Alternativen), einer Belegung $\pi : S \to (\Phi \to \mathbb{B})$, die jeder Grundaussage $p \in \Phi$ relativ zu einer Welt $s \in S$ einen Wahrheitswert $\pi(s)(p) \in \mathbb{B} = \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ zuordnet, und den Erreichbarkeitsrelationen $\mathcal{K}_i \subseteq S \times S$, wobei $(s,t) \in \mathcal{K}_i$ besagt, daß Agent i in der Situation s die Situation t als Möglichkeit in Betracht zieht.

Sei $\mathcal{M}_n$ die Klasse all solcher Strukturen M, und $\mathcal{M}$ eine Teilklasse von $\mathcal{M}_n$, etwa die Teilklasse $\mathcal{M}_n^{rst}$ all der $M \in \mathcal{M}_n$ deren Relationen $\mathcal{K}_i$ alle reflexiv, symmetrisch und transitiv sind.

Bei der Gültigkeit von Aussagen muß man verschiedene Grade unterscheiden:

(i) *in M gilt φ (lokal) in der Welt s*, $(M,s) \models \varphi$, definiert mit Hilfe von

$$(M,s) \models K_i\varphi :\Longleftrightarrow \text{ für alle } t \text{ mit } (s,t) \in \mathcal{K}_i \text{ ist } (M,t) \models \varphi,$$

(ii) *in M gilt φ (global) in allen Welten*,

$$M \models \varphi \ :\Longleftrightarrow \ \text{ für alle } s \in S \text{ ist } (M,s) \models \varphi,$$

(iii) *in $\mathcal{M}$ gilt φ allgemein*,

$$\mathcal{M} \models \varphi \ :\Longleftrightarrow \ \text{ für alle } M \in \mathcal{M} \text{ ist } M \models \varphi.$$

Was die für $\mathcal{M}$ allgemeingültigen Aussagen sind, hängt natürlich von $\mathcal{M}$ ab, und offenbar monoton fallend: wenn $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \models \varphi$ ist, so auch $\mathcal{M}' \models \varphi$.

2 Axiome und Schlußregeln

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache (Menge von Formeln). Ein *Axiomensystem AX* besteht aus einer (effektiv aufzählbaren) Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen, den *Axiomen*, und *Schlußregeln* der Form

$$\frac{\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_k}{\varphi} \text{ (R)}, \tag{1}$$

mit $\mathcal{L}$-Aussagen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$. Eine solche Regel erlaubt, aus (angenommenen oder schon bewiesenen) Aussagen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ zur Aussage φ überzugehen.

Die Schlußregel (1) ist *korrekt* für die Klasse $\mathcal{M}$, wenn sie von $\mathcal{M}$-allgemeingültigen Aussagen zu einer $\mathcal{M}$-allgemeingültigen Aussage führt, d.h. wenn gilt:

$$\text{Ist } \mathcal{M} \models \varphi_1 \text{ und } \ldots \text{ und } \mathcal{M} \models \varphi_k, \text{ so auch } \mathcal{M} \models \varphi.$$

Ein *Beweis* von ψ aus Ψ ist eine Folge $\psi_1, \ldots, \psi_m$ von Aussagen, die in $\psi_m = \psi$ endet und deren Elemente ψ_i aus Ψ stammen, oder Axiome sind, oder zu denen man aus Aussagen ψ_j mit $j < i$ auf Grund einer Schlußregel übergehen darf. Man schreibt $\Psi \vdash \psi$ für: *ψ ist aus Ψ beweisbar*, d.h. wenn es einen Beweis von ψ aus Ψ gibt.

Ein Axiomensystem ist *korrekt* für $\mathcal{M}$, wenn alle seine Axiome in $\mathcal{M}$ allgemeingültige Aussagen und alle seine Schlußregeln für $\mathcal{M}$ korrekt sind.

Eine Menge F von $\mathcal{L}$-Formeln heißt *konsistent* (mit dem Axiomensytem AX), wenn für jede endliche Teilmenge $E \subseteq F$ die Aussage $\neg \bigwedge E$ nicht beweisbar ist, wobei $\bigwedge \emptyset := \top$. Die Menge $F \subseteq \mathcal{L}$ heißt *maximal konsistent*, wenn F konsistent ist, aber für kein $\varphi \in \mathcal{L} - F$ auch $F \cup \{\varphi\}$ konsistent ist. Beachte, daß mit F auch jede Teilmenge von F konsistent ist.

Am einfachsten ist es, wenn man zuerst die Gültigkeit für beliebige Erreichbarkeitsrelationen betrachtet. Für die Gültigkeit für besondere Erreichbarkeitsrelationen, z.B. Äquivalenzrelationen, kann man das Axiomensystem und die Beweise dann anpassen.

2.1 Axiomensystem K_n für die Gültigkeit in $\mathcal{M}_n$

Axiome und Schlußregeln von K_n sind folgende, für Aussagen $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)$ und $K \in \{K_1, \ldots, K_n\}$:

A1. (Tautologie) φ, wenn es aus einer aussagenlogischen Tautologie entsteht, indem man deren Aussagevariablen (konsistent) durch Aussagen aus $\mathcal{L}_n(\Phi)$ ersetzt

A2. (Distribution) $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$ (K)

R1. Modus Ponens: $\dfrac{\varphi, \quad (\varphi \to \psi)}{\psi}$ (MP)

R2. Verallgemeinerung: $\dfrac{\varphi}{K\varphi}$ (KG)

Das Distributionsaxiom ist hier etwas anders als bei Fagin u.a.[1] formuliert, damit sein Name verständlich wird.

Beispiel eines Beweises, als Baum dargestellt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(p \wedge q) \to p}\,(\text{A1})}{K_i((p \wedge q) \to p)}\,(\text{KG}) \qquad \dfrac{}{K_i((p \wedge q) \to p) \to (K_i(p \wedge q) \to K_i p)}\,(\text{A2})}{K_i(p \wedge q) \to K_i p}\,(\text{MP})$$

2.1.1 Korrektheit (Soundness)

Satz 2.1 Jede in K_n beweisbare Aussage ist allgemeingültig in $\mathcal{M}_n$: Ist $K_n \vdash \varphi$, so ist $\mathcal{M}_n \models \varphi$.

Beweis: Man muß die Allgemeingültigkeit der Axiome und die Korrektheit der Regeln bezüglich $\mathcal{M}_n$ zeigen. Durch Induktion über die Länge eines Beweises $\psi_1, \ldots, \psi_k$ folgt dann, daß jede beweisbare Formel ψ_k allgemeingültig ist.

A1: Da φ aus einer aussagenlogischen Tautologie durch Einsetzung entsteht, gilt $(M, s) \models \varphi$ für jedes $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$, also auch $M \models \varphi$ für jedes $M \in \mathcal{M}_n$.

A2: Sei $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$, der Menge aller Welten von M. Um

$$(M, s) \models K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$$

zu zeigen, können wir annehmen, daß $(M, s) \models K_i(\varphi \to \psi)$ und $(M, s) \models K_i\varphi$. Um $(M, s) \models K_i\psi$ zu zeigen, sei $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Nach den beiden Annahmen haben wir dann $(M, t) \models (\varphi \to \psi)$ und $(M, t) \models \varphi$, also auch $(M, t) \models \psi$. Daher gilt ψ in jeder von s $\mathcal{K}_i$-erreichbaren Welt; und das heißt, $(M, s) \models K_i\psi$.

R1: Da $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ (die Einsetzung in) eine aussagenlogische Tautologie ist, haben wir $M \models (\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ für jedes $M \in \mathcal{M}_n$. Daraus folgt aber, daß $M \models \psi$, wenn $M \models (\varphi \to \psi)$ und $M \models \varphi$ gelten. Also ist R1 korrekt.

R2: Sei $M \models \varphi$. Um $M \models K_i\varphi$ zu zeigen, sei $s \in S$ und $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Da φ in M global gilt, ist $(M, t) \models \varphi$; daher $(M, s) \models K_i\varphi$. Da s beliebig war, haben wir $M \models K_i\varphi$. (Kurz: unter der Annahme, daß φ in M global gilt, gilt es in allen Alternativen einer beliebigen Welt, also gilt auch $K_i\varphi$ global.) □

Bemerkung 2.2 Die Regeln R1 und R2 sind korrekt für jede Teilklasse $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$. Denn im obigen Beweis wird, um die Gültigkeit der Konklusion φ in einer Welt M zu zeigen, nur die Gültigkeit der Prämissen *in* M benutzt.

Beachte, daß man für R2 nicht wie für R1 argumentieren kann: die Aussage $\varphi \to K_i\varphi$ ist i.a. nicht allgemeingültig. Daher ist auch das Deduktionstheorem der Aussagen- und Prädikatenlogik,

$$\text{Ist } \Psi \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \text{ so ist auch } \Psi \vdash \varphi \to \psi,$$

für die Axiomatisierung K_n der Wissenslogik falsch: wir haben $p \vdash K_ip$, aber $M \not\models p \to K_ip$ für die Struktur $M = (\{s, t\}, \mathcal{K}_i, \pi)$ mit $(M, s) \models p$, $(s, t) \in \mathcal{K}_i$, und $(M, t) \models \neg p$. Und da wir gerade die Korrektheit des Axiomensystems gezeigt haben, kann deshalb auch $\vdash p \to K_ip$ nicht der Fall sein.

2.1.2 Vollständigkeit

Die Vollständigkeit eines Axiomensystems besagt, daß alle Aussagen, die allgemeingültig sind, auch beweisbar sind. Das zeigt man oft indirekt: wenn eine Aussage φ nicht beweisbar ist, kann sie nicht allgemeingültig sein, d.h. $\neg\varphi$ muß erfüllbar sein; man versucht daher, aus der unbeweisbaren Aussage φ ein $M \in \mathcal{M}$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models \neg\varphi$ zu konstruieren.

Lemma 2.3 Sei AX ein Axiomensystem für eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_n(\Phi)$, die unter $\neg$, $\wedge$ abgeschlossen ist.

(i) Wenn AX die Axiome $A1$ und die Regel $R1$ umfaßt, gibt es zu jeder konsistenten Menge $F' \subseteq \mathcal{L}$ eine maximal konsistente Obermenge $F \supseteq F'$.

(ii) Ist F eine maximal konsistente Formelmenge, so gelten für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$:

(a) Es ist $\varphi \notin F$ genau dann, wenn $\neg\varphi \in F$.

(b) Es ist $(\varphi \wedge \psi) \in F$ genau dann, wenn $\varphi \in F$ und $\psi \in F$.

(c) Ist $\varphi \in F$ und $(\varphi \to \psi) \in F$, so ist $\psi \in F$.

(d) Ist φ beweisbar, so ist $\varphi \in F$.

Beweis: (i) Da $\mathcal{L}$ nur abzählbar viele Formeln hat, gibt es eine Aufzählung $\{\, \psi_i \mid i \in \mathbb{N} \,\} = \mathcal{L}$ aller Formeln von $\mathcal{L}$. Damit 'konstruieren' wir eine aufsteigende Kette

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_i \subseteq F_{i+1} \subseteq \cdots$$

von konsistenten Formelmengen durch

$$F_0 := F', \qquad F_{i+1} := \begin{cases} F_i \cup \{\psi_{i+1}\} & \text{falls das konsistent ist} \\ F_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere die gesuchte Obermenge von F' durch

$$F := \bigcup \{\, F_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}.$$

F ist konsistent, denn für jedes endliche $E \subseteq F$ gibt es große i mit $E \subseteq F_i$, und da F_i konsistent ist, ist $\neg \bigwedge E$ nicht beweisbar.

F ist maximal konsistent: Angenommen, es gäbe $\varphi \notin F$, sodaß $F \cup \{\varphi\}$ konsistent wäre. Zu $\varphi \in \mathcal{L}$ gibt es (o.B.d.A.) ein k mit $\varphi = \psi_{k+1}$. Da $\varphi \notin F_{k+1}$ ist, kann $F_k \cup \{\varphi\}$ nicht konsistent sein; also kann auch $F \cup \{\varphi\}$ nicht konsistent sein, entgegen der Annahme. Daher ist diese falsch, und damit F maximal konsistent.

(ii) Wir zeigen den letzten Teil: Sei F maximal konsistent und φ beweisbar. Wäre $\varphi \notin F$, so wäre nach (ii) (a) $\neg\varphi \in F$. Da F konsistent ist, dürfte $\neg \bigwedge\{\neg\varphi\}$, also $\neg\neg\varphi$, nicht beweisbar sein. Aber da φ beweisbar und $(\varphi \to \neg\neg\varphi)$ eine Tautologie ist, ist mit (MP) auch $\neg\neg\varphi$ beweisbar. Also muß $\varphi \notin F$ falsch sein. $\square$

Satz 2.4 (Vollständigkeitssatz) Jede in $\mathcal{M}_n$ allgemeingültige Aussage ist in K_n beweisbar: ist $\mathcal{M}_n \models \varphi$, so ist $K_n \vdash \varphi$.

Beweis: Das zeigt man, wie gesagt, indirekt. Angenommen, φ sei nicht beweisbar. Um zu zeigen, daß φ dann nicht allgemeingültig ist, muß man ein $M \in \mathcal{M}_n$ und eine Welt s von M finden, in der φ nicht wahr ist, wo also $(M, s) \models \neg\varphi$.

Es ist klar, daß mit φ auch $\neg\neg\varphi$ nicht beweisbar, also $\neg\varphi$ konsistent ist. Statt für die spezielle konsistente Menge $F = \{\neg\varphi\}$ ein (M, s) anzugeben, wo alle Formeln aus F wahr sind, zeigt man viel mehr:

Beh. Es gibt eine 'kanonische' Struktur $M^c = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi) \in \mathcal{M}_n$, in der S aus den maximal konsistenten $V \subseteq \mathcal{L}_n$ besteht, so daß für alle Formeln $\varphi \in \mathcal{L}$:

$$\text{Für alle } V \in S \text{ gilt:} \quad (M^c, s_V) \models \varphi \iff \varphi \in V. \tag{2}$$

Als mögliche Welten nimmt man die maximal konsistenten Formelmengen:

$$S := \{\, V \mid V \subseteq \mathcal{L} \text{ ist maximal konsistent (mit } K_n) \,\}.$$

Die Auswertung von atomaren Formeln erfolgt 'durch Nachsehen' in der Welt:

$$\pi(V)(p) := \begin{cases} \textbf{true}, & \text{falls } p \in V, \\ \textbf{false}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Welt V hält Agent i alle Welten für möglich, die Erweiterungen dessen sind, was er laut V weiß:

$$\mathcal{K}_i := \{\, (V, W) \in S \times S \mid V/K_i \subseteq W \,\}, \quad \text{mit } V/K_i := \{\, \psi \mid K_i\psi \in V \,\}.$$

Durch Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir (2), mit $s_V := V$. Für atomare φ ist (2) nach Definition von π klar. Für $\neg\varphi$ und für $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ erhält man es aus der Induktionsannahme und dem vorigen Lemma. Für $K_i\psi$ betrachten wir die Richtungen von (2) getrennt:

(i) $K_i\psi \in V \implies (M^c, V) \models K_i\psi$:

Ist $K_i\psi \in V$ und $(V, W) \in \mathcal{K}_i$, so ist $\psi \in V/K_i \subseteq W$, und daher nach Induktionsannahme auch $(M^c, W) \models \psi$. Daher gilt $(M^c, V) \models K_i\psi$.

(ii) $(M^c, V) \models K_i\psi \implies K_i\psi \in V$:

Sei $(M^c, V) \models K_i\psi$. Für jedes $(V, W) \in \mathcal{K}_i$ ist dann $(M, W) \models \psi$, also nach Induktionsannahme $\psi \in W$. Das heißt, jede maximal konsistente Erweiterung W von V/K_i enthält ψ; folglich ist $V/K_i \cup \{\neg\psi\}$ nicht konsistent. Daher gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V/K_i$, so daß $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \wedge \neg\psi)$. Nach A1 und R1 ist dann auch $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \to \psi$ und

$$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots \to (\varphi_k \to \psi) \ldots)),$$

und daher mit R2, A2 und R1 auch

$$\vdash K_i\varphi_1 \to (K_i\varphi_2 \to (\ldots \to (K_i\varphi_k \to K_i\psi) \ldots)).$$

Nach dem vorigen Lemma ist diese Formel in V, und nach Wahl der φ_j auch alle $K_i\varphi_j$. Mit $K_i\varphi_j \in V$ und $(K_i\varphi_j \to \chi) \in V$ ist aber $\chi \in V$, nach dem vorigen Lemma. Also folgt $K_i\psi \in V$, was zu zeigen war.

$\square$

2.2 Axiomensysteme für die Gültigkeit in $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$

Was muß man tun, um die Allgemeingültigkeit für Teilklassen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_n$ zu charakterisieren? Wenn man sich auf Erreichbarkeitsrelationen mit bestimmten Eigenschaften beschränkt, sind i.a. weitere Aussagen allgemeingültig, und weitere Schlußregeln korrekt.

Solange C nicht benutzt wird, kommt man mit den bisherigen Schlußregeln aus. Man braucht aber zusätzliche Axiome und muß daher bei der Konstruktion des kanonischen Modells M^c dafür sorgen, daß auch diese in M^c gelten.

Die folgenden Axiome sind jeweils für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n(\Phi)$ und $K \in \{K_1, \dots, K_n\}$ gemeint:

A3.	(Wissen/Wahrheit)	$K\varphi \to \varphi$,	(T)
A4.	(Positive Introspektion)	$K\varphi \to KK\varphi$	(4)
A5.	(Negative Introspektion)	$\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$,	(5)
A6.	(Konsistenz)	$\neg K \neg \top$	(D)
A7.	(Symmetrie)	$\varphi \to K\neg K\neg\varphi$	

Verschiedene dieser Axiome hängen mit bestimmten Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelationen $\mathcal{K}_i$ der Modelle zusammen.

Satz 2.5 Sei T_n das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A3, und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. T_n ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^r \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven Erreichbarkeitsrelation.

Beweis: Korrektheit: Wegen $\mathcal{M}_n^r \subseteq \mathcal{M}_n$ sind A1 und A2 allgemeingültig für $\mathcal{M}_n^r$. Auch A3 ist allgemeingültig für $\mathcal{M}_n^r$: ist $M \in \mathcal{M}_n^r$ und $s \in S$ mit $(M, s) \models K_i\varphi$, so ist $(M, t) \models \varphi$ für jedes t mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$, und da $\mathcal{K}_i$ reflexiv ist, ist s selbst ein solches t; also gilt $(M, s) \models \varphi$.

Die Schlußregeln R1 und R2 sind nach Bemerkung 2.2 auch für $\mathcal{M}_n^r$ korrekt.

Vollständigkeit: Man konstruiert wie im Beweis von Satz 2.4 ein kanonisches Modell M^c aus den maximal konsistenten Formelmengen V, nur daß man hier die Konsistenz mit T_n statt mit K_n meint.

Zu zeigen bleibt, daß $M^c \in \mathcal{M}_n^r$ liegt, also jedes $\mathcal{K}_i$ reflexiv ist: Sei $V \in S$ eine maximal konsistente Menge. Wir müssen zeigen, daß $(V, V) \in \mathcal{K}_i$ ist, und das heißt, daß $V/K_i \subseteq V$ oder daß für jedes $K_i\varphi \in V$ auch $\varphi \in V$ ist. Da jedes $K_i\varphi \to \varphi$ ein Axiom, also beweisbar ist, liegt es nach Lemma 2.3 in jeder Welt V von M^c, und daher mit $K_i\varphi \in V$ auch $\varphi \in V$, wieder nach Lemma 2.3. □

Satz 2.6 Sei $S4_n$ (oder $KT4_n$) das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A3, A4 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $S4_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rt} \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven transitiven Erreichbarkeitsrelationen.

Beweis: Korrektheit: Es genügt nach Bemerkung 2.2 und Satz 2.5, die Korrektheit von A4 für $\mathcal{M}_n^{rt}$ zu zeigen. Sei $M \in \mathcal{M}_n^{rt}$ und $s \in S$ mit $(M,s) \models K_i\varphi$. Sei $r \in S$ von s in zwei $\mathcal{K}_i$-Schritten erreichbar, also $(s,t) \in \mathcal{K}_i$ und $(t,r) \in \mathcal{K}_i$ für ein geeignetes $t \in S$. Da $\mathcal{K}_i$ transitiv ist, ist $(s,r) \in \mathcal{K}_i$, und nach der Annahme also $(M,r) \models \varphi$. Da das für jedes solche r gilt, haben wir $(M,s) \models K_iK_i\varphi$.

Vollständigkeit: Sei M^c das wie im Beweis von Satz 2.4 konstruierte kanonische Modell, wobei jetzt die Konsistenz mit $S4_n$ statt der mit K_n benutzt wird. Zu zeigen bleibt, daß $M^c \in \mathcal{M}_n^{rt}$, daß M^c also nur reflexive transitive Erreichbarkeitsrelationen $\mathcal{K}_i$ hat. Nach dem Beweis des vorigen Satzes ist $\mathcal{K}_i$ reflexiv.

$\mathcal{K}_i$ ist transitiv: Sei $(U,V) \in \mathcal{K}_i$ und $(V,W) \in \mathcal{K}_i$. Dann ist $U/K_i \subseteq V$ und $V/K_i \subseteq W$. Sei $K_i\varphi \in U$. Da nach Lemma 2.3 jede beweisbare Aussage, also auch das Axiom $K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$, in jeder maximal konsistenten Formelmenge liegt, ist $(K_i\varphi \to K_iK_i\varphi) \in U$. Wieder nach Lemma 2.3 ist daher $K_iK_i\varphi \in U$. Folglich ist $K_i\varphi \in U/K_i \subseteq V$, und dann $\varphi \in V/K_i$. Da $K_i\varphi \in U$ beliebig war, ist $U/K_i \subseteq W$ gezeigt, und damit $(U,W) \in \mathcal{K}_i$. □

Eine wichtige Teilklasse von $\mathcal{M}_n$ sind die Kripke-Strukturen, wo alle $\mathcal{K}_i$ Äquivalenzrelationen, also reflexiv, symmetrisch und transitiv sind. Der direkte Bezug zu den Axiomen A5 und A6 wird klarer, wenn man die folgenden Eigenschaften von Relationen benutzt.

Eine Relation $\mathcal{K} \subseteq S \times S$ heißt *(links)total* (oder *seriell*), wenn es zu jedem $s \in S$ ein $t \in S$ mit $(s,t) \in \mathcal{K}$ gibt. $\mathcal{K}$ heißt *euklidisch*, wenn zu jedem Paar $(r,s),(r,t) \in \mathcal{K}$ mit gemeinsamer erster Komponente auch $(s,t) \in \mathcal{K}$ ist.

Lemma 2.7 Für eine Relation $\mathcal{K} \subseteq S \times S$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{K}$ ist total, symmetrisch und transitiv.

(ii) $\mathcal{K}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(iii) $\mathcal{K}$ ist reflexiv und euklidisch.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathcal{K}$ ist reflexiv: Sei $s \in S$. Da $\mathcal{K}$ total ist, gibt es ein t mit $(s,t) \in \mathcal{K}$, und da $\mathcal{K}$ symmetrisch ist, ist auch $(t,s) \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ transitiv ist, folgt $(s,s) \in \mathcal{K}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\mathcal{K}$ ist euklidisch: Seien $(r,s) \in \mathcal{K}$ und $(r,t) \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ symmetrisch ist, ist $(s,r) \in \mathcal{K}$, und da es auch transitiv ist, folgt $(s,t) \in \mathcal{K}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\mathcal{K}$ ist total, da es reflexiv ist.

$\mathcal{K}$ ist symmetrisch: Sei $(r,s) \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ reflexiv ist, ist $(r,r) \in \mathcal{K}$, und da es euklidisch ist, folgt $(s,r) \in \mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ ist transitiv: Seien $(r,s) \in \mathcal{K}$ und $(s,t) \in \mathcal{K}$. Da $\mathcal{K}$ symmetrisch ist, ist $(s,r) \in \mathcal{K}$, und da es euklidisch ist, folgt $(r,t) \in \mathcal{K}$. □

Satz 2.8 Sei $S5_n$ (oder $KT45_n$) das Axiomensystem aus A1, A2, A3, A4, A5 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $S5_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rst} \subseteq \mathcal{M}_n$ aller Kripke-Strukturen mit reflexiven, symmetrischen und transitiven Erreichbarkeitsrelationen.

Beweis: Korrektheit: Wegen $\mathcal{M}_n^{rst} \subseteq \mathcal{M}_n^{rt}$, Bemerkung 2.2 und Satz 2.6 genügt es zu zeigen, daß A5 in jedem $M \in \mathcal{M}_n^{rst}$ global gilt. Sei $r \in S$. Um

$$(M, r) \models \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi \tag{3}$$

zu zeigen, nehmen wir an, daß $(M, r) \models \neg K_i\varphi$, also $(M, t) \not\models \varphi$ für mindestens ein $t \in S$ mit $(r, t) \in \mathcal{K}_i$. Um $(M, r) \models K_i\neg K_i\varphi$ zu zeigen, sei $(r, s) \in \mathcal{K}_i$. Da $\mathcal{K}_i$ nach Lemma 2.7 euklidisch ist, ist $(s, t) \in \mathcal{K}_i$ und daher $(M, s) \models \neg K_i\varphi$ wegen $(M, t) \not\models \varphi$. Da das für jedes solche s gilt, ist $(M, r) \models K_i\neg K_i\varphi$ gezeigt.

Vollständigkeit: Nach Lemma 2.7 und Satz 2.6 genügt es zu zeigen, daß im kanonschen Modell M^c (bezüglich S5) die Erreichbarkeitsrelationen $\mathcal{K}_i$ euklidisch sind. Seien also $(U, V), (U, W) \in \mathcal{K}_i$. Um $(V, W) \in \mathcal{K}_i$ zu zeigen, also $V/K_i \subseteq W$, sei $K_i\varphi \in V$. Wegen $(U, V) \in \mathcal{K}_i$ ist daher $\neg K_i\neg K_i\varphi \in U$. Die zum Axiom A5 äquivalente Aussage $\neg K_i\neg K_i\varphi \to K_i\varphi$ liegt nach Lemma 2.3 ebenfalls in U, und folglich ist auch $K_i\varphi \in U$, also $\varphi \in U/K_i \subseteq W$ wegen $(U, W) \in \mathcal{K}_i$. Das zeigt insgesamt, daß $V/K_i \subseteq W$, also $(V, W) \in \mathcal{K}_i$ ist. □

Satz 2.9 Sei $KD45_n$ das Axiomensystem aus den Axiomen A1, A2, A4, A5, A6 und den Regeln R1 und R2 für $\mathcal{L}_n$-Formeln. $KD45_n$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{elt}$ aller Kripke-Strukturen, deren Erreichbarkeitsrelationen euklidisch, (links)total und transitiv sind.

Beweis: Korrektheit: Wegen $\mathcal{M}_n^{elt} \subseteq \mathcal{M}_n$ sind die Axiome A1 und A2 allgemeingültig und die Regeln R1 und R2 korrekt für $\mathcal{M}_n^{elt}$. Da in jedem $M \in \mathcal{M}_n^{elt}$ die $\mathcal{K}_i$ transitiv und euklidisch sind, sind A4 und A5 allgemeingültig. Da $\mathcal{K}_i$ in M linkstotal ist, gibt es zu jedem $s \in S$ ein $t \in S$ mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$, und da $(M, t) \models \top$ ist, folgt $(M, s) \models \neg K_i\neg\top$; also ist A6 allgemeingültig in $\mathcal{M}_n^{elt}$.

Vollständigkeit: Nach früheren Sätzen sind die Erreichbarkeitsrelationen im kanonischen Modell M^c (bezüglich $KD45_n$) wegen A4 und A5 transitiv und euklidisch. Bleibt zu zeigen, daß sie auch linkstotal sind: Sei S die Menge der Welten von M^c und $V \in S$. Es genügt zu zeigen, daß V/K_i konsistent ist, denn dann gibt es $V/K_i \subseteq W \in S$, und W als maximal konsistente Menge enthält $\top$. Wäre V/K_i inkonsistent, so gäbe es eine endliche Menge $E \subseteq V/K_i$ mit $\vdash \neg \bigwedge E$, oder $\vdash \bigwedge E \to \neg\top$. Da V maximal konsistent ist, folgt $(K_i \bigwedge E \to K_i\neg\top) \in V$, nach Lemma 2.3, und mit $E \subseteq V/K_i$ auch $K_i \bigwedge E \in V$, also $K_i\neg\top \in V$. Also gibt es ein $W \in S$ mit $(V, W) \in \mathcal{K}_i$ und $\neg\top \in W$. Aber das hieße, $(M, W) \models \neg\top$, was unmöglich ist. □

Aufgabe 2.1 Zeige, daß Axiom A7 der Symmetrie der Erreichbarkeitsrelationen entspricht.

2.3 Axiomensystem für die Gültigkeit von $\mathcal{L}_n^C$-Formeln

Ab jetzt werden wieder Formeln aus $\mathcal{L}_n^C$ erlaubt, in der der Common-Knowledge-Operator C benutzt werden darf. Die folgenden Axiome und Regeln sind entsprechend für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_n^C$ gemeint:

C1.	$E\varphi \leftrightarrow (K_1\varphi \wedge \ldots \wedge K_n\varphi)$
C2.	$C\varphi \rightarrow E(\varphi \wedge C\varphi)$

RC1. (Induktion) $\dfrac{\varphi \rightarrow E(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \rightarrow C\psi}$ (Ind)

Lemma 2.10 Für $M = (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi) \in \mathcal{M}_n$ sei

$$\mathcal{E} := (\mathcal{K}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{K}_n) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C} := \mathcal{E}^+$$

die transitive Hülle von $\mathcal{E}$. Dann gilt für jede $\mathcal{L}_n^C$-Formel φ und jedes $s \in S$:

(i) $(M, s) \models E\varphi \iff$ für alle t mit $(s, t) \in \mathcal{E}$ ist $(M, t) \models \varphi$.

(ii) $(M, s) \models C\varphi \iff$ für alle t mit $(s, t) \in \mathcal{C}$ ist $(M, t) \models \varphi$.

Beweis:

(i) $\Rightarrow$: Sei $(M, s) \models E\varphi$ und $(s, t) \in \mathcal{E}$. Nach der Definition von $\mathcal{E}$ gibt es $1 \leq i \leq n$ mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Wegen $(M, s) \models E\varphi$ gilt auch $(M, s) \models K_i\varphi$, und mit $(s, t) \in \mathcal{K}_i$ folgt $(M, t) \models \varphi$.

$\Leftarrow$: Angenommen, für alle t mit $(s, t) \in \mathcal{E}$ sei $(M, t) \models \varphi$. Sei $1 \leq i \leq n$ und $(s, t) \in \mathcal{K}_i$. Dann ist $(s, t) \in \mathcal{E}$, also $(M, t) \models \varphi$. Daher ist $(M, s) \models K_i\varphi$. Da das für jedes i gilt, ist $(M, s) \models E\varphi$.

(ii) Nach Definition ist

$$(M, s) \models C\varphi :\iff \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ (M, s) \models E^n\varphi.$$

Da $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^n$ ist, folgt die Behauptung aus Teil (i).

□

Wir betrachten $E\varphi$ nur als eine Abkürzung für $\bigwedge_{i=1}^n K_i\varphi$ und ignorieren C1.

Satz 2.11 Seien K_n^C, T_n^C, $S4_n^C$, $S5_n^C$ und $KD45_n^C$ die Erweiterungen der Axiomensysteme K_n, T_n, $S4_n$, $S5_n$ und $KD45_n$ um die Axiome C1, C2 und die Regel RC1, wobei jetzt überall $\mathcal{L}_n^C(\Phi)$-Formeln erlaubt sind.

(i) K_n^C ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n$.

(ii) T_n^C ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^r$.

(iii) $S4_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rt}$.

(iv) $S5_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{rst}$.

(v) $KD45_n^C$ ist korrekt und vollständig für die Klasse $\mathcal{M}_n^{elt}$.

Beweis: Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{C}$ wie in Lemma 2.10. Wir zeigen nur den Teil (i).

Korrektheit: Für die Allgemeingültigkeit von C2 sei $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$, so daß $(M,s) \models C\varphi$. Es genügt zu zeigen, daß $(M,s) \models K_i(\varphi \wedge C\varphi)$. Sei also $t \in S$ mit $(s,t) \in \mathcal{K}_i$. Nach Lemma 2.10 bedeutet $(M,s) \models C\varphi$, daß $(M,r) \models \varphi$ für alle $r \in S$ mit $(s,r) \in \mathcal{C}$. Also gilt $(M,t) \models \varphi$ wegen $(s,t) \in \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{C}$. Für jedes $r \in S$ mit $(t,r) \in \mathcal{C}$ ist $(s,r) \in (\mathcal{K}_i;\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$, so daß $(M,r) \models \varphi$ und deshalb auch $(M,t) \models C\varphi$ gilt. Daher ist $(M,t) \models \varphi \wedge C\varphi$, und folglich $(M,s) \models \mathcal{K}_i(\varphi \wedge C\varphi)$.

Korrektheit der Regel RC1: Sei $\varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$ allgemeingültig in $\mathcal{M}_n$. Um die Allgemeingültigkeit von $\varphi \to C\psi$ zu zeigen, wähle $M \in \mathcal{M}_n$ und $s \in S$ mit $(M,s) \models \varphi$. Da $\varphi \to E(\psi \wedge \varphi)$ allgemeingültig ist, hat man $(M,s) \models E(\psi \wedge \varphi)$.

Für $(M,s) \models C\psi$ sei $(s,t) \in \mathcal{C}$, mit einem $\mathcal{E}$-Weg der Länge $n \geq 1$. Wir zeigen $(M,t) \models \psi$ durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist $(s,t) \in \mathcal{E}$ also $(M,t) \models \psi$ wegen $(M,s) \models E(\psi \wedge \varphi)$. Für $n = m+1 > 2$ sei $r \in S$ mit $(s,r) \in \mathcal{E}$ und $(r,t) \in \mathcal{E}^m$. Wegen $(M,s) \models E(\psi \wedge \varphi)$ ist $(M,r) \models \varphi$, und nach Induktionsannahme gilt dann $(M,t) \models \psi$.

Vollständigkeit: Man zeigt wieder, daß eine konsistente Aussage in einem geeigneten (M,s) mit $M \in \mathcal{M}_n$ wahr ist. Allerdings kann man hier (anscheinend) nicht dasselbe M für alle konsistenten Aussagen χ nehmen, sondern braucht für jedes χ ein eigenes, endliches (M_χ, s_χ).

Zu $\chi \in \mathcal{L}_n^C$ sei $Sub(\chi)$ die Menge der Teilformeln von

$$\{\chi\} \cup \{\, C\varphi \to E(\varphi \wedge C\varphi) \mid C\varphi \text{ ist Teilformel von } \chi \,\},$$

wobei $E\psi := \bigwedge_{i=1}^n K_i\psi$ als Abkürzung benutzt wird, und

$$Sub^+(\chi) := Sub(\chi) \cup \{\, \neg\psi \mid \psi \in Sub(\chi) \,\}.$$

Sei $Con(\chi)$ die Menge aller maximalen K_n^C-konsistenten Teilmengen von $Sub^+(\chi)$.

Definiere die (endliche!) Kripke-Struktur $M_\chi := (S, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n, \pi)$ durch

$$\begin{aligned} S &:= Con(\chi), \\ \mathcal{K}_i &:= \{\, (V,W) \in S \times S \mid V/K_i \subseteq W \,\}, \\ \pi(V)(p) &:= \begin{cases} 1, & \text{falls } p \in V, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für s_χ wähle ein $V \in S$, das die konsistente Menge $\{\chi\}$ umfaßt.

Durch Induktion über den Aufbau der Teilformeln φ von χ zeigen wir:

$$\text{Für alle } V \in S \text{ gilt:} \quad (M,V) \models \varphi \iff \varphi \in V. \tag{4}$$

Wir ergänzen die Induktion aus dem Beweis von Satz 2.4 für die neu zugelassenen Formeln.

$C\psi \in V \Longrightarrow (M,V) \models C\psi$:

Sei $C\psi \in V$, und $(V,W) \in S \times S$ mit $V = V_0$, $W = V_{m+1}$, und $V_j/K_{i_j} \subseteq V_{j+1}$ für $j \leq m$. Da V maximal konsistent ist, ist das Axiom $C\psi \to E(\psi \wedge C\psi)$ in V, also nach Lemma 2.3 auch $E(\psi \wedge C\psi) \in V$ und $K_{i_0}(\psi \wedge C\psi) \in V$. Folglich sind $\psi, C\psi \in V/K_{i_0} \subseteq V_1$. Durch Induktion über m folgt, daß $\psi, C\psi \in W$ sind. Da W maximal konsistent und $|\psi| < |C\psi|$ ist, hat man induktiv nach (4) schon $(M,W) \models \psi$. Damit ist $(M,V) \models C\psi$ gezeigt.

$(M,V) \models C\psi \Longrightarrow C\psi \in V$:

Sei $(M,V) \models C\psi$. Es genügt, eine Aussage φ zu finden, die die Bedingungen

$$\vdash \bigwedge V \to \varphi, \tag{5}$$

$$\vdash \varphi \to \bigwedge\nolimits_{i=1}^{n} K_i(\psi \wedge \varphi) \tag{6}$$

erfüllt. Denn dann muß wegen (6) und RC1 auch

$$\vdash \varphi \to C\psi$$

sein, also mit (5) auch $\vdash \bigwedge V \to C\psi$. Wäre nun $C\psi \notin V$, so wäre $\neg C\psi \in V$ nach Lemma 2.3, daher zusammen

$$\vdash \bigwedge V \to C\psi \wedge \neg C\psi.$$

Aber dann ist auch $\vdash \neg \bigwedge V$, also wäre V nicht konsistent, ein Widerspruch.

Die Idee ist, daß φ die Bedingung

In der aktuellen Situation ist $C\psi$ wahr

ausdrückt[1]. Sei dazu

$$\varphi := \bigvee \{ \bigwedge W \mid W \in \mathcal{W} \} \quad \text{mit} \quad \mathcal{W} := \{ W \in S \mid (M,W) \models C\psi \}.$$

Da $V \in \mathcal{W}$ ist, ist offensichtlich $\vdash \bigwedge V \to \varphi$, also (5). Da die Aussage in (6) aussagenlogisch äquivalent zur Konjunktion der Aussagen in

$$\text{Behauptung}: \quad \vdash \varphi \to K_i(\psi \wedge \varphi) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

ist, genügt es für (6), die Behauptung (7) zu zeigen. Dazu behaupten wir:

(i) Für jedes $W \in \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i\psi$.

[1] Das könnte man nicht durch eine $\mathcal{L}_n^C$-Formel ausdrücken, wenn S unendlich viele V' hätte!

(ii) Für jedes $U \notin \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i \neg \bigwedge U$.

(iii) Für jedes $W \in \mathcal{W}$ ist $\vdash \bigwedge W \to K_i(\psi \wedge \bigwedge\{\neg \bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W}\})$.

(iv) $\vdash \varphi \leftrightarrow \bigwedge\{\neg \bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W}\}$.

Aus (iii) und (iv) erhält man $\vdash \bigwedge W \to K_i(\psi \wedge \varphi)$ für alle $W \in \mathcal{W}$, daraus (7).

Beweis von (i): Wegen $(M, W) \models C\psi$ ist nach Definition von $\models$ auch $(M, W) \models K_i\psi$. Und im Beweis von Satz 2.4 wurde gezeigt, wie daraus

$$\vdash K_i\varphi_1 \to \ldots \to K_i\varphi_k \to K_i\psi$$

für $W/K_i = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ folgt. Wegen $K_i\varphi_j \in W$ ist natürlich

$$\vdash \bigwedge W \to K_i\varphi_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

woraus mit aussagenlogischen Beweisschritten $\vdash \bigwedge W \to K_i\psi$ folgt.

Beweis von (ii): Wegen $(M, W) \models C\psi$ und $(M, U) \not\models C\psi$ muß $(W, U) \notin \mathcal{K}_i$ sein, also $W/K_i \not\subseteq U$, und daher gibt es ein $K_i\varphi_j \in W$ mit $\varphi_j \notin U$, also $\neg\varphi_j \in U$ (wie im Lemma 2.3). Daher ist $K_n^C \vdash \bigwedge U \to \neg\varphi_j$, und mit aussagenlogischen Schritten und R2 daher

$$\vdash K_i\varphi_j \to K_i \neg \bigwedge U$$

Zusammen mit (8) ergibt sich $\vdash \bigwedge W \to K_i \neg \bigwedge U$.

Beweis von (iii): Dazu muß man zeigen, daß $\vdash (K_i\varphi \wedge K_i\psi) \leftrightarrow K_i(\varphi \wedge \psi)$, wozu man die Distributivität A2 und die Regel R2 braucht.

Beweis von (iv): Sei $\overline{\varphi} := \bigvee\{\bigwedge U \mid U \notin \mathcal{W}\}$ und $\sigma := \bigvee\{\bigwedge W \mid W \in S\}$. Dann ist

$$\vdash \sigma \leftrightarrow (\varphi \vee \overline{\varphi}),$$

da die Formel die Einsetzung in eine aussagenlogische Tautologie ist.

Für $U, W \in S$ mit $U \neq W$ ist $U \cup W \subseteq Sub(\chi)^+$ inkonsistent, da U bzw. W maximal konsistent ist. Also ist $\vdash \neg \bigwedge(U \cup W)$, also $\vdash \neg(\bigwedge W \wedge \bigwedge U)$. Daraus folgt mit den De Morgan'schen Regeln der Aussagenlogik, daß

$$\vdash \neg(\varphi \wedge \overline{\varphi}).$$

Wenn wir $\vdash \sigma$ zeigen können, erhalten wir $\vdash (\varphi \vee \overline{\varphi})$, zusammen also $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\overline{\varphi}$, was aussagenlogisch äquivalent ist zur Behauptung (iv).

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\vdash \sigma$. Wegen

$$\vdash \bigvee\{\bigwedge W \mid W \in S\} \leftrightarrow \neg \bigwedge\{\neg \bigwedge W \mid W \in S\}$$

bedeutet $\vdash \sigma$, daß $\Psi := \{\neg \bigwedge W \mid W \in S\}$ inkonsistent ist. Angenommen, Ψ wäre konsistent. Bis auf aussagenlogische Umformungen ist Ψ eine Menge von Disjunktionen, denn

$$\vdash \neg \bigwedge W \leftrightarrow \bigvee\{\neg\psi \mid \psi \in W\}.$$

Für jede konsistente Menge Γ und jedes $(\chi_1 \vee \chi_2) \in \Gamma$ ist $\Gamma \cup \{\chi_1\}$ oder $\Gamma \cup \{\chi_2\}$ konsistent, da sonst

$$\vdash \bigwedge \Gamma \to \neg\chi_1 \quad \text{und} \quad \vdash \bigwedge \Gamma \to \neg\chi_2$$

und damit $\vdash \bigwedge \Gamma \to \neg(\chi_1 \vee \chi_2)$, also Γ inkonsistent wäre. Daher können wir zu Ψ nacheinander in jedem $W \in S$ ein geeignetes $\psi_W \in W$ finden, so daß $\Psi \cup \{ \neg\psi_W \mid W \in S \}$ konsistent ist. Damit ist auch

$$\{ \neg\psi_W \mid W \in S \} \subseteq Sub^+(\chi)$$

konsistent und kann zu einer maximal konsistenten Menge $V \in S$ erweitert werden. Aber dann ist $\psi_V \in V$ und $\neg\psi_V \in V$, also V inkonsistent, was unmöglich ist. Daher muß Ψ inkonsistent, also σ beweisbar sein. $\square$

Beispiel 2.12 Betrachte das Beispiel der „schmutzigen Kinder“ für $n = 2$. Die Anfangssituation wird durch die folgende Aussage ausgedrückt:

(i) Daß (bei $t = 0$) kein Kind weiß, ob es schmutzig ist, ist geteiltes Wissen:

$$C(\bigwedge_{i \in I} \neg(K_i p_i \vee K_i \neg p_i)) \tag{9}$$

(ii) Daß (bei $t = 0$) jedes Kind weiß, welches der anderen Kinder schmutzig ist, ist geteiltes Wissen:

$$C(\bigwedge_{i \neq j} (K_i p_j \vee K_i \neg p_j)) \tag{10}$$

(iii) Es ist (bei $t = 1$) (durch die Aussage des Vaters) geteiltes Wissen, daß mindestens ein Kind schmutzig ist:

$$C(\bigvee_{j \in I} p_j) \tag{11}$$

(iv) Beh.: Für $I = \{1, 2\}$ kann (bei $t = 1$) jedes Kind erschließen, ob es schmutzig ist:

$$\bigwedge_{i \in I} (K_i p_i \vee K_i \neg p_i),$$

und weil es dadurch auch den Anfangswissensstand der anderen erschließen kann, muß das ein geteiltes Wissen sein,

$$C(\bigwedge_{i \in I} (K_i p_i \vee K_i \neg p_i)). \tag{12}$$

Die Formulierungen setzen voraus, daß es sich bei $K_i\varphi$ um „Wissen", nicht „Glauben" handelt, daß also A3, $K_i\psi \to \psi$, gilt.

Da T_2^C vollständig ist, sollte man die Argumentation im wesentlichen mit den Mitteln von T_2^C ausführen können. Das geht aber nicht ganz, da sich der Wissenszustand der Kinder im Lauf der Zeit ja ändert. Aber auch die angegebene Zeitlogik $\mathcal{L}_n^{C,U,\Box,\bigcirc}$ reicht dazu nicht, da Kind A nach der Zusatzinformation des Vaters mit dem Wissen von Kind B *vor* der Aussage des Vaters argumentiert.

Zur Vereinfachung halten wir die Zeit künstlich aus dem Spiel, und argumentieren in K_n^C, also *ohne* die Voraussetzung, daß es sich um Wissen handelt.

Beispiel 2.13 (Beweis einer Aussage über geteiltes Wissen) Im Beispiel der „schmutzigen Kinder" A und B argumentiert A intuitiv wie folgt: B weiß nicht, ob p_B, weiß aber, daß $(p_A \vee p_B)$. Wäre $\neg p_A$, so wüßte B das, (weil er es sehen kann), also müßte B nicht nur $(p_A \vee p_B)$, sondern sogar p_B wissen. Da er das aber nicht weiß, muß $\neg p_A$ falsch, also p_A wahr sein.

Wir formulieren noch einmal die Voraussetzungen, etwas abgeschwächt.

(i) Da auf die Frage, welches Kind wisse, ob es schmutzig sei, niemand mit „ja" antwortet, ist es geteiltes Wissen, daß kein Kind weiß, ob es selbst schmutzig ist:

$$C(\neg K_A p_A \wedge \neg K_A \neg p_A) \wedge C(\neg K_B p_B \wedge \neg K_B \neg p_B), \tag{13}$$

(ii) Da die Kinder einander ansehen, ist es geteiltes Wissen, daß jedes Kind weiß, daß die anderen wissen, ob es schmutzig ist, oder schwächer:

$$C(\neg p_A \to K_B \neg p_A) \wedge C(\neg p_B \to K_A \neg p_B). \tag{14}$$

(iii) Die öffentliche Aussage des Vaters macht es zum geteilten Wissen, daß mindestens ein Kind schmutzig ist:

$$C(p_A \vee p_B) \tag{15}$$

Aus (13) und (15), erhält man (in $K_{A,B}^C$, also *ohne* Axiom $A3$ oder $C\varphi \to \varphi$)

$$K_A(K_B(p_A \vee p_B) \wedge \neg K_B p_B).$$

Aus (14) erhält man zusätzlich

$$K_A(\neg p_A \to K_B \neg p_A),$$

also

$$K_A(\neg p_A \to K_B(\neg p_A \wedge (p_A \vee p_B))),$$

also

$$K_A(\neg p_A \to K_B p_B),$$

und daraus mit $K_A(\neg K_B p_B)$ (was „inzwischen" wegen (15) falsch ist) dann

$$K_A p_A.$$

Da man die ganze Argumentation statt mit K_A auch mit K_B machen kann, erhält man Ep_A, analog Ep_B, also $E(p_A \wedge p_B)$.

Sei nun $C\varphi$ die Zusammenfassung von (13) – (15) via $\vdash (C\alpha \wedge C\beta) \leftrightarrow C(\alpha \wedge \beta)$. Nach (C 1) ist $C\varphi \to E(\varphi \wedge C\varphi)$, und das obige Argument zeigt

$$\vdash C\varphi \to E(p_A \wedge p_B).$$

Das kann man zusammenfassen zu

$$\vdash C\varphi \to E((p_A \wedge p_B) \wedge C\varphi),$$

und durch Anwenden von (RC 1) ergibt das

$$\vdash C\varphi \to C(p_A \wedge p_B).$$

Bemerkung 2.14 Wenn man die Zeit formal berücksichtigen will, muß man festlegen, wie die atomaren aussagenlogischen Aussagen im Lauf der Zeit ihren Wahrheitswert ändern und wie das für Wissensaussagen geht. Betrachtet man einen linearen diskreten Zeitverlauf und einen Temporaloperator Y mit der Bedeutung

$$(M,s)_t \models Y\varphi :\Longleftrightarrow (M,s)_{t-1} \models \varphi$$

d.h. $Y\varphi =$ *zum vorigen Zeitpunkt (yesterday) war φ der Fall*, so braucht man für das Beispiel die Annahmen, daß sich die Tatsachen nicht ändern und nur Nicht-Wissen (und Wissen darüber), aber kein Wissen über Tatsachen (und kein Wissen darüber) verlorengeht:

- $Y\varphi \to \varphi$, falls φ keinen Wissensoperator enthält,
- $YK_i\varphi \to K_i\varphi$, falls in φ kein Wissensoperator negativ vorkommt.

Insbesondere muß am Ende ja $K_A p_A \wedge Y\neg K_A p_A$ wahr sein können.

Literatur

[1] R.Fagin, J.Y.Halpern, Y.Moses, M.Y.Vardi. Reasoning about Knowledge. MIT Press 2003.