ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.)
ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA 20 (2021) 233–241
https://doi.org/10.26493/1855-3974.2284.aeb
(Also available at http://amc-journal.eu)

Closed formulas for the total Roman domination number of lexicographic product graphs

Abel Cabrera Martínez, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez

Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain

Received 19 March 2020, accepted 6 January 2021, published online 6 November 2021

Abstract

Let G be a graph with no isolated vertex and $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$ a function. Let $V_i = \{x \in V(G) : f(x) = i\}$ for every $i \in \{0,1,2\}$. We say that f is a total Roman dominating function on G if every vertex in V_0 is adjacent to at least one vertex in V_2 and the subgraph induced by $V_1 \cup V_2$ has no isolated vertex. The weight of f is $\omega(f) = \sum_{v\in V(G)} f(v)$. The minimum weight among all total Roman dominating functions on G is the total Roman domination number of G, denoted by $\gamma_{tR}(G)$. It is known that the general problem of computing $\gamma_{tR}(G)$ is NP-hard. In this paper, we show that if G is a graph with no isolated vertex and H is a nontrivial graph, then the total Roman domination number of the lexicographic product graph $G \circ H$ is given by

$$\gamma_{tR}(G \circ H) = \begin{cases} 2\gamma_t(G) & \text{if } \gamma(H) \geq 2, \\ \xi(G) & \text{if } \gamma(H) = 1, \end{cases}$$

where $\gamma(H)$ is the domination number of H, $\gamma_t(G)$ is the total domination number of G and $\xi(G)$ is a domination parameter defined on G.

Keywords: Total Roman domination, total domination, lexicographic product graph.

Math. Subj. Class. (2020): 05C69, 05C76

E-mail addresses: abel.cabrera@urv.cat (Abel Cabrera Martínez), juanalberto.rodriguez@urv.cat (Juan Alberto Rodríguez-Velázquez)

ISSN 1855-3966 (tiskana izd.), ISSN 1855-3974 (elektronska izd.)
ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA 20 (2021) 233–241
https://doi.org/10.26493/1855-3974.2284.aeb
(Dostopno tudi na http://amc-journal.eu)

Zaprte formule za totalno rimljansko dominacijsko število leksikografskega produkta grafov

Abel Cabrera Martínez, Juan Alberto Rodríguez-Velázquez

Universitat Rovira i Virgili, Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, Av. Països Catalans 26, 43007 Tarragona, Spain

Prejeto 19. marca 2020, sprejeto 6. januarja 2021, objavljeno na spletu 6. novembra 2021

Povzetek

Naj bo G graf brez izoliranih vozlišč in $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$ funkcija. Naj bo $V_i = \{x \in V(G) : f(x) = i\}$ za vsak $i \in \{0,1,2\}$. Funkcija f se imenuje totalna rimljanska dominacijska funkcija na G, če je vsako vozlišče množice V_0 sosednje najmanj enemu vozlišču množice V_2 in če podgraf, induciran z $V_1 \cup V_2$, nima nobenega izoliranega vozlišča. Teža funkcije f je $\omega(f) = \sum_{v\in V(G)} f(v)$. Minimalno težo, ki jo lahko dosežejo totalno rimljanske dominacijske funkcije na G, imenujemo totalno rimljansko dominacijsko število grafa G in označimo z $\gamma_{tR}(G)$. Znano je, da je splošni problem izračuna $\gamma_{tR}(G)$ NP-težek. V tem članku pokažemo, da če je G graf, ki nima nobenega izoliranega vozlišča, H pa je netrivialen graf, potem je totalno rimljansko dominacijsko število leksikografskega produkta grafov $G \circ H$ podano z izrazom

$$\gamma_{tR}(G \circ H) = \begin{cases} 2\gamma_t(G) & \text{če } \gamma(H) \geq 2, \\ \xi(G) & \text{če } \gamma(H) = 1, \end{cases}$$

kjer je $\gamma(H)$ dominacijsko število grafa H, $\gamma_t(G)$ je totalno dominacijsko število grafa G, $\xi(G)$ pa je dominacijski parameter, ki je definiran na grafu G.

Ključne besede: Totalna rimljanska dominacija, totalna dominacija, leksikografski produkt grafov.

Math. Subj. Class. (2020): 05C69, 05C76

E-poštna naslova: abel.cabrera@urv.cat (Abel Cabrera Martínez), juanalberto.rodriguez@urv.cat (Juan Alberto Rodríguez-Velázquez)