УДК 004.42:510.69

ПЕРШОПОРЯДКОВІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ ЛОГІКИ ІЗ УЗАГАЛЬНЕНИМИ РЕНОМІНАЦІЯМИ

М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
01601, Київ, вул. Володимирська, 60
Тел.: (044) 2590511.
E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Запропоновано розширення цих логік узагальненими реномінаціями та спеціальними предикатами-індикаторами наявності значення для предметних змінних. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості, зокрема, властивості відношень логічного наслідку.

First-order composition-nominative logics of partial single-valued, total multi-valued, and partial multi-valued quasiary predicates are investigated. It is proposed to extend these logics with generalized renominations and special predicates that detect if the subject variables have assigned values. Languages and semantic models of such logics are defined, their semantic properties, in particular, the properties of relations of logical consequence are studied.

Вступ

Розвиток інформаційних технологій зумовлює невпинне розширення сфери застосування математичної логіки. Розроблено багато різноманітних логічних систем (див., напр., [1]), які доводять свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики й програмування. В основі таких систем зазвичай лежить класична логіка предикатів. Водночас поява нових застосувань логіки в інформатиці й програмуванні висвітила принципові обмеження класичної логіки предикатів, які ускладнюють її використання. Така логіка недостатньо враховує неповноту, частковість інформації про предметну область, її структурованість. Обмеження класичної логіки роблять вельми актуальною проблему побудови програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Таку побудову природно вести на базі спільного для логіки і програмування композиційно-номінативного підходу (див. [2]). Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) – це логічні формалізми, збудовані на основі цього підходу. Передумовою їх виникнення стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язання нових задач інформатики й програмування. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

Метою даної роботи є побудова нових класів КНЛ квазіарних предикатів. Пропонується розширення чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) шляхом введення узагальнених реномінацій та спеціальних предикатів-індикаторів наявності значення для предметних імен (змінних).

ЧКНЛ з узагальненими (розширеними) реномінаціями названо ЧКНЛРР, вони запропоновані в [3]. Використання композицій розширеної реномінації (перейменування) дає змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати з вхідних даних компоненти з певними іменами. За допомогою композицій розширеної реномінації визначаємо композиції розширеної квантифікації (розширені квантори).

Характерною особливістю КНЛ є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним іменем. Тому при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Для цього запропоновано [4] спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z. Предикати-індикатори використовуються (див. [3, 5–7]) для дослідження КНЛ. Чисті першопорядкові КНЛ з виділеними предикатами-індикаторами названі ε-ЧКНЛ.

Логіки, пропоновані в даній роботі, поєднують можливості ЧКНЛРР та ε-ЧКНЛ. Такі логіки будемо називати ε-ЧКНЛРР. Ми досліджуємо ε-ЧКНЛРР часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних предикатів. Розглянуто семантичні властивості ε-ЧКНЛРР, особливу увагу приділено вивченню відношень логічного наслідку. Властивості таких відношень є семантичною основою побудови для пропонованих логік числень секвенційного типу, що буде зроблено в наступних роботах.

Поняття, які в роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 3, 5].

Для полегшення читання наведемо деякі визначення, необхідні для подальшого викладу.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це довільна однозначна часткова функція $\delta : V \to A$.

Тут V і A –множини предметних імен і предметних значень.

V-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для V-ІМ введемо функцію $asn : {}^VA \to 2^V$: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Введемо параметричну операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x: $\delta\|_{-x} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \neq x\}$.

Така операція поширюється на множини імен: $\delta\|_{-X} = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \notin X\}$, де $X \subseteq V$.

Операцію ∇ накладки V-ІМ δ на V-ІМ η задаємо так: $\eta\nabla\delta = \delta \cup (\eta \,\|_{-asn(\delta)})$.

V-квазіарний предикат на A – це довільна (часткова неоднозначна, взагалі кажучи) функція вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Ми трактуємо часткові неоднозначні предикати на множині ${}^VA$ як відповідності (відношення) між ${}^VA$ та множиною $\{T, F\}$. Такі предикати називаємо *предикатами реляційного типу*, вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного предиката. Ми використовуємо позначення $P(d)$ для множини тих значень, які предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ може прийняти на $d\in{}^VA$. Зрозуміло, що $P(d) \subseteq \{T, F\}$.

Область істинності та область хибності предиката $P : {}^VA \to \{T, F\}$ – це множини

$$T(P) = \{d\in{}^VA \mid T\in P(d)\},\ \ F(P) = \{d\in{}^VA \mid F\in P(d)\}.$$

V-квазіарний предикат P на A:

– *неспростовний*, якщо $F(P) = \varnothing$;

– *виконуваний*, якщо $T(P) \neq \varnothing$;

– *тотально істинний*, якщо $T(P) = {}^VA$;

– *тотально хибний*, якщо $F(P) = {}^VA$;

– *тотожно істинний*, якщо $T(P) = {}^VA$ і $F(P) = \varnothing$;

– *тотожно хибний*, якщо $T(P) = \varnothing$ і $F(P) = {}^VA$;

– *всюди невизначений*, якщо $T(P) = F(P) = \varnothing$;

– *тотально насичений*, якщо $T(P) = {}^VA$ та $F(P) = {}^VA$.

Предикат $P : {}^VA\to\{T, F\}$ *монотонний*, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \subseteq P(d')$.

Предикат $P : {}^VA \to \{T, F\}$ *антитонний*, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \supseteq P(d')$.

Предметне ім'я $z\in V$ (строго) *неістотне* для предиката P, якщо з умови $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}$ випливає $P(d_1) = P(d_2)$.

Надалі тотожно істинний предикат позначаємо як T, тотожно хибний – як F, всюди невизначений – як $\perp$.

1. Композиції першопорядкових КНЛ із узагальненими реномінаціями

Введемо операції розширеної реномінації, які дають змогу явно задавати відсутність значення для предметних імен, тобто вилучати компоненти з певними іменами. Відсутність значення для імені x задаємо парою, де верхнє ім'я – x, а відповідне нижнє ім'я – спеціальний символ $\perp$.

Операція розширеної реномінації. Операція $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp} : {}^VA \to {}^VA$ визначається так:

$$r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}(\delta) = \delta\,\|_{-\{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m\}} + [v_1\mapsto\delta(x_1),...,v_n\mapsto\delta(x_n)].$$

Зокрема, $r^{x}_{\perp}(\delta) = \delta\,\|_{-x}$.

Ввівши позначення $\bar{y}$ для $y_1,...,y_n$, будемо також скорочено писати $r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ замість $r^{v_1,...,v_n,u_1,...,u_m}_{x_1,...,x_n,\perp,...,\perp}$.

Для розширеної реномінації маємо властивість елімінації тотожних перейменувань: $\mathrm{r}^{\bar{z},\bar{v},\bar{u}}_{\bar{z},\bar{x},\perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d)$.

Зокрема: $\mathrm{r}^{y,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d)$; $\mathrm{r}^{y,\bar{u}}_{y,\perp}(d) = \mathrm{r}^{\bar{u}}_{\perp}(d)$.

Із визначення операції $r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}$ випливає її монотонність: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)$.

Нехай $\bar{u}, \bar{s}, \bar{w}, \bar{t}, \bar{v}, \bar{z}$ задають попарно диз'юнктні (такі, що попарно не перетинаються) множини імен.

Послідовне застосування двох операцій реномінації $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}$ та $r^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$ можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо згорткою операцій $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}$ та $r^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$ і будемо її позначати $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp} \cdot {}^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$.

Справді, для кожного $d\in{}^VA$ маємо $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}(r^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)) = r^{\bar{u},\bar{s},\bar{v},\bar{w},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{p},\bar{q},\bar{y},\perp,\perp,\perp}(d)$,

де кожне $p_i \in \{\bar{p}\}$ та кожне $q_i \in \{\bar{q}\}$ задаються так:

$$p_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } x_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\bar{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } x_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\bar{s}\}, \\ x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\bar{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } x_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\bar{t}\}; \end{cases} \qquad q_i = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } a_i = v_j \text{ для деякого } v_j \in \{\bar{v}\}, \\ q_j, \text{ якщо } a_i = s_j \text{ для деякого } s_j \in \{\bar{s}\}, \\ a_i, \text{ якщо } a_i \notin \{\bar{v}, \bar{s}, \bar{z}, \bar{t}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = z_j \text{ для деякого } z_j \in \{\bar{z}\}, \\ \perp, \text{ якщо } a_i = t_j \text{ для деякого } t_j \in \{\bar{t}\}. \end{cases}$$

Так визначену операцію реномінації $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{v},\bar{w},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{p},\bar{q},\bar{y},\perp,\perp,\perp}$ назвемо *згорткою* операцій реномінації $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}$ (внутрішня, застосовується першою) та $r^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$ (зовнішня, застосовується другою); Будемо її позначати $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp} \cdot {}^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}$. Таким чином, для кожного $d\in{}^VA$ маємо: $r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp}(r^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)) =$
$= r^{\bar{u},\bar{s},\bar{v},\bar{w},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{p},\bar{q},\bar{y},\perp,\perp,\perp}(d) = r^{\bar{u},\bar{s},\bar{w},\bar{t}}_{\bar{x},\bar{a},\perp,\perp} \cdot {}^{\bar{v},\bar{s},\bar{z},\bar{t}}_{\bar{y},\bar{c},\perp,\perp}(d)$.

Композиції ε-ЧКНЛРР. Базовими композиціями ε-ЧКНЛРР є пропозиційні зв'язки заперечення $\neg$ та диз'юнкція $\vee$, композиції розширеної реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$, квантифікації $\exists x$ та спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори εz. Композиції реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ є окремим випадком композицій $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$.

Традиційні композиції $\neg$, $\vee$, $\exists x$ через області істинності та хибності відповідних предикатів задаємо так:

$T(\neg P) = F(P);\ F(\neg P) = T(P);$

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q);\ F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q);$

$T(\exists xP) = \{d\in {}^{V}\!A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$; $F(\exists xP) = \{d\in {}^{V}\!A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$.

Композиція розширеної реномінації. Композицію розширеної реномінації (розширену реномінацію) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ визначаємо за допомогою операції розширеної реномінації $r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ традиційним чином:

$$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)(d) = P(r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d)).$$

Композицію $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ можна визначити через області істинності та хибності предиката $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$:

$$T(\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)) = \{d\in {}^{V}\!A \mid \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d) \in T(P)\} = (\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp})^{-1}(T(P));$$

$$F(\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)) = \{d\in {}^{V}\!A \mid \mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(d) \in F(P)\} = (\mathrm{r}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp})^{-1}(F(P)).$$

Твердження 1. Нехай $z\in V$ неістотне для P. Тоді $\mathrm{R}^{z,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$.

Твердження 2. Ім'я $x\in V$ неістотне для $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)$, якщо $x \notin \{\bar{y}\}$.

При $x \notin \{\bar{y}\}$ для всіх $d\in {}^{V}\!A$ та $a\in A$ маємо: $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)\ (d\nabla x\mapsto a) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{y},\perp,\perp}(P)\ (d\|_{-x})$.

До основних властивостей композицій $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ також належать:

$\mathrm{R}_{\perp}$T) $\mathrm{R}^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$ – згортка тотожної пари імен у реномінації; зокрема, $\mathrm{R}^{z,\bar{u}}_{z,\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{u}}_{\perp}(P)$;

$\mathrm{R}_{\perp}\neg$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\neg P) = \neg\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$ – R¬-дистрибутивність;

$\mathrm{R}_{\perp}\vee$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P\vee Q) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)\vee \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(Q)$ – R∨-дистрибутивність;

$\mathrm{R}_{\perp}$U) нехай $z\in V$ (строго) неістотне для предиката P, тоді $\mathrm{R}^{z,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P)$;

$\mathrm{R}_{\perp}$R) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(P)) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}\circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(P)$ – згортка реномінацій.

Згортка композицій реномінації задається через згортку операцій реномінації:

$$\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}\circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(P)\ (d) = (\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(P)))(d) = (\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(P))(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d)) = P(r^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d)) = P(r^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}\circ^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d)).$$

$\mathrm{R}_{\perp}\exists$) $\exists y\,\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP)$ за умови $y \notin \{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$ – обмежена R∃-дистрибутивність;

$\mathrm{R}_{\perp}\exists\exists$) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\circ^{y}_{z}(P)$, якщо z неістотне для P та $z\notin \{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$ – R∃-дистрибутивність.

Якщо z неістотне для P, то маємо $\exists yP = \exists z\mathrm{R}^{y}_{z}(P)$. Звідси $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists yP) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists z\mathrm{R}^{y}_{z}(P))$. При $z\notin \{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$ згідно $\mathrm{R}_{\perp}\exists$ та $\mathrm{R}_{\perp}$R маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists z\mathrm{R}^{y}_{z}(P)) = \exists z\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\mathrm{R}^{y}_{z}(P)) = \exists z\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\circ^{y}_{z}(P)$.

Згортка пари імен реномінації за квантифікованим верхнім іменем:

$\mathrm{R}_{\perp}\exists$R) $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists xP) = \mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)$ та $\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists xP) = \mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)$ (тут $x \notin \{\bar{u},\bar{w}\}$ за визначенням реномінації).

Подібним чином можна додатково записати властивості $\mathrm{R}_{\perp}\rightarrow$, $\mathrm{R}_{\perp}$&, $\mathrm{R}_{\perp}\leftrightarrow$; $\mathrm{R}_{\perp}\forall$, $\mathrm{R}_{\perp}\forall\forall$, $\mathrm{R}_{\perp}\forall$R.

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\mathrm{NR}_{\perp}$) $\exists y\,\mathrm{R}^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P)$ та $\forall y\,\mathrm{R}^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P) = \mathrm{R}^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(P)$ при умові $y\notin\{z,\bar{x}\}$.

Предикати-індикатори наявності значення для предметних імен. Спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори εz наявності значення для відповідних $z\in V$, – визначаємо так:

$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d\in {}^{V}\!A \mid z\notin asn(d)\};$

$F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d\in {}^{V}\!A \mid z\in asn(d)\}.$

Із визначення випливає, що предикати εz не є монотонними та не є антитонними.

Кожне $x\in V$ таке, що $x \neq z$, (строго) неістотне для предиката εz.
Розглянемо основні семантичні властивості предикатів-індикаторів.

1. Властивості предикатів εz, пов'язані з їх квантифікацією за тим же іменем z.

$\exists z\, \varepsilon z = \forall z\, \varepsilon z = \mathrm{F}$, $\exists z \neg\varepsilon z = \forall z \neg\varepsilon z = \mathrm{T}$.

2. Властивості предикатів εz, пов'язані з їх квантифікацією за іншим іменем x:

$\exists x\, \varepsilon z = \forall x\, \varepsilon z = \varepsilon z$; $\exists x \neg\varepsilon z = \forall x \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z$.

3. Властивості предикатів εz, пов'язані із зв'язками та кванторами за тим же іменем z.

$\exists z(\varepsilon z \& P) = \forall z(\varepsilon z \& P) = \mathrm{F}$; $\exists z(\neg\varepsilon z \vee P) = \forall z(\neg\varepsilon z \vee P) = \mathrm{T}$;

$\exists z(\varepsilon z \vee P) = \exists z(\neg\varepsilon z \& P) = \exists zP$; $\forall z(\varepsilon z \vee P) = \forall z(\neg\varepsilon z \& P) = \forall zP$.

4. Властивості предикатів εz, пов'язані із зв'язками та кванторами за іншим іменем x:

$\exists x(P \vee \varepsilon z) = \exists xP \vee \exists x\varepsilon z = \exists xP \vee \varepsilon z$; $\exists x(P \vee \neg\varepsilon z) = \exists xP \vee \exists x\neg\varepsilon z = \exists xP \vee \neg\varepsilon z$;

$\exists x(P \& \varepsilon z) = \exists xP \& \exists x\varepsilon z = \exists xP \& \varepsilon z$; $\exists x(P \& \neg\varepsilon z) = \exists xP \& \exists x\neg\varepsilon z = \exists xP \& \neg\varepsilon z$;

$\forall x(P \vee \varepsilon z) = \forall xP \vee \forall x\varepsilon z = \forall xP \vee \varepsilon z$; $\forall x(P \vee \neg\varepsilon z) = \forall xP \vee \forall x\neg\varepsilon z = \forall xP \vee \neg\varepsilon z$;

$\forall x(P \& \varepsilon z) = \forall xP \& \exists x\varepsilon z = \forall xP \& \varepsilon z$; $\forall x(P \& \neg\varepsilon z) = \forall xP \& \forall x\neg\varepsilon z = \forall xP \& \neg\varepsilon z$.

5. Властивості реномінації предикатів-індикаторів εz:

a) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\varepsilon z) = \varepsilon y$; зокрема: $\mathrm{R}^{\bar{x},z}_{\bar{y},u}(\varepsilon z) = \varepsilon u$, $\mathrm{R}^{z}_{y}(\varepsilon z) = \varepsilon y$;

b) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\varepsilon z) = \varepsilon z$, якщо $z \notin \{\bar{v},\bar{u}\}$; зокрема: $\mathrm{R}^{\bar{x}}_{\bar{y}}(\varepsilon z) = \varepsilon z$, якщо $z \notin \{\bar{x}\}$;

c) $\mathrm{R}^{v}_{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z$; $\mathrm{R}^{u}_{\perp}(\varepsilon z) = \varepsilon z$;

d) $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\varepsilon z) = \mathrm{T}$; зокрема: $\mathrm{R}^{\bar{v},z}_{\bar{x},\perp}(\varepsilon z) = \mathrm{T}$, $\mathrm{R}^{z}_{\perp}(\varepsilon z) = \mathrm{T}$.

Збереження монотонності, антитонності, тотальності предикатів. Пропозиційні зв'язки, реномінації та квантори зберігають [5, 8] монотонність і антитонність предикатів. Це вірно і для розширеної реномінації.

Твердження 3. Композиції $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}$ зберігають монотонність і антитонність предикатів.

Нехай $d_1 \supseteq d_2$ та предикат P монотонний, предикат Q антитонний. Із $d_1 \supseteq d_2$ отримуємо $r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1) \subseteq r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)$, звідки за монотонністю P маємо $P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)) \subseteq P(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1))$, за монотонністю Q маємо $Q(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_2)) \supseteq Q(r^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(d_1))$. Отже, якщо P монотонний, то $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}P$ монотонний; якщо Q антитонний, то $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}Q$ антитонний.

Наслідок 1. Базові композиції ε-ЧКНЛРР (окрім спеціальних 0-арних композицій – предикатів-індикаторів εz) зберігають монотонність і антитонність предикатів.

Твердження 4. Композиції $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}$ зберігають тотальність предикатів.

Нехай P тотальний. Для кожного $d\in {}^{V}\!A$ маємо $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(P)(d) = P(r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(d))$, але за тотальністю P маємо $P(r^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(d))\downarrow$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$, тому $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(P)(d)\downarrow$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$, тобто $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}(P)$ – тотальний.

Як наслідок можна отримати, що композиції $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{y}}$ зберігають тотальність предикатів.

Твердження 5. Композиції $\neg$, $\vee$, $\exists xP$ зберігають тотальність предикатів.
Для пропозиційних композицій твердження очевидне.
Нехай P тотальний. Маємо $\exists xP(d)\uparrow$, якщо немає таких $a\in A$, що $P(d\nabla x\mapsto a) = T$, та $P(d\nabla x\mapsto c)\uparrow$ для деяких $c\in A$. За тотальністю P неможливо $P(d\nabla x\mapsto c)\uparrow$. Отже, $\exists xP(d)\downarrow$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$, тобто $\exists xP$ – тотальний.

Наслідок 2. Базові композиції ε-ЧКНЛРР зберігають тотальність предикатів.

Наслідок 3. Предикат $\perp$ не може бути виражений через предикати εy за допомогою $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{y},\perp}$, $\exists x$.

Елімінація кванторів. Розглянемо властивості ε-ЧКНЛРР, пов'язані з елімінацією кванторів.

Теорема 1. Справджуються наступні співвідношення:

$$T(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(P)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq T(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \qquad (\mathrm{TR}_{\perp}\exists\mathrm{d})$$

$$F(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists xP)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq F(\mathrm{R}^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(P)) \qquad (\mathrm{FR}_{\perp}\exists\mathrm{d})$$

Твердження 6. $A \cap F(\varepsilon z) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup T(\varepsilon z)$; $A \cap T(\varepsilon z) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup F(\varepsilon z)$.

Враховуючи твердження 7, із теореми 1 отримуємо:

Наслідок 4. Для ε-ЧКНЛРР справджуються наступні співвідношення:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \subseteq T(\varepsilon y) \cup T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \qquad (\mathrm{TR}_{\perp}\exists\mathrm{u})$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \subseteq T(\varepsilon y) \cup F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \qquad (\mathrm{FR}_{\perp}\exists\mathrm{u})$$

Як окремий випадок $\mathrm{TR}_{\perp}\exists\mathrm{d}$, $\mathrm{FR}_{\perp}\exists\mathrm{d}$, $\mathrm{TR}_{\perp}\exists\mathrm{u}$, $\mathrm{FR}_{\perp}\exists\mathrm{u}$ отримуємо властивості (фактично вже на рівні ЧКНЛ):

$$T(\mathrm{R}_{y}^{x}(P)) \cap F(\varepsilon y) \subseteq T(\exists xP);\ \ F(\exists xP) \cap F(\varepsilon y) \subseteq F(\mathrm{R}_{y}^{x}(P))\ ;$$

$$T(\mathrm{R}_{y}^{x}(P)) \subseteq T(\varepsilon y) \cup T(\exists xP);\ \ F(\exists xP) \subseteq T(\varepsilon y) \cup F(\mathrm{R}_{y}^{x}(P))\ .$$

Розширені квантори. Введемо композиції узагальненої (розширеної) квантифікації, або розширені квантори, які враховують відсутність значення для квантифікованого імені. Для обґрунтування визначення цих композицій задамо множини істинності та хибності предиката P на даних із доданою компонентою $x{\mapsto}a$:

$$T_a^x(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\nabla x{\mapsto}a = T\} = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\,\|_{-x} + x{\mapsto}a) = T\};$$

$$F_a^x(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\nabla x{\mapsto}a = F\} = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\,\|_{-x} + x{\mapsto}a) = F\}.$$

Тоді визначення композицій $\exists x$ та $\forall x$ можна подати так:

$$T(\exists xP) = \bigcup_{a\in A} T_a^x(P)\ ;\ \ F(\exists xP) = \bigcap_{a\in A} F_a^x(P)\ ;\ \ T(\forall xP) = \bigcap_{a\in A} T_a^x(P)\ ;\ \ F(\forall xP) = \bigcup_{a\in A} F_a^x(P)\ .$$

Введемо множини істинності та хибності предиката P на даних, які не містять компоненти з іменем x:

$$T^{-x}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\,\|_{-x}) = T\};\ \ F^{-x}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d\,\|_{-x}) = F\}.$$

Враховуючи, що $r_{\perp}^{x}(d) = d\,\|_{-x}$, тоді маємо

$$T^{-x}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(r_{\perp}^{x}(d)) = T\} = \{d \in {}^V\!A \mid \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)(d) = T\} = T(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))\ ;$$

$$F^{-x}(P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(r_{\perp}^{x}(d)) = F\} = \{d \in {}^V\!A \mid \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P)(d) = F\} = F(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))\ .$$

Композиції розширеної квантифікації $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ задаємо так:

$$T(\exists_{\perp}xP) = T(\exists xP) \cup T^{-x}(P) = \bigcup_{a\in A} T_a^x(P) \cup T^{-x}(P)\ ;$$

$$F(\exists_{\perp}xP) = F(\exists xP) \cap F^{-x}(P) = \bigcap_{a\in A} F_a^x(P) \cap F^{-x}(P)\ ;$$

$$T(\forall_{\perp}xP) = T(\forall xP) \cap T^{-x}(P) = \bigcap_{a\in A} T_a^x(P) \cap T^{-x}(P)\ ;$$

$$F(\forall_{\perp}xP) = F(\forall xP) \cup F^{-x}(P) = \bigcup_{a\in A} F_a^x(P) \cup F^{-x}(P)\ .$$

Враховуючи, що $T^{-x}(P) = T(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$ та $F^{-x}(P) = F(\mathrm{R}_{\perp}^{x}(P))$, маємо еквівалентні визначення $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$:

$$\exists_{\perp}xP = \exists xP \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P); \qquad \forall_{\perp}xP = \forall xP \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(P).$$

Отже, при наявності розширених реномінацій композиції $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ є похідними.

Для розширених кванторів справджуються закони де Моргана:

$$\neg\exists_{\perp}xP = \forall_{\perp}x\neg P;\ \ \neg\forall_{\perp}xP = \exists_{\perp}x\neg P.$$

Розглянемо властивості розширеної квантифікації предикатів-індикаторів.

1. Властивості квантифікації предикатів-індикаторів εx за тим же іменем x:

$$\exists_{\perp}x\,\varepsilon x = \exists x\,\varepsilon x \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon x) = \mathrm{F} \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}; \qquad \exists_{\perp}x\,\neg\varepsilon x = \exists x\,\neg\varepsilon x \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \vee \mathrm{F} = \mathrm{T};$$

$$\forall_{\perp}x\,\varepsilon x = \forall x\,\varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon x) = \mathrm{F} \,\&\, \mathrm{T} = \mathrm{F}; \qquad \forall_{\perp}x\,\neg\varepsilon x = \forall x\,\neg\varepsilon x \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon x) = \mathrm{T} \,\&\, \mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

2. Для предикатів-індикаторів εz, квантифікованих за іншим іменем x, отримуємо:

$$\exists_{\perp}x\,\varepsilon z = \exists x\,\varepsilon z \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z \vee \varepsilon z = \varepsilon z; \qquad \exists_{\perp}x\,\neg\varepsilon z = \exists x\,\neg\varepsilon z \vee \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \vee \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z;$$

$$\forall_{\perp}x\,\varepsilon z = \forall x\,\varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\varepsilon z) = \varepsilon z \,\&\, \varepsilon z = \varepsilon z; \qquad \forall_{\perp}x\,\neg\varepsilon z = \forall x\,\neg\varepsilon z \,\&\, \mathrm{R}_{\perp}^{x}(\neg\varepsilon z) = \neg\varepsilon z \,\&\, \neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z.$$

Порівняємо властивості розширеної квантифікації предикатів-індикаторів.

1) $\exists_{\perp}x\,\varepsilon x = T$, водночас $\exists x\,\varepsilon x = F$;

2) $\forall_{\perp}x\,\varepsilon x = \forall x\,\varepsilon x = F$; $\exists_{\perp}x\,\neg\varepsilon x = \exists x\,\neg\varepsilon x = T$;

3) $\forall_{\perp}x\,\neg\varepsilon x = F$, водночас $\forall x\,\neg\varepsilon x = T$;

4) $\exists x\,\varepsilon z = \forall x\,\varepsilon z = \varepsilon z$ та $\exists_{\perp}x\,\varepsilon z = \forall_{\perp}x\,\varepsilon z = \varepsilon z$;

5) $\exists x\,\neg\varepsilon z = \forall x\,\neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z$ та $\exists_{\perp}x\,\neg\varepsilon z = \forall_{\perp}x\,\neg\varepsilon z = \neg\varepsilon z$.

Із визначення композицій розширеної квантифікації та наслідків 1 і 2 отримуємо:

Наслідок 5. Композиції $\exists_{\perp}x$ та $\forall_{\perp}x$ зберігають монотонність, антитонність і тотальність предикатів.

2. Семантичні моделі та мови ε-ЧКНЛРР

Семантичними моделями ε-ЧКНЛРР є композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня вигляду $({}^{V}A,\ Pr^{A},\ C)$, де C задана множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}, \exists x, \varepsilon z\}$. Така композиційна система задає некласичну алгебру (алгебраїчну систему) даних $(A,\ Pr^{A})$ та композиційну алгебру предикатів $(Pr^{A},\ C)$. Побудова композиційної системи визначає мову логіки: терми алгебри предикатів трактуємо як формули мови.

ε-ЧКНЛРР можна трактувати як окремий підрівень ЧКНЛ із базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$, εz.

Враховуючи, що предикати-індикатори не є монотонними та не є антитонними, поняття ε-ЧКНЛРР не розглядаємо для логік еквітонних та логік антитонних предикатів.

Алфавіт мови ε-ЧКНЛРР: множина V предметних імен; множина Ps предикатних символів (ПС) – сигнатура мови; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$, $\exists x$, εz. Множина Fr *формул* мови визначається так:

– $Ps \subseteq Fr$ та $\{\varepsilon z \mid z \in V\} \subseteq Fr$; формули вигляду $p \in Ps$ та εz – атомарні;

– $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Позначимо $nm(\Phi)$ множину всіх імен із V, які фігурують у символах реномінації та квантифікації, що входять до складу формули Φ. Таку $nm(\Phi)$ назвемо множиною імен формули Φ.

Позначимо $q(\Phi)$ множину всіх імен із V, які фігурують у символах квантифікації формули Φ. Таку $q(\Phi)$ назвемо множиною кванторних імен формули Φ.

Природним чином (за об'єднанням) розширимо nm та q на множини формул.

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $({}^{V}A,\ Pr^{A},\ C)$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \rightarrow Pr^{A}$ визначається на основі тотального однозначного відображення $I : Ps \rightarrow Pr^{A}$, яке позначає символами множини Ps базові предикати. Кожна формула вигляду εz, де $z \in V$, інтерпретується як відповідний предикат-індикатор εz. Такі формули εz завжди інтерпретуються однаково, тому ці формули та самі предикати-індикатори, які є їх значенням, ми позначаємо однаково; про що саме йдеться, має бути зрозумілим з контексту.

Для складних формул відображення $I : Fr \rightarrow Pr^{A}$ задається згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій:

– $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$, $I(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(I(\Phi))$, $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Відображення I пов'язує алгебру даних (A, Pr) із мовою ε-ЧКНЛРР. Отримуємо об'єкт $((A,\ Pr^{A}), I)$ – алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою, яка визначає композиційну систему $({}^{V}A,\ Pr^{A},\ C)$.

АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мови КНЛ із алгебрами даних. Називаємо їх моделями мови та скорочено позначаємо $\boldsymbol{A} = (A, I)$.

Предикат $I(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$, – далі позначаємо Φ_{A}.

Водночас предикати-індикатори позначаємо εz, опускаючи індекс, який позначає модель мови.

Ім'я $x \in V$ неістотне для формули Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x неістотне для предиката Φ_{A}.

Для ε-ЧКНЛРР традиційним чином (так, як для ЧКНЛ) визначаємо наступні важливі семантичні поняття.

Формула Φ частково істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, I)$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна, якщо Φ_{A} – частково істинний (неспростовний) предикат.

Формула Φ частково істинна, або неспростовна, якщо Φ $\boldsymbol{A}$-неспростовна на кожній моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{A}$-виконувана, якщо Φ_{A} – виконуваний предикат. Формула Φ виконувана, якщо Φ $\boldsymbol{A}$-виконувана на кожній моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Подібним чином даємо визначення:

– тотально істинної на $\boldsymbol{A}$ та тотально істинної формули;

– тотально хибної на $\boldsymbol{A}$ та тотально хибної формули;

– тотожно істинної на $\boldsymbol{A}$ та тотожно істинної формули;

– тотожно хибної на $\boldsymbol{A}$ та тотожно хибної формули.

Синтетично неістотні предметних імена. Для кожного $p\in Ps$ множину синтетично неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \to 2^V$. Продовжимо її до $\nu : Fr \to 2^V$:

$\nu(\varepsilon z) = V\setminus\{z\}$ для кожного $z\in V$;

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$; $\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi)\cap\nu(\Psi)$; $\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi)\cup\{x\}$;

$$\nu(R^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}_{x_1,\ldots,x_n,\perp,\ldots,\perp}\Phi) = (\nu(\Phi)\cup\{v_1,\ldots,v_n, u_1\ldots,u_m\})\setminus\{x_i \mid v_i\notin\nu(\Phi), i\in\{1,\ldots,n\}\}.$$

Множина тотально неістотних імен – це множина $V_T = \bigcap\limits_{p\in Ps} \nu(p)$.

Теорема 2. Нехай $x\in\nu(\Phi)$; тоді x неістотне для Φ.

Для виконання еквівалентних перетворень формул та пронесення реномінацій через квантори необхідно мати наперед необмежену множину тотально неістотних імен (див. властивість $R_\perp\exists\exists$). Тому для ε-ЧКНЛРР постулюємо нескінченність множини V_T.

Квазівільні предметні імена. Поняття квазівільних предметних імен та квазізамкненої формули для ε-ЧКНЛРР вводимо подібно випадку ЧКНЛ [2]. Входження в формулу нижнього імені x символа реномінації *зв'язане*, если воно знаходиться в області дії кванторного префікса $\exists x$, інакше таке входження *вільне.*

Множину $fr(\Phi)$ квазівільних імен формули Φ визначимо за допомогою функції $fr : Fr \to 2^V$.

Маємо $fr(p) = \varnothing$ для кожного $p\in Ps$; далі fr визначаємо так:

$fr(\varepsilon z) = \{z\}$ для кожного $z\in V$;

$fr(\neg\Phi) = fr(\Phi)$; $fr(\vee\Phi\Psi) = fr(\Phi)\cup fr(\Psi)$; $fr(\exists x\Phi) = fr(\Phi)\setminus\{x\}$;

$fr(R^{\bar v,\bar u}_{\bar x,\perp}\Phi) = (fr(\Phi)\setminus\{\bar v,\bar u\})\cup\{\bar x\}$.

Квазівільні імена є певним аналогом вільних змінних класичної логіки.

Формула Φ *квазізамкнена*, якщо $fr(\Phi) = \varnothing$.

Квазізамкнені формули є синтаксичними аналогами замкнених формул класичної логіки [2, 9], проте семантичними аналогами таких формул їх вважати не можна (див. [2]). До складу формули мови ε-ЧКНЛРР можуть входити предикатні символи, для яких множини істотних імен необов'язково скінченні. Можливість для формули бути залежною від наперед необмеженої множини предметних імен – визначальна властивість логік квазіарних предикатів, що істотно їх відрізняє від класичної.

Дуальні моделі мови. Поняття дуальних моделей мови та дуальних семантик для випадку ε-ЧКНЛРР вводимо так, як для ЧКНЛ. Модель мови $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ назвемо дуальною до моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$, якщо для кожного $\Phi\in Ps$ маємо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$.

Якщо $\boldsymbol{B}$ дуальна до $\boldsymbol{A}$, то $T(\Phi_A) = \overline{F(\Phi_B)}$ та $F(\Phi_A) = \overline{T(\Phi_B)}$, тобто $\boldsymbol{A}$ дуальна до $\boldsymbol{B}$.

Якщо модель мови $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна модель мови $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 3. Нехай $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$. Тоді для кожної формули Φ:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;

2) Φ_A монотонний $\Rightarrow$ Φ_B антитонний; Φ_A антитонний $\Rightarrow$ Φ_B монотонний.

П.1 теореми доводимо індукцією за побудовою формули, п.2 безпосередньо випливає з визначень.

Наслідок 6. Φ_A неспростовний на $\boldsymbol{A}$ із частковими однозначними предикатами (некласична семантика) $\Leftrightarrow$ Φ_B тотально істинний на дуальній $\boldsymbol{B}$ із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

Цей факт можна сформулювати так: *некласична семантика та пересичена семантика дуальні.*

Теорема 4. 1) У випадку некласичної семантики множина тотально істинних формул порожня;

2) у випадку пересиченої семантики множина неспростовних формул порожня;

3) у випадку загальної семантики множини тотально істинних та неспростовних формул порожні.

3. Семантичні властивості формул ε-ЧКНЛРР

Відношення логічного наслідку. Введемо відношення наслідку для двох формул мови ε-ЧКНЛРР при інтерпретації на фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$ (це робиться аналогічно випадку ЧКНЛ [8]):

1) Істиннісний наслідок $_A|\!=_T$: $\Phi_A \models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A)\subseteq T(\Psi_A)$.

2) Хибнісний наслідок ${}_A|=_F$: $\Phi_A \models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$.

3) Сильний наслідок ${}_A|=_{TF}$: $\Phi_A \models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A)$ та $F(\Psi_A) \subseteq F(\Phi_A)$.

4) Неспростовнісний (неокласичний) наслідок ${}_A|=_{Cl}$: $\Phi_A \models_{Cl} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_A) \cap F(\Psi_A) = \varnothing$.

5) Насичений наслідок ${}_A|=_{Cm}$: $\Phi_A \models_{Cm} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_A) \cup T(\Psi_A) = {}^V A$.

Тепер визначаємо відповідні відношення логічного наслідку $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ за наступною схемою:

$\Phi \models_* \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi_A \models_* \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Тут і надалі, якщо інше не вказане, $*$ – це одне з Cl, Cm, T, F, TF.
Відношення логічного наслідку індукують на множині формул відношення логічної еквівалентності.
Відношення еквівалентності ${}_A\!\sim_T$, ${}_A\!\sim_F$, ${}_A\!\sim_{TF}$, ${}_A\!\sim_{Cl}$, ${}_A\!\sim_{Cm}$ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ визначаємо за такою схемою:

$\Phi_A \sim_* \Psi$, якщо $\Phi_A \models_* \Psi$ та $\Psi_A \models_* \Phi$.

Звідси, зокрема, отримуємо: $\Phi_A \sim_{TF} \Psi \;\Leftrightarrow\; T(\Phi_A) = T(\Psi_A)$ та $F(\Phi_A) = F(\Psi_A)$.

Отже, $\Phi_A \sim_{TF} \Psi$ означає, що Φ_A та Ψ_A – це один і той же предикат.

Відношення логічної еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ визначаємо за схемою:

$\Phi \sim_* \Psi$, якщо $\Phi \models_* \Psi$ та $\Psi \models_* \Phi$.

Зрозуміло, що $\Phi \sim_* \Psi \Leftrightarrow \Phi_A \sim_* \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Для відношень $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ та $\sim_{TF}$ справджується (тут $*$ – це одне з Cl, Cm, TF):

Теорема 5 (семантичної еквівалентності). Нехай Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень $\Phi_1,...,\Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 5, взагалі кажучи, невірна (див. [5, 8]).

На пропозиційному рівні властивості відношень логічного наслідку та логічної еквівалентності в різних семантиках для формул мови ε-ЧКНЛРР такі ж, як для формул мови ЧКНЛ (див. [5, 8]).

Властивості формул, пов'язані з реномінаціями. На базі відповідних властивостей предикатів маємо:

R$_\perp$T) $R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$; зокрема, $R^{z,\bar{u}}_{z,\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{u}}_{\perp}(\Phi)$;

R$_\perp$U) нехай $z \in V$ неістотне для Φ, тоді $R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{y,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

Ren) нехай $z \in V$ неістотне для Φ, тоді $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists z R^x_z(\Phi)$;

R$_\perp\neg$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

R$_\perp\vee$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi) \vee R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Psi)$;

R$_\perp$R) $R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp}(R^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)) \sim_{TF} R^{\bar{v},\bar{z}}_{\bar{y},\perp} \circ^{\bar{u},\bar{t}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$;

R$_\perp\exists$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists y\Phi) \sim_{TF} \exists y R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$;

R$_\perp\exists\exists$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists y\Phi) \sim_{TF} \exists z R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp} \circ^y_z(\Phi)$ за умови $z \in V_T$ та $z \notin nm(R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\exists x\Phi))$.

Подібним чином можна записати властивості R$_\perp\to$, R$_\perp$&, R$_\perp\leftrightarrow$, R$_\perp\forall$R, R$_\perp\forall$, R$_\perp\forall\forall$.

R$_\perp\exists$R) $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,y}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ та $R^{\bar{u},\bar{w},x}_{\bar{v},\perp,\perp}(\exists x\Phi) \sim_{TF} R^{\bar{u},\bar{w}}_{\bar{v},\perp}(\exists x\Phi)$ (тут $x \notin \{\bar{u},\bar{w}\}$);

NR$_\perp$) При $y \notin \{z,\bar{x}\}$ маємо $\exists y R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi)$ та $\forall y R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi) \sim_{TF} R^{y,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi)$.

Основні властивості формул мови ε-ЧКНЛРР, які пов'язані з кванторами та не використовують реномінації, такі ж, як для формул в мови ЧКНЛ (див. [5, 8]).

Властивості формул, пов'язані з предикатами-індикаторами. Зазначені властивості індуковані наведеними вище відповідними властивостями предикатів.

εR$_\perp$) $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\varepsilon z) \sim_{TF} \varepsilon z$, якщо $z \notin \{\bar{v},\bar{u}\}$;

εdR$_\perp$) $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\varepsilon z) \sim_{TF} \varepsilon y$; зокрема, $R^z_y(\varepsilon z) = \varepsilon y$;

ε∃) $\exists x\, \varepsilon z \sim_{TF} \varepsilon z$; $\exists x \neg\varepsilon z \sim_{TF} \neg\varepsilon z$;

$\vee\varepsilon\exists$) $\exists x(\varepsilon x\vee\Phi)\sim_{TF}\exists x\Phi$; $\exists x\neg(\varepsilon x\vee\Phi)\sim_{TF}\exists x\neg\Phi$;

$\vee\varepsilon d\exists$) $\exists x(\Phi\vee\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\Phi\vee\varepsilon y$; $\exists x(\Phi\vee\neg\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\Phi\vee\neg\varepsilon y$.

Аналогічно властивості $\varepsilon\exists$, для квантора $\forall x$ маємо:

$\varepsilon\forall$) $\forall x\,\varepsilon z\sim_{TF}\varepsilon z$; $\forall x\neg\varepsilon z\sim_{TF}\neg\varepsilon z$;

Подібно до $\vee\varepsilon\exists$ та $\vee\varepsilon d\exists$ можна додатково записати:

$\exists x(\neg\varepsilon x\&\Phi)\sim_{TF}\exists x\Phi$; $\exists x\neg(\neg\varepsilon x\&\Phi)\sim_{TF}\exists x\neg\Phi$;

$\forall x(\varepsilon x\vee\Phi)\sim_{TF}\forall x\Phi$; $\forall x(\neg\varepsilon x\&\Phi)\sim_{TF}\forall x\Phi$;

$\exists x\neg(\Phi\vee\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\neg\Phi\&\neg\varepsilon y$; $\exists x\neg(\Phi\vee\neg\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\neg\Phi\&\varepsilon y$;

$\exists x(\Phi\&\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\Phi\&\varepsilon y$; $\exists x(\Phi\&\neg\varepsilon y)\sim_{TF}\exists x\Phi\&\neg\varepsilon y$;

$\forall x(\Phi\vee\varepsilon y)\sim_{TF}\forall x\Phi\vee\varepsilon y$; $\forall x(\Phi\vee\neg\varepsilon y)\sim_{TF}\forall x\Phi\vee\neg\varepsilon y$;

$\forall x(\Phi\&\varepsilon y)\sim_{TF}\forall x\Phi\&\varepsilon y$; $\forall x(\Phi\&\neg\varepsilon y)\sim_{TF}\forall x\Phi\&\neg\varepsilon y$.

Формули, які задають предикати T та F, назвемо константними. Такими є формули:

$\exists x\,\neg\varepsilon x_A=\neg\exists x\,\varepsilon x_A=T$; $\exists x(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=\neg\exists x\neg(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=T$;

$\exists x\,\varepsilon x_A=\neg\exists x\,\neg\varepsilon x_A=F$; $\exists x\neg(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=\neg\exists x(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=F$;

$R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\varepsilon z)_A=T$; зокрема: $R^{\bar{v},z}_{\bar{x},\perp}(\varepsilon z)_A=T$, $R^{z}_{\perp}(\varepsilon z)_A=T$;

Також маємо:

$\forall x(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=\forall x\neg(\varepsilon x\&\Phi)_A=\exists x\neg(\varepsilon x\&\Phi)_A=T$;

$\forall x\neg(\neg\varepsilon x\vee\Phi)_A=\exists x(\varepsilon x\&\Phi)_A=\forall x(\varepsilon x\&\Phi)_A=F$.

Формули вигляду $\exists x\,\neg\varepsilon x$, $\neg\exists x\,\varepsilon x$, $\exists x(\neg\varepsilon x\vee\Phi)$, $\neg\exists x\neg(\neg\varepsilon x\vee\Phi)$, $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\varepsilon z)$ назвемо εT-формулами.

Формули вигляду $\exists x\,\varepsilon x$, $\neg\exists x\,\neg\varepsilon x$, $\exists x\neg(\neg\varepsilon x\vee\Phi)$, $\neg\exists x(\neg\varepsilon x\vee\Phi)$, $\neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\varepsilon z)$ назвемо їх εF-формулами.

εT-формули та εF-формули назвемо виділеними константними ε-формулами.

Нормальні форми. Кожну формулу ε-ЧКНЛРР можна звести до класичноподібної нормальної форми.

Формулу Ψ назвемо варіантою формули Ξ, якщо Ψ утворена з Ξ послідовними замінами підформул вигляду $\exists x\Phi$ на підформули $\exists y\,R^{x}_{y}(\Phi)$ за умови $y\in\nu(\Phi)$. Згідно теореми 2, Ren та теореми 5 отримуємо:

Теорема 6 (про варіанту). Нехай Ψ – варіанта формули Ξ. Тоді $\Psi\sim_{TF}\Xi$.

Формула Ψ *різнокванторна*, якщо всі входження кванторних префіксів у Ψ (якщо вони є) – по різних тотально неістотних іменах, та кожне $y\in q(\Psi)$ не лежить в області дії символу $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ такого, що $y\in\{\bar{v},\bar{x},\bar{u}\}$.

Формула Ψ знаходиться в *нормальній формі*, або *нормальна*, якщо вона різнокванторна та всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до ПС.

Теорема 7. Для кожної формули Φ можна збудувати нормальну формулу Ψ таку, що $\Phi\sim_{TF}\Psi$.

Кожному входженню кванторного префікса у Φ зіставимо нове $y\in V_T$, причому різним таким входженням зіставимо різні тотально неістотні імена. Далі замінюємо кожну підформулу вигляду $\exists x$A на $\exists y\,R^{x}_{y}(\mathrm{A})$, де $y\in V_T$ зіставлене такому входженню $\exists x$ у Φ. Отримуємо різнокванторну Ξ, яка є варіантою формули Φ, тому $\Phi\sim_{TF}\Xi$.

За Ξ будуємо формулу Ψ. Використовуючи $R_\perp R$, $R_\perp\neg$ та $R_\perp\vee$, проносимо всі символи реномінації вглиб до рівня атомарних підформул, принагідно виконуючи спрощення згідно $R_\perp T$, $R_\perp U$, $\varepsilon R_\perp$, $\varepsilon dR_\perp$. Отримуємо нормальну формулу Ψ таку, що $\Xi\sim_{TF}\Psi$. Враховуючи $\Phi\sim_{TF}\Xi$, звідси $\Phi\sim_{TF}\Psi$.

4. Відношення логічного наслідку для множин формул

Відношення логічного наслідку для множин формул ε-ЧКНЛРР визначаються так, як для випадку ЧКНЛ.

Нехай $\Gamma\subseteq Fr$ та $\Delta\subseteq Fr$ – деякі множини формул, АС $\boldsymbol{A}$ – модель мови.

Надалі у випадку $\Gamma\,{}_A{\models}\,\Delta$ скорочено позначаємо:

$\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma}T(\Phi_A)$ як $T(\Gamma_A)$, $\bigcup\limits_{\Psi\in\Delta}T(\Psi_A)$ як $T(\Delta_A)$, $\bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma}F(\Phi_A)$ як $F(\Gamma_A)$, $\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta}F(\Psi_A)$ як $F(\Delta_A)$.

Відношення ${}_A{\models}_T$, ${}_A{\models}_F$, ${}_A{\models}_{TF}$, ${}_A{\models}_{Cl}$, ${}_A{\models}_{Cm}$ наслідку для пари множин формул в моделі мови $\boldsymbol{A}$ задаємо так:

$\Gamma\,{}_A{\models}_T\,\Delta$, якщо $T(\Gamma_A)\subseteq T(\Delta_A)$;

$\Gamma\ {}_A|\!=_F \Delta$, якщо $F(\Delta_A) \subseteq F(\Gamma_A)$;

$\Gamma\ {}_A|\!=_{TF} \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_A|\!=_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_A|\!=_F \Delta$;

$\Gamma\ {}_A|\!=_{Cl} \Delta$, якщо $T(\Gamma_A) \cap F(\Delta_A) = \varnothing$;

$\Gamma\ {}_A|\!=_{Cm} \Delta$, якщо $F(\Gamma_A) \cup T(\Delta_A) = {}^V\!A$.

Відповідні відношення $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ логічного наслідку для пари множин формул вводимо за наступною схемою ($*$ – це одне з Cl, Cm, T, F, TF):

$\Phi\ |\!=_* \Psi \ \Leftrightarrow\ \Phi\ {}_A|\!=_* \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 8. Нехай модель мови $\boldsymbol{B} = (A, I_B)$ дуальна до моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, I_A)$. Тоді:

1) $\Gamma\ {}_A|\!=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_B|\!=_F \Delta$ та $\Gamma\ {}_A|\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_B|\!=_T \Delta$;

2) $\Gamma\ {}_A|\!=_{Cl} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_B|\!=_{Cm} \Delta$ та $\Gamma\ {}_A|\!=_{Cm} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}_B|\!=_{Cl} \Delta$.

Наслідок 7. У випадку загальної семантики $\Gamma\ |\!=_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_{TF} \Delta$.
Випливає з того, що загальній семантиці кожна модель мови $\boldsymbol{B}$ є дуальною до деякої моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Наслідок 8. 1) $\Gamma\ |\!=_{Cl} \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow$ $\Gamma\ {}_B|\!=_{Cm} \Delta$ в пересиченій;

2) $\Gamma\ |\!=_T \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_F \Delta$ в пересиченій;

3) $\Gamma\ |\!=_F \Delta$ в неокласичній семантиці $\Leftrightarrow \Gamma\ |\!=_T \Delta$ в пересиченій.

Теорема 9 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$, тоді $\Phi, \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma\ |\!= \Delta$ та $\Gamma\ |\!= \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!= \Delta, \Psi$.
Тут $|\!=$ – одне з відношень $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ у відповідних семантиках.
Теорему 9 можна переформулювати для $\sim_{Cl}$ і $|\!=_{Cl}$ та для $\sim_{Cm}$ і $|\!=_{Cm}$.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул. В наведених нижче властивостях, якщо інше не зазначене окремо, $|\!=$ означає: для неокласичної семантики – це $|\!=_{Cl}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$; для пересиченої – $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$; для загальної – $|\!=_{TF}$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma\ |\!= \Delta \Rightarrow \Lambda\ |\!= \Sigma$;

εd) $\Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma\ |\!= \Delta$ та $\Gamma\ |\!= \Delta, \varepsilon y$ (ε-розподіл);

C) $\Phi, \Gamma\ |\!= \Delta, \Phi$.

Властивість *C* гарантує наявність кожного з наслідків у всіх семантиках.
У відповідних семантиках маємо властивості, які додатково гарантують наявність логічного наслідку:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ |\!= \Delta$ (для неокласичної семантики $|\!=$ – це $|\!=_T$, $|\!=_{Cl}$; для пересиченої – $|\!=_F$, $|\!=_{Cm}$);

CR) $\Gamma\ |\!= \Delta, \Phi, \neg\Phi$ (для неокласичної семантики $|\!=$ – це $|\!=_F$, $|\!=_{Cl}$; для пересиченої – $|\!=_T$, $|\!=_{Cm}$);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ |\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$ для неокласичної семантики чи пересиченої семантики.

Властивості пропозиційного рівня:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!= \Delta$;

$\neg\neg_R$) $\Gamma\ |\!= \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!= \Delta, \Phi$;

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!= \Delta$ та $\Psi, \Gamma\ |\!= \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma\ |\!= \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma\ |\!= \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma\ |\!= \Delta$;

$\neg\vee_R$) $\Gamma\ |\!= \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma\ |\!= \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma\ |\!= \Delta, \neg\Psi$.

Для $|\!=_{Cl}$ (неокласична семантика) та $|\!=_{Cm}$ (пересичена семантика) додатково маємо (тут $|\!=$ – це $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ |\!= \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma\ |\!= \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ |\!= \Delta$.

Для $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ властивості $\neg_L$ та $\neg_R$ невірні (див. [5, 8]). Тому для $|\!=_{Cl}$ і $|\!=_{Cm}$ можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини відношення у праву і навпаки, але це не можна робити для $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$.

Розглянемо основні властивості, пов'язані з розширеними реномінаціями та кванторами. При кожній інтерпретації предикати, що є значеннями виділених формул, збігаються, тому наведені властивості справджуються для $|\!=_{TF}$, вони вірні також для $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$.

$R_\perp T_L$) $R^{z,\bar{v},\bar{u}}_{z,\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma\ |\!= \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(\Phi), \Gamma\ |\!= \Delta$;

$R_\perp T_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x},\perp}^{z,\bar{v},\bar{u}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$\Phi_\perp U_L$) $R_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $y \in \nu(\Phi)$;

$\Phi_\perp U_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{z,\bar{x},\perp}^{y,\bar{v},\bar{u}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$ за умови $y \in \nu(\Phi)$;

$R_\perp R_L$) $R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}} \circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$R_\perp R_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}} \circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)$;

$R_\perp \neg_L$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$R_\perp \neg_{|R}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$R_\perp \vee_L$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ та $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

$R_\perp \vee_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi)$;

$R_\perp \exists_L$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{u}\}$;

$R_\perp \exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}, \bar{u}\}$;

$R_\perp \exists\exists_L$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists y\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}} \circ_z^y(\Phi), \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in V_T$, $z \notin nm(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists x\Phi))$;

$R_\perp \exists\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}} \circ_z^y(\Phi)$ за умови $z \in V_T$, $z \notin nm(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\exists x\Phi))$.

Для $\models_T$, $\models_F$ та $\models_{TF}$ не можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини відношення у праву і навпаки, тому наведені вище властивості можна переформулювати для випадку зовнішнього заперечення на реномінацію. Для $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ такі властивості можна явно не виписувати. Наведемо для прикладу:

$\neg R_\perp R_L$) $\neg R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}} \circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg R_\perp R_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}}(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{y},\perp}^{\bar{v},\bar{z}} \circ_{\bar{x},\perp}^{\bar{u},\bar{t}}(\Phi)$;

$\neg R_\perp \neg_L$) $\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg R_\perp \neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$;

$\neg R_\perp \vee_L$) $\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg R_\perp \vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)$` та $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi)$.

Наведемо основні властивості відношень логічного наслідку для множин формул, пов'язані з предикатами-індикаторами. Вони індуковані відповідними властивостями формул.

$\neg\varepsilon$) $\neg\varepsilon y, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\varepsilon y \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta$;

$\exists_s\varepsilon$) $\exists x\,\varepsilon z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \exists x\,\varepsilon z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

$\exists_s\neg\varepsilon$) $\exists x \neg\varepsilon z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \exists x \neg\varepsilon z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\varepsilon z$;

$\neg\exists_s\varepsilon$) $\neg\exists x\,\varepsilon z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x\,\varepsilon z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\varepsilon z$;

$\neg\exists_s\neg\varepsilon$) $\neg\exists x \neg\varepsilon z, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x \neg\varepsilon z \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$;

$R_\perp\varepsilon$) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varepsilon z), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varepsilon z) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ за умови $z \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$;

$\neg R_\perp\varepsilon$) $\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varepsilon z), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\varepsilon z, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\varepsilon z) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\varepsilon z$ за умови $z \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$;

$R_\perp\varepsilon v$) $R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$;

$\neg R_\perp\varepsilon v$) $\neg R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\varepsilon y, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\varepsilon y$.

Пов'язані з виділеними константними ε-формулами умови, які гарантують наявність логічного наслідку:

$C\varepsilon$) $\exists x\,\varepsilon x, \Gamma \models \Delta$; $\neg\exists x \neg\varepsilon x, \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x\,\varepsilon x$; $\Gamma \models \Delta, \exists x \neg\varepsilon x$;

$CR_\perp\varepsilon$) $\neg R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z), \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(\varepsilon z)$;

$C\Phi\varepsilon$) $\exists x \neg(\neg\varepsilon x \vee \Phi), \Gamma \models \Delta$; $\neg\exists x(\neg\varepsilon x \vee \Phi), \Gamma \models \Delta$; $\Gamma \models \Delta, \exists x(\neg\varepsilon x \vee \Phi)$; $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x \neg(\neg\varepsilon x \vee \Phi)$.

Властивості елімінації кванторів фактично успадковуються від ЧКНЛ (див. [5]):

$\exists_{L\varepsilon}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (тут $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists_{R\varepsilon}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg R_z^x(\Phi), \varepsilon z$ (тут $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists u_R$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi), \varepsilon z$ (тут $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists u_L$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (тут $z \in V_T$ та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists v_R$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \varepsilon y$;

$\neg\exists v_L$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta, \varepsilon y \Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon y$.

Властивості відношень $\models_{TF}$, $\models_T$, $\models_F$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для ε-ЧКНЛРР низки числень секвенційного типу.

Висновки

Досліджено першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Запропоновано розширення цих логік узагальненими реномінаціями та спеціальними предикатами-індикаторами наявності значення для предметних змінних. Описано мови та семантичні моделі таких логік, досліджено їх семантичні властивості. Особливу увагу приділено вивченню відношень логічного наслідку, зокрема, відношень логічного наслідку для множин формул. Властивості таких відношень є семантичною основою побудови для пропонованих логік числень секвенційного типу, що планується зробити в наступних роботах.

1. *Handbook* of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford Univ. Press. – Vol. 1–5, 1993–2000.
2. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
3. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк О.С.*, *Шкільняк С.С.* Логіки часткових предикатів з розширеними реномінаціями та кванторами // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 210–215.
4. *Nikitchenko M., Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – Springer, 2012. – Vol. 347. – P. 89–110.
5. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів: семантичні аспекти // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2012. – Вип. 4. – С. 165–172.
6. *Шкільняк С.С.* Семантичні властивості логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 297–302.
7. *Никитченко Н., Шкильняк С.* Семантические свойства и секвенциальные исчисления чистых композиционно-номинативных логик первого порядка // Information Theories and Applications: Internatinal Journal. – Sofia, Bulgaria, 2013. – Vol. 20. – N 4. – P. 379–390.
8. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. –№ 1. – С. 15–38.
9. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973. – 480 с.