

# Inférence bayésienne pour l'estimation de déformations larges par champs gaussien: application au recalage d'images multi-modales

Thomas Deregnacourt<sup>1</sup>

Chafik Samir<sup>1</sup>

Anne-Françoise Yao<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LIMOS, CNRS UMR 6620, Université Clermont Auvergne, France

<sup>2</sup>LMBP, CNRS UMR 6158, Université Clermont Auvergne, France

thomas.deregnacourt@uca.fr - chafik.samir@uca.fr - anne.yao@uca.fr

## Résumé

Le problème de recalage d'images consiste à estimer la déformation globale entre une image source  $I_1$  et une image cible  $I_2$ . Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'estimation d'un champ de déformation  $U$  sur le domaine  $\Omega = [0, 1]^2$  de  $I_1$  sachant  $U$  sur un ensemble fini de courbes  $\beta \in \Omega$ . Pour ce faire, nous proposons une nouvelle méthode basée sur des modèles gaussiens pour recalage des images multimodales. La méthode proposée commence par résoudre le problème de correspondance entre les courbes  $\beta$  puis estime le déplacement sur tout  $\Omega$ . La solution optimale est calculée à l'aide du maximum de vraisemblance et de l'inférence bayésienne. D'après les résultats obtenus sur des données réelles et simulées, la déformation résultante a l'avantage d'être exacte sur les observations et d'être lisse sur  $\Omega$ .

## Mots Clef

Recalage d'images, Statistique spatiale, Processus gaussiens, Inférence bayésienne.

## Abstract

Image registration aims to estimate the global deformation between a target image  $I_1$  and a reference image  $I_2$ . In this context, we will focus on estimating a random field  $U$  on the  $I_1$  domain  $\Omega = [0, 1]^2$  based on observations of  $U$  on a finite set of curves  $\beta \in \Omega$ . Indeed, we present a new multimodal image registration method based on Gaussian random fields. The proposed method first find the optimal correspondences between curves  $\beta$  then estimate the deformation vector field on  $\Omega$ . The optimal solution is computed using Maximum Likelihood and Bayesian inference. Based on results using both real and simulated data, the resulting deformation has the advantage of being exact on the observations as being sufficiently smooth over the whole  $\Omega$ .

## Keywords

Image registration, Spatial statistics, Gaussian process, Bayesian inference.

## 1 Introduction

Le recalage d'images est une méthode qui vise à estimer la transformation, soumise à certaines contraintes, d'une image source  $I_1$  vers une image cible  $I_2$ , afin de fusionner leurs informations complémentaires. Cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines d'applications [11, 15, 2]. En imagerie médicale on utilise le recalage d'images pour détecter des maladies, valider un traitement, comparer les données du patient avec des atlas anatomiques, etc. [12]. L'estimation de cette déformation est basée soit sur les intensités, soit sur des caractéristiques géométriques, soit sur les deux [12, 10]. Dans le premier cas, on cherche une transformation concernant la correspondance entre les niveaux de gris, et dans le second la correspondance entre des points, des courbes, etc.

Pour cet article, nous nous sommes intéressés au problème de l'endométrie. Cette maladie est provoquée par l'apparition de muqueuse utérine, aussi appelé endomètre, en dehors de la cavité utérine. Elle touche approximativement 10% des femmes en âge de procréer, et peut provoquer divers symptômes tels que des douleurs pelviennes chroniques, une dysenterie sévère, une infertilité, etc. [3]. Il est alors nécessaire de pouvoir détecter si une patiente à l'endométrie afin de la traiter efficacement, que ce soit par des antalgiques, des traitements hormonaux, ou par chirurgie dans les cas les plus sévères. L'endomètre pouvant pénétrer d'autres tissus et organes, les méthodes de détection de l'endométrie se basent sur plusieurs modalités d'images, donnant des informations complémentaires. Plus précisément, l'échographie permet d'avoir une estimation de l'infiltration de l'endomètre dans d'autres tissus, et l'imagerie par résonance magnétique (IRM) une position précise des kystes [3]. La fusion des données IRM/échographie permet alors d'avoir un diagnostic précis, mais nécessite un recalage entre ces deux modalités.

Dans notre cas, les deux images  $I_1$  et  $I_2$  représentent respectivement l'échographie et l'IRM d'un même organe. Cependant, comme le montre la Figure 1, les modalités d'images ont des distributions d'intensités différentes, ce qui rend inefficace les méthodes de recalage basées sur les intensités. D'autre part, un spécialiste peut extraire le con-

tour des organes présents dans les deux images. Nous allons alors utiliser ces dernières pour effectuer le recalage. Pour ce faire, nous estimerons le champ de déformation entre les deux images, à l'aide des champs gaussiens.

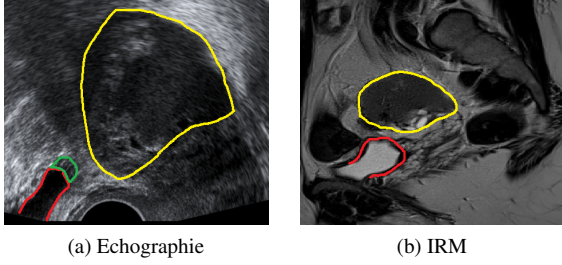


Figure 1: Exemple de courbes extraites manuellement issues d'images multimodales représentant les mêmes organes (en rouge et en jaune respectivement) : échographie à gauche et IRM à droite.

Le reste du papier est organisé de la manière suivante. Dans la section 2 nous formaliserons notre problème, et expliquerons en détail notre méthode de résolution. Puis nous présenterons nos résultats, sur des données synthétiques et réelles, dans la section 3. Enfin, la section 4 conclura ce papier.

## 2 Méthodologie

### 2.1 Formulation du problème

Soient  $\Omega$  un domaine fermé de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\beta_1 \subset I_1$  les courbes de l'échographie et  $\beta_2 \subset I_2$  celles de l'IRM. On cherche à estimer un champ de déformation  $\Psi$  sur  $\Omega$  transformant  $I_1$  en  $I_2$ . Ce champ doit déformer  $\beta_1$  en  $\beta_2$ , tout en étant lisse. Pour résoudre ce problème, il nous faut:

1. Trouver une correspondance optimale entre  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .
2. Estimer une déformation  $\Psi$  induite par un champ de déplacement  $U$ , c'est-à-dire telle que:

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega &\rightarrow \Omega \\ X &\mapsto \Psi(X) = X + U(X) \end{aligned}$$

et vérifiant la contrainte  $\Psi(\beta_1) = \beta_2$

Nous allons tout d'abord nous intéresser au premier problème.

### 2.2 Correspondance optimale entre courbes

Afin de trouver une correspondance optimale entre les courbes, nous adaptons les travaux de Srivastava et al. [13]. Dans ce papier, les auteurs s'intéressaient à l'analyse des formes, et cherchaient une invariance aux transformations préservant la forme, c'est-à-dire à la translation, la rotation, la mise à l'échelle et la re-paramétrisation. Dans notre cas, la translation et la rotation sont déjà fixées pour

toute l'image, et la mise à l'échelle n'est pas une nuisance. Ainsi, nous cherchons seulement l'invariance à la re-paramétrisation. Par brièveté, nous ne décrivons le processus que pour les courbes ouvertes, mais celui-ci peut être étendu simplement à des courbes fermés [7].

Soit  $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe ouverte paramétrisée. On utilise par la suite la représentation square-root velocity function (SRVF)  $q$  de  $\beta$ , défini par:

$$\begin{aligned} q : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \frac{\beta'(t)}{\sqrt{\|\dot{\beta}(t)\|_2}} \end{aligned}$$

Le mapping  $\beta \iff (\beta(0), q)$  étant une bijection, il est possible de revenir aux courbes originales en stockant le premier point de ces dernières. On note  $\mathcal{C}$  l'espace de SRVFs:

$$\mathcal{C} = \left\{ q \in \mathbb{L}^2([0, 1], \mathbb{R}^2) \mid \int_0^1 \|q(t)\|_2^2 dt = 1 \right\}$$

Comme on recherche une représentation des courbes invariante aux re-paramétrisations, nous allons utiliser des classes d'équivalence. Nous définissons d'abord le groupe des re-paramétrisations  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1, 0 < \dot{\gamma} < \infty \}$$

La re-paramétrisation d'une courbe  $\beta$  par  $\gamma \in \Gamma$  est donnée par  $\beta \circ \gamma$ , et la SRVF de cette courbe re-paramétrisée est alors  $(q \circ \gamma)\sqrt{\dot{\gamma}}$ . Ainsi, pour unifier tous les éléments de  $\mathcal{C}$  représentant la même courbe, on définit nos classes d'équivalence par  $[q] = \{(q \circ \gamma)\sqrt{\dot{\gamma}} \mid \gamma \in \Gamma\}$ . On note  $\mathcal{S} = \mathcal{C}/\Gamma = \{[q], q \in \mathcal{C}\}$  l'ensemble des classes d'équivalence. Afin de comparer deux courbes, on impose la métrique  $\mathbb{L}^2$  à  $\mathcal{S}$ . Sous la représentation SRVF, la métrique  $\mathbb{L}^2$  correspond à une métrique élastique sur l'espace original des courbes [8], ce qui permet de déformer les courbes pour avoir la correspondance optimale. Cette déformation optimale entre deux points sur  $\mathcal{S}$  est obtenue par le chemin géodésique, et la distance entre elles est définie par la longueur du chemin.

Afin de voir comment ceci peut résoudre notre problème, on note  $q_1$  et  $q_2$  la représentation SRVF respective des deux courbes  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . Afin de calculer la géodésique entre leurs classes d'équivalence  $[q_1]$  et  $[q_2]$ , on fixe  $q_1$ , et on cherche la re-paramétrisation optimale de  $q_2$  en résolvant  $\hat{\gamma} = \arg \inf_{\gamma \in \Gamma} \|q_1 - (q_2 \circ \gamma)\sqrt{\dot{\gamma}}\|_2^2$ . La re-paramétrisation  $\hat{\gamma}$  donnera alors la correspondance optimale entre les courbes.

Par la suite, on note  $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$  l'ensemble de  $N$  points représentant la discrétisation de  $\beta_1$  et  $\{U_i = U(X_i), i = 1, \dots, N\}$  les déplacements correspondants donnés par  $\beta_2 \circ \hat{\gamma}$ . Afin de résoudre le second problème, nous supposons que  $U$  est un champ gaussien.

### 2.3 Champ de déformation gaussien

On rappelle qu'un champ gaussien  $U$  est défini par:

$$U(X) \sim \mathcal{N}(\mu(X), C(X))$$

où  $\mu(X)$  et  $C(X)$  sont respectivement la moyenne et la variance de  $U(X)$ . Une loi gaussienne étant entièrement décrite par sa moyenne et sa variance, il nous suffit de trouver ces derniers pour définir notre champ. Pour ce faire, nous supposons tout d'abord que  $U$  est un champ stationnaire, c'est-à-dire que  $\mu(X) = \mu, \forall X \in \Omega$ . On a alors:

$$\mathcal{N}(\mu(X), C(X)) = \mu + \mathcal{N}(0, C(X))$$

ce qui implique que  $\mu$  est une translation sur l'image  $I_1$ . Nous pouvons alors supposer que  $\mu = 0$ . Nous estimons ensuite  $C(X)$  par une méthode paramétrique. Il existe un grand choix de fonctions de covariance candidates dans la littérature [14, 1]. Dans ce travail, nous avons choisi  $C$  comme fonction de covariance de Matérn :

$$C(h) = \tau \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (h\alpha)^\nu K_\nu(h\alpha) \quad (1)$$

où  $h$  est la corrélation spatiale et  $K$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. Généralement,  $\tau > 0$  est appelé le paramètre de variance (marginale),  $\alpha > 0$  le paramètre d'échelle et  $\nu > 0$  le paramètre de lissage. Si  $\nu = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{N}$ , l'équation 1 se réduit au produit d'une exponentielle et d'un polynôme[5]:

$$C(h) = \tau e^{-h\alpha} \sum_{l=0}^k \frac{(k+l)!}{(2k)!} \binom{k}{l} (2h\alpha)^{k-l}$$

Lorsque  $\nu = \frac{1}{2}$ ,  $C$  est la fonction de covariance exponentielle, et elle devient gaussienne pour  $\nu = +\infty$ . De manière plus générale, pour  $\nu = \frac{1}{2} + k$ , le champ  $U$  sera de classe  $C^k$ . Par conséquent, définir notre champ revient à estimer l'hyperparamètre  $\theta = (\tau, \alpha, \nu)$  de la fonction de covariance. On note  $C_\theta$  la fonction de covariance d'hyperparamètre  $\theta$ , et  $\Sigma_\theta$  la matrice de covariance associée aux points  $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$ , donnée par:

$$\Sigma_\theta = \begin{pmatrix} C_\theta(\|X_1 - X_1\|) & \dots & C_\theta(\|X_1 - X_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_\theta(\|X_N - X_1\|) & \dots & C_\theta(\|X_N - X_N\|) \end{pmatrix}$$

## 2.4 Estimation des paramètres de la fonction de covariance

**Estimation par maximum de vraisemblance.** Le premier estimateur considéré est obtenu par maximum de vraisemblance. Dans notre modèle, la fonction de vraisemblance est définie par:

$$L(\theta | U_X) = f(U_X | \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\Sigma_\theta|^{1/2}} e^{-\frac{U_X^T \Sigma_\theta^{-1} U_X}{2}}$$

où  $U_X = (U_1 \dots U_N)$ . Pour ce faire, nous devons minimiser la fonction de log-vraisemblance négative, donnée par:

$$-\log(L(\theta | U_X)) = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\tau) + \frac{\ln |V_{\alpha, \nu}|}{2} + \frac{U_X^T V_{\alpha, \nu}^{-1} U_X}{2\tau}$$

où  $\tau V_{\alpha, \nu} = \Sigma_\theta$ . Il n'existe cependant pas de solution analytique à cette équation, et devons alors utiliser des méthodes numériques pour déterminer  $\hat{\theta}$ . Pour ce faire, nous avons choisi de comparer les méthodes de Nelder-Mead [9], la descente du gradient et de Newton. L'optimisation sur  $\nu$  étant difficile dans notre cas, nous avons estimé ce paramètre par validation croisée.

**Estimation par inférence bayésienne.** Malgré l'utilisation de méthodes itératives, notre estimation de l'estimateur du maximum de vraisemblance peut converger vers des maximums locaux. Afin d'éviter cela, nous avons choisi d'utiliser d'autres estimateurs basés sur l'inférence bayésienne. On va alors trouver des estimateurs à partir de la loi a posteriori de nos paramètres  $f(\theta | U_X)$ . Cette dernière est construite, avec une loi a priori  $\pi(\theta)$  sur nos paramètres, à l'aide de la règle de Bayes:

$$f(\theta | U_X) = \frac{f(U_X | \theta)\pi(\theta)}{\pi(U_X)} \propto L(\theta | U_X)\pi(\theta)$$

Cependant, la loi de la densité a posteriori de nos paramètres n'étant pas calculable, nous allons alors échantillonner cette distribution. Pour ce faire nous utilisons une méthode de Monte-Carlo par chaîne de Markov (MCMC): l'algorithme de Metropolis-Hastings [6]. Ce dernier construit, à partir d'une loi de proposition  $q(\cdot | \theta)$ , une chaîne de Markov de la manière suivante.

- Choisir  $\theta^1 \sim \pi(\theta)$
- Créer  $\theta^{t+1}$  à l'aide de  $\theta^t$ 
  1. Générer  $\theta^* \sim q(\cdot | \theta^t)$
  2. Calculer la probabilité d'acceptation  $p$ :
$$p = \min \left( 1, \frac{\pi(\theta^{t+1})L(\theta^{t+1} | U_X)q(\theta^t | \theta^{t+1})}{\pi(\theta^t)L(\theta^t | U_X)q(\theta^{t+1} | \theta^t)} \right)$$
  3. Choisir  $\theta^{t+1} = \theta^*$  avec probabilité  $p$ , sinon choisir  $\theta^{t+1} = \theta^t$

Afin de construire notre chaîne de Markov, nous devons définir les lois de  $\pi(\theta)$  et  $(q(\theta | \cdot))$ . Pour ce faire, nous supposons tout d'abord que ces lois sont séparables, c'est-à-dire que  $q(\theta | \cdot) = q(\tau | \cdot)q(\alpha | \cdot)q(\nu | \cdot)$  et  $\pi(\theta) = \pi(\tau)\pi(\alpha)\pi(\nu)$ . N'ayant que peu d'informations a priori sur nos paramètres, nous choisissons de mettre des lois peu informatives, dont un résumé est présenté en Tableau 1.

Lois a priori $\pi(\cdot)$	Lois de proposition $q(\cdot   \tilde{\theta})$
$\alpha \sim \mathcal{U}[0, 1]$	$\alpha \sim \mathcal{U}[\tilde{\alpha} - 0.05, \tilde{\alpha} + 0.05]$
$\tau \sim \mathcal{U}[0, 500]$	$\tau \sim \mathcal{U}[\tilde{\tau} - 50, \tilde{\tau} + 50]$
$\nu \sim \mathcal{U}[\frac{1}{2}, \dots, \frac{11}{2}]$	$\nu \sim \mathcal{U}[\tilde{\nu} - 1, \dots, \tilde{\nu} + 1]$

Tableau 1: Distribution a priori et de proposition sur le paramètre  $\theta$ .

Une fois la chaîne MCMC construite, nous avons choisi d'estimer  $\hat{\theta}$  à partir de la loi a posteriori  $f(\alpha | U_X)$ , plutôt que de  $f(\theta | U_X)$ . Pour ce faire, on estime tout d'abord  $\hat{\alpha}$ , puis on sélectionne l'hyperparamètre  $\hat{\theta}$  correspondant. Il existe trois estimateurs bayésiens, que nous utiliserons par la suite: le maximum a posteriori (MAP), la moyenne et la médiane.

## 2.5 Interpolation sur une nouvelle position

Une fois l'hyperparamètre  $\hat{\theta}$  estimé, la fonction de covariance  $\hat{C}$  est connue, et ainsi la loi de  $U$  également. Il nous reste alors à interpoler le déplacement  $U(X^*)$  sur une nouvelle position  $X^*$ . Pour ce faire, nous allons calculer l'espérance conditionnelle. Comme  $U$  est un processus gaussien, ceci revient à effectuer un krigeage simple[4], défini par:

$$U(X^*) = (U_1 \quad \dots \quad U_N) \hat{\Sigma}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{C}(\|X^* - X_1\|) \\ \dots \\ \hat{C}(\|X^* - X_N\|) \end{pmatrix}$$

## 3 Applications

Pour chaque exemple, on discrétise les courbes en 300 points. Avant de présenter nos résultats, nous présentons les critères de qualité du recalage.

### 3.1 Critères sur la qualité du recalage

Un bon recalage doit avoir une faible erreur d'interpolation, et doit être lisse. Pour évaluer la qualité d'interpolation de notre méthode, on utilise 200 points pour effectuer le recalage, et les 100 restants pour l'évaluation. La qualité est alors estimée entre les points d'évaluation à l'aide de la racine carré des erreurs en moyenne quadratique (RMSE). Comme on utilise des courbes pour effectuer notre recalage, on peut aussi utiliser ces dernières pour estimer la qualité d'interpolation. Nous avons choisi d'utiliser la distance de Fréchet (FD) définie par:

$$d_F(F_1, F_2) = \inf_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma} \max \{d(F_1 \circ \gamma_1, F_2 \circ \gamma_2)\}$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des reparamétrisations. Concernant la régularité du champ de déformation, nous utilisons la carte de la norme du laplacien. Un maximum de la norme du laplacien (MaxLap) faible signifie alors que le champ de déformation est lisse.

### 3.2 Application à des données synthétiques

Afin d'évaluer la performance de notre approche, nous nous intéressons à des données synthétiques présentant différents degrés de déformation. Un exemple de résultat obtenu est présenté en Figure 2. En ce basant sur la courbe de la norme du laplacien, on remarque que la déformation est lisse et locale. De plus, d'après le Tableau 2, qui résume l'évaluation de chaque méthode sur cet exemple, le champ de déformation admet de faibles erreurs d'interpolation.

Méthode	RMSE	DF	MaxLap
Nelder-Mead	0.0713	0.5813	0.2902
Gradient	0.0699	0.5541	0.2889
Newton	<b>0.0698</b>	<b>0.5477</b>	<b>0.2878</b>
MAP	0.0718	0.5909	0.2982
Moyenne	0.0721	0.5947	0.3003
Mediane	0.0718	0.5918	0.2990

Tableau 2: Evaluation quantitative des différentes méthodes d'estimation des paramètres sur un exemple de données synthétique présenté en Figure 2.

### 3.3 Application sur des données réelles

Contrairement aux données synthétiques, plusieurs courbes peuvent être en correspondance pour le même recalage d'images IRM/échographie. La Figure 3 montre un exemple de ce type de données, dont les résultats obtenus sont résumés dans le Tableau 3. Sur cet exemple, les méthodes d'optimisation de Nelder-Mead et de Newton ne donnent pas de bons résultats. Pour la descente du gradient et l'inférence bayésienne, le recalage est lisse et donne de faibles erreurs d'interpolation.

Afin d'étudier la stabilité de notre méthode, nous l'avons appliqué sur 7 données réelles. Les résultats obtenus sont résumés sur la Figure 4. En moyenne, l'erreur d'interpolation est faible pour tous les estimateurs, avec un champ de déformation relativement lisse. Les estimateurs bayésiens sont plus performants car ils fournissent un champ de déformation plus lisse, tout en gardant une petite erreur d'interpolation.

Méthode	RMSE	DF	MaxLap
Nelder Mead	0.1272	0.1796	0.7550
Gradient	0.1353	<b>0.1132</b>	0.4091
Newton	<b>0.1268</b>	0.1755	0.7058
MAP	0.1383	0.1200	<b>0.3667</b>
Moyenne	0.1380	0.1190	0.3680
Mediane	0.1381	0.1201	0.3673

Tableau 3: Évaluation quantitative des différentes méthodes d'estimation des paramètres sur un exemple de données réelle présenté en Figure 3.

## 4 Conclusion

Nous avons construit un outil de recalage d'images, basé sur les champs gaussiens. Cette méthode est efficace car le champ estimé est lisse et admet de faibles erreurs d'interpolation.

Afin d'améliorer l'estimation des paramètres, et donc la qualité du recalage, plusieurs approches sont envisagées

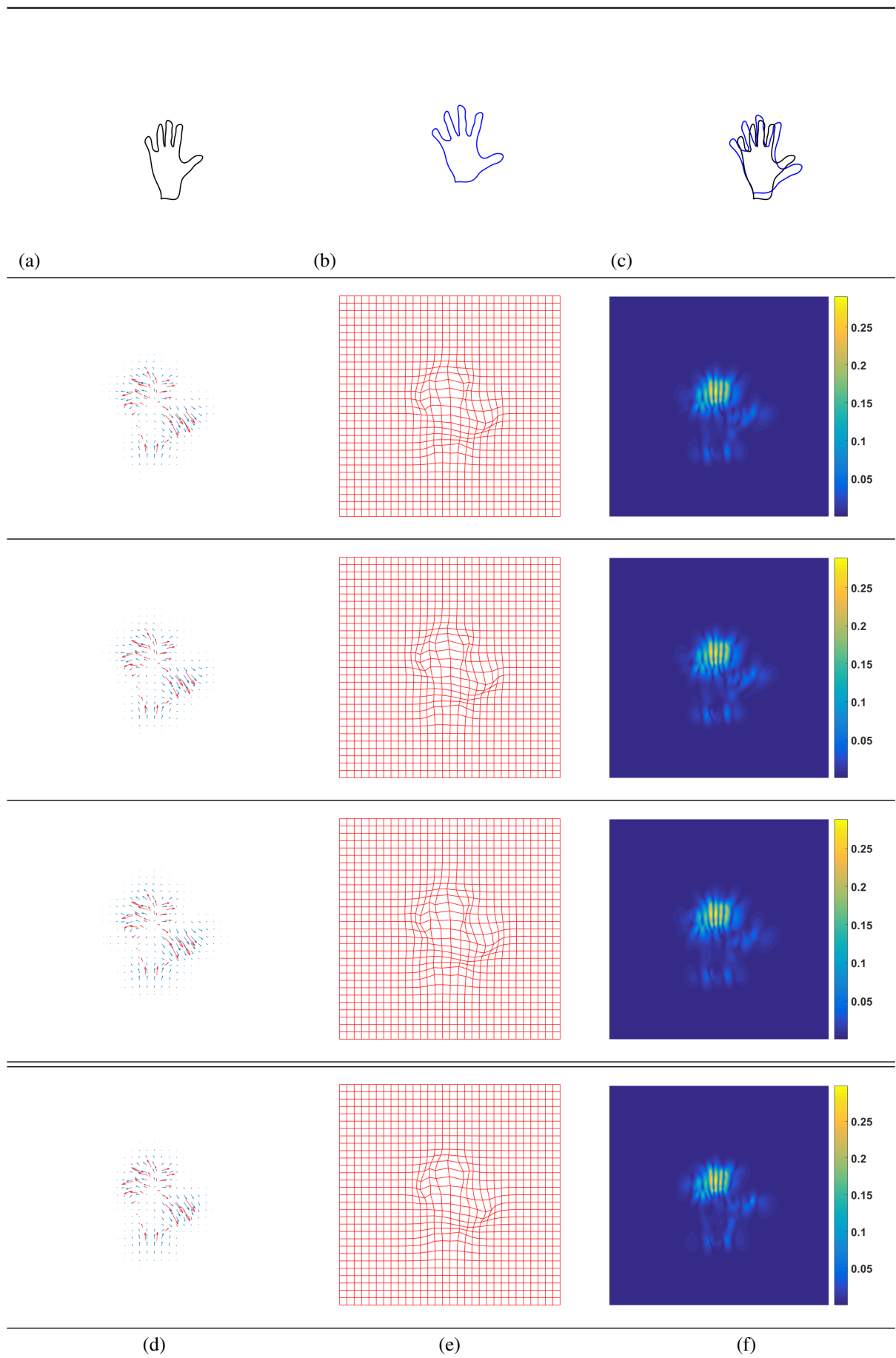


Figure 2: Exemple de champ de déformation estimé sur des données synthétiques: (a) courbes sources, (b) courbes cible, (c) courbes sources (en noir) et cible (en bleu) superposées, (d) le champ de déformation connu (rouge) et estimé (bleu), (e) la grille uniforme déformé par le champ estimé, et (f) la carte de la norme du laplacien. De haut en bas, les résultats sont obtenus après utilisation de la méthode d'optimisation suivante: Nelder-Mead, descente du gradient, Newton, Map.

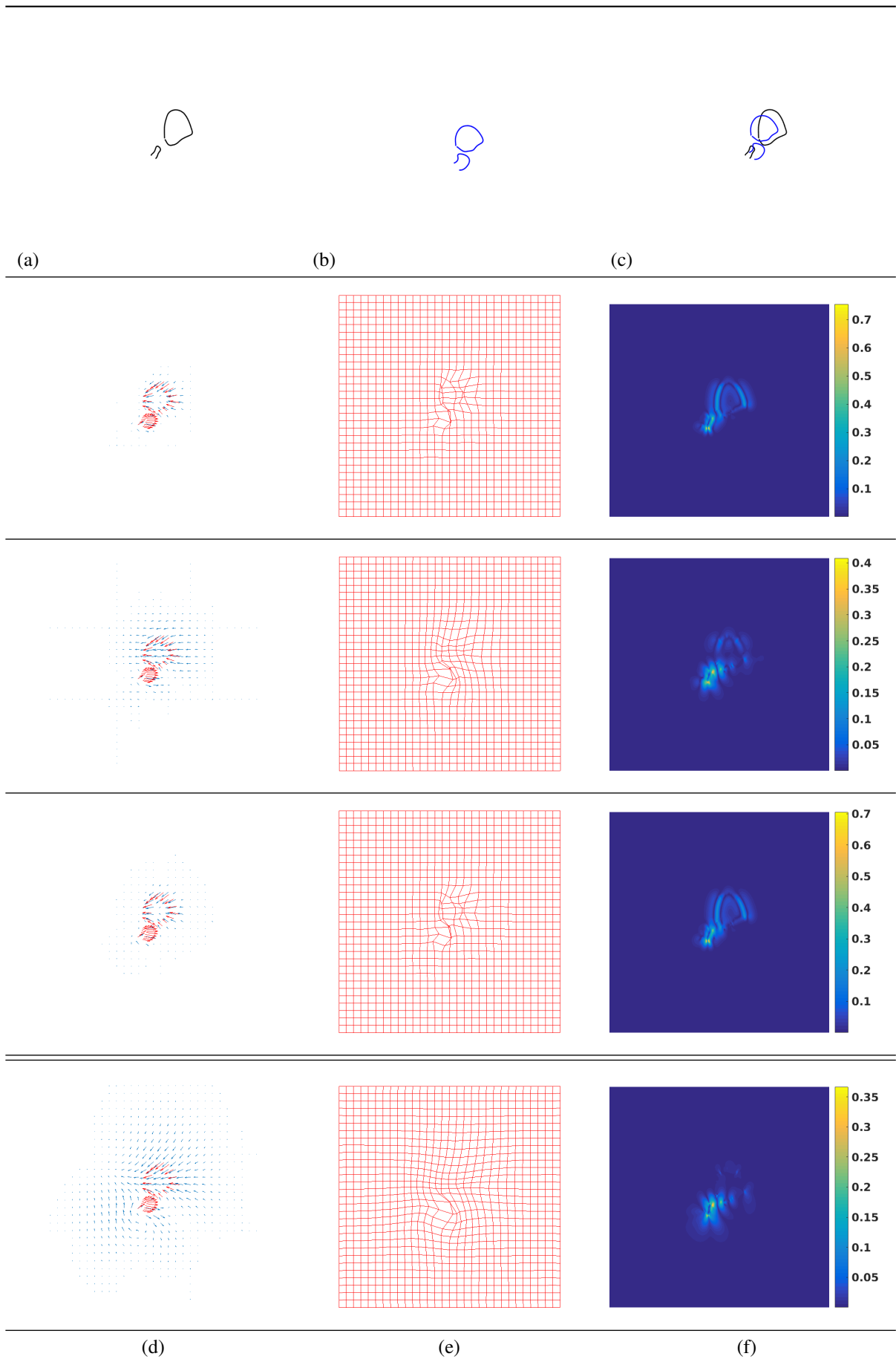


Figure 3: Exemple de champ de déformation estimé sur un recalage IRM/échographie: (a) courbes sources, (b) courbes cible, (c) courbes sources (en noir) et cible (en bleu) superposées, (d) le champ de déformation connu (rouge) et estimé (bleu), (e) la grille uniforme déformé par le champ estimé, et (f) la carte de la norme du laplacien. De haut en bas, les résultats sont obtenus après utilisation de la méthode d'optimisation suivante: Nelder-Mead, descente du gradient, Newton, Map.

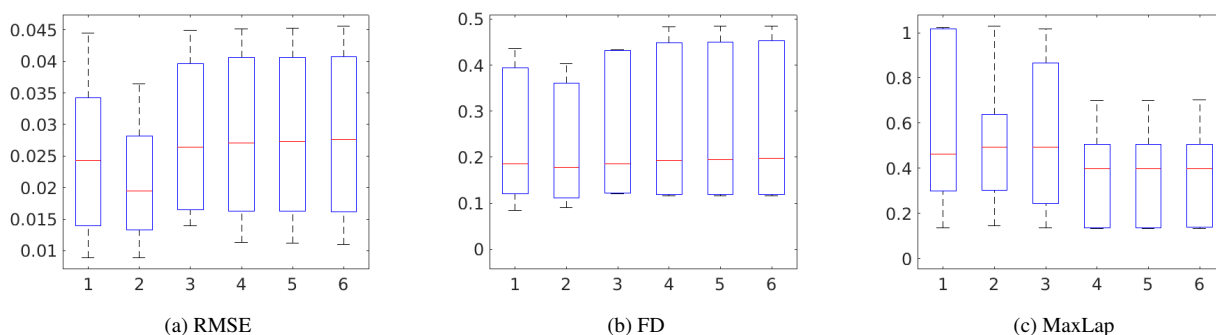


Figure 4: Évaluation quantitative des différentes méthodes d'estimation des paramètres sur 7 données réelles: (1) Nelder-Mead, (2) descente du gradient, (3) Newton, (4) MAP, (5) moyenne, et (6) médiane. Pour chaque méthode, nous présentons un boxplot de (a) la RMSE, (b) la distance de Fréchet, et (c) le maximum de la norme du laplacien.

et feront l'objet de futurs travaux. Tout d'abord, pour les méthodes de la descente du gradient et de Newton, une approximation des dérivées partielles semble nécessaire pour éviter les erreurs numériques. De plus, un pas adaptatif pourrait améliorer la convergence de ces algorithmes. Dans un second temps, on pourrait utiliser des lois a priori plus informatives sur nos paramètres, ainsi que des lois de propositions plus restreintes pour améliorer la convergence des chaînes MCMC.

## Références

- [1] R. J. Adler and J. E. Taylor. *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics, 2007.
- [2] O. Arandjelović, D.-S. Pham, and S. Venkatesh. Efficient and accurate set-based registration of time-separated aerial images. *Pattern Recognition*, 48(11):3466–3476, 2015.
- [3] L. P. Chamié, R. Blasbalg, R. M. A. Pereira, G. Warmbrand, and P. C. Serafini. Findings of pelvic endometriosis at transvaginal us, mr imaging, and laparoscopy. *Radiographics*, 31(4):E77–E100, 2011.
- [4] N. Cressie. *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*. Wiley, 1993.
- [5] T. Gneiting, W. Kleiber, and M. Schlather. Matérn cross-covariance functions for multivariate random fields. *Journal of the American Statistical Association*, 105:1167–1177, 2010.
- [6] W. K. Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.
- [7] S. Kurtek, A. Srivastava, E. Klassen, and Z. Ding. Statistical modeling of curves using shapes and related features. *Journal of the American Statistical Association*, 107(499):1152–1165, 2012.
- [8] W. Mio, A. Srivastava, and S. Joshi. On shape of plane elastic curves. *International Journal of Computer Vision*, 73(3):307–324, 2007.
- [9] J. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7, issue. 4:308–313, 1965.
- [10] K. Rohr. *Landmark-based image analysis: Using geometric and intensity models*. Kluwer Academic Publishing, 2001.
- [11] J. E. Roos, D. Weishaupt, S. Wildermuth, J. K. Willmann, B. Marincek, and P. R. Hilfiker. Experience of 4 years with open mr defecography: pictorial review of anorectal anatomy and disease. *Radiographics*, 22(4):817–832, 2002.
- [12] A. Sotiras, C. Davatzikos, and N. Paragios. Deformable medical image registration : A survey. *INRIA Report*, september 2012.
- [13] A. Srivastava, E. Klassen, S. Joshi, and I. Jermyn. Shape analysis of elastic curves in Euclidean spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 33:1415–1428, 2011.
- [14] M. L. Stein. *Interpolation of Spatial Data*. Springer Series in Statistics, 1999.
- [15] Z. Tu, W. Xie, J. Cao, C. Van Gemeren, R. Poppe, and R. C. Veltkamp. Variational method for joint optical flow estimation and edge-aware image restoration. *Pattern Recognition*, 65:11–25, 2017.