Úvod do teorie kategorií

Jan Starý

5. dubna 2024 08:27
(pracovní verze)

Obsah

Toto je *vznikající* studijní text k přednášce *Teorie kategorií* konané na Fakultě informačních technologií ČVUT v Praze v letech 2022–2024. Případné chyby a připomínky prosím zasílejte na `jan.stary@fit.cvut.cz`.

Úvod

Jednotlivé obory matematiky studují různé *objekty* svého zájmu (grafy, uspořádání, vektorové prostory, topologické prostory, ...) a různé *morfismy* mezi nimi (homomorfismy, lineární zobrazení, spojitá zobrazení, ...). Mnohé pojmy, konstrukce, tvrzení i důkazy se přitom opakují téměř beze změny, pokud abstrahujeme od konkrétní povahy daných objektů a morfismů.

Teorie kategorií je právě takovým abstraktním pohledem: studuje obecně *kategorie*, totiž třídy objektů spolu s nějakou třídou morfismů. Takový pohled je v jistém smyslu opakem množinového pohledu „zdola“ — prvky nosných množin nehrají většinou v kategoriálních konstrukcích žádnou roli, hlavním předmětem zájmu jsou morfismy a jejich vlastnosti. Uvidíme, že i při takovém abstraktním pohledu lze dokázat netriviální tvrzení.

Dalším přirozeným krokem je potom porovnávat kategorie navzájem, jak uvidíme v kapitole o *funktorech*. Funktor je zobrazení, které objektům a morfismům jedné kategorie přiřazuje objekty a morfismy druhé kategorie, přičemž respektuje skládání morfismů. Uvidíme, že mezi zdánlivě nesouvisejícími „světy“ lze spatřit zajímavé souvislosti, například *reprezentovat* objekty a konstrukce jednoho oboru pomocí jiného. Příkladem je Stoneova věta o reprezentaci Booleových algeber, která popisuje dualitu mezi Booleovými algebrami a jistým typem kompaktních prostorů.

I funktory lze potom porovnávat navzájem a zkoumat *přirozené transformace* a *ekvivalence* mezi funktory. Pomocí pojmu *adjunkce* lze sjednotit popis různých klasických *volných* objektů (volný monoid, volná grupa, volná Booleova algebra) a mnohé další konstrukce z algebry, topologie, atd.

Při náležitě abstraktním pohledu „shora“ se též vyjeví obecné pojmy *univerzality* a *přirozenosti*. Motivace pochází z homologické algebry, ale příklady se zjevují všude. Vstřebat pojmy teorie kategorií obnáší zpracovat mnoho příkladů z rozličných oborů matematiky — pokusíme se zdůraznit hlavně příklady související s informatikou.

Univerzalita produktu Začneme ukázkou toho, jak kategoriální pohled sjednocuje pojem *součinu*, jakož i tvrzení o něm a jejich důkazy.

Věta 0.0.1. (a) Kartézský součin $\prod X_i$ *množin* X_i spolu se *zobrazeními* (projekcemi) $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ má následující univerzální vlastnost: je-li X libovolná *množina* a jsou-li $f_i : X \to X_i$ libovolná *zobrazení*, pak existuje právě jedno *zobrazení* $f : X \to \prod X_i$ takové, že každé $f_i = \pi_i \circ f$. (b) Navíc platí, že má-li nějaká *množina* X spolu se *zobrazeními* $f_i : X \to X_i$ tutéž univerzální vlastnost, pak existuje jediná *bijekce* $f : X \to \prod X_i$ taková, že každé $f_i = \pi_i \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[dd, dashed, "f"] & \\
X_i & & X_j \\
 & \prod X_i \arrow[ul, "\pi_i"] \arrow[ur, "\pi_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Říkáme, že zobrazení $f_i : X \to X_i$ se *faktorizují* přes π_i skrze $f : X \to \prod X_i$. Podmínku $f_i = \pi_i \circ f$ vyjadřujeme stručně tak, že diagram výše *komutuje*.

Smysl věty je tento: součin $\prod X_i$ spolu se svými projekcemi $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ do jednotlivých X_i je univerzální mezi všemi takovými. Každá množina X se svými $f_i : X \to X_i$ se faktorizuje přes něj, a to jediným způsobem. Druhá část věty pak říká, že množina s takovou univerzální vlastností je až na bijekci jediná.

Analogickou větu můžeme ovšem vyslovit v mnoha jiných oborech.

Věta 0.0.2. (a) Součin $\prod X_i$ *grup* X_i (s operacemi po složkách) spolu s projekčními *homomorfismy* $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ má následující univerzální vlastnost: je-li X libovolná *grupa* a jsou-li $f_i : X \to X_i$ libovolné *homomorfismy*, pak existuje právě jeden *homomorfismus* $f : X \to \prod X_i$ takový, že každé $f_i = \pi_i \circ f$. (b) Má-li nějaká *grupa* X spolu s *homomorfismy* $f_i : X \to X_i$ tutéž univerzální vlastnost, pak existuje jediný *isomorfismus* $f : X \to \prod X_i$ takový, že každé $f_i = \pi_i \circ f$.

Věta 0.0.3. (a) Součin $\prod X_i$ *uspořádaných množin* X_i (s uspořádáním po složkách) spolu s *monotónními* projekcemi $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ má následující univerzální vlastnost: je-li X libovolná *uspořádaná množina* a jsou-li $f_i : X \to X_i$ libovolná *monotónní zobrazení*, pak existuje právě jedno *monotónní* $f : X \to \prod X_i$ takové, že každé $f_i = \pi_i \circ f$. (b) Má-li nějaká *uspořádaná množina* X spolu s *monotónními* $f_i : X \to X_i$ tutéž univerzální vlastnost, pak existuje jediný *isomorfismus* $f : X \to \prod X_i$ takový, že každé $f_i = \pi_i \circ f$.

Věta 0.0.4. (a) Součin $\prod X_i$ *topologických prostorů* X_i (s produktovou topologií) spolu se *spojitými* projekcemi $\pi_i : \prod X_i \to X_i$ má následující univerzální vlastnost: je-li X libovolný *topologický prostor* a jsou-li $f_i : X \to X_i$ libovolná *spojitá zobrazení*, pak existuje právě jedno *spojité* $f : X \to \prod X_i$ takové, že každé $f_i = \pi_i \circ f$. (b) Má-li nějaký *topologický prostor* X spolu se *spojitými* $f_i : X \to X_i$ tutéž univerzální vlastnost, pak existuje jediný *homeomorfismus* $f : X \to \prod X_i$ takový, že každé $f_i = \pi_i \circ f$.

Nabízí se tedy zavést pojem součinu obecně, totiž právě pomocí výše popsané univerzální vlastnosti, bez ohledu na to, o které objekty a morfismy se jedná. I důkaz[1] jedinečnosti (b) pak bude ve všech případech stejný:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[dd, dashed, shift right, "f"'] & \\
X_i & & X_j \\
 & \prod X_i \arrow[ul, "\pi_i"] \arrow[ur, "\pi_j"'] \arrow[uu, dashed, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

[1] Skutečným důkazem bude pochopitelně až poté, co v další kapitole podáme přesné definice.

Jelikož $\prod X_i$ s projekcemi π_i a stejně tak X se svými f_i jsou univerzální, existuje jediné faktorizující $f : X \to \prod X_i$ a jediné faktorizující $g : \prod X_i \to X$ tak, že $\pi_i = f_i \circ g = (\pi_i \circ f) \circ g = \pi_i \circ (f \circ g)$. To znamená, že skrze zobrazení $f \circ g : \prod X_i \to \prod X_i$ se faktorizují všechna π_i. Další takovou faktorizací je triviálně identita na $\prod X_i$. Přitom faktorizující zobrazení je jediné, takže $f \circ g$ je identita na $\prod X_i$. Obdobně se ukáže, že $g \circ f$ je identita na X. To znamená, že f a g jsou navzájem inverzní isomorfismy.

Všimněme si, že konkrétní povaha objektů X_i a zobrazení f_i zde nehraje žádnou roli, důkaz stojí na univerzální vlastnosti součinových projekcí. O prvcích nosných množin X_i se důkaz ani nezmiňuje.

To je vyšší úroveň abstrakce, než je běžné řekněme v algebře, když při zkoumání nějaké konkrétní grupy můžeme ignorovat, o kterou její isomorfní kopii jde, totiž co přesně jsou její *prvky* zač; zde abstrahujeme dokonce od konkrétní povahy zúčastněných *objektů* vůbec. Máme-li v ruce nějakou isomorfní kopii $G = \{0, a, b\}$ tříprvkové grupy $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, bylo by z hlediska algebry bezpředmětné se ptát, co konkrétně jsou $a, b \in G$: prvky dané grupy se na její struktuře podílí tím, jak se chovají v grupové operaci, totiž které dva mají jaký součet, které spolu komutují, atd; jejich vnitřní podoba je pro strukturu dané grupy $G \simeq \mathbb{Z}_3$ irelevantní. Teorie kategorií abstrahuje dále: ve výše uvedeném důkaze dokonce nezáleží ani na povaze objektů X_i a morfismů f_i. Jsou to grupové homomorfismy? Nebo lineární zobrazení mezi vektorovými prostory? Na argumentu samotném se tím nic nemění — jde o to, jak se morfismy chovají: který morfismus faktorizuje které další, které trojúhelníky komutují, atd.

Čtenáři zvyklému na obvyklý množinový pohled může zpočátku činit jisté obtíže přijmout takovou úroveň abstrakce, kdy se definice, tvrzení i důkazy obejdou nejen beze zmínky o prvcích nosných množin, ale i bez popisu uvažovaných objektů a morfismů. Při prvním seznámení s teorií kategorií je tak zřejmě potřeba naučit se přemýšlet o vlastnostech šipek místo o prvcích množin.

Kapitola 1

Kategorie

1.1 Objekty a morfismy

Definice 1.1.1. *Kategorie* $\mathcal{C}$ sestává z třídy *objektů* a třídy *morfismů*. Pro objekty X, Y je dána množina morfismů $\mathcal{C}(X, Y)$, přičemž množiny $\mathcal{C}(X, Y)$ jsou po dvou disjunktní. Pro objekty X, Y, Z je dána operace $\circ$ *skládání* morfismů tak, že pro $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ je $g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$. Skládání je asociativní, tj. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, a pro každý objekt X existuje morfismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ splňující $f \circ 1_X = f$ pro každé $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $1_X \circ g = g$ pro každé $g \in \mathcal{C}(Y, X)$.

Morfismům říkáme též *šipky* a píšeme $f : X \to Y$ nebo $X \xrightarrow{f} Y$ místo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Pokud nehrozí nedorozumění, píšeme pro objekty krátce $X \in \mathcal{C}$. Neutrální morfismus $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ nazýváme *jednotka* nebo *identita* na X.

Příklad 1.1.2. Každá z následujících tříd tvoří kategorii. Uvádíme postupně název resp. značení kategorie, její objekty, a její morfismy. Skládáním je ve všech případech obyčejné skládání zobrazení, identitou na každém objektu je identické zobrazení do sebe.

$\mathcal{SET}$	množiny	zobrazení
$\mathcal{MON}$	monoidy	homomorfismy monoidů
$\mathcal{GRP}$	grupy	homomorfismy grup
$\mathcal{RNG}$	okruhy	homomorfismy okruhů
$\mathcal{FLD}$	tělesa	homomorfismy těles
$\mathcal{G}$	grafy	homomorfismy grafů
$\mathcal{DG}$	orientované grafy	homomorfismy grafů
$\mathcal{DAG}$	acyklické grafy	homomorfismy grafů
$\mathcal{TOP}$	topologické prostory	spojitá zobrazení
$\mathcal{HAUS}$	Hausdorffovy prostory	spojitá zobrazení
$\mathcal{CPT}$	kompaktní prostory	spojitá zobrazení
$\mathcal{MET}$	metrické prostory	spojitá zobrazení
$\mathcal{BA}$	Booleovy algebry	booleovské homomorfismy
$\mathcal{CBA}$	úplné Booleovy algebry	úplné homomorfismy
$\mathcal{PO}$	uspořádané množiny	monotónní zobrazení
$\mathcal{CPO}$	úplná uspořádání	spojitá zobrazení
$\mathcal{VECT}$	vektorové prostory	lineární zobrazení

Všechny tyto kategorie tvoří množiny opatřené nějakou strukturou, přičemž morfismy jsou zobrazení, která zachovávají tuto strukturu — konvergenci, násobení, uspořádání, atd. Takové kategorie se nazývají *konkrétní*.

Příklad 1.1.3. Každý monoid $(M, *, 1)$ určuje kategorii M s jediným objektem, a morfismem m za každé $m \in M$. Skládáním je násobení $*$ v monoidu M, jednotkou je $1 \in M$. Díky asociativitě a neutralitě se jedná o kategorii. Naopak každá kategorie s jediným objektem určuje monoid.

Příklad 1.1.4. Každá uspořádaná množina $(X, \leq)$ určuje kategorii. Jejími objekty jsou prvky $x \in X$, mezi každými dvěma objekty vede nanejvýš jeden morfismus, totiž $x \to y$ pokud $x \leq y$; speciálně $x \to x$ je identita na x díky reflexivitě. Díky transitivitě máme pro $x \to y$ a $y \to z$ složení $x \to z$. Třída objektů je této kategorie je množinou; takové kategorie se nazývají *malé*.

Příklad 1.1.5. Každý orientovaný graf (V, E) bez cyklů (ale se smyčkami) určuje kategorii: objekty jsou vrcholy $x \in V$, morfismy jsou cesty v grafu, skládání morfismů je řetězení cest, identity jsou smyčky. Krajním případem je *diskrétní* kategorie, která kromě identit jiné morfismy nemá.

Příklad 1.1.6. Kategorii matic tvoří přirozená čísla, kde morfismy $m \to n$ jsou matice z $\mathbb{R}^{m,n}$. Jednotky jsou jednotkové matice, skládáním je maticový součin.

Příklad 1.1.7. Každá kategorie $\mathcal{C}$ má svou *duální* kategorii $\mathcal{C}^{op}$, která má tytéž objekty, ale „převrácené“ morfismy, tj. morfismem $f : Y \to X$ v kategorii $\mathcal{C}^{op}$ je právě morfismus $f : X \to Y$ v kategorii $\mathcal{C}$. Skládání a jednotky v $\mathcal{C}^{op}$ se definují očividným způsobem. Ke každému pojmu teorie kategorií pak máme i pojem duální. Některé projevy této duality uvidíme níže: iniciální a terminální objekty, monomorfismy a epimorfismy, limity a kolimity, atd.

Příklad 1.1.8. Jsou-li $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategorie, je tím určen i jejich produkt $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Objekty kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ jsou dvojice (X, Y) pro $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$, morfismy jsou dvojice (f, g), kde f je $\mathcal{C}$-morfismus a g je $\mathcal{D}$-morfismus. Identitou na objektu (X, Y) je morfismus $(1_X, 1_Y)$. Skládání se děje po složkách.

Příklad 1.1.9. Každá kategorie $\mathcal{C}$ určuje *kategorii šipek* $\mathcal{C}^{\to}$. Jejími objekty jsou $\mathcal{C}$-morfismy, a $\mathcal{C}^{\to}$-morfismem mezi objekty $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ a $f' \in \mathcal{C}(X', Y')$ je každá dvojice $\mathcal{C}$-morfismů $a : X \to X'$, $b : Y \to Y'$, pro kterou diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "b"'] & Y' \end{tikzcd}$$

komutuje, tj. $b \circ f = f' \circ a$. Složením $(a_2, b_2) \circ (a_1, b_1)$ takových morfismů je $(a_2 \circ a_1, b_2 \circ b_1)$. Snadno se ověří, že složení je opět morfismus, totiž diagram

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[d, "f_3"'] \\ Y_1 \arrow[r, "b_1"'] & Y_2 \arrow[r, "b_2"'] & Y_3 \end{tikzcd}$$

komutuje, neboť $(b_2 \circ b_1) \circ f_1 = b_2 \circ (b_1 \circ f_1) = b_2 \circ (f_2 \circ a_1) = (b_2 \circ f_2) \circ a_1 = (f_3 \circ a_2) \circ a_1 = f_3 \circ (a_2 \circ a_1)$. Zároveň je skládání asociativní, neboť v diagramu

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"'] & X_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"'] & X_4 \arrow[d, "f_4"'] \\
Y_1 \arrow[r, "b_1"'] & Y_2 \arrow[r, "b_2"'] & Y_3 \arrow[r, "b_3"] & Y_4
\end{tikzcd}$$

díky asociativitě skládání[1] v kategorii $\mathcal{C}$ platí $(a_3, b_3) \circ ((a_2, b_2) \circ (a_1, b_1)) = (a_3, b_3) \circ (a_2 \circ a_1, b_2 \circ b_1) = (a_3 \circ (a_2 \circ a_1), b_3 \circ (b_2 \circ b_1)) = ((a_3 \circ a_2) \circ a_1, (b_3 \circ b_2) \circ b_1) = (a_3 \circ a_2, b_3 \circ b_2) \circ (a_1, b_1)$. Identitou na objektu $f : X \to Y$ je morfismus $(1_X, 1_Y)$.

Definice 1.1.10. Kategorie $\mathcal{D}$ je *podkategorií* kategorie $\mathcal{C}$, pokud objekty kategorie $\mathcal{D}$ jsou objekty kategorie $\mathcal{C}$, pro objekty $X, Y \in \mathcal{D}$ je $\mathcal{D}(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$, a skládání a jednotky v $\mathcal{D}$ jsou stejné jako v $\mathcal{C}$. Podkategorie $\mathcal{D}$ je *úplná*, pokud pro každé $X, Y \in \mathcal{D}$ je $\mathcal{D}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$.

Například kategorie $\mathcal{TOP}$ topologických prostorů a spojitých zobrazení má úplnou podkategorii $\mathcal{HAUS}$ Hausdorffových prostorů a spojitých zobrazení a úplnou podkategorii $\mathcal{CPT}$ kompaktních prostorů a spojitých zobrazení. Kategorie $\mathcal{GRP}$ grup a grupových morfismů je podkategorií kategorie monoidů $\mathcal{MON}$, ale není úplná. Podobně lze omezit třídu morfismů, ale ponechat všechny objekty; například kategorie $\mathcal{MET}$ metrických prostorů a spojitých zobrazení má podkategorii, jejímiž objekty jsou opět všechny metrické prostory, ale morfismy jsou jen kontraktivní spojitá zobrazení.

1.2 Monomorfismy a epimorfismy

Definice 1.2.1. Morfismus $h : B \to C$ je *monomorfismus*, pokud pro každé dva morfismy $f, g : A \to B$ platí: je-li $h \circ f = h \circ g$, je $f = g$. Jinými slovy, následující diagram komutuje jen v triviálním případě.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C
\end{tikzcd}$$

Definice 1.2.2. Morfismus $h : C \to B$ je *epimorfismus*, pokud pro každé dva morfismy $f, g : B \to A$ platí: je-li $f \circ h = g \circ h$, je $f = g$. Jinými slovy, následující diagram komutuje jen v triviálním případě.

$$\begin{tikzcd}
A & B \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[l, bend left, "g"] & C \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

Již z definice je zřejmé, že oba pojmy se liší jen „otočením šipek". Monomorfismus v $\mathcal{C}$ je právě epimorfismus v $\mathcal{C}^{op}$ a naopak. To je případ *duality* v teorii kategorií: s každým pojmem (jakož i tvrzením a důkazem) máme zdarma ještě jeden, s opačnými morfismy. Například monomorfismy v kategorii $\mathcal{SET}$ jsou právě prostá zobrazení a epimorfismy jsou právě zobrazení na. Dokázat to není těžké — všimněme si hlavně, že i důkazy jsou až na otočení šipek shodné.

[1]Symbolem $\circ$ ovšem značíme skládání v $\mathcal{C}$ i v $\mathcal{C}^{\to}$.

Důkaz. Buď $h : B \to C$ prosté, a buďte $f, g : A \to B$ zobrazení taková, že $h \circ f = h \circ g$. Pokud $f \neq g$, buď $a \in A$ takové, že $f(a) \neq g(a)$. Potom také $h(f(a)) \neq h(g(a))$, takže není $h \circ f = h \circ g$, spor. Pokud naopak h není prosté, máme $h(b_1) = h(b_2)$ pro nějaká dvě různá $b_1, b_2 \in B$. Stačí pak položit $f(a) = b_1, g(a) = b_2$ a bude $h \circ f = h \circ g$, přitom $f \neq g$. Tedy h není monomorfismus. □

Důkaz. Buď $h : C \to B$ na, a buďte $f, g : B \to A$ zobrazení taková, že $f \circ h = g \circ h$. Pokud $f \neq g$, buď $b \in B$ takové, že $f(b) \neq g(b)$. Přitom $b = h(c)$ pro nějaké $c \in C$, takže $f(h(c)) \neq g(h(c))$, spor. Pokud naopak h není na, máme nějaké $b \in B \setminus h[C]$. Stačí pak zvolit $f, g : B \to A$ stejná až na $f(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$. Potom bude $f \circ h = g \circ h$, přestože $f \neq g$. Tedy h není epimorfismus. □

Cvičení 1.2.3. (a) Jsou-li f, g monomorfismy, je také $g \circ f$ monomorfismus. Je-li $g \circ f$ monomorfismus, je f monomorfismus; přitom g monomorfismem být nemusí. (b) Jsou-li f, g epimorfismy, je také $g \circ f$ epimorfismus. Je-li $g \circ f$ epimorfismus, je g epimorfismus; přitom f epimorfismem být nemusí.

Příklad 1.2.4. Buď $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{SET}$ kategorie, která obsahuje jen dva objekty, totiž dvouprvkovou množinu A a jednoprvkovou množinu B, a jediný morfismus (kromě identit), totiž jediné možné zobrazení $f : A \to B$. Snadno se ověří, že f je monomorfní, přestože není prosté. Podobně v kategorii $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{SET}$, kde jediným morfismem je nějaké zvolené $f : B \to A$, bude f epimorfismem, přestože není na. Můžeme obrazně říci, že v těchto kategoriích nejsou morfismy, které by f usvědčily z toho, že není mono/epi. Záleží totiž nejen na morfismu samém, ale především na tom, jak si stojí k ostatním morfismům, totiž jak se chová při skládáních — zde ovšem žádná nejsou.

Příklad 1.2.5. Epimorfismy v kategorii uspořádaných množin jsou právě monotónní zobrazení na. Jeden směr se ukáže stejně jako výše. Pokud naopak $f : A \to B$ není na, zvolme $b \in B \setminus f[A]$ a definujme svědčící morfismy $g, h : B \to \{0, 1\}$ následovně. Pro $x \geq b$ buď $g(x) = 1$ a všude jinde $g(x) = 0$; pro $x > b$ buď $h(x) = 1$ a všude jinde $h(x) = 0$. Potom g, h jsou monotónní a je $g \neq h$, přestože $g \circ f = h \circ f$.

Příklad 1.2.6. Snadno se ověří, že prostý homomorfismus monoidů je monomorfismem. Ukážeme i opačnou aplikaci: buď $f : X \to Y$ monoidový monomorfismus. Každé $x \in X$ určuje morfismus $\tilde{x} : (\mathbb{N}, +, 0) \to X$, totiž $\tilde{x}(n) = x^n$, kde $x^0 = e \in X$ a $x^{n+1} = xx^n \in X$. Jsou-li tedy $x \neq y$ dva různé prvky v monoidu X, uvažme oba morfismy $\tilde{x}, \tilde{y} : \mathbb{N} \to X$. Jelikož je $\tilde{x}(1) = x \neq y = \tilde{y}(1)$, je $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, a tedy také je $f \circ \tilde{x} \neq f \circ \tilde{y}$, neboť f je monomorfismus. Přitom každý monomorfismus definovaný na $\mathbb{N}$ je plně určen obrazem prvku $1 \in \mathbb{N}$, který generuje $(\mathbb{N}, +, 0)$; je tedy $(f \circ \tilde{x})(1) = f(x) \neq f(y) = (f \circ \tilde{y})(1)$, takže f je prosté. Skoro stejně se ukáže, že monomorfismy v kategorii grup jsou právě prosté homomorfismy, jen úlohu monoidu $(\mathbb{N}, +, 0)$ hraje grupa $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Příklad 1.2.7. Předvedeme monomorfismus kategorie divisibilních[2] abelovských grup, který není prostým zobrazením mezi nosnými množinami. Takovým monomorfismem je kvocientní zobrazení $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Buďte totiž $f, g : A \to \mathbb{Q}$ morfismy splňující $\pi f = \pi g$. Potom pro každé $a \in A$ je $f(a) - g(a) = n \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

[2]Grupa G je *divisibilní*, pokud pro každé $x \in G$ a každé přirozené $n > 0$ existuje $y \in G$ takové, že $x = n \times y = y + \cdots + y$. Takové $y \in G$ ovšem může být jen jedno, značí se obvykle x/n. Například $(\mathbb{Q}, +)$ je divisibilní, a každý kvocient, například $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, je potom též divisibilní.

Pokud $n \neq 0$, máme z divisibility takové $b \in A$, že $a = (n+1) \times b$. Pak ale $f(a) = (n+1) \times f(b)$, a stejně tak $g(a) = (n+1) \times g(b)$. I pro $b \in A$ musí být $f(b) - g(b) \in \mathbb{Z}$, přitom $n = f(a) - g(a) = (n+1) \times (f(b) - g(b))$, což není možné. Je tedy $n = f(a) - g(a) = 0$, neboli $f(a) = g(a)$, čili $f = g$.

Příklad 1.2.8. Inkluze $i : (\mathbb{N}, +, 0) \to (\mathbb{Z}, +, 0)$ je epimorfismem v kategorii monoidů. Buďte totiž $f, g : (\mathbb{Z}, +, 0) \to (M, *, e)$ morfismy splňující $f \circ i = g \circ i$; jinými slovy, pro $n \in \mathbb{N}$ je $f(i(n)) = g(i(n))$, takže f, g se shodují na každém nezáporném $i(n) \in \mathbb{Z}$. Pro záporné $z \in \mathbb{Z}$ je $-z \geq 0$, a máme

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z) * e && e \in M \text{ je neutrální} \\
&= f(z) * g(0) && g(0) = e \\
&= f(z) * g(-z + z) && -z + z = 0 \in \mathbb{Z} \\
&= f(z) * (g(-z) * g(z)) && g \text{ je morfismus} \\
&= (f(z) * g(-z)) * g(z) && * \text{ je asociativní} \\
&= (f(z) * g(i(-z))) * g(z) && -z = i(-z) \geq 0 \\
&= (f(z) * f(i(-z))) * g(z) && f \circ i = g \circ i \\
&= (f(z) * f(-z)) * g(z) && -z = i(-z) \geq 0 \\
&= f(z + (-z)) * g(z) && f \text{ je morfismus} \\
&= f(0) * g(z) && z + (-z) = 0 \in \mathbb{Z} \\
&= e * g(z) && f(0) = e \\
&= g(z) && e \in M \text{ je neutrální}
\end{aligned}$$

Cvičení 1.2.9. Podobně jako v předchozím příkladě se ukáže, že vnoření okruhu $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$ (s obvyklými operacemi) je epimorfismem v kategorii okruhů. Tak jako je monoidový morfismus určen již svým chováním na $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, je okruhový homomorfismus plně určen již svým chováním na $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$; stačí si uvědomit, že racionání číslo je tvaru a/b pro $a, b \in \mathbb{Z}$. V obou případech vidíme, že býti epimorfismem znamená býti nikoli nutně na cílovou strukturu, ale na velkou, určující část, totiž takovou, kterou jsou určeny pokračující morfismy.

Cvičení 1.2.10. Narozdíl od monoidů je epimorfismus v kategorii grup nutně na. Buď totiž $e : G \to H$ grupový epimorfismus a buď $e[G] = A \subseteq H$. Ukážeme, že je $A = H$. Buď H/A množina *pravých cosetů*, totiž podmnožin tvaru $Ax = \{ax; a \in A\} \subseteq H$, a buď K grupa permutací množiny $H/A \cup \{\infty\}$, kde ∞ je nějaký přidaný prvek (který nepatří do H/A). Pro $z \in H$ buď $\pi_z : H/A \to H/A$ zobrazení, které cosetu Ax přiřazuje coset Axz. To je dobře definované zobrazení, neboť pro $Ax = Ay$ je $Axz = Ayz$; snadno se ukáže, že π_z je ve skutečnosti permutace množiny H/A, jejím inverzem je $\pi_{z^{-1}}$. Pokud permutaci π_z rozšíříme o $\pi_z(\infty) = \infty$, máme permutaci množiny $H/A \cup \{\infty\}$, tedy $\pi_z \in K$. Položíme-li nyní $f(z) = \pi_z$ pro každé $z \in H$, máme zobrazení $f : H \to K$; snadno se ověří, že f je grupový morfismus. Buď $\pi \in K$ transpozice, která prohazuje A a ∞ (a ostatní prvky H/A nechává na místě). Položíme-li potom $g(z) = \pi \circ \pi_z \circ \pi^{-1}$, máme zobrazení $g : H \to K$, o kterém se snadno přesvědčíme, že je grupovým homomorfismem. Pro $a \in A$ nechává permutace π_a coset $A = A1$ na místě, totiž $\pi_a(A1) = A1a = Aa = A$, neboť $A \subseteq H$ je podgrupa a násobení prvkem a je její vnitřní automorfismus, a z definice zároveň π_a nechává na místě prvek ∞. Permutace π naopak nechává na místě všechny ostatní prvky z H/A.

To znamená, že permutace π a π_a spolu komutují, takže pro každé $a \in A$ máme $f(a) = \pi_a = \pi_a \circ \pi \circ \pi^{-1} = \pi \circ \pi_a \circ \pi^{-1} = g(a)$. Morfismy f, g se tedy shodují na $A = e[G]$, neboli $f \circ e = g \circ e$; přitom $e : G \to H$ je epimorfismus, takže máme $f = g$ na celém H. Tedy pro každé $z \in H$ je $f(z) = g(z)$, neboli $\pi_z = \pi \circ \pi_z \circ \pi^{-1}$ a každé π_z komutuje s π. Přitom π_z fixuje ∞, zatímco π prohazuje ∞ a A, takže π_z musí též fixovat A. To ale znamená, že pro každé $z \in H$ je $\pi_z(A) = Az = A$, což je možné jedině tak, že $z \in A$. Tedy $H \subseteq A$ a jsme hotovi.

Cvičení 1.2.11. Vnoření $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$ je epimorfismus Hausdorffových prostorů, neboť spojitá funkce na $\mathbb{R}$ je určena již svým chováním na $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Obecně pak epimorfismus v kategorii Hausdorffových prostorů je právě spojité zobrazení na hustou část. Jeden směr je triviální, totiž pro spojitá $g, h : Y \to Z$ je $\{y \in Y; g(y) = h(y)\} \subseteq Y$ uzavřená, takže pokud se shodují na husté množině, shodují se všude. Buď naopak $f : X \to Y$ epimorfismus. V tom případě buď Z disjunktní topologická suma dvou kopií Y, ve které jsou ale navzájem identifikovány[3] kopie bodů z uzávěru $f[X] \subseteq Y$, a buďte $g, h : Y \to Z$ obě přirozená vnoření. Potom je z definice $gf = hf$, takže $g = h$, neboť f je epimorfismus. To ale znamená, že uzávěrem $f[X] \subseteq Y$ je celé Y: pro bod $y \notin \overline{f[X]}$ je $g(y) \neq h(y)$.

Mimo podkategorii $\mathcal{HAUS} \subseteq \mathcal{TOP}$ toto tvrzení neplatí: pokud X není Hausdorff, pak diagonála $X \times X$ není uzavřená; buď $C \subseteq X \times X$ uzávěr diagonály a buď $f : X \to C$ přirozené vnoření X do C. Potom f je spojité zobrazení na hustou část, které však není epimorfismem: svědkem jsou projekce $X \times X$ (zúžené na C).

Cvičení 1.2.12. Všechny morfismy kategorie těles jsou monomorfismy. Kdyby totiž pro nějaké $x \neq 0$ bylo $f(x) = 0$, pak také $f(1) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) \cdot f(x^{-1}) = 0 \cdot f(x^{-1}) = 0$, spor. To znamená, že $\ker f = \{0\}$, takže f je prosté.

Cvičení 1.2.13. Je-li $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ podkategorie, potom každý $\mathcal{D}$-morfismus, který je $\mathcal{C}$-epimorfismem, je též $\mathcal{D}$-epimorfismem. Ukažte, že opačná implikace neplatí.

Definice 1.2.14. *Bimorfismus* je takový morfismus, který je zároveň monomorfismem i epimorfismem. Morfismus $f : X \to Y$ je *isomorfismus*, pokud existuje morfismus $g : Y \to X$ takový, že $g \circ f = 1_X$ a $f \circ g = 1_Y$. V takovém případě řekneme, že g je *inverzní* k f, a objekty X, Y jsou *isomorfní*.

Je-li f isomorfismus, pak k němu inverzní g je jediný možný, a je též isomorfismem. Složení bimorfismů je bimorfismus, složení isomorfismů je isomorfismus.

Isomorfismy v $\mathcal{SET}$ jsou právě bijekce. V algebraických kategoriích jako $\mathcal{GRP}$, $\mathcal{VECT}$ či $\mathcal{BA}$ odpovídá isomorfismus obvyklé algebraické definici. V kategorii $\mathcal{TOP}$ jsou isomorfismy právě homeomorfismy. Monoid $(M, *, e)$ je grupou, právě když v jím určené kategorii (1.1.3) je každý morfismus isomorfismem.

Cvičení 1.2.15. Popište nějaký bimorfismus, který není isomorfismem. Najděte takový morfismus v jednoprvkové kategorii určené monoidem.

Cvičení 1.2.16. Isomorfismus je zároveň monomorfismem i epimorfismem, ale nikoli nutně naopak. Například vnoření $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$ je mono, výše jsme viděli, že je epi, přitom isomorfismem monoidů není. Podobně vnoření protoru $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{R}$

[3] Podrobněji: na sumě $Y \sqcup Y$ zavádíme ekvivalenci mezi body $(y, 0)$ a $(y, 1)$, pokud $y \in Y$ leží v uzávěru $f[X]$; prostor Z je potom kvocientem podle této ekvivalence. Snadno se ověří, že je opět Hausdorffův.

je mono i epi, ale nikoli iso. Také vnoření úplně regulárního prostoru X do kompaktifikace βX je mono, zároveň je epi, neboť je na hustou část, ale homeomorfismem není (leda by již sám X byl kompaktní). V kategorii určené uspořádáním je dokonce každý morfismus mono i epi, neboť mezi každými dvěma objekty vede nanejvýš jeden morfismus, ale isomorfismy jsou jen identity. Též v kategorii určené orientovaným grafem jsou všechny morfismy mono i epi, ale isomorfismy jsou jen identity, tj. smyčky na bodech.

Cvičení 1.2.17. Řekneme, že dvojice morfismů (e, m) je *epi-mono faktorizace* morfismu $f = m \circ e$, pokud e je epi a m je mono. (a) Ukažte, že každé zobrazení f, tj. morfismus v kategorii $\mathcal{SET}$, má epi-mono faktorizaci. Ukažte na příkladě, že v jiných kategoriích takové tvrzení platit nemusí. (b) Epi-mono faktorizace zobrazení $f = m \circ e$ je jediná až na isomorfismus. V jiných kategoriích toto tvrzení platit nemusí. (c) Je-li $f : A \to B$ zobrazení, buď $f^* : P(B) \to P(A)$ zobrazení, které množině $X \subseteq B$ přiřazuje její vzor $f^{-1}[X] \subseteq A$. Ukažte, že f^* je prosté, právě když f je na. (d) Ukažte, že je-li (e, m) epi-mono faktorizace zobrazení $f = m \circ e$, pak (m^*, e^*) je epi-mono faktorizace zobrazení $f^* = e^* \circ m^*$.

Cvičení 1.2.18. V kategorii $\mathcal{SET}$ je každá epi-mono faktorizace jednoznačná až na isomorfismus. Obecně toto tvrzení neplatí.

Cvičení 1.2.19. Morfismus $f : A \to B$ je *retrakce* a $g : B \to A$ je *sekce*, pokud $f \circ g = 1_B$. Říkáme pak, že B je *retraktem* A. Isomorfismus je z definice retrakcí i sekcí zároveň; složení retrakcí je retrakce, složení sekcí je sekce. Ukažte, že retrakce je nutně epimorfismus a sekce je nutně monomorfismus. Retrakt B je tedy zároveň obrazem (faktorem) i podstrukturou A.

Cvičení 1.2.20. V kategorii množin je každý obraz $B = f[A]$ již retraktem. (To je tvrzení ekvivalentní s axiomem výběru.) Podobně v kategorii vektorových prostorů je každý lineární obraz $B = f[A]$ již retraktem, neboť každý vektorový prostor má bazi (což je rovněž tvrzení ekvivalentní s axiomem výběru).

Cvičení 1.2.21. Každá grupa má alespoň dva retrakty, totiž triviální podgrupu a sebe samu. Grupa $(\mathbb{Z}, +, 0)$ kromě těchto podgrup nemá žádné jiné podgrupy než $n\mathbb{Z}$, které jsou všechny isomorfní se $\mathbb{Z}$. Jedinými homomorfními obrazy $\mathbb{Z}$ jsou tedy kvocienty $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$, ze kterých ovšem nevede žádný morfismus do $\mathbb{Z}$ (kromě nulového). Grupa $\mathbb{Z}$ má tedy jen triviální retrakty.

Cvičení 1.2.22. Symetrická grupa S_3 má jedinou netriviální normální podgrupu $H = \{123, 231, 312\}$. Faktor S_3/H je isomorfní se $\mathbb{Z}_2$, která se do S_3 homomorfně vnořuje, například na $\{123, 213\}$. Sama podgrupa H není faktorem S_3, neboť žádná z dvouprvkových podgrup není normální. Tedy S_3 má až na isomorfusmus právě jeden netriviální retrakt.

1.3 Iniciální a terminální objekty

Definice 1.3.1. Objekt $X \in \mathcal{C}$ je *iniciální*, pokud pro každý objekt $Y \in \mathcal{C}$ existuje právě jeden morfismus $X \to Y$. Objekt $X \in \mathcal{C}$ je *terminální* pokud pro každý objekt $Y \in \mathcal{C}$ existuje právě jeden morfismus $Y \to X$. *Nulový objekt* je takový, který je iniciální i terminální zároveň.

V kategorii množin je iniciálním objektem prázdná množina a terminálními objekty jsou jednoprvkové množiny. Terminální objekty se tak nabízejí jako kategoriální zobecnění prvku množiny: na prvek $x \in M$ můžeme hledět jako na morfismus $1 \to M$, kde 1 je nějaká jednoprvková množina, tedy terminální objekt v $\mathcal{SET}$. Navíc pro zobrazení $f : M \to N$ je potom prvek $f(x) \in N$ právě složený morfismus $f \circ x$.

V algebraických kategoriích jsou terminálními objekty triviální struktury: triviální monoid, triviální grupa, triviální vektorový prostor. Připustíme-li degenerované okruhy, tělesa a Booleovy algebry, kde $0 = 1$, jsou i takové objekty terminální. Iniciálními objekty jsou pak těleso $\mathbb{Z}_2$, Booleova algebra $2 = \{0, 1\}$, či okruh $\mathbb{Z}$ celých čísel. Jednoprvkový monoid, grupa, či vektorový prostor jsou dokonce nulovými objekty.

Příklad 1.3.2. Je-li $\mathcal{L}$ jazyk prvního řádu, který obsahuje jen funkční a konstantní symboly, buď $\mathcal{A}$ množina všech konstantních $\mathcal{L}$-termů, s operacemi definovanými přirozeným způsobem: konstanty realizují samy sebe, hodnotou n-ární funkce f na konstantních termech $t_1, \ldots, t_n$ je konstantní term $f(t_1, \ldots, t_n)$. Potom $\mathcal{A}$ je iniciálním objektem v kategorii všech $\mathcal{L}$-algeber a $\mathcal{L}$-homomorfismů: je-li $\mathcal{B}$ libovolná $\mathcal{L}$-algebra jediný morfismus, totiž *sémantická interpretace* $\mathcal{L}$-termů v algebře $\mathcal{B}$. Je-li navíc $\mathcal{L}$ jazyk s rovností a T nějaká rovnicová teorie v jazyce $\mathcal{L}$ (jako například teorie monoidů, grup, ...), potom iniciálním objektem v kategorii všech modelů teorie T je teprve kvocient termové algebry podle kongruence generované všemi rovnicemi z T.

V kategorii určené uspořádanou množinou je iniciálním objektem nejmenší prvek (pokud existuje) a terminálním objektem největší prvek (pokud existuje). Tedy kategorie určená uspořádáním $(\mathbb{R}, \leq)$ nemá iniciální ani terminální objekty.

V součinové kategorii $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ je iniciálním objektem právě dvojice (X, Y), kde X je iniciální v $\mathcal{C}$ a Y je iniciální v $\mathcal{D}$. V kategorii šipek $\mathcal{C}^{\to}$ je iniciálním objektem právě identita 1_X na iniciálním objektu X v $\mathcal{C}$.

Věta 1.3.3. Mezi každými dvěma iniciálními objekty vede jediný isomorfismus.

Důkaz. Buďte A, B iniciální. To znamená, že existuje právě jeden morfismus $f : A \to B$ a právě jeden morfismus $g : B \to A$. Složení $g \circ f$ je nutně 1_A, složení $f \circ g$ je nutně 1_B. Tedy f, g jsou navzájem inverzní isomorfismy. □

1.4 Ekvalizéry a koekvalizéry

Definice 1.4.1. Řekneme, že $f : A \to B$ je *ekvalizér* morfismů $g, h : B \to C$, pokud $g \circ f = h \circ f$, a pro každý jiný morfismus $f' : A' \to B$ s touto vlastností existuje jediné faktorizační zobrazení $\varphi : A' \to A$ splňující $f' = f \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \\
A' \arrow[u, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definice 1.4.2. Řekneme, že $f : B \to A$ je *koekvalizér* morfismů $g, h : C \to B$, pokud $f \circ g = f \circ h$, a pro každý jiný morfismus $f' : B \to A'$ s touto vlastností existuje jediné faktorizační zobrazení $\varphi : A \to A'$ splňující $f' = \varphi \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & B \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "f'"] & C \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \\
A' & &
\end{tikzcd}$$

Příklad 1.4.3. Jsou-li $g, h : B \to C$ libovolná zobrazení, pak jejich ekvalizérem v $\mathcal{SET}$ je inkluze f podmnožiny $A = \{b \in B; g(b) = h(b)\} \subseteq B$. Podmínku $g \circ f = h \circ f$ splňuje z definice; má-li nějaké $f' : A' \to B$ stejnou vlastnost, hledáme $\varphi : A' \to A$ tak, aby $f' = f \circ \varphi$. Jedinou možností je položit $\varphi(a') = f'(a')$; přitom $f'(a') \in A$, jelikož je $g \circ f' = h \circ f'$. V podstatě stejně získáme ekvalizéry v kategoriích monoidů, grup, vektorových prostorů, neboť podmnožina $A = \{b \in B; g(b) = h(b)\} \subseteq B$ je podmonoidem, podgrupou, podprostorem. Ekvivalentně můžeme říci: na podmnožině $A = \{b \in B; g(b) = h(b)\} \subseteq B$ existuje jediná monoidová (grupová, lineární) struktura, při které je inkluze $A \subseteq B$ morfismem, totiž struktura podmonoidu (podgrupy, podprostoru).

Příklad 1.4.4. Koekvalizér je zobecnění kvocientu, v následujícím smyslu. Dvojicí zobrazení $g, h : C \to B$ je určena binární relace $R = \{(g(c), h(c)); c \in C\}$ na B. Buď E ekvivalence na B generovaná[4] relací R, buď $f : B \to A = B/E$ příslušné kvocientní zobrazení. Z definice je $f \circ g = f \circ h$, neboť E rozšiřuje R. Má-li nějaké zobrazení $f' : B \to A'$ tutéž vlastnost, tj. $f' \circ g = f' \circ h$, definujeme $\varphi : A \to A'$ jediným možným způsobem: každé $a \in A = B/E$ je ekvivalenční třídou $[b]_E$ nějakého $b \in B$, položme tedy $\varphi([b]_E) = f'(b)$ — jinak by nebylo $f' = \varphi \circ f$. To je dobře definované zobrazení, neboť R generuje E.

Příklad 1.4.5. V konkrétních kategoriích, jejichž objekty jsou množiny nesoucí navíc nějakou strukturu, je potřeba výše popsanou konstrukci zesílit: koekvalizérem je kvocient podle generované kongruence. Jsou-li například $g, h : C \to B$ morfismy v kategorii uspořádaných množin, buď E kongruence na B generovaná relací $R = \{(g(c), h(c)); c \in C\}$. To znamená, že kromě reflexivity, symetrie a transitivity splňuje E také $x \leq y, xEx', yEy' \to x' \leq y'$. Relace $[b_1] \leq [b_2]$ pro $b_1 \leq b_2$ je potom uspořádání na $A = B/E$, a kvocientní zobrazení $f : B \to A = B/E$ je z definice monotónní. Stejně jako výše se pak ukáže, že je koekvalizérem g, h.

V kategorii Booleových algeber je koekvalizérem právě kvocient podle ideálu $\mathcal{I}$ generovaného v algebře B množinou $\{g(c) \triangle h(c); c \in C\}$, tj. kongruentní jsou takové prvky b, b', pro které je $b \triangle b' \in \mathcal{I} = [0]$. Můžeme říci, že na faktorové množině $A = B/I$ existuje jediná Booleovská struktura, při které je kvocientní zobrazení $b \mapsto [b]$ homomorfismem, totiž struktura kvocientu, a kvocientní zobrazení je pak koekvalizérem.

Podobně jako u monomorfismů a epimorfismů vidíme přímo z definice, že pojmy ekvalizéru a koekvalizéru jsou navzájem duální: ekvalizér v $\mathcal{C}$ je právě

[4] Řekneme, že relace R generuje ekvivalenci E na množině B, pokud E je nejmenší ekvivalence, která rozšiřuje R. Taková definice má dobrý smysl: snadno se ověří, že průnik jakéhokoli systému reflexivních, symetrických, transitivních relací na B je opět ekvivalence na B. Tedy E je právě průnik všech ekvivalencí rozšiřujících R. Tato ekvivalence je právě reflexivní, symetrický, transitivní uzávěr relace R. To znamená, že xEy právě když existuje konečná posloupnost $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ tak, že každé $x_i R x_{i+1}$ nebo $x_{i+1} R x_i$ nebo $x_i = x_{i+1}$.

koekvalizér v $\mathcal{C}^{op}$ a naopak. Ukážeme nejprve podrobně, že všechny ekvalizéry daných morfismů $g, h : B \to C$ jsou navzájem isomorfní, a podobně pro koekvalizéry. Oba důkazy jsou opět shodné, až na opačné morfismy.

Věta 1.4.6. Buďte $e : X \to B$, $f : Y \to B$ ekvalizéry morfismů $g, h : B \to C$. Potom existuje právě jeden isomorfismus $\varphi : Y \to X$ takový, že $f = e \circ \varphi$.

Důkaz. Jelikož $e : X \to B$ je univerzální, existuje jediný faktorizující morfismus $\varphi : Y \to X$ splňující $f = e \circ \varphi$. Podobně z univerzality $f : Y \to B$ máme jediný faktorizující morfismus $\varrho : X \to Y$ splňující $e = f \circ \varrho$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, dashed, shift right, "\varrho"'] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \\
Y \arrow[u, dashed, shift right, "\varphi"'] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, dashed, "\varphi\circ\varrho"'] & B \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & C \\
X \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Platí tedy $e = f \circ \varrho = (e \circ \varphi) \circ \varrho = e \circ (\varphi \circ \varrho)$; to znamená, že složený morfismus $\varphi \circ \varrho : X \to X$ faktorizuje ekvalizér e, tak jako jej triviálně faktorizuje 1_X. Faktorizační morfismus je ovšem jediný, tedy $\varphi \circ \varrho = 1_X$. Analogicky se ukáže $\varrho \circ \varphi = 1_Y$. Tedy φ, ϱ jsou navzájem inverzní isomorfismy. □

Věta 1.4.7. Buďte $e : B \to X$, $f : B \to Y$ koekvalizéry morfismů $g, h : C \to B$. Potom existuje právě jeden isomorfismus $\varphi : X \to Y$ takový, že $f = \varphi \circ e$.

Důkaz. Jelikož $e : X \to B$ je univerzální, existuje jediný faktorizující morfismus $\varphi : X \to Y$ splňující $f = \varphi \circ e$. Podobně z univerzality $f : B \to Y$ máme jediný faktorizující morfismus $\varrho : Y \to X$ splňující $e = \varrho \circ f$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, shift right, "\varphi"'] & B \arrow[l, "e"'] \arrow[dl, "f"] & C \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \\
Y \arrow[u, dashed, shift right, "\varrho"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\varrho\circ\varphi"'] & B \arrow[l, "e"'] \arrow[dl, "f"] & C \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \\
X & &
\end{tikzcd}
$$

Platí tedy $e = \varrho \circ f = \varrho \circ (\varphi \circ e) = (\varrho \circ \varphi) \circ e$; to znamená, že složený morfismus $\varrho \circ \varphi : X \to X$ faktorizuje koekvalizér e, tak jako jej triviálně faktorizuje 1_X. Faktorizační morfismus je ovšem jediný, tedy $\varrho \circ \varphi = 1_X$. Analogicky se ukáže $\varphi \circ \varrho = 1_Y$. Tedy φ, ϱ jsou navzájem inverzní isomorfismy. □

Cvičení 1.4.8. Každý ekvalizér je monomorfismus. Buď $f : A \to B$ ekvalizérem $g, h : B \to C$; jsou-li $i, j : X \to A$ takové, že $f \circ i = f \circ j$, chceme ukázat, že $i = j$. Morfismus $f \circ i$ rovněž ekvalizuje g, h jako $g \circ (f \circ i) = h \circ (f \circ i)$, takže se faktorizuje přes ekvalizér f; to se děje dvěma způsoby, neboť $f \circ i = f \circ j$. Faktorizující morfismus je ale jediný, takže $i = j$.

Cvičení 1.4.9. Ekvalizér, který je epimorfismem, je již isomorfismem. Buď $e : A \to B$ ekvalizérem $g, h : B \to C$; jelikož e je epi, je nutně $g = h$. Triviálně tedy $1_B : B \to B$ rovněž ekvalizuje g, h jako $g \circ 1_B = h \circ 1_B$, takže se pomocí jediného $f : B \to A$ faktorizuje přes e jako $1_B = e \circ f$. Ekvalizér e se triviálně faktorizuje přes e jako $e \circ 1_A$, ale zároveň jako $e = (e \circ f) \circ e = e \circ (f \circ e)$, takže $f \circ e = 1_A$. Tedy e, f jsou navzájem inverzní isomorfismy.

Cvičení 1.4.10. Ukažte duálně, že každý koekvalizér je epi, a každý mono koekvalizér je již isomorfismem. (Odkazem na duální kategorii už samozřejmě výsledek máme, jelikož pojem isomorfismu je duální sám se sebou.)

Cvičení 1.4.11. V kategorii určené uspořádáním je každý morfismus mono i epi, neboť mezi každými dvěma objekty vede nanejvýš jeden morfismus. Přitom ekvalizéry, koekvalizéry a isomorfismy jsou jen identity.

Cvičení 1.4.12. V kategorii vektorových prostorů a lineárních zobrazení je každý monomorfismus již ekvalizérem. Pro lineární $f : X \to Y$ uvažme dvě lineární zobrazení z podprostoru $\ker(f) \subset\subset X$ do X: identické vnoření $i(x) = x$ a konstantně nulové $\theta(x) = 0$. Potom je $f \circ i = f \circ \theta$, takže je-li f monomorfismus, je $i = \theta$, čili $\ker(f) = \{0\}$ a f je prosté. Ukážeme, že prosté lineární zobrazení je ekvalizér. Pro $y, y' \in Y$ položme $y \approx y'$ pokud $y - y' \in f[X]$, to je ekvivalence na Y; buď $Z = Y/\approx$ kvocientní prostor sestávající ze všech $[y]_\approx = \{y'; y \approx y'\}$ s přirozenými operacemi $[y_1] + [y_2] = [y_1 + y_2]$ a $\lambda \cdot [y] = [\lambda \cdot y]$. Pro zobrazení $g, h : Y \to Z$ definovaná předpisem $g(y) = [y]$ a $h(y) = [0]$ je $g \circ f = \theta = h \circ f$, neboť $f[X] = [0]$; to jest, f ekvalizuje g, h. Navíc je-li $f' : X' \to Y$ lineární zobrazení splňující $g \circ f' = h \circ f'$, je nutně $f'[X'] \subseteq f[X]$, přitom f je prosté, takže stačí pro $x' \in X'$ definovat $\varphi(x') \in X$ jako ono jediné $x \in X$, pro které je $f'(x') = f(x)$. Potom se faktorizuje $f' = f \circ \varphi$, a snadno se nahlédne, že takové φ je lineární a jediné možné.

Jako důsledek máme, že každá dvě lineární $g, h : Y \to Z$ mají ekvalizér, totiž vnoření podprostoru $X = \{y \in Y; g(y) = h(y)\}$ do Y. Duálně se ukáže, že každý epimorfismus v kategorii vektorových prostorů je koekvalizér a že kategorie vektorových prostorů má koekvalizéry.

Cvičení 1.4.13. Zobrazení $f : A \to B$ je ekvalizérem $g, h : B \to C$ právě když $f^* : P(B) \to P(A)$ je koekvalizérem g^*, h^*; podobně $f : B \to A$ je koekvalizérem $g, h : C \to B$ právě když $f^* : P(A) \to P(B)$ je ekvalizérem g^*, h^*.

Cvičení 1.4.14. Retrakce $f : A \to B$ je koekvalizérem 1_A a $g \circ f$.

1.5 Produkty a koprodukty

Definice 1.5.1. Buďte $X_i, i \in I$ objekty kategorie $\mathcal{C}$. Potom objekt X spolu s *projekcemi* $f_i : X \to X_i$ je *produktem* objektů X_i, pokud pro každý jiný objekt Y spolu s morfismy $g_i : Y \to X_i$ existuje jediný morfismus $f : Y \to X$ takový, že $g_i = f_i \circ f$ pro každé $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "g_j"] \arrow[dd, dashed, "f"] & \\
X_i & & X_j \\
& X \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Toto je definice, kterou jsme se snažili motivovat v úvodu. Snadno se nahlédne, že v kategorii množin je produktem X_1, X_2 právě kartézský součin $X_1 \times X_2$ s obvyklými projekcemi $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. Pro každou množinu Y a zobrazení $g_i : Y \to X_i$ existuje jediné možné faktorizující zobrazení $f(y) = (g_1(y), g_2(y)) \in X_1 \times X_2$ splňující $g_i = \pi_i \circ f$. Produktem X_1, X_2 je ovšem stejně tak množina $X_2 \times X_1$ spolu s projekcemi π_2, π_1. Ukážeme tedy nejprve, že produkt je až na isomorfismus jediný.

Věta 1.5.2. Buďte X, Y dva objekty kategorie $\mathcal{C}$ s produktovou vlastností vůči objektům $X_i \in \mathcal{C}$. Potom jsou X, Y isomorfní, navíc jediným způsobem.

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[d, dashed, shift right, "f"'] & \\
X_i & & X_j \\
 & Y \arrow[ul, "g_i"] \arrow[ur, "g_j"'] \arrow[u, dashed, shift right, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[dd, dashed, "g \circ f"'] & \\
X_i & & X_j \\
 & X \arrow[ul, "g_i"] \arrow[ur, "g_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

Důkaz. Buďte $f_i : X \to X_i$ a $g_i : Y \to X_i$ produktové projekce. Jelikož má Y univerzální vlastnost, faktorizují se všechna $f_i : X \to X_i$ přes jediné $f : X \to Y$; stejně tak se ale všechna $g_i : Y \to X_i$ faktorizují přes jediné $g : Y \to X$. Morfismus $g \circ f : X \to X$ potom splňuje $f_i \circ (g \circ f) = (f_i \circ g) \circ f = g_i \circ f = f_i$ pro každé f_i; zároveň je triviálně $f_i \circ 1_X = f_i$. Přitom faktorizující morfismus je z definice jediný, takže $g \circ f = 1_X$; stejně se ukáže $f \circ g = 1_Y$. Tedy f, g jsou navzájem inverzní isomorfismy mezi X, Y. Podobně se ukáže, že jsou jediné. □

Pokud pro daný soubor objektů $X_i \in \mathcal{C}$ takový produkt existuje, budeme jej obvykle značit $\prod X_i$ a jeho projekce jako $\pi_i : \prod X_i \to X_i$. Je důležité si uvědomit, že produktem není ani tak samotný objekt $\prod X_i$, ale především soubor projekcí π_i, který svědčí o jeho univerzální vlastnosti.

Cvičení 1.5.3. Popište všechny morfismy z grupy $\mathbb{Z}_6$ do $\mathbb{Z}_2$ a do $\mathbb{Z}_3$; pro každou dvojici takových morfismů ukažte jediný faktorizující morfismus $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Totéž platí i naopak, neboť $\mathbb{Z}_6$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ jsou isomorfní. Přitom isomorfismy mezi nimi existují právě dva (obě mají právě dva cyklické generátory), ale při zvolených projekcích do $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_3$ je právě jeden z nich faktorizující. Smysl příkladu je tento: univerzální vlastnost produktu, včetně jednoznačné faktorizace, je dána především sadou projekcí, nikoli jen samotným objektem.

Příklad 1.5.4. V kategorii určené uspořádanou množinou jsou produkty právě infima. Totiž projekci $\pi_i : x \to x_i$ do všech daných x_i má takový prvek $x \in X$, který je jejich společnou minorantou, a univerzální vlastnost mezi všemi takovými má právě tehdy, když je největší společnou minorantou, neboli infimem.

Příklad 1.5.5. Kategorie těles nemá ani konečné produkty, neboť morfismus mezi tělesy zachovává charakteristiku: je-li $\chi(A) = p$ a je-li $f : A \to B$ tělesový morfismus, je $f(0) = f(p \times 1) = f(1) + \cdots + f(1) = 1 + \cdots + 1 = 0$, takže $\chi(B) \leq p$; zároveň ale naopak, neboť f je prostý, viz 1.2.12. To znamená, že žádné těleso nemůže mít projektivní morfismy do dvou těles různé charakteristiky.

Ani podkategorie těles dané charakteristiky nemá produkty: buď F libovolné těleso; ukážeme, že F a F nemají produkt. Buď totiž P jejich produktem a buďte $\pi_1 : P \to F$ a $\pi_2 : P \to F$ jeho projekce. Identity $1_F : F \to F$ se tedy faktorizují jako $1_F = \pi_1 \circ \varphi$ a $1_F = \pi_2 \circ \varphi$ skrze nějaké $\varphi : F \to P$. Přitom tělesové morfismy jsou prosté, takže φ je isomorfismus a $\pi_1 = \pi_2$ je jeho inverz. Pak ale každé dva morfismy do F jsou totožné (což je spor, má-li F nějaký netriválni morfismus do sebe): jsou-li $g_1 : G \to F, g_2 : G \to F$ dva morfismy do F, faktorizují se jako $g_i = \pi_i \circ \psi$ skrze nějaké $\psi : G \to P$, takže díky $\pi_1 = \pi_2$ je také $g_1 = g_2$.

Příklad 1.5.6. V dalším budeme volně používat následující dvě produktové konstrukce na morfismech. Pro každý objekt X, ke kterému existuje produkt $X \times X$, se dvojice morfismů $1_X : X \to X$ a $1_X : X \to X$ faktorizuje přes projekce produktu $X \times X$ skrze jediný morfismus $\delta : X \to X \times X$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] \arrow[dd, dashed, "\delta"] & \\ X & & X \\ & X \times X \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_X"'] & \end{tikzcd}$$

Pro libovolné dva morfismy $f : A \to X$ a $g : B \to Y$ existuje jediný morfismus $f \times g : A \times B \to X \times Y$, který komutuje se všemi projekcemi. Morfismy $f \circ \pi_A : A \times B \to X$ a $g \circ \pi_B : A \times B \to Y$ se totiž díky univerzální vlastnosti produktu $X \times Y$ jediným způsobem faktorizují přes nějaký $f \times g : A \times B \to X \times Y$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "f \times g"] & B \arrow[d, "g"] \\ X & X \times Y \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Tak jako v předchozím, i pojem produktu má svůj kategoriální duál:

Definice 1.5.7. Buďte $X_i, i \in I$ objekty kategorie $\mathcal{C}$. Potom objekt X spolu s *injekcemi* $f_i : X_i \to X$ je *koprodukt* objektů X_i, pokud pro každý jiný objekt Y spolu s morfismy $g_i : X_i \to Y$ existuje jediný morfismus $f : X \to Y$ takový, že $g_i = f \circ f_i$ pro každé $i \in I$.

Věta 1.5.8. Buďte X, Y dva objekty kategorie $\mathcal{C}$ s koproduktovou vlastností vůči objektům $X_i \in \mathcal{C}$. Potom jsou X, Y isomorfní, navíc jediným způsobem.

Příklad 1.5.9. Koproduktem množin X_i je právě jejich disjunktní sjednocení. Jsou-li X_i libovolné množiny, uvažme místo nich množiny $X_i \times \{i\}$ — ty jsou zaručeně diskrétní, a jejich sjednocení $\bigcup X_i \times \{i\}$ spolu s vnořeními $f_i : X_i \to \bigcup X_i \times \{i\}$, která zobrazují $x \in X_i$ na $f_i(x) = (x, i)$, je jejich koproduktem: jsou-li $g_i : X_i \to Y$, stačí pro $(x, i) \in \bigcup X_i \times \{i\}$ položit $f(x, i) = g_i(x)$.

Příklad 1.5.10. Koproduktem v kategorii uspořádaných množin je rovněž disjunktní sjednocení. Jsou-li $(X_i, <_i)$ uspořádané množiny, buď $\coprod X_i$ jejich disjunktní sjednocení, a buďte $e_i : X_i \to \coprod X_i$ přirozená vnoření. Uspořádanými dvojicemi v $\coprod X_i$ jsou právě taková $e_i(x) \prec e_i(y)$, že x, y leží v tomtéž X_i a splňují $x <_i y$; prvky z různých X_i jsou neporovnatelné. Můžeme obrazně říci, že uspořádání $(\coprod X_i, \prec)$ vznikne položením $(X_i, <_i)$ vedle sebe.

Příklad 1.5.11. Koproduktem vektorových prostorů X_i je podprostor $\coprod X_i$ produktu $\prod X_i$ sestávající ze všech $(x_i)_{i \in I} \in \prod X_i$ s konečným nosičem (tj. $x_i = \theta$ pro všechna $i \in I$ až na konečně mnoho) spolu s injekcemi $f_i : X_i \to$

$\coprod X_i$, které zobrazují vektor $x \in X_i$ na vektor $(\dots, \theta, x, \theta, \dots) \in \coprod X_i$ s jedinou nenulovou složkou x na i-tém indexu. To jsou lineární zobrazení, a je-li X libovolný jiný vektorový prostor opatřený lineárními $g_i : X_i \to X$, stačí pro $(x_i) \in \coprod X_i$ položit $\varphi((x_i)) = \sum g_i(x_i)$. Suma je ve skutečnosti konečná, neboť skoro všechna x_i jsou nulová, takže $\varphi : \coprod X_i \to X$ je korektně definováno, z definice respektuje lineární kombinace, takže je lineární, a snadno se nahlédne, že je to jediné lineární zobrazení splňující $g_i = \varphi \circ f_i$ pro každé $i \in I$.

Příklad 1.5.12. Popíšeme koprodukty v kategorii monoidů. Triviální monoid $\{e\}$, který je iniciálním objektem, je koproduktem prázdného systému. Jinak buď A disjunktní sjednocení všech nosných množin $X_i, i \in I$; na tuto množinu A budeme hledět jako na *abecedu*, monoidový koprodukt bude sestávat z *redukovaných slov*. Přitom *slovo* je jakákoli konečná posloupnost $a_1 a_2 \dots a_n$ prvků z A; ty jsou samy tvaru $a = (x, i)$, kde $x \in X_i$. Slovo je *redukované*, pokud neobsahuje neutrální prvky, tj. pro žádné $a_k = (x_k, i_k)$ není $x_k = e_k \in X_k$, a neobsahuje sousedy z téhož monoidu, tj. pro sousední $a_k = (x_k, i_k), a_{k+1} = (x_{k+1}, i_{k+1})$ ve slově $a_1 \dots a_k a_{k+1} \dots a_n$ je vždy $i_k \neq i_{k+1}$.

Snadno se nahlédne, že každé slovo lze v konečně mnoha krocích redukovat pomocí následujících úprav: (i) vynech neutrální prvky, tj. místo slova $a_1, \dots, a_k = (e_k, i_k), \dots, a_n$ piš slovo $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$; (ii) redukuj součiny sousedů z téhož monoidu, tj. místo slova $a_1, \dots, (x_k, i_k), (x_{k+1}, i_k), \dots, a_n$ piš $a_1, \dots, (x_k x_{k+1}, i_k), \dots, a_n$, kde $x_k x_{k+1}$ je součin v monoidu X_k. Výsledkem je redukované slovo, a díky asociativitě monoidových operací a neutralitě jednotek nezáleží na pořadí, ve kterém tyto úpravy provádíme. Pro každé slovo tedy máme dobře definovanou *redukci*. Buď W množina všech redukovaných slov; pokud definujeme součin redukovaných slov $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n \in W$ jako redukci slova $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n$, je W monoid; neutrálním prvkem je prázdné slovo.

Definujeme-li $e_i(x)$ pro $x \in X_i$ jako redukci slova (x, i), je $e_i : X_i \to W$ homomorfismus monoidů. Ukážeme, že W spolu se sadou morfismů e_i je hledaný koprodukt. Buď tedy $(X, *, e)$ nějaký monoid opatřený morfismy $f_i : X_i \to X$; hledáme jednoznačně určený morfismus $\varphi : W \to X$, pro který bude diagram

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "e_i"'] & & X_j \arrow[ul, "f_j"'] \arrow[dl, "e_j"] \\
& W \arrow[uu, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

komutovat. Takovým φ ale může být jedině $\varphi(a_1 \dots a_n) = f_{i_1}(x_1) * \dots * f_{i_n}(x_n)$. Tím je $\varphi : W \to X$ jednoznačně určeno, a faktorizuje každé $f_i = \varphi \circ e_i$.

V podstatě tatáž konstrukce je koproduktem v kategorii grup; díky inverzním prvkům se při redukci odstraní podslova tvaru xx^{-1}. Vidíme, že koprodukt netriviálních monoidů (grup) je vždy nekonečný: existují redukovaná slova libovolné délky — stačí, aby se střídala netriviální písmena z různých monoidů.[5]

[5] Jako jednoduchý příklad poslouží koprodukt grup $\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{Z}_3$.

1.6 Pullbacky a pushouty

Definice 1.6.1. Jsou-li $f : A \to C$ a $g : B \to C$ dva morfismy, potom objekt P opatřený morfismy $g' : P \to A$ a $f' : P \to B$ je jejich *pullback*, pokud $f \circ g' = g \circ f'$, a navíc je-li X libovolný jiný objekt s morfismy $i : X \to A$ a $j : X \to B$ splňujícími $f \circ i = g \circ j$, existuje jediný morfismus $\varphi : X \to P$ tak, že $i = g' \circ \varphi$ a $j = f' \circ \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & & \\
& P \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Motivací pro pojem pullbacku je jako obvykle situace v kategorii množin. Jsou-li $f : A \to C$ a $g : B \to C$ libovolná zobrazení, jejich pullback je právě $P = \{(a, b) \in A \times B; f(a) = g(b)\}$ spolu s oběma projekcemi zúženými na podmnožinu $P \subseteq A \times B$. Diagram výše pak z definice komutuje, tj. $\pi_A \circ f = g \circ \pi_B$, a jsou-li $i : X \to A$, $j : X \to B$ jiné dva morfismy splňující $f \circ i = g \circ j$, stačí pro $x \in X$ položit $\varphi(x) = (i(x), j(x)) \in A \times B$; potom je $\varphi(x) \in P$, platí $i = \pi_A \circ \varphi, j = \pi_B \circ \varphi$, a zároveň φ je jediné zobrazení s těmito vlastnostmi. Specielně pullbackem $A, B \subseteq C$ je vnoření $A \cap B$ do A a B.

I v dalších kategoriích je užitečné hledět na pullback jako na omezený produkt: omezení je dáno právě požadavkem komutovat s danými morfismy f, g. Snadno se například ověří, že výše popsaná množina P je podgrupou v součinu grup a podalgebrou v součinu Booleových algeber.

Cvičení 1.6.2. (i) Buď C terminální objekt, buďte $f : A \to C$ a $g : B \to C$ (jediné) morfismy do C. Potom jejich pullback je právě produkt $A \times B$. (ii) Je-li $e : X \to A$ pullback morfismů $f : A \to C$ a $g : A \to C$, je e právě ekvalizér f, g.

Cvičení 1.6.3. Pullback monomorfismu je monomorfismus. Naopak morfismus $f : A \to B$ je mono právě tehdy, když id, id je pullback morfismů f, f. To je přirozené zobecnění známého tvrzení z kategorie vektorových prostorů či grup, kde prosté jsou právě morfismy s triviálním jádrem.

Cvičení 1.6.4. Definujte duální pojem *pushout* a popište jej v kategorii množin.

1.7 Limity a kolimity

V tomto oddíle pomocí obecného pojmu limity a kolimity diagramu sjednotíme konstrukce popsané v předchozích oddílech.

Definice 1.7.1. Kategorie $\mathcal{C}$ je *malá*, pokud třída jejích objektů je množina. Malá podkategorie $\mathcal{D}$ kategorie $\mathcal{C}$ je *diagram* v kategorii $\mathcal{C}$. Diagram, který neobsahuje žádné šipky, je *diskrétní*.

Například každá kategorie určená monoidem (1.1.3), uspořádanou množinou (1.1.4) či grafem (1.1.5) je malá. V předchozích oddílech jsme viděli několik příkladů jednoduchých diagramů.

Definice 1.7.2. Buď $\mathcal{D}$ diagram v kategorii $\mathcal{C}$. Řekneme, že objekt X spolu s morfismy $\pi_i : X \to D_i$ pro každý objekt D_i diagramu $\mathcal{D}$ je *limita* diagramu $\mathcal{D}$, pokud (i) pro každý morfismus $f : D_i \to D_j$ diagramu $\mathcal{D}$ je $\pi_j = f \circ \pi_i$ a navíc (ii) pro každý jiný objekt Y a sadu morfismů $f_i : Y \to D_i$ s vlastností (i) existuje právě jeden morfismus $\varphi : Y \to X$ takový, že každé $f_i = \pi_i \circ \varphi$.

Morfismy $\pi_i : X \to D_i$ se obvykle nazývají *projekce*. Podmínku (i) můžeme stručně vyjádřit tak, že *všechny trojúhelníky komutují*. Podle (ii) je tato sada projekcí *univerzální*: každá jiná sada $f_i : Y \to D_i$ se *faktorizuje* přes π_i skrze φ.

Univerzální kontrukce popsané výše jsou speciální případy limit: terminální objekt je právě limita prázdného diagramu, produkt je právě limita diskrétního diagramu, ekvalizér je právě limita diagramu $X \rightrightarrows Y$. Obecnou otázkou je, které limity existují v kterých kategoriích. Kategorie, ve které každý digram má limitu, je *úplná*. Ukazuje se, že k tomu stačí produkty a ekvalizéry.

Věta 1.7.3 (Maranda)**.** Kategorie, která má produkty a ekvalizéry, je úplná.

Důkaz. Je-li $\mathcal{D}$ diagram v kategorii $\mathcal{C}$, uvažme dva produkty: produkt $\prod_{i \in I} X_i$ všech objektů v diagramu $\mathcal{D}$, a produkt $\prod_{f : X_i \to X_j} X_j$ všech těch objektů, které stojí na konci[6] nějaké šipky $f : X_i \to X_j$ v $\mathcal{D}$. Podle předpokladu oba tyto produkty existují. Pro každý $f : X_i \to X_j$ v $\mathcal{D}$ existují dva přirozené morfismy z $\prod_{i \in I} X_i$ do X_j, totiž projekce π_j a složený morfismus $f \circ \pi_i$; nemůžeme zatím očekávat, že by byly totožné. Všechna π_j se faktorizují přes projekce $\pi_f : \prod_{f : X_i \to X_j} X_j \to X_j$ skze jediné p, všechna $f \circ \pi_i$ se faktorizují skrze jediné q. Pro morfismy p, q existuje dle předpokladu ekvalizér $e : X \to \prod_{i \in I} X_i$. Ukážeme, že morfismy $f_i = \pi_i \circ e : X \to X_i$ tvoří limitu.[7]

$$\begin{tikzcd}
 & & X_j \\
X \arrow[r, "e"] \arrow[urr, bend left, "f_j"] \arrow[dr, bend right, "f_i"'] & \prod_i X_i \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] \arrow[ur, "\pi_j"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \prod_f X_j \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & X_i \arrow[r, "f"'] & X_j
\end{tikzcd}$$

Předně, projekce $f_i : X \to X_i$ komutují se všemi $f : X_i \to X_j$, neboť $f \circ f_i = f \circ \pi_i \circ e = \pi_f \circ q \circ e = \pi_f \circ p \circ e = \pi_j \circ e = f_j$. Dále, je-li X' nějaký jiný objekt opatřený morfismy $f'_i : X' \to X_i$, které komutují se všemi $f : X_i \to X_j$, máme z produktové vlastnosti $\prod X_i$ opět nějaký faktorizující $e' : X' \to \prod_{i \in I} X_i$, skrze který je každé $f'_i = \pi_i \circ e'$. Pro každý morfismus $f : X_i \to X_j$ v $\mathcal{D}$ je potom

[6] To znamená, že za každý morfismus do X_j je v tomto produktu jedna kopie X_j.

[7] Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ je dobrým výchozím bodem pro hledání limity, přinejmenším má projekce π_i do všech X_i. Jakožto produkt je ovšem pouze limitou *diskrétního* diagramu $\mathcal{D}$ — nemůžeme očekávat, že tyto projekce budou komutovat s morfismy $f : X_i \to X_j$. Potřebným zjemněním je právě ekvalizér, díky kterému budou $\pi_i \circ e$ již komutovat.

$\pi_f \circ p \circ e' = \pi_j \circ e' = f'_j = f \circ f'_i = f \circ \pi_i \circ e' = \pi_f \circ q \circ e'$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_j \\
X' \arrow[r, "e'"] \arrow[urr, bend left, "f'_j"] \arrow[dr, bend right, "f'_i"'] & \prod_i X_i \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] \arrow[d, "\pi_i"'] \arrow[ur, "\pi_j"] & \prod_f X_j \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & X_i \arrow[r, "f"'] & X_j
\end{tikzcd}$$

To ale znamená, že morfismy $f'_j : X' \to X_j$ se přes projekce $\pi_f : \prod_f X_j \to X_j$ faktorizují skrze $p \circ e'$ i skrze $q \circ e'$, takže $p \circ e' = q \circ e'$; jinými slovy, morfismus e' rovněž ekvalizuje p, q. Z univerzality ekvalizéru se tedy $e' : X' \to \prod X_i$ faktorizuje přes $e : X \to \prod X_i$ skrze jediné $k : X' \to X$ splňující $e' = e \circ k$. Potom ale každé $f'_i = \pi_i \circ e' = \pi_i \circ e \circ k = f_i \circ k$, takže všechna f'_i se skrze k faktorizují přes f_i.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "e'"'] \arrow[drr, bend left, "f'_i"] \arrow[dd, dashed, "k"] & & \\
 & \prod_i X_i \arrow[r, "\pi_i"] & X_i \\
X \arrow[ur, "e"] \arrow[urr, bend right, "f_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

Konečně, je-li $k' : X' \to X$ jiný faktorizující morfismus, skrze který je každé $f'_i = f_i \circ k'$, máme $\pi_i \circ e \circ k' = \pi_i \circ e'$, takže z jednoznačnosti faktorizace přes π_i je nutně $e \circ k' = e'$ jako výše. Tedy i k' faktorizuje e' přes e; tedy $k' = k$. $\square$

Příklad 1.7.4. Produkty v kategorii určené uspořádáním $(X, \leq)$ jsou právě infima, a ekvalizéry jsou identity. Tato kategorie je tedy úplná právě když každá podmnožina má infimum. Speciálně infimem $X \subseteq X$ je nutně nejmenší prvek a infimem prázdné $\emptyset \subseteq X$ je nutně největší prvek. Potom ale každá podmnožina má i supremum: nutně má majoranty (protože X má největší prvek), a infimem množiny jejích majorant je právě její supremum. Tedy $(X, \leq)$ je úplná kategorie právě když $(X, \leq)$ je úplný svaz s nejmenším a největším prvkem.

Příklad 1.7.5. V kategorii množin popíšeme explicitní konstrukci limity poměrně snadno. Je-li $\mathcal{D}$ jakýkoli diagram, uvažme nejprve produkt $\prod X_i$ všech $X_i \in \mathcal{D}$; z něj pak vezměme jen taková $(x_i)_{i \in I}$, že pro každé $f : X_i \to X_j$ v diagramu $\mathcal{D}$ je $f(x_i) = x_j$. Můžeme stručně říci, že takové $(x_i) \in \prod X_i$ komutuje se všemi morfismy v $\mathcal{D}$. Limitou je podmnožina produktu, která sestává právě ze všech takových, limitními projekcemi jsou zúžené produktové projekce.

Cvičení 1.7.6. Není těžké ukázat, že analogická konstrukce vede na limitu v kategorii vektorových prostorů. Popište tuto konstrukci podrobně: ukažte, že uvažovaná podmnožina produktu je podprostorem a má univerzální vlastnost. Popište analogickou konstrukci v kategorii uspořádaných množin.

Jednoznačnost limity bychom nyní mohli předvést podobně jako v předchozích jednotlivých případech, totiž kandidáti na limitu se navzájem faktorizují tam i zpět, a složením je nutně identita. Ukážeme schválně abstraktnější pohled:

Cvičení 1.7.7. Buď $\mathcal{D}$ diagram v kategorii $\mathcal{C}$. Řekneme, že objekt X spolu s morfismy $f_i : X \to D_i$ pro každý objekt D_i diagramu $\mathcal{D}$ je *kužel* diagramu $\mathcal{D}$, pokud pro každý morfismus $f : D_i \to D_j$ diagramu $\mathcal{D}$ je $f_j = f \circ f_i$, tj. pokud všechny trojúhelníky komutují. Všechny kužely daného diagramu pak tvoří kategorii, ve které morfismy jsou právě faktorizující $\mathcal{C}$-morfismy mezi různými kužely. Limita diagramu $\mathcal{D}$, pokud existuje, je právě terminálním objektem této kategorie. Z toho plyne, že limity jsou jednoznačné až na isomorfismus.

Duálně k pojmu limity se opět zavede pojem *kolimity*. Stejně jako výše pak zjistíme, že iniciální objekt, koprodukt a koekvalizér jsou speciální případy kolimit, a dokážeme duální verzi Marandovy věty: kategorie, která má všechny koprodukty a koekvalizéry je *koúplná*, tj. má už všechny kolimity.

Cvičení 1.7.8. Dokažte duální verzi Marandovy věty.

Příklad 1.7.9. I konstrukci kolimity můžeme v kategorii množin popsat explicitně: tak jako limita je podmnožinou produktu, je kolimita obrazem koproduktu. Buď $\mathcal{D}$ jakýkoli diagram, buď $\coprod X_i$ koprodukt, tj. diskrétní sjednocení všech $X_i \in \mathcal{D}$. Buď R binární relace na $\coprod X_i$ sestávající z takových dvojic $(x,i),(x',j)$, že pro nějaké $f : X_i \to X_j$ v diagramu $\mathcal{D}$ je $f(x) = x'$; buď E ekvivalence generovaná relací R. Kolimitou diagramu $\mathcal{D}$ je potom kvocient $\coprod X_i/E$ spolu se zobrazeními $e_i : X_i \to \coprod X_i/E$, která posílají $x \in X_i$ na $[(x,i)]_E$; to jsou právě složení přirozených inkluzí $X_i \subseteq \coprod X_i$ s kvocientním zobrazením.

1.8 Kartézsky uzavřené kategorie

Začneme opět příkladem z kategorie množin, který posléze zobecníme. Pro dvě množiny X, Y buď Y^X množina všech funkcí $f : X \to Y$. Na produktu $Y^X \times X$ se potom přirozeným způsobem definuje zobrazení $eval : Y^X \times X \to Y$ s hodnotami $eval(f,x) = f(x)$. Zobrazení $eval$ má následující univerzální vlastnost: je-li $g : Z \times X \to Y$ jakékoli zobrazení, existuje k němu jednoznačně určené zobrazení $curry(g) : Z \to Y^X$, pro které následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd}
Z \times X \arrow[d, "curry(g)\times 1_X"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y^X \times X \arrow[r, "eval"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Má-li komutovat $g(z,x) = eval((curry(g) \times id)(z,x)) = eval(curry(g)(z),x) = curry(g)(z)(x)$, musíme za $curry(g) : Z \to Y^X$ vzít $curry(g)(z)(x) = g(z,x)$; to jest, prvku $z \in Z$ se zobrazením $curry(g)$ přiřadí funkce $curry(g)(z) \in Y^X$, která prvku $x \in X$ přiřazuje prvek $g(z,x) \in Y$.

Kategoriální zobecnění spočívá jako obvykle v tom, že požadujeme přímo univerzální vlastnost daného morfismu, místo abychom se odvolávali na jednotlivé prvky nosných množin nebo jejich bodové obrazy.

Definice 1.8.1. Buď $\mathcal{C}$ kategorie, která má binární produkty. Řekneme, že objekt B^A je *exponent* objektů $A, B \in \mathcal{C}$, pokud existuje morfismus $eval_{AB} : B^A \times A \to B$ takový, že pro každý morfismus $g : C \times A \to B$ existuje právě jeden morfismus $curry(g) : C \to B^A$, pro který diagram výše komutuje.

Příklad 1.8.2. Kategorie úplných svazů a spojitých[8] zobrazení má exponenty. Buďte totiž A, B dva úplné svazy. Jejich exponentem je úplný svaz $[A \to B]$ všech spojitých zobrazení $\varphi : A \to B$, uspořádaný po složkách, tj. $\varphi \leq \psi$ právě když pro každé $a \in A$ je $\varphi(a) \leq \psi(a)$ ve svazu B.

Předně, $[A \to B]$ s tímto uspořádáním je úplný svaz: je-li $\mathcal{F} \subseteq [A \to B]$, položme $\varphi(a) = \sup\{f(a); f \in \mathcal{F}\}$ pro $a \in A$. Ukážeme, že φ je spojité a je supremem $\mathcal{F}$. Buď $X \subseteq A$ a buď $a = \sup X$. Jistě je $\varphi(a)$ majorantou $\varphi[X]$. Je-li $b \in B$ rovněž majorantou $\varphi[X]$, máme $b \geq f(x)$ pro každé $x \in X$ a každé $f \in \mathcal{F}$. To znamená, že pro každé $f \in \mathcal{F}$ je b majorantou $f[X]$, takže $b \geq \sup f[X] = f(a)$ a máme $b \geq \varphi(a)$. Z defince φ majorizuje každé $f \in \mathcal{F}$. Pokud nějaké spojité $\psi : A \to B$ rovněž majorizuje všechna $f \in \mathcal{F}$, tj. $f(a) \leq \psi(a)$ pro každé $a \in A$, máme také $\varphi(a) \leq \psi(a)$; to ale znamená $\varphi \leq \psi$.

Zobrazení $eval_{AB}$ se definuje stejně jako výše v kategorii množin, potřebujeme ale ověřit, že je spojité. Suprema v součinu $[A \to B] \times A$ jsou suprema po složkách. Je-li tedy (φ, a) supremem $M \subseteq [A \to B] \times A$, je $\varphi = \sup \mathcal{F}$ pro $\mathcal{F} = \{f; (\exists x)(f, x) \in M\}$ a $a = \sup X$ pro $X = \{x; (\exists f)(f, x) \in M\}$. Ukážeme, že $eval(\varphi, a) = \varphi(a)$ je supremem množiny $eval[M] = \{f(x); (f, x) \in M\}$. Jistě je majorantou. Buď $b \geq f(x)$ pro každé $(f, x) \in M$. Pro pevné $x \in X$ je $\varphi(x) = \sup\{f(x); f \in \mathcal{F}\}$, máme tedy $b \geq \varphi(x)$ pro každé $x \in X$. Pak ale $b \geq \varphi(a) = \sup\{\varphi(x); x \in X\}$, neboť φ je spojité.

Buď C libovolný úplný svaz a $g : C \times A \to B$ libovolné spojité zobrazení. Definujeme $curry(g)$ jako výše, totiž $curry(g)(c)(a) = g(c, a)$; potom bude $curry(g)$ spojité, neboť g je spojité.

Definice 1.8.3. Kategorie je *kartézsky uzavřená*, pokud má terminální objekt, binární produkty a exponenty.

Cvičení 1.8.4. Pro každý exponent B^A je $curry(eval_{AB}) = 1_{B^A}$.

Cvičení 1.8.5. V kartézsky uzavřené kategorii je $Z^{X \times Y}$ isomorfní se $(Z^Y)^X$.

Cvičení 1.8.6. (i) Kategorie určená uspořádáním $(P(X), \subseteq)$ je kartézsky uzavřená. Terminálním objektem je X, produkty jsou průniky, exponentem je $(X \setminus A) \cup B$ spolu s inkluzí $((X \setminus A) \cup B) \cap A \subseteq B$: při $C \cap A \subseteq B$ nemůže C protínat $A \setminus B$, takže $C \subseteq (X \setminus A) \cup B$. (ii) Podobná je situace v kategorii výrokových formulí, kde morfismem je vztah $A \models B$ logického důsledku. Terminály jsou tautologie, produkty jsou konjunkce, a exponentem je implikace $A \to B$; můžeme ve zkratce říci, že *eval* je modus ponens, totiž $(A \to B) \wedge A \models B$, a při $C \wedge A \to B$ je nutně $C \models A \to B$. (iii) Oba případy zobecňuje kategorie určená kanonickým uspořádáním Booleovy algebry $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, -, 0, 1, \leq)$: terminál je 1, produkty jsou průseky, a exponentem je $-a \vee b$ s morfismem $(-a \vee b) \wedge a \leq b$.

[8] Spojité zobrazení mezi úplnými svazy je takové, které zachovává všechna suprema.

Kapitola 2

Funktory

V předchozí kapitole zavedli pojem kategorie a popsali různé kategoriální konstrukce coby abstraktní popis různých opakujících se konstrukcí z různých oborů matematiky. Logickým pokračováním je potom porovnávat kategorie navzájem. Nástrojem k tomu jsou funktory, totiž zobrazení mezi kategoriemi, která zachovávají strukturu šipek. Všimněme si opět, na jaké úrovni se pohybujeme: zatímco v jednotlivých kategoriích uvažujeme morfismy, které zachovávají strukturu uvažovaných objektů (monotónní zobrazení mezi uspořádáními, spojitá zobrazení mezi topologickými prostory, atd.), nyní jde o zachování struktury celé kategorie.

2.1 Funktory

Definice 2.1.1. Buďte $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategorie a buď $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zobrazení, které přiřazuje $\mathcal{C}$-objektům $\mathcal{D}$-objekty a $\mathcal{C}$-morfismům $\mathcal{D}$-morfismy. Řekneme, že F je (*kovariantní*) *funktor*, pokud respektuje skládání a jednotky, tj. pro každý objekt X v $\mathcal{C}$ je $F(1_X) = 1_{F(X)}$, a pro každé $f : X \to Y, g : Y \to Z$ v kategorii $\mathcal{C}$ je $F(f) : F(X) \to F(Y)$ a $F(g) : F(Y) \to F(Z)$ v kategorii $\mathcal{D}$ a platí $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(Y) \arrow[dr, "F(g)"] & \mathcal{D} \\ F(X) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g \circ f)"'] & & F(Z) \end{tikzcd}$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme při aplikaci funktorů vynechávat závorky a psát stručněji $FX, FY, Ff : FX \to FY, F(f \circ g) = Ff \circ Fg$ a podobně.

Příklad 2.1.2. Z každé algebraické kategorie (grupy, tělesa, Booleovy algebry) vede *zapomínající funktor* U do kategorie množin. Objektu přiřazuje jeho nosnou množinu, morfismu tentýž morfismus, nyní ovšem jen jako zobrazení mezi množinami, bez ohledu na zapomenutou strukturu. Vidíme hned, že U je funktor. Je sice velmi jednoduchý, ale později uvidíme, že dosti užitečný.

Příklad 2.1.3. Každý objekt $X \in \mathcal{C}$ určuje *hom-funktor* $\mathcal{C}(X, \_\_) : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$: objektu $Y \in \mathcal{C}$ přiřazuje množinu $\mathcal{C}(X, Y)$ a morfismu $f : Y \to Z$ zobrazení $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Z)$, které posílá $g : X \to Y$ na $f \circ g : X \to Z$. Duálně se zavede *kontravariantní hom-funktor* $\mathcal{C}(\_\_, X) : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{SET}$, který „otáčí šipky“.

Cvičení 2.1.4. Ověřte, že $P : \mathcal{SET} \to \mathcal{SET}$ z 1.2.17 je kontravariantní funktor.

Příklad 2.1.5. Pro množinu X uvažme množinu X^* všech konečných posloupností prvků z X; informatik by řekl: všechna slova v abecedě X. Na množině slov máme přirozenou operaci řetězení, která je asociativní, a vůči které je prázdné slovo neutrálním prvkem. To znamená, že X^* je monoid. Tím je určena objektová část morfismu $F : \mathcal{SET} \to \mathcal{MON}$. Libovolným zobrazením $f : X \to Y$ je určeno i zobrazení $F(f) : X^* \to Y^*$, totiž překlad po písmenech: slovo $x_1 \dots x_k$ se zobrazí na slovo $f(x_1) \dots f(x_k)$. Snadno se ověří, že $F(f)$ je monoidovým morfismem, a že pro složení $g \circ f : X \to Z$ následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd}
 & Y^* \arrow[dr, "F(g)"] & \\
X^* \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g\circ f)"'] & & Z^*
\end{tikzcd}$$

Příklad 2.1.6. Pro objekt A kategorie $\mathcal{C}$ položme $\Delta(A) = (A, A)$ a pro morfismus $f : A \to B$ buď $\Delta(f) = (f, f) : (A, A) \to (B, B)$. Tím je definován funktor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Pro kategorii $\mathcal{C}$, která má produkty, definujeme v opačném směru funktor $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ následovně. Pro objekt (A, B) buď $\prod(A, B) = A \times B$ a pro morfismus $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$ buď $\Pi(f, g)$ morfismus $f \times g : A \times B \to C \times D$. Níže uvidíme, že oba funktory jsou vzájemně *adjungované*.

Definice 2.1.7. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je *věrný*, pokud je prostý na morfismech, tj. pokud různým $f, g \in \mathcal{C}(A, B)$ přiřazuje různé $Ff, Fg \in \mathcal{D}(FA, FB)$. Kategorie $\mathcal{C}$ je *konkrétní*, pokud existuje věrný funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{SET}$.

Pojem konkrétní kategorie zobecňuje případ obvyklých algebraických, topologických a dalších kategorií, kde objekty jsou množiny opatřené nějakou strukturou, a morfismy jsou právě zobrazení respektující tuto strukturu. V případě kategorie množin, grup, vektorových prostorů, topologických prostorů apod je takovým svědčícím funktorem například zapomínací funktor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$.

Přirozená je pak otázka, zda například monomorfismy v $\mathcal{C}$ jsou právě ty, jejichž obraz v $\mathcal{SET}$ je prostý; obecněji pak, které vlastnosti morfismů lze konkretizujícím funktorem ekvivalentně převést na dobře známé vlastnosti zobrazení.

Poznamenejme rovnou, že odpověď může záviset na zvolené konkretizaci. Například pro kategorii $\mathcal{C}$ se dvěma objekty a jediným morfismem (kromě identit) existuje mnoho takových věrných konkretizujících funktorů: obrazem objektů budou dvě množiny a obrazem morfismu nějaké zobrazení mezi nimi. Každé takové přiřazení je funktorem, požadavek na prostotu vyjde naprázdno. Ve své původní kategorii $\bullet \to \bullet$ je onen jediný morfismus mono i epi (i když nikoli iso), kdežto jeho obraz v $\mathcal{SET}$ může a nemusí mít kteroukoli z těchto vlastností.

Lemma 2.1.8. Je-li $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ věrný, potom $Ff : FA \to FB$ je monomorfismus pouze v případě, že $f : A \to B$ je monomorfismus.

Důkaz. Buď $Ff : FA \to FB$ monomorfismus v $\mathcal{D}$, buďte $fg = fh$ v $\mathcal{C}$. Potom je $Ff \circ Fg = Ff \circ Fh$ v $\mathcal{D}$, takže $Fg = Fh$, neboť Ff je monomorfismus. Potom ale $g = h$, neboť F je věrný. $\square$

Důsledek 2.1.9. Buď $\mathcal{C}$ konkrétní kategorie, buď $F : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$ svědčící věrný funktor. Potom každý morfismus f, pro který je Ff prostým zobrazením mezi nosnými množinami, je monomorfismem v $\mathcal{C}$.

2.2 Přirozené transformace

Definice 2.2.1. Buďte $F, G : \mathcal{C} \to D$ funktory. Řekneme, že sada morfismů $\nu_X : F(X) \to G(X)$, kde X jsou objekty kategorie $\mathcal{C}$, je *přirozenou transformací* funktoru F do funktoru G, pokud pro každý morfismus $f : X \to Y$ kategorie $\mathcal{C}$ následující diagram komutuje v kategorii $\mathcal{D}$. Pokud navíc každý morfismus $\nu_X : F(X) \to G(X)$ je isomorfismus, jedná se o *přirozenou ekvivalenci.*

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\nu_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\nu_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

Příklad 2.2.2. Je-li X vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{R}$, buď X^* množina všech lineárních funkcionálů $X \to \mathbb{R}$. To je opět vektorový prostor, s operacemi po složkách, tj. $(\varphi + \varrho)(x) = \varphi(x) + \varrho(x)$ a $(\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x)$, navíc stejné dimenze.[1] Totéž ale můžeme s prostorem X^* provést znovu, a dostaneme prostor X^{**} lineárních funkcionálů $X^* \to \mathbb{R}$, opět isomorfní s X. Pro každý objekt X tedy máme isomorfismy $X \simeq X^*$ a $X \simeq X^{**}$. Chceme nyní ukázat, že mezi X a X^* neexistují žádné *přirozené* isomorfismy (ve smyslu definice výše), kdežto mezi X a X^{**} ano.

Je-li $f : X \to Y$ lineární, potom pro každý lineární funkcionál $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ máme také lineární $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$; tím je určeno lineární $f^* : Y^* \to X^*$. Podobně je funkcionálu $\varrho : X^* \to \mathbb{R}$ přiřazen funkcionál $\varrho \circ f^* : Y^* \to \mathbb{R}$; tím je určeno lineární $f^{**} : X^{**} \to Y^{**}$. Přirozený isomorfismus $\nu_X : X \to X^{**}$ definujeme jako $\nu_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$; to jest, pro $x \in X$ je $\nu_X(x)$ lineární funkcionál na X^*, který každému $\varphi \in X^*$ přiřazuje $\varphi(x)$. Diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\nu_X} & X^{**} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f^{**}} \\ Y & \xrightarrow[\nu_Y]{} & Y^{**} \end{array}$$

potom komutuje pro každé lineární $f : X \to Y$.

Naopak pro žádnou sadu isomorfismů $\tau_X : X \to X^*$ diagram pro všechny morfismy komutovat nemůže: stačí vzít konstatně nulové zobrazení $f : X \to Y$, tj. $f(x) = \theta$ pro každé $x \in X$. Aby potom diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau_X} & X^{*} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f^{*}} \\ Y & \xrightarrow[\tau_Y]{} & Y^{*} \end{array}$$

komutoval, musel by isomorfismus $\tau_X : X \to X^*$ být rovněž nulový.

Všimněme si opět, na jaké úrovni abstrakce tyto úvahy provádíme. Mezi samotnými objekty $X, X^*, X^{**}, \mathbb{R}^n$ není v lineární algebře třeba rozlišovat, jsou

[1] Ve skutečnosti jsou prostory X a X^* oba isomorfní s $\mathbb{R}^n$: je-li $x_1, \ldots, x_n$ nějaká baze prostoru X, a má-li daný vektor $x = \sum \alpha_i x_i \in X$ vůči této bázi souřadnice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, je $x \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ isomorfismus mezi X a $\mathbb{R}^n$ (souřadnicový isomorfismus); zároveň zobrazení $x_i^\# : x \mapsto \alpha_i$ jsou lineární funkcionály a tvoří bazi prostoru X^*. Zobrazení $\tau_X(x_i) = x_i^\#$ se potom jediným možným lineárním způsobem rozšiřuje na isomorfismus $\tau_X : X \to X^*$.

navzájem isomorfní. Při pohledu na kategorii všech lineárních morfismů však vidíme, že některé isomorfismy mezi nimi jsou *přirozené* a jiné nikoli. Můžeme si též všimnout, že definice ν_X se neodvolává na žádnou konkrétní bazi prostoru X, kdežto definice souřadnicového isomorfismu se bez ní neobejde.

Cvičení 2.2.3. Jsou-li $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategorie, buď $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ kategorie, jejímiž objekty jsou funktory $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, morfismy jsou přirozené transformace mezi nimi, a skládáním je skládání funktorů. Ověřte podrobně, že se jedná o kategorii.

Cvičení 2.2.4. Buď $\mathcal{D}$ kategorie s konečnými produkty, buďte $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktory. Definujme funktor $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ na objektech jako $HX = FX \times GX$ a na morfismech $f : X \to Y$ jako $Hf = Ff \times Gf : FX \times GX \to FY \times GY$. Ukažte, že H je právě produktem F, G v kategorii $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

2.3 Adjungované funktory

Definice 2.3.1. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je *levý adjunkt* funktoru $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, pokud existuje přirozená transformace ν mezi identickým $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a složeným funktorem $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ s následující vlastností: pro každé $X \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{D}$ a každý morfismus $f : X \to G(Y)$ existuje jediný morfismus $f^\# : F(X) \to Y$, pro který je $f = G(f^\#) \circ \nu_X$, tj. takový, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(f^\#)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, dashed, "f^\#"] \\ Y \end{tikzcd}$$

Sada morfismů ν_X svědčících o přirozené transformaci mezi I a $G \circ F$ se v této souvislosti nazývá *jednotka adjunkce*, a funktor G je *pravý adjunkt*.

Ukážeme nejprve několik jednoduchých příkladů adjunkce. Postupně uvidíme, že adjunkty jsou v matematice všudypřítomné. Zahrnují mimo jiné tradiční konstrukce volných objektů v algebře (volná grupa, volná Booleova algebra, vektorový prostor) i různá zúplnění (metrické zúplnění, kompaktifikace prostoru, podílové nadtěleso okruhu, symetrizace grafu).

Příklad 2.3.2. Zapomínající funktor $U : \mathcal{TOP} \to \mathcal{SET}$ má levý i pravý adjunkt: levý přiřazuje každé množině diskrétní a pravý indiskrétní topologii.

Příklad 2.3.3. Uvažme $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{R}, \leq)$ jako malé kategorie určené uspořádanými množinami. Potom vnoření $(\mathbb{Z}, \leq)$ do $(\mathbb{R}, \leq)$ má levou i pravou adjunkci. Pravou adjunkcí je zobrazení $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ na dolní celou část. To je monotónní zobrazení, a tedy funktor z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{Z}$. Jednotku adjunkce tvoří morfismy $k \leq \lfloor k \rfloor$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Je-li $x \in R$ libovolné reálné číslo takové, že $k \leq \lfloor x \rfloor$, je $k \leq \lfloor k \rfloor \leq \lfloor x \rfloor$ svědkem faktorizace. Jednoznačnost máme hned, v kategorii určené uspořádáním vede mezi každými dvěma objekty nanejvýš jeden morfismus. Podobně $x \mapsto \lceil x \rceil$ je levou adjunkcí: pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $x \leq \lceil x \rceil$, a je-li $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $x \leq \lceil k \rceil = k$, je také $x \leq \lceil x \rceil \leq \lceil k \rceil$.

Příklad 2.3.4. Funktory $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a $\Pi : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ z příkladu 2.1.6 jsou adjungované, Δ zleva a Π zprava. Přirozená transformace $I \to \Pi\Delta$ se získá očividným způsobem, její složky jsou $\delta_X : X \to X \times X$. Je-li (Y, Z) libovolný objekt kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ a je-li $f : X \to Y \times Z$ libovolný morfismus kategorie $\mathcal{C}$, označme $f_Y = \pi_Y \circ f$ a $f_Z = \pi_Z \circ f$. Potom morfismus $(f_Y, f_Z) : (X, X) \to (Y, Z)$ kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ zajistí, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\delta_X"] \arrow[dr, "f"'] & X \times X \arrow[d, "f_Y \times f_Z"] \\ & Y \times Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X, X) \arrow[d, dashed, "(f_Y, f_Z)"] \\ (Y, Z) \end{tikzcd}$$

V kategorii $\mathcal{SET}$ tvrzení vidíme téměř okamžitě po prvcích, obecně je ale musíme dokázat z univerzality morfismů $\delta : X \to X \times X$ a $f_Y \times f_Z : X \times X \to Y \times Z$ (viz 1.5). Morfismy $f_Y : X \to Y$ a $f_Z : X \to Z$ se díky univerzalitě produktu $Y \times Z$ faktorizují přes projekce π_Y, π_Z. Faktorizujícím morfismem je triviálně f, ukážeme ale, že též $(f_Y \times f_Z) \circ \delta_X$. Z jednoznačnosti pak bude $f = (f_Y \times f_Z) \circ \delta_X$. Předně je $1_X = \pi_X \circ \delta_X$ z definice δ_X, takže $f = f \circ 1_X = f \circ (\pi_X \circ \delta_X)$. Morfismus $f_Y \times f_Z$ je z definice jediný, který komutuje s vnějším obdélníkem,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift right, "\delta_X"'] \arrow[d, "f_Y"'] \arrow[dr, "f"] & X \times X \arrow[l, shift right, "\pi_X"'] \arrow[r, shift left, "\pi_X"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[l, shift left, "\delta_X"] \arrow[d, "f_Z"] \arrow[dl, "f"'] \\ Y & Y \times Z \arrow[l, "\pi_Y"] \arrow[r, "\pi_Z"'] & Z \end{tikzcd}$$

takže $\pi_Y \circ (f_Y \times f_Z) = f_Y \circ \pi_X = \pi_Y \circ f \circ \pi_X$, a tedy také $\pi_Y \circ (f_Y \times f_Z) \circ \delta_X = \pi_Y \circ f \circ \pi_X \circ \delta_X = \pi_Y \circ f$; stejně se ukáže $\pi_Z \circ (f_Y \times f_Z) \circ \delta_X = \pi_Z \circ f$.

Pojem levé adjunkce $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lze ekvivalentně vyjádřit pomocí podmínky na pravý adjunkt $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$: existuje přirozená transformace $\varepsilon : FG \to I$, tj. třída morfismů $\varepsilon_Y : FGY \to Y$ takových, že každý morfismus $g : FX \to Y$ se pomocí jediného $f : X \to GY$ faktorizuje jako $g = \varepsilon_Y \circ Ff$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ GY \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FX \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "g"] & \\ FGY \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

V obou formulacích jde o totéž: existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi morfismy $f : X \to GY$ a morfismy $g : FX \to Y$, která je přirozená pro každé $X \in \mathcal{C}$ i každé $Y \in \mathcal{D}$. To lze elegantně vyjádřit pomocí Hom funktorů.

Cvičení 2.3.5. Funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ a $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tvoří levý a pravý adjunkt právě když funktory $\mathcal{C}(\_\_, G\_\_)$ a $\mathcal{D}(F\_\_, \_\_)$ jsou přirozeně ekvivalentní v obou proměnných. To jest, pro každé $X \in \mathcal{C}$ existuje přirozená ekvivalence mezi $\mathcal{C}(X, G\_\_) : \mathcal{D} \to \mathcal{SET}$ a $\mathcal{D}(FX, \_\_) : \mathcal{D} \to \mathcal{SET}$, a pro každé $Y \in \mathcal{D}$ existuje přirozená ekvivalence mezi $\mathcal{C}(\_\_, GY) : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$ a $\mathcal{D}(F\_\_, Y) : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$.

Příklad 2.3.6. Existence exponentů v kartézsky uzavřených kategoriích je rovněž případem adjunkce. Libovolný objekt $X \in \mathcal{C}$ určuje funktor $\_\_ \times X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, jehož pravým adjunktem je funktor $(\_\_)^X : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "curry(g)"'] \\ Y^X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \times X \arrow[d, "curry(g) \times 1_X"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y^X \times X \arrow[r, "eval"'] & Y \end{tikzcd}$$

Kojednotkou adjunkce je $eval : Y^X \times X \to Y$, jeho univerzální vlastnost je právě podmínka na pravý adjunkt. V duchu předchozího cvičení jde o korespondenci mezi $g : Z \times X \to Y$ a $curry(g) : Z \to Y^X$. Existence exponentů v $\mathcal{C}$ znamená tedy právě tolik, že funktor $\_\_ \times X$ má pravou adjunkci pro každé $X \in \mathcal{C}$.

Příklady adjunkce zajímavé pro algebru jsou obvyklé konstrukce *volných* objektů: jsou to levé adjunkty k zapomínacímu funktoru $U : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$. Ukážeme to na příkladě monoidů, Booleových algeber a vektorových prostorů.

Příklad 2.3.7. V příkladu 2.1.5 jsme popsali funktor $\mathcal{SET} \to \mathcal{MON}$, který nad danou množinou X vystaví monoid X^*, a každému zobrazení $f : X \to Y$ přiřadí morfismus $f^* : X^* \to Y^*$ způsobem, který respektuje skládání. Ukážeme, že tento funktor je levým adjunktem zapomínajícího[2] funktoru $U : \mathcal{MON} \to \mathcal{SET}$.

Máme předně ukázat, že existuje přirozená transformace $\nu : I \to UF$. Pro každou množinu X tedy musí existovat zobrazení $\nu_X : X \to U(X^*)$ tak, aby následující obdélník komutoval:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[d, "f"'] & X^* \arrow[d, "f^*"] \\ Y \arrow[r, "\nu_Y"'] & Y^* \end{tikzcd}$$

Takové zobrazení se ale přirozeně nabízí, totiž $\nu_X(x) = x$; to jest, písmeno $x \in X$ zobrazujeme na jednopísmenné slovo $x \in X^*$. Morfismus $f^* : X^* \to Y^*$ je překlad po písmenech, viz 2.1.5, diagram tedy očividně komutuje.

Je-li nyní X libovolná množina, $(M, *, e)$ libovolný monoid, a $f : X \to M$ libovolné zobrazení do jeho nosné množiny, máme ukázat, že existuje jediný monoidový morfismus $f^\# : X^* \to M$, pro který následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & X^* \arrow[d, dashed, "f^\#"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Takový morfismus $f^\# : X^* \to M$ se ale získá stejně jako v 2.1.5: má-li trojúhelník komutovat, musí být $f^\#(x_1 \dots x_n) = f(x_1) * \cdots * f(x_n)$. Přitom takové zobrazení z definice respektuje monoidovou operaci.[3]

Příklad 2.3.8. Pro množinu X uvažme množinu výrokových formulí nad X. Pro formuli φ buď $[\varphi] = \{\psi; \models \varphi \leftrightarrow \psi\}$ její *ekvivalenční třída*. Množina $\mathcal{B}(X)$ těchto ekvivalenčních tříd je pak Booleovou algebrou, pokud ji opatříme operacemi $-[\varphi] = [\neg\varphi], [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi], [\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi], 0 = [\bot], 1 = [\top]$.

[2]Pro zapomínající funktor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$ bývá zvykem psát místo $U(X)$ a $U(f)$ prostě X a f. Je potom potřeba rozlišovat, jestli máme na mysli morfismus mezi strukturami, nebo mezi jejich nosnými množinami, obvykle ale nehrozí nedorozumění.

[3]Uvažme pro názornost zobrazení z X do nosné množiny monoidu $(\mathbb{N}, +, 0)$ s konstantní hodnotou $f(x) = 1$. Jemu odpovídající morfismus $f^\# : X^* \to \mathbb{N}$ je právě $len(x_1 \dots x_n) = n$, který přiřazuje slovu jeho délku. Zajímavější je monoid *uspořádaných seznamů*: je-li na X předem dáno nějaké lineární uspořádání, uvažme množinu $SL(X)$ takových konečných posloupností prvků z X, které dodržují dané uspořádání; na $SL(X)$ existuje přirozená asociativní operace *merge*; neutrálním prvkem je prázdný seznam. Tedy $SL(X)$ je monoid. Uvažme zobrazení $f : X \to SL(X)$, které prvku $x \in X$ přiřazuje jednoprvkový seřazený seznam (x). Odpovídajícím morfismem $f^\# : X^* \to SL(X)$ je potom *sort*.

Tím je určena objektová část funktoru $B : \mathcal{SET} \to \mathcal{BA}$. Pro $f : X \to Y$ buď potom $f^\# : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ přirozené rozšíření do booleovského morfismu, definované indukcí podle syntaktické složitosti formule: pro atomické formule buď $f^\#(x) = f(x)$, dále pak jediným možným způsobem, totiž $f^\#(\neg\varphi) = -f^\#(\varphi)$ a podobně pro ostatní spojky. Snadno se ověří, že F je funktor. Ukážeme, že je levým adjunktem zapomínajícího funktoru $U : \mathcal{BA} \to \mathcal{SET}$.

Přirozená ekvivalence $\nu : I \to UB$ se najde opět snadno, stačí položit $\nu_X(x) = [x]$. Je-li nyní $\mathcal{B}$ libovolná Booleova algebra a je-li $f : X \to \mathcal{B}$ libovolné zobrazení do její nosné množiny, hledáme jediné homomorfní rozšíření $f^\# : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{B}(X) \arrow[d, dashed, "f^\#"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

To se ale najde stejně jako výše: má-li diagram komutovat, musíme pro atomické formule $x \in X$ položit $f^\#([x]) = f(x)$, a má-li $f^\#$ být booleovským morfismem, musí se na ostatních formulích chovat popsaným způsobem.

Příklad 2.3.9. Pro množinu X buď $V(X)$ množina všech formálních lineárních kombinací nad X, tj. všech výrazů tvaru $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ (či stručněji $\sum \alpha_i x_i$), kde $x_1, \ldots, x_n \in X$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Množina $V(X)$ nese přirozenou strukturu vektorového prostoru nad $\mathbb{R}$, totiž sčítání vektorů i násobení skalárem se děje po složkách. Tím je určena objektová část funktoru $V : \mathcal{SET} \to \mathcal{VECT}$. Každé zobrazení $f : X \to Y$ určuje jediné možné lineární $f^\# : V(X) \to V(Y)$, totiž $f^\#(x) = f(x), f^\#(\lambda \cdot \sum \alpha_i x_i) = \lambda \cdot f^\#(\sum \alpha_i x_i), f^\#(\sum \alpha_i x_i + \sum \beta_i x_i) = f^\#(\sum \alpha_i x_i) + f^\#(\sum \alpha_i x_i)$. Snadno se ověří, že V je funktor. Ukážeme, že je levým adjunktem k zapomínajícímu funktoru $U : \mathcal{VECT} \to \mathcal{SET}$.

Transformace $\nu : I \to UV$ se najde snadno, stačí položit $\nu_X(x) = x$. Je-li nyní Y libovolný vektorový prostor a je-li $f : X \to Y$ libovolné zobrazení do jeho nosné množiny, hledáme jediné lineární $f^\# : V(X) \to V(Y)$, při kterém následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[dr, "f"'] & V(X) \arrow[d, dashed, "f^\#"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Takové lineární zobrazení se ale najde jako výše, totiž má-li diagram komutovat, musí na bázových $x \in X$ být $f^\#(x) = f(x)$, a má-li $f^\#$ být lineární, musí se na lineárních kombinacích chovat výše popsaným způsobem.

Na dalších příkladech ukážeme, že pod pojem adjunkce spadají i různé případy minimálních či maximálních zúplnění.

Definice 2.3.10. Levý adjunkt k identickému vnoření podkategorie $\mathcal{D}$ do kategorie $\mathcal{C}$ je *reflexe*, pravý adjunkt potom *koreflexe*. Pokud taková (ko)reflexe existuje, řekneme, že podkategorie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ je *(ko)reflexivní.*

Příklad 2.3.11. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *symetrický*, pokud $E \subseteq V^2$ je symetrická relace. Existují dva přirozené způsoby, jak daný graf symetrizovat:

přidat chybějící hrany (symetrický uzávěr) nebo přebytečné hrany odstranit. Ukážeme, že se jedná o reflexi a koreflexi.

Nejprve popíšeme levou adjunkci S k identickému vnoření J kategorie symetrických grafů do kategorie orientovaných grafů. Pro daný graf $G = (V, E)$ buď $SG = (V, E \cup E^{-1})$ symetrický graf na téže množině vrcholů, kde ke každé hraně $(x, y) \in E$ je přidána ještě opačná hrana (y, x). Na morfismech stačí pro $f : G \to H$ položit $Sf = f : SG \to SH$. To je opět grafový morfismus. F triviálně zachovává jednotky a skládání, je tedy funktorem. Identity $\nu_G : G \to JSG$ tvoří transformaci $I \to JS$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\nu_G"] \arrow[dr, "f"'] & JSG \arrow[d, "f"] \\ & JH \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SG \arrow[d, "f"] \\ H \end{tikzcd}$$

a je-li H libovolný symetrický graf a $f : G \to JH$ libovolný grafový morfismus, je totéž zobrazení zároveň morfismem $f : SG \to H$, neboť H je symetrický. Zároveň je f jediný morfismus komutující s identitou $G \to JSG$.

Koreflexe se získá zcela duálně. Pro orientovaný graf $G = (V, E)$ buď $TG = (V, E \cap E^{-1})$ symetrický graf na téže množině vrcholů, ve kterém jsou ponechány jen symetrické hrany. Pro grafový morfismus $f : G \to H$ stačí opět položit $Tf = f : TG \to TH$. Funktor T je tentokrát pravým adjunktem ke vnoření: identity $\varepsilon_H : JTH \to H$ tvoří kojednotku,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "f"'] \\ TH \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} JG \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\ JTH \arrow[r, "\varepsilon_H"'] & H \end{tikzcd}$$

a je-li $f : JG \to H$ libovolný morfismus, pak jediný kandidát $f : G \to TH$ komutující s identitou je morfismem symetrických grafů.

Příklad 2.3.12. Ukážeme, že *kondenzace* orientovaného grafu je reflexe. Připomeňme nejprve potřebné pojmy a fakta z teorie grafů. Řekneme, že orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje orientovaná cesta z x do y i zpět; jinými slovy, pokud každé dva vrcholy spolu leží v nějakém cyklu. Pro vrchol x buď potom $[x] \subseteq V$ jeho *silná komponenta*, tj. maximální silně souvislý podgraf obsahující x; to je množina právě všech takových vrcholů, se kterými x leží v nějakém cyklu. Uvažme potom graf $\overline{G}$, jehož vrcholy jsou právě silné komponenty původního grafu G, a orientovaná hrana vede z $[x]$ do $[y]$ právě když v grafu G vede nějaká hrana z $[x]$ do $[y]$. Graf $\overline{G}$ je *kondenzace* grafu G; snadno se nahlédne, že je acyklický.

Tím je určena objektová část morfismu $K : \mathcal{DG} \to \mathcal{DAG}$ z kategorie orientovaných grafů do podkategorie acyklických orientovaných grafů. Na morfismech se K chová přirozeným způsobem: každý morfismus $f : G \to H$ orientovaných grafů indukuje též morfismus $\overline{f} : \overline{G} \to \overline{H}$ mezi jejich kondenzacemi, totiž $\overline{f}([x]) = [f(x)]$. Tato definice opět nezávisí na reprezentantu x, a $\overline{f}$ je morfismem orientovaných grafů. Snadno se též ověří, že $K : \mathcal{DG} \to \mathcal{DAG}$ je funktor. Ukážeme, že je levým adjunktem identického vnoření $J : \mathcal{DAG} \to \mathcal{DG}$.

Předně, existuje přirozená transformace $\nu : I \to JK$, její složky jsou kvocientní morfismy $\nu_G(x) = [x]$; pro každý morfismus $f : G \to H$ orientovaných grafů máme $\nu_H \circ f = \nu_G \circ \overline{f}$. Je-li nyní $G \in \mathcal{DG}, H \in \mathcal{DAG}$, a je-li $f : G \to H$ libovolný morfismus, máme ukázat, že existuje jediný morfismus $f^\# : \overline{G} \to H$ acyklických grafů takový, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\nu_G"] \arrow[dr, "f"'] & \overline{G} \arrow[d, dashed, "f^\#"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Jedinou možností je $f^\#([x]) = f(x)$; tato definice opět nezávisí na reprezentantu x komponenty $[x]$: je-li $[x] = [y]$, leží spolu x a y v nějakém cyklu grafu G, tedy také $f(x)$ a $f(y)$ spolu leží v cyklu grafu H, který je ovšem acyklický, takže $f(x) = f(y)$. Podobně se ukáže, že $f^\#$ zachovává hrany: vede-li v $\overline{G}$ hrana z $[x]$ do $[y]$, vede v grafu G nějaká hrana z $[x]$ do $[y]$. Přitom $f : G \to H$ nutně posílá každou celou komponentu na jeden vrchol, tedy také v grafu H vede hrana z $f(x) = f^\#([x])$ do $f(y) = f^\#([y])$.

Příklad 2.3.13. Pro každý úplně regulární topologický prostor X existuje kompaktní Hausdorffův prostor βX, a homeomorfní vnoření $e : X \to \beta X$ na hustou část takové, že každá spojitá funkce $f : X \to K$ do libovolného kompaktu K má jediné spojité rozšíření na βX, které komutuje s vnořením $e : X \to \beta X$. Prostor βX je *Čech-Stoneova kompaktifikace* prostoru X. Jeho univerzální vlastnost říká právě tolik, že funktor β reflektuje kategorii úplně regulárních prostorů do kategorie kompaktních Hausdorffových prostorů.

Příklad 2.3.14. zúplnění metrického prostoru

Příklad 2.3.15. Buď $\mathcal{C}$ konkrétní kategorie, jejíž věrný funktor $U : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$ má levou adjunkci. Potom morfismus f v $\mathcal{C}$ je mono právě tehdy, když Uf je prosté zobrazení. Jako důsledek 1.2.7 tak získáváme, že konkrétní kategorie divisibilních abelovských grup nemá levý adjunkt k věrnému zapomínajícímu $U : \mathcal{C} \to \mathcal{SET}$. To znamená, že narozdíl od předchozích příkladů, kde jsme popsali volný monoid, volnou grupu, volnou Booleovu algebru apod, neexistuje volná divisibilní abelovská grupa. Dokonce už když existuje volný objekt nad jednoprvkovou množinou, jsou všechny monomorfismy nutně injektivní: buď $F1 \in \mathcal{C}$ volný objekt nad jednoprvkovou množinou, buď $f : A \to B$ mono. Je-li $f(x) = f(y)$, potom pro morfismy $g, h : F1 \to A$, určené zobrazením jediného volného generátoru na x resp. y, splňují $fg = fh$, a tedy $g = h$, takže $x = y$.

Po příkladech se vracíme k samotnému pojmu adjungovaného funktoru a k obecné otázce, které funktory mají levou či pravou adjunkci. Popíšeme nejdříve nutné podmínky, které každý adjunkt splňuje. V opačném směru pak dokážeme existenční větu o adjungovaném funktoru.

Věta 2.3.16. Pravý adjunkt zachovává produkty.

Důkaz. Buď $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ levý a $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ jeho pravý adjunkt. Buďte $Y_i \in \mathcal{D}$ a buď $Y = \prod Y_i \in \mathcal{D}$ spolu s projekcemi $\pi_i : Y \to Y_i$ jejich produkt. Máme ukázat, že $GY \in \mathcal{C}$ spolu s projekcemi $G\pi_i : GY \to GY_i$ je produktem GY_i.

Buď tedy $X \in \mathcal{C}$ a buďte $f_i : X \to GY_i$ libovolné morfismy. Ověříme, že všechna f_i se faktorizují přes $G\pi_i : GY \to Y_i$ skrze jediné $f : X \to GY$.

Z adjunkce máme složku $\nu_X : X \to GFX$ přirozené transformace $\nu : I \to GF$, a pro každé $f_i : X \to GY_i$ jediný morfismus $\varphi_i : FX \to Y_i$ takový, že $f_i = G\varphi_i \circ \nu_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[drr, "f_i"'] & GFX \arrow[r, "G\varphi"] \arrow[dr, "G\varphi_i"] & GY \arrow[d, "G\pi_i"] \\
 & & GY_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & Y \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & Y_i
\end{tikzcd}$$

Z univerzality produktu $Y = \prod Y_i$ se všechna φ_i faktorizují přes π_i skrze jediné $\varphi : FX \to Y$. Ukážeme, že $f = G\varphi \circ \nu_X$ je hledaná faktorizace. Z definice máme $G\pi_i \circ f = G\pi_i \circ G\varphi \circ \nu_X = G(\pi_i \circ \varphi) \circ \nu_X = G\varphi_i \circ \nu_X = f_i$; zbývá ukázat, že f je jediný takový. Buďte tedy všechna $f_i = G\pi_i \circ g$ skrze nějaké další $g : X \to GY$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\nu_X"] \arrow[rr, bend left=40, "g"] \arrow[rr, bend left=25, "f"'] \arrow[drr, "f_i"'] & GFX \arrow[r, shift left, "G\psi"] \arrow[r, shift right, "G\varphi"'] \arrow[dr] & GY \arrow[d, "G\pi_i"] \\
 & & GY_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & Y \arrow[d, "\pi_i"] \\
 & Y_i
\end{tikzcd}$$

Z adjunkce máme opět jediné $\psi : FX \to Y$, pro které je $g = G\psi \circ \nu_X$. Potom ale každé $f_i = G\pi_i \circ g = G\pi_i \circ G\psi \circ \nu_X = G(\pi_i \circ \psi) \circ \nu_X$. Tedy f_i se faktorizují přes $G(\pi_i \circ \psi)$, a z jednoznačnosti φ_i máme $\pi_i \circ \psi = \varphi_i$. To ale z jednoznačnosti produktové faktorizace φ znamená $\psi = \varphi$, takže $g = G\psi \circ \nu_X = G\varphi \circ \nu_X = f$. $\square$

Definice 2.3.17. Buď $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktor, buď $X \in \mathcal{C}$. Objekty $Y_i \in \mathcal{D}$ spolu s morfismy $f_i : X \to GY_i$ tvoří *solution set* pro X, pokud pro každý $Y \in \mathcal{D}$ a každý $f : X \to GY$ existuje nějaký morfismus $g : Y_i \to Y$ splňující $f = Gg \circ f_i$. Pokud taková *solution set* existuje pro každé $X \in \mathcal{C}$, řekneme, že funktor G splňuje *solution set condition* (krátce *ssc*).

Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, ke kterému existuje levý adjunkt $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, splňuje *ssc* triviálně: jednoprvkovou *solution set* tvoří objekt $FX \in \mathcal{D}$ spolu s morfismem $\nu_X : X \to GFX$. Vidíme, že *ssc* rozvolňuje existenční podmínku z definice adjunkce: připouštíme celou množinu objektů Y_i a morfismů $f_i : X \to Y_i$, požadujeme jen, aby každé $f : X \to GY$ faktorizoval alespoň jeden z nich.

Příklad 2.3.18. Zapomínající funktor $U : \mathcal{CBA} \to \mathcal{SET}$ z kategorie úplných Booleových algeber a úplných homomorfismů do kategorie množin nesplňuje *ssc*. To je důsledkem následující věty: každá úplná Booleova algebra $RO(\kappa^\omega)$ regulárních otevřených množin topologického součinu spočetně mnoha kopií kardinálu κ (opatřeného diskrétní topologií) má spočetnou množinu úplných generátorů. Je-li potom X spočetná, nemůže žádná množina $\{\mathcal{B}_i; i \in I\}$ úplných Booleových algeber a zobrazení $f_i : X \to \mathcal{B}_i$ tvořit solution set pro X: stačí zvolit $\kappa > |\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i|$ a libovolné zobrazení $f : X \to \mathcal{B} = RO(\kappa^\omega)$ z množiny X na spočetnou množinu úplných generátorů algebry $\mathcal{B}$. Má-li být $f = g \circ f_i$ pro nějaký úplný homomorfismus $g : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}$, musí být $g[\mathcal{B}_i] = \mathcal{B}$; to však není možné, jelikož $|\mathcal{B}| > |\mathcal{B}_i|$ pro všechna $i \in I$.

Věta 2.3.19 (AFT, Adjoint Functor Theorem)**.** Buď $\mathcal{D}$ úplná kategorie. Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ má levou adjunkci právě když zachovává limity a splňuje *ssc*.

Důkaz. Má-li $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ levou adjunkci, víme z předchozího, že splňuje *ssc* a zachovává produkty a ekvalizéry. Z důkazu Marandovy věty víme, že každou limitu lze sestavit z produktů a ekvalizérů, takže G zachová i všechny ostatní limity. V opačném směru máme naopak za těchto předpokladů najít levou adjunkci $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Ukážeme, jak pro daný objekt $X \in \mathcal{C}$ předepsat $FX \in \mathcal{D}$, popíšeme jednotku $\nu_X : X \to GFX$, a ukážeme, že má požadované vlastnosti.

Buď $Y_i \in \mathcal{D}$ spolu s morfismy $f_i : X \to Y_i$ solution set pro X a buď $Y = \prod Y_i$ spolu s projekcemi $\pi_i : Y \to Y_i$ produkt všech Y_i. Jelikož G zachovává produkty, je také GY spolu s morfismy $G\pi_i$ produktem GY_i. Všechna $f_i : X \to GY_i$ se tedy skrze jediné $\varphi : X \to GY$ faktorizují jako $f_i = G\pi_i \circ \varphi$. Potom ale Y s morfismem $\varphi : X \to GY$ tvoří jednoprvkovou solution set: je-li $f : X \to GZ$ pro nějaké $Z \in \mathcal{D}$, máme $f = Gg \circ f_i$ pro nějaké $g : Y_i \to Z$; potom ale pro $g \circ \pi_i : Y \to Z$ máme $f_i = Gg \circ G\pi_i \circ \varphi = G(g \circ \pi_i) \circ \varphi$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, "f"'] & GY \arrow[d, "G\pi_i"] \\
& GY_i \arrow[d, "Gg"] \\
& GZ
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "\pi_i"] \\
Y_i \arrow[d, "g"] \\
Z
\end{tikzcd}
$$

Kdybychom nyní položili $FX = Y$, splnili bychom tedy podmínku existence z definice levého adjunktu, nemůžeme ale očekávat jednoznačnost. Podobně jako v důkaze Marandovy věty potřebujeme produkt $Y = \prod Y_i$ zjemnit. Buď I množina všech $\psi : Y \to Y$ takových, že $G\psi \circ \varphi = \varphi$, a buď $P = Y^I$, tj. produkt I mnoha kopií Y, spolu s projekcemi $\pi_\psi : P \to Y$ za každé $\psi \in I$. Všechna $\psi : Y \to Y$ se pak faktorizují skrze jediné $\alpha : Y \to P$ jako $\psi = \pi_\psi \circ \alpha$; stejně tak se $1_Y : Y \to Y$ faktorizují skrze jediné $\beta : Y \to P$ jako $1_Y = \pi_\psi \circ \beta$. Morfismy $\alpha, \beta : Y \to P$ mají v kategorii $\mathcal{D}$ ekvalizér $e : FX \to Y$; objekt, ze kterého ekvalizér e vychází, bude hledaným $FX \in \mathcal{D}$.

$$
\begin{tikzcd}
& & Y \\
FX \arrow[r, "e"] & Y \arrow[ur, "1"] \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[dr, "\psi"'] & P \arrow[u, "\pi_\psi"'] \arrow[d, "\pi_\psi"] \\
& & Y
\end{tikzcd}
$$

Funktor G zachovává produkty a ekvalizéry, takže v kategorii $\mathcal{C}$ máme

$$
\begin{tikzcd}
& & GY \\
GFX \arrow[r, "Ge"] & GY \arrow[ur, "1"] \arrow[r, shift left, "G\alpha"] \arrow[r, shift right, "G\beta"'] \arrow[dr, "G\psi"'] & GP \arrow[u, "G\pi_\psi"'] \arrow[d, "G\pi_\psi"] \\
X \arrow[u, "\nu_X"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & GY
\end{tikzcd}
$$

Navíc pro každé $\psi \in I$ je $G\pi_\psi \circ G\alpha \circ \varphi = G(\pi_\psi \circ \alpha) \circ \varphi = G(1_Y) \circ \varphi = \varphi = G\psi \circ \varphi = G(\pi_\psi \circ \beta) \circ \varphi = G\pi_\psi \circ G\beta \circ \varphi$, takže je $G\alpha \circ \varphi = G\beta \circ \varphi$ z jednoznačnosti faktorizace přes produkt GP. Tedy φ ekvalizuje $G\alpha, G\beta$ a z univerzality ekvalizéru Ge se φ skrze jediné $\nu_X : X \to GFX$ faktorizuje jako $\varphi = Ge \circ \nu_X$.

Ukážeme, že ν_X je jednotka hledané adjunkce. Buď $f : X \to GZ$ pro nějaké $Z \in \mathcal{D}$. Tak jako výše pro $\varphi : X \to GY$, máme díky $\varphi = Ge \circ \nu_X$ i pro $\nu_X : X \to GFX$ nějaké $g : FX \to Z$ takové, že $f = g \circ \nu_X$. Zbývá ukázat, že takové $g : FX \to Z$ je jediné možné. Buďte tedy $g, h : FX \to Z$ takové, že $Gg \circ \nu_X = f = Gh \circ \nu_X$, a buď $i : E \to FX$ jejich ekvalizér. Z předpokladu je též $Gi : GE \to GFX$ ekvalizérem $Gg, Gh : GFX \to GZ$, takže ν_X splňující $Gg \circ \nu_X = Gh \circ \nu_X$ se skrze jediné $j : X \to GE$ faktorizuje jako $\nu_X = Gi \circ j$.

$$
\begin{tikzcd}
GFX \arrow[r, "Ge"] & GY \arrow[r, "Gk"] & GE \arrow[d, "Gi"] \\
X \arrow[u, "\nu_X"] \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[urr, "j"'] \arrow[rr, "\nu_X"'] \arrow[drr, "f"'] & & GFX \arrow[d, shift right, "Gg"'] \arrow[d, shift left, "Gh"] \\
& & GZ
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "k"] & E \arrow[d, "i"] \\
& FX \arrow[ul, "e"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "h"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

Přitom $\varphi : X \to GY$ je solution set pro X, takže specielně pro $j : X \to GE$ máme nějaké $k : Y \to E$, pro které je $j = Gk \circ \varphi$. Pak ale $\psi = e \circ i \circ k : Y \to Y$ splňuje $G\psi \circ \varphi = Ge \circ Gi \circ Gk \circ \varphi = Ge \circ Gi \circ j = Ge \circ \nu_X = \varphi$, takže $\psi \in I$ a máme $\psi \circ e = \pi_\psi \circ \beta \circ e = \pi_\psi \circ \alpha \circ e = 1_Y \circ e = e$, tedy $e \circ i \circ k \circ e = e$; přitom e jakožto ekvalizér je monomorfní, takže $i \circ k \circ e = 1_{FX}$. Potom ale $g = g \circ 1_{FX} = g \circ i \circ k \circ e = h \circ i \circ k \circ e = h \circ 1_{FX} = h$. $\square$

Kapitola 3

Monoidy a monády

3.1 Monoidy

Začneme opět příkladem v kategorii $\mathcal{SET}$, který posléze zobecníme. Podmínky na monoid, tedy množinu opatřenou asociativní operací a neutrálním prvkem, lze reformulovat pomocí požadavků na morfismy v $\mathcal{SET}$ následujícím způsobem.

Na násobení v monoidu M budeme hledět jako na funkci $m : M \times M \to M$. Chceme nejprve zachytit asociativitu. Předně, v kategorii $\mathcal{SET}$ existuje isomorfismus $\alpha : (M \times M) \times M \simeq M \times (M \times M)$ — takový ostatně existuje v každé kategorii s binárními produkty. Asociativitu pak zachycuje následující diagram.

$$
\begin{tikzcd}
(M \times M) \times M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m \times id"'] & & M \times (M \times M) \arrow[d, "id \times m"] \\
M \times M \arrow[r, "m"'] & M & M \times M \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

Pro vyjádření neutrality označme jako 1 terminální objekt (až na isomorfismus opět jediný, totiž jakoukoli jednoprvkovou množinu) a na neutrální prvek monoidu M hleďme jako na $e : 1 \to M$. Neutralitu pak zachycuje diagram

$$
\begin{tikzcd}
1 \times M \arrow[r, "e \times id"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \times M \arrow[d, "m"] & M \times 1 \arrow[l, "id \times e"'] \arrow[dl, "\varrho"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

kde λ, ϱ jsou projekční isomorfismy $\lambda(1, x) = x$ a $\varrho(x, 1) = x$.

Snadno se nahlédne, že komutativita těchto diagramů znamená právě tolik, že (M, m, e) je monoid. V kategorii $\mathcal{SET}$ tedy lze pomocí požadavků vyjádřených komutativními diagramy popsat monoidovou strukturu. Zobecnění spočívá v tom, že budeme totéž požadovat u diagramů v jiných kategoriích.

Definice 3.1.1. Buď $\mathcal{C}$ kategorie s binárními produkty a terminálním objektem. Potom *monoid v kategorii* $\mathcal{C}$ je objekt $M \in \mathcal{C}$ spolu s morfismy $m : M \times M \to M$ a $e : 1 \to M$ takovými, že diagramy výše komutují, přičemž $\lambda : 1 \times M \to M$ a $\varrho : M \times 1 \to M$ jsou projekce a $\alpha : (M \times M) \times M \to M \times (M \times M)$ je morfismus, pro který následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[rr, "\pi_1"] & & M \\
(M \times M) \times M \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[drr, "\pi_2 \times id"'] & M \times (M \times M) \arrow[ul, "id \times \pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
M & & M \times M \arrow[ll, "\pi_2"]
\end{tikzcd}$$

Cvičení 3.1.2. Ukažte, že α, λ, ϱ v definici jsou nutně isomorfismy.

Monoid v $\mathcal{SET}$ je tedy nosná množina monoidu v obvyklém smyslu. Přitom strukturu monoidu nese každá množina.[1] Naopak monoidem v $\mathcal{SET}^{op}$ je jen prázdná množina. Nabízí se samozřejmě otázka, co jsou monoidy v $\mathcal{MON}$.

Příklad 3.1.3. Monoidy v $\mathcal{MON}$ jsou právě komutativní monoidy. Buď totiž $(M, \circ, u)$ opatřen morfismy $m : M \times M \to M$ a $e : 1 \to M$ jako v definici. Pro monoidový homomorfismus $e : 1 \to M$ je nutně $e(1) = u$. Monoidový morfismus $m : M \times M \to M$ z definice splňuje $m(a, b) \circ m(c, d) = m(a \circ c, b \circ d)$, a z požadavku na komutativitu diagramů výše též $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ a $m(u, x) = x = m(x, u)$. Pro $x, y \in M$ tak máme $x \circ y = m(x, u) \circ m(u, y) = m(x \circ u, u \circ y) = m(x, y)$, takže $m : M \times M \to M$ splývá s násobením $\circ$ monoidu M. Ukázali jsme, že jediné možné morfismy m, e svědčící o tom, že $(M, \circ, u)$ je monoidem v $\mathcal{MON}$, jsou vlastní operace a neutrální prvek původního monoidu. Pro každé $x, y \in M$ navíc platí $x \circ y = m(u \circ x, y \circ u) = m(u, y) \circ m(x, u) = y \circ x$, takže $(M, \circ, u)$ je komutativní. Opačný směr je triviální.

Příklad 3.1.4. V kategoriích, jejichž objekty už nesou strukturu komutativního monoidu, můžeme výše uvedený argument zopakovat: například v kategorii komutativních grup i v kategorii vektorových prostorů je každý objekt monoidem, a $m : X \times X \to X$ a $e : 1 \to X$ jsou nutně původní sčítání a neutrální prvek.

Příklad 3.1.5. Terminálním objektem kategorie okruhů je triviální jednoprvkový okruh, ve kterém $0 = 1$. Jediným morfismem $e : \{0\} \to R$ je identita $e : \{0\} \to \{0\}$, neboť homomorfismus okruhů musí zachovat nulový i jednotkový prvek, takže do žádného netriviálního okruhu R (kde $0 \neq 1$) žádný morfismus $e : \{0\} \to R$ nevede. Jediný možný $m : \{0\} \times \{0\} \to \{0\}$ pak spolu s morfismem $e : \{0\} \to \{0\}$ svědčí o tom, že triviální okruh je jediný monoid v $\mathcal{RNG}$. Srovnejme tuto situaci s komutativními grupami a vektorovými prostory, kde terminální objekt je zároveň iniciální a má morfismus do každého jiného objektu.

Předchozí definice je vázána na binární produkt jakožto jeden konkrétní funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a terminální objekt, který je až na isomorfismus též jediný. Dalším zobecněním je následující pojem.

Definice 3.1.6. *Monoidální kategorie* je kategorie $\mathcal{C}$ spolu se zvoleným funktorem $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, zvoleným objektem $I \in \mathcal{C}$, a přirozenými ekvivalencemi $\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$, $\lambda_A : I \otimes A \to A$ a $\varrho_A : A \otimes I \to A$ mezi funktory $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, přičemž následující diagramy komutují

[1] Axiom výběru je ekvivalentní s tvrzením, že každá množina nese grupovou strukturu.

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[r, "\alpha_{A,B,(C\otimes D)}"] \arrow[d, "id_A \times \alpha_{B,C,D}"'] & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[r, "\alpha_{(A\otimes B),C,D}"] & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,(B\otimes C),D}"'] & & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[u, "\alpha_{A,B,C} \times id_D"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "id_A \times \lambda_B"'] & & (A \otimes I) \otimes B \arrow[dl, "\varrho_A \times id_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

a pro $A = I$ je navíc $\lambda_I : I \otimes I \to I$ a $\varrho_I : I \otimes I \to I$ tentýž morfismus. Monoidální kategorie je *striktně monoidální*, pokud navíc α, λ, ϱ jsou identity.

Podmínky dané výše uvedenými diagramy se nazývají *axiomy koherence*. Jde o to zajistit, aby komutovaly všechny výrazy, které by komutovat „měly“: v kategorii $\mathcal{SET}$ například snadno ověříme, že $(1 \times A \times ((B \times C) \times 1)) \times D$ a $(A \times (B \times 1)) \times (C \times (D \times 1)$ jsou isomorfní; obecně v monoidální kategorii se takové tvrzení dokáže opakovaným užitím výše uvedených komutací.

Snadno se ověří, že pojem monoidání kategorie je zobecněním předchozího. Monoidy pak můžeme uvažovat obecněji v monoidálních kategoriích.

Věta 3.1.7. Buď $\mathcal{C}$ kategorie, která má binární produkty a terminální objekt. Potom $\mathcal{C}$ spolu s funktorem $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, objektem $1 \in \mathcal{C}$ a přirozenými isomorfismy α, λ, ϱ je monoidální kategorie.

Příklad 3.1.8. Buď A^* množina slov nad abecedou A, buď $R \subseteq A^* \times A^*$ množina *přepisovacích pravidel* bez cyklů. Pro slova u, v pišme $u \to v$, pokud slovo u je tvaru psq, slovo v je tvaru ptq a v R existuje pravidlo (s, t). Označme reflexivní transitivní uzávěr relace $\to$ jako $\leq$ a uvažme kategorii určenou uspořádáním $(A^*, \leq)$. Pro slova u, v buď $u \otimes v$ jejich zřetězení uv, jako ε označme prázdné slovo, a jako α, λ, ϱ identity na slovech $(uv)w = u(vw), \varepsilon u = u, u\varepsilon = u$. Potom $(A^*, \otimes, \varepsilon, \alpha, \lambda, \varrho)$ je striktně monoidální kategorie.

Definice 3.1.9. *Monoid v monoidální kategorii* $(\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \varrho)$ je objekt $X \in \mathcal{C}$ s morfismy $m : X \otimes X \to X$ a $e : I \to X$, pro něž následující diagramy komutují.

$$
\begin{tikzcd}
(X \otimes X) \otimes X \arrow[rr, "\alpha_{X,X,X}"] \arrow[d, "m\otimes id"'] & & X \otimes (X \otimes X) \arrow[d, "id\otimes m"] \\
X \otimes X \arrow[r, "m"'] & X & X \otimes X \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes X \arrow[r, "e\otimes id"] \arrow[dr, "\lambda_X"'] & X \otimes X \arrow[d, "m"] & X \otimes I \arrow[l, "id\otimes e"'] \arrow[dl, "\varrho_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

Jsou-li (X, m, e) a (X', m', e') dva monoidy, potom *monoidový homomorfismus* $f : (X, m, e) \to (X', m', e')$ je takový morfismus $f : X \to X'$, pro který navíc

$$\begin{tikzcd} X \otimes X \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m"'] & X' \otimes X' \arrow[d, "m'"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

Cvičení 3.1.10. Uvažme uspořádání $(\mathbb{R}_0^+, \geq)$ nezáporných reálných čísel jako kategorii, označme ji $\mathcal{C}$. Produktové uspořádání na součinu $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ určuje součinovou kategorii $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$, a zobrazení $x \otimes y = x + y$ toto uspořádání respektuje, tj. $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ je funktor. Kategorie $\mathcal{C}$ spolu s funktorem $\otimes$, objektem $0 \in \mathcal{C}$ a identitami $\alpha_{x,y,z} : x + (y + z) = (x + y) + z$, $\lambda_x : 0 + x = x$ a $\varrho_x : x + 0 = x$ je potom striktně monoidální. Monoidem v $\mathcal{C}$ je potom $x \in R_0^+$ splňující $x + x \geq x$ (jediné možné $m : x \otimes x \to x$) a $0 \geq x$ (jediné možné $e : 0 \to x$), tedy jen $x = 0$.

Cvičení 3.1.11. Uvažme komutativní monoid $(M, \circ, u)$ jako kategorii s jedním objektem. Buď $\otimes$ sama operace $\circ$ a buďte $I, \alpha, \lambda, \varrho$ jediná možná, totiž jediný objekt a identity na něm. Taková kategorie je striktně monoidální a monoidem v ní je každý pár morfismů m, e takových, že $m \circ e = u$ v monoidu M.

Cvičení 3.1.12. Kategorie $\mathcal{CAT}$ všech kategorií a funktorů je monoidální: terminálním objektem je kategorie 1 s jediným objektem a jediným morfismem, produkty jsou obvyklé součiny kategorií, a ekvivalence α, λ, ϱ definujeme přirozeným způsobem. Její monoidy jsou pak právě striktně monoidální kategorie.

Věta 3.1.13. Kategorie endofunktorů je striktně monoidální.

Důkaz. Pro danou kategorii $\mathcal{C}$ uvažme kategorii endofunktorů $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, opatřenou funktorem skládání $\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, identickým funktorem $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a identitami $\alpha_{F,G,H} : F(GH) = (FG)H, \lambda_F : IF = F, \varrho_F : FI = F$; speciálně pro $F = I$ je pak λ_I i ϱ_I identita $II = I$. Máme ověřit komutativitu následujících diagramů, která je však zřejmá, všechny šipky jsou identity.

$$\begin{tikzcd} E(F(GH)) \arrow[r] \arrow[d] & (EF)(GH) \arrow[r] & ((EF)G)H \\ E((FG)H) \arrow[rr] & & (E(FG))H \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(IG) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (FI)G \arrow[dl] \\ & FG & \end{tikzcd}$$

□

Definice 3.1.14. *Monáda* je monoid v kategorii endofunktorů.

Příklad 3.1.15. Buď $\mathcal{C}$ kategorie určená uspořádáním $(X, \leq)$. Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ je striktně monoidální; ptáme se, jaké v ní existují monoidy. Monoidem je endofunktor, tedy monotónní zobrazení $f : X \to X$, opatřený vhodnými transformacemi $m : ff \to f$ a $e : id \to f$. To znamená, že pro každé $x \in X$ musí existovat morfismus $e_x : x \to f(x)$, jinými slovy, musí být $x \leq f(x)$; z monotonie pak také $f(x) \leq f(f(x))$. Podobně m je sadou morfismů $m_x : f(f(x)) \to f(x)$, tedy máme $f(f(x)) \leq f(x)$ pro každé $x \in X$. Celkem tedy $f(x) = f(f(x))$ pro každé $x \in X$, neboli $f = ff$ je *idempotentní*. Monádami této kategorie jsou tedy právě autoretrakce uspořádání $(X, \leq)$.

Příklad 3.1.16. Každá adjunkce určuje monádu. Pro adjungované funktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ a $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ existují svědčící transformace $\nu : I \to GF$ a $\varepsilon : FG \to I$. Položme $T = GF$, potom $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ je opět funktor, tedy objekt ve striktně monoidální kategorii $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$. Popíšeme transformace $\mu : TT \to T$ a $\nu : I \to T$ svědčící o tom, že (T, μ, ν) je monoidem v $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$. Transformace $\nu : I \to T$ se nabízí: z adjunkce máme jednotku $\nu : I \to GF$; pomocí kojednotky $\varepsilon : FG \to I$ můžeme definovat transformaci μ funktoru $TT = (GF)(GF) = G(FG)F$ do funktoru $T = G(I)F = GF$.

Literatura

[1] M. A. Arbib, E. G. Manes, *The Categorical Imperative*, Academic Press, 1975

[2] H. Herrlich, G. E. Strecker, *Category Theory*, Heldermann, 2007

[3] B. C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991

[4] D. Pitt, S. Abramsky, A. Poigné, D. Rydeheard (eds.), *Category Theory and Computer Programming*, Springer, 1986