

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2009 № 3

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2009 № 3

ЗАСНАВАЛЬНІК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Жук Е. Е. Статистический анализ случайных процессов броуновского движения, возвращающихся на фиксированный уровень.....	4
Малюгин В. И. Асимптотический анализ риска непараметрической классификации в случае существенно зависимых признаков.....	10
Расолько Г. А. Применение многочленов Чебышева для решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши со специальной правой частью	24
Самусенко А. В., Фролова С. В. Многоточечные схемы продольного варианта метода прямых повышенной точности для решения некоторых задач математической физики.....	31
Васьковский М. М. Теорема существования β -мартингальных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа с разрывными правыми частями.....	40
Куксо О. С. О свойствах целочисленных многочленов, принимающих малые значения на множествах положительной меры	51
Шамукова Н. В. Связь резонансных явлений и гиперболических диофантовых приближений.....	54
Бабуль О. В. О построении системы линейных уравнений в алгоритме решета числового поля для решения задачи дискретного логарифмирования	57
Гальмак А. М. Лемма Фраттини для n -арных групп	62
Корзюк В. И., Конопелько О. А. Обобщенные решения граничных задач в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка.....	68

ФІЗІКА

Андреев В. В., Шишкина Т. В. О возможности дискриминации расширенных калибровочных моделей в процессах аннигиляции поляризованных лептонов.....	76
---	----

Овсинок Е. М., Токаревская Н. Г., Редьков В. М. Аналог плоских волн в сферическом пространстве Римана и комплексные орисферические координаты	84
Гончаренко А. М. Распространение оптических солитонов в поглощающих средах	90
Гусак Н. А., Петров Н. С. Кинетика решеток пространственного заряда в фоторефрактивном кристалле при изменении во времени возбуждающего светового поля	93
Рябушко А. П., Жур Т. А. Pioneer anomaly как реликтовое ускорение пробного тела в Солнечной системе ...	98

ІНФАРМАТЫКА

Чебаков С. В. Алгоритмы организации параллельных вычислений для некоторых комбинаторных задач ...	105
Бенедиктович В. И. К гипотезе Альбертсона–Бугина об отличительном числе клики	114

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Лиходед Н. А. Комплекс программ для исследования параллельной структуры алгоритмов	120
---	-----

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

Павел Андреевич Апанасевич (К 80-летию со дня рождения)	122
Юрий Семенович Харин (К 60-летию со дня рождения)	124

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2009, № 3

Серия физико-математических наук
на русском и белорусском языках

Рэдактар І. С. Александровіч
Камп'ютэрная вёрстка В. Л. Смольская, Л. В. Харытонова

Здадзена ў набор 26.08.09. Падпісана ў друк 24.09.09. Выхад ў свет 29.09.09. Фармат 60 × 84^{1/8}. Папера афсетная. Ум. друк. арк. 14,88. Ум. фарб.-адб. 16,04. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 111 экз. Заказ 430.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 17 250 руб., ведамасная падпіска – 42 814 руб.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛІВ № 02330/0494405 ад 27.03.2009. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, Мінск. Пасведчанне № 392 ад 18.05.2009 г.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© «Выдавецкі дом «Беларуская навука»
Весці НАН Беларусі, серыя фізіка-матэматычных навук, 2009

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2009 No 3

FOUNDED BY THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Zhuk E. E. Statistical analysis of random Brownian motion processes returning to the fixed level.....	4
Malugin V. I. Asymptotic analysis of the risk of nonparametric classification in the case of essentially dependent features.....	10
Rasolko G. A. Chebyshev's polynomials application for solution of the first-kind singular integral equation with Cauchy's kernel and a special right hand-side	24
Samusenko A. V., Frolova S. V. Multipoint schemes of the longitudinal variant of the method of lines of high order of accuracy for solution of some problems of mathematical physics.....	31
Vas'kovskii M. M. Theorem of existence of β -martingale solutions to parabolic stochastic evolution equations with discontinuous right hand-sides.....	40
Kukso O. S. Properties of integer polynomials possessing small values on the sets of positive measure.....	51
Shamukova N. V. Relationship of resonance phenomena and hyperbolic Diophantine approximations	54
Babul O. V. Construction of the system of linear equations in the number field sieve algorithm for solution of the discrete logarithm problem	57
Galmak A. M. Frattini's lemma for N -ary groups	62
Korzyuk V. I., Konopelko O. A. Weak solutions of boundary-value problems in tube domains for the fourth-order equation of composite type.....	68

PHYSICS

Andreev V. V., Shishkina T. V. Possibility of discrimination of non-minimal gauge models in the annihilation processes of polarized leptons.....	76
Ovsiyuk E. M., Tokarevskaya N. G., Red'kov V. M. Analog of plane waves in the spherical Riemann space and complex horispherical coordinates.....	84
Goncharenko A. M. Propagation of optical solitons in absorbing media.....	90
Gusak N. A., Petrov N. S. Kinetics of space-charge gratings in the photorefractive crystal with time variation of the exciting light field pattern	93
Ryabushko A. P., Zhur T. A. Pioneer anomaly as the relict acceleration of a test body in the Solar system.....	98

INFORMATICS

Chebakov S. V. Algorithms of organizing parallel calculations for some combinatorial tasks	105
Benediktovitch V. I. Albertson–Boutin conjecture concerning a distinguishing number of a clique.....	114

SHORT NOTES

Likhoded N. A. Program system for investigation of the parallel structure of algorithms	120
--	-----

SCIENTISTS OF BELARUS

Pavel Andreevich Apanasevich (To the 80 th Anniversary of Birthday).....	122
Yurii Semenovich Kharin (To the 60 th Anniversary of Birthday).....	124

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, ВОЗВРАЩАЮЩИХСЯ НА ФИКСИРОВАННЫЙ УРОВЕНЬ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.01.2009)

Введение. Использование моделей броуновского движения для описания случайных процессов, возвращающихся на фиксированный уровень. В различных приложениях [1–3] (преимущественно в экономике для описания финансовых рынков [3]) часто используются так называемые случайные процессы броуновского движения. Произвольный случайный процесс броуновского движения $X(t)$, $t \in T$, где $T \subseteq R$ – некоторое множество моментов времени, в общем виде определяется следующей моделью [1, 2]:

$$\Delta X(t) = \mu(X(t), t)\Delta t + \sigma(X(t), t)\Delta W(t), \quad (1)$$

где $\Delta X(t) = X(t + \Delta t) - X(t)$ – приращение процесса за промежуток времени Δt , $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$, а $W(t)$ – стандартный винеровский процесс [1, 2], обладающий следующими свойствами: $W(t)$ имеет независимые приращения, т. е. для любых $s < t \leq u < v$ приращения $W(t) - W(s)$ и $W(v) - W(u)$ являются независимыми случайными величинами, и для всяких $s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ имеет нормальное (гауссовское) распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - s$.

Особое место среди процессов типа (1) занимают случайные процессы, возвращающиеся на фиксированный уровень [1, 2]. С их помощью описывают ситуацию, когда заведомо известно, что какой-либо наблюдаемый показатель $X(t)$ (например, цена на финансовом рынке [3]) при $t \in T$ не преодолет некоторое пороговое значение H (см. рис.; $T = [4, +\infty]$). Не ограничивая общности, будем считать, что процесс $X(t)$, $t \in T$, находится снизу от H , т. е. приближается к H , увеличивая свои значения: $X(t) < H$, $t \in T$. В противном случае (если $X(t)$ приближается к H сверху, как на рис.) всегда можно исходный процесс $X(t) > H$, $t \in T$, заменить на $X(t) := 2H - X(t) < H$, $t \in T$.

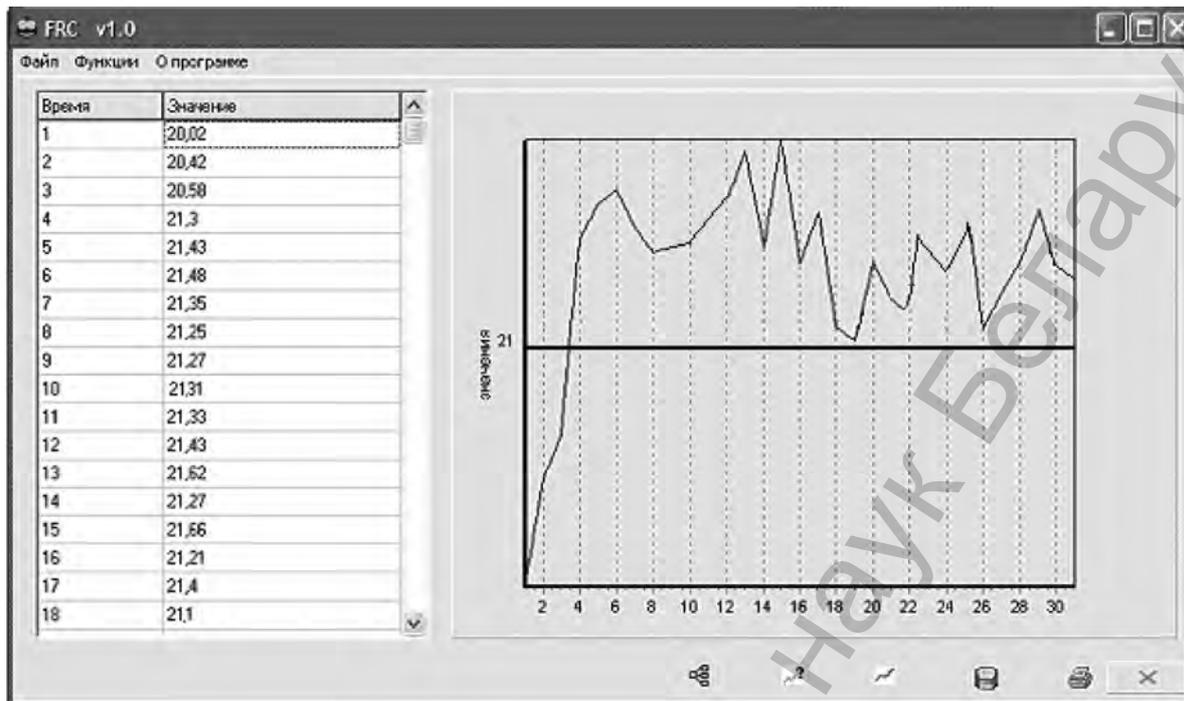
Определенную выше ситуацию обычно стараются описать при помощи следующего случайного процесса типа (1): $\mu(X(t), t) = (H - X(t))\mu$, $\sigma(X(t), t) = \sigma$, называемого процессом Орнштейна–Уленбека [1, 2]:

$$\Delta X(t) = (H - X(t))\mu\Delta t + \sigma\Delta W(t), \quad (2)$$

где значение параметра μ определяет «скорость» приближения случайного процесса $X(t)$ к уровню H , а значение $\sigma > 0$ – «силу» случайных колебаний процесса при движении к H .

На практике значения μ и σ из (2) обычно неизвестны, а значение уровня H известно.

И необходимо оценить μ и σ по реализации $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ объема $n + 1$, наблюдаемой в различные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$.



Окно торговой системы с данными цены на авиационное топливо

Однако случайный процесс (2) может пересечь уровень H и «колебаться» вокруг него, поэтому этот процесс называют еще «процессом, возвращающимся к среднему» (понимая под «средним» H) [1, 2].

Предложим здесь модель, альтернативную (2), строго соответствующую описанной выше ситуации и сочетающую в себе две простые модели типа (1) – арифметическое и геометрическое броуновское движение. Но сначала напомним эти две модели [1, 2].

Арифметическое броуновское движение является простейшим важным частным случаем модели (1) ($\mu(X(t), t) = \mu$, $\sigma(X(t), t) = \sigma$):

$$\Delta X(t) = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t), \quad (3)$$

где параметр $\mu \in R$ называется дрейфом, а $\sigma > 0$ – волатильностью [1, 2]. Очевидно, что математическое ожидание и дисперсия приращений процесса (3) имеют вид: $E\{\Delta X(t)\} = \mu \Delta t$, $D\{\Delta X(t)\} = \sigma^2 \Delta t$. При помощи случайного процесса (3) на практике удобно описывать динамику показателей, которые изменяются с линейной скоростью (определяется дрейфом μ) и имеют неопределенность, задаваемую волатильностью σ .

Другой важный для приложений процесс типа броуновского движения – геометрическое броуновское движение [1, 2] ($\mu(X(t), t) = X(t)\mu$, $\sigma(X(t), t) = X(t)\sigma$), – может быть записан в виде, аналогичном (3):

$$\Delta \ln(X(t)) = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t). \quad (4)$$

Процесс (4) адекватно описывает значения показателей, которые изменяются экспоненциально «колеблются» сверху от нулевого уровня) со «средней скоростью» μ и имеют неопределенность, пропорциональную самим значениям.

Модифицируем модель (4) для нашего случая следующим образом:

$$\Delta \ln(H - X(t)) = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t). \quad (5)$$

Предлагаемый случайный процесс (5) целесообразно использовать для описания показателей, возвращающихся после кратковременных возмущений на определенный (заранее известный, зафиксированный) уровень H .

Для модели (5), как и для (2), при известном H необходимо решить задачу статистического оценивания параметров μ и σ по наблюдаемой реализации $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ объема $n+1$.

Сравним предлагаемую модель (5) с моделью Орнштейна–Уленбека (2). Очевидно, что модель (5) имеет преимущество перед (2) в плане простоты: процесс Орнштейна–Уленбека невозможно аналитически свести к процессу арифметического броуновского движения (3). Тогда как модель (5) легко приводится к (3) заменой $X(t) := \ln(H - X(t))$, $t \in T$.

Выясним, имеет ли модель (5) преимущества перед (2) в плане статистического оценивания параметров.

1. Статистические оценки параметров и их свойства. Рассмотрим сначала модель Орнштейна–Уленбека (2). Для оценивания неизвестных параметров μ и σ^2 (вместо волатильности σ) будем применять метод максимального правдоподобия, поскольку получаемые при его использовании статистические оценки, называемые оценками максимального правдоподобия (ОМП), заведомо обладают целым рядом оптимальных статистических свойств [4].

Т е о р е м а 1. В условиях модели Орнштейна–Уленбека (2) ОМП для параметров μ и σ^2 по реализации $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ объема $n+1$ имеют вид ($t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$):

$$\bar{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta X(t_j)(H - X(t_j))}{\sum_{i=1}^n (H - X(t_i))^2 \Delta t_i}, \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\bar{\mu}\Delta t_j)^2}{\Delta t_j}, \quad (6)$$

где $\Delta X(t_j) = X(t_j) - X(t_{j-1})$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях модели (2) следующие случайные величины независимы в совокупности и распределены по нормальному закону:

$$\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\mu\Delta t_j \sim N_1(0, \sigma^2\Delta t_j), \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

что позволяет записать по реализации $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ объема $n+1$ логарифмическую функцию правдоподобия [4]:

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\mu\Delta t_j)^2}{\sigma^2\Delta t_j}} \right) =$$

$$C - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\mu\Delta t_j)^2}{\Delta t_j},$$

где C не зависит от μ и σ^2 .

Приравниваем частные производные от $l(\mu, \sigma^2)$ по μ и σ^2 к нулю:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\mu\Delta t_j)(H - X(t_j)) = 0;$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta X(t_j) - (H - X(t_j))\mu\Delta t_j)^2}{\Delta t_j} = 0,$$

и решая полученные уравнения, с учетом очевидного соотношения: $\sum_{j=1}^n \Delta t_j = t_n - t_0$, получаем ОМП (6) (проверив достаточное условие максимума относительно вторых производных).

Осуществим теперь статистическое оценивание неизвестных параметров в условиях модели (5).

Теорема 2. Пусть $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ – реализация случайного процесса, определяемого моделью (5), тогда ОМП параметров μ и σ^2 задаются соотношениями:

$$\hat{\mu} = \frac{\ln(H - X(t_n)) - \ln(H - X(t_0))}{t_n - t_0}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta \ln(H - X(t_j)) - \hat{\mu} \Delta t_j)^2}{\Delta t_j}, \quad (7)$$

где $\Delta \ln(H - X(t_j)) = \ln(H - X(t_j)) - \ln(H - X(t_{j-1}))$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Причем оценка $\hat{\mu}$ – несмещенная: $E\{\hat{\mu}\} = \mu$, $\forall n$, и имеет дисперсию: $D\{\hat{\mu}\} = \frac{\sigma^2}{t_n - t_0}$, а оценка $\hat{\sigma}^2$ – асимптотически несмещенная: $E\{\hat{\sigma}^2\} \rightarrow \sigma^2$, $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Введем в рассмотрение случайный процесс: $Y(t) = \ln(H - X(t))$, $t \in T$. В условиях теоремы приращения этого процесса $\Delta Y(t_j) = Y(t_j) - Y(t_{j-1})$, $j \in \{1, \dots, n\}$, независимы в совокупности и нормально распределены: $\Delta Y(t_j) \sim N_1(\mu \Delta t_j, \sigma^2 \Delta t_j)$, $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$, что приводит к логарифмической функции правдоподобия следующего вида:

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \Delta t_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\Delta Y(t_j) - \mu \Delta t_j)^2}{\sigma^2 \Delta t_j}} \right) = C - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta Y(t_j) - \mu \Delta t_j)^2}{\Delta t_j},$$

где, как и при доказательстве теоремы 1, величина C не зависит от μ и σ^2 . Далее решаем уравнения относительно частных производных:

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n (\Delta Y(t_j) - \mu \Delta t_j) = 0;$$

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta Y(t_j) - \mu \Delta t_j)^2}{\Delta t_j} = 0,$$

и, с учетом введенных обозначений, получаем ОМП (7), удостоверившись, что выполнено достаточное условие максимума относительно вторых производных.

Несмещенность оценки $\hat{\mu}$ и соотношение для ее дисперсии очевидны.

Установим асимптотическую несмещенность оценки $\hat{\sigma}^2$. Найдем

$$E\{\hat{\sigma}^2\} = E\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(\Delta Y(t_j) - \hat{\mu} \Delta t_j)^2}{\Delta t_j} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{E\{(\Delta Y(t_j))^2\}}{\Delta t_j} - 2E\{\Delta Y(t_j)\hat{\mu}\} + \Delta t_j E\{\hat{\mu}^2\} \right).$$

Учтем соотношения:

$$E\{\hat{\mu}^2\} = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{t_n - t_0}; \quad E\{(\Delta Y(t_j))^2\} = \mu^2 (\Delta t_j)^2 + \sigma^2 \Delta t_j;$$

$$E\{\Delta Y(t_j) \hat{\mu}\} = E\left\{ \Delta Y(t_j) \frac{Y(t_n) - Y(t_j) + \Delta Y(t_j) + Y(t_{j-1}) - Y(t_0)}{t_n - t_0} \right\} =$$

$$\frac{\Delta t_j (t_n - t_j) \mu^2 + E\{(\Delta Y(t_j))^2\} + \Delta t_j (t_{j-1} - t_0) \mu^2}{t_n - t_0} = \mu^2 \Delta t_j + \frac{\sigma^2 \Delta t_j}{t_n - t_0},$$

и получим $\left(\sum_{j=1}^n \Delta t_j = t_n - t_0 \right)$:

$$E\{\hat{\sigma}^2\} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mu^2 (\Delta t_j)^2 + \sigma^2 \Delta t_j}{\Delta t_j} - 2\mu^2 \Delta t_j - 2 \frac{\sigma^2 \Delta t_j}{t_n - t_0} + \mu^2 \Delta t_j + \frac{\sigma^2}{t_n - t_0} \Delta t_j \right) = \frac{\sigma^2 (n-1)}{n} \rightarrow \sigma^2, \quad n \rightarrow +\infty,$$

что и доказывает теорему.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы 2 оценка дрейфа $\hat{\mu}$ из (7) при $t_n - t_0 \rightarrow +\infty$ состоятельна в среднеквадратическом [4]: $E\{(\hat{\mu} - \mu)^2\} = D\{\hat{\mu}\} \rightarrow 0$.

Согласно результатам теоремы 2 и следствия к ней, для статистических оценок, построенных в рамках предложенной здесь модели (5), удалось установить дополнительные свойства, тогда как для модели Орнштейна–Уленбека (2) и соответствующих оценок (6), полученных в теореме 1, такие исследования затруднительны в силу вида оценок (6) (случайный знаменатель в выражении для $\hat{\mu}$).

Поэтому далее для описания процессов, возвращающихся на заданный уровень, будем использовать модель (5). Разумеется, предварительно необходимо убедиться в адекватности данной модели исследуемым при ее помощи реальным процессам.

2. Анализ динамики и прогнозирование случайного процесса, возвращающегося на заданный уровень. Пусть имеется реализация $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ случайного процесса в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_n , относительно которой предполагается соответствие модели (5). Рассчитаем по $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ следующие нормированные величины:

$$\Delta Z(t_i) = \frac{\ln(H - X(t_i)) - \ln(H - X(t_{i-1})) - \hat{\mu}(t_i - t_{i-1})}{\hat{\sigma}\sqrt{t_i - t_{i-1}}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (8)$$

используя в качестве неизвестных параметров μ и σ их ОМП $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ из (7).

Далее методами из [4] (например, χ^2 -критерий Пирсона или критерий Колмогорова) относительно выборки $\{\Delta Z(t_i)\}_{i=1}^n$ величин из (8) проверяем гипотезу о согласии со стандартным

нормальным распределением с функцией распределения вероятностей $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega$, $z \in R$. Если выборка (8) согласуется с этим распределением, то считаем, что исходный процесс $X(t)$, $t \in T$, можно описывать моделью (5) и проводить его дальнейший анализ.

Так, в качестве прогноза для значения процесса $X(t)$ в момент времени $t = t_{n+1}$ по реализации $\{X(t_i)\}_{i=0}^n$ можно использовать

$$\hat{X}(t_{n+1}) = H - e^{\hat{Y}(t_{n+1})}, \quad \hat{Y}(t_{n+1}) = Y(t_n) + \hat{\mu}(t_{n+1} - t_n),$$

где $Y(t) = \ln(H - X(t))$ – вспомогательный случайный процесс, уже встречавшийся при доказательстве теоремы 2. Среднеквадратическая ошибка прогнозирования [4] для вспомогательного процесса

$$E\left\{\left(\hat{Y}(t_{n+1}) - Y(t_{n+1})\right)^2\right\} = E\left\{\left(\left(\hat{\mu} - \mu\right)(t_{n+1} - t_n) - \sigma\Delta W(t_{n+1})\right)^2\right\} =$$

$$D\{\hat{\mu}\}(t_{n+1} - t_n)^2 + \sigma^2 D\{\Delta W(t_{n+1})\} = (t_{n+1} - t_n) \left(\frac{t_{n+1} - t_n}{t_n - t_0} + 1\right) \sigma^2 \rightarrow 0, \quad t_{n+1} - t_n \rightarrow 0.$$

Но гораздо важнее на практике оценить вероятность того или иного предполагаемого изменения исследуемого случайного процесса.

Пусть обозначено: $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, тогда равенство

$$P\{Y(t_n + \Delta t) - Y(t_n) > \Delta\} = P \quad (9)$$

будет означать, что с вероятностью P вспомогательный процесс совершит движение вверх на больше чем Δ единиц через промежуток времени Δt , а равенство

$$P\{Y(t_n + \Delta t) - Y(t_n) < -\Delta\} = P \quad (10)$$

– что за промежуток времени Δt с вероятностью P он совершит движение вниз на больше чем Δ единиц.

С учетом стандартного нормального распределения величины

$$\frac{Y(t_n + \Delta t) - Y(t_n) - \mu\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

заменив неизвестные μ и σ на оценки из (7), для (9), (10) получим соответствующие асимптотические соотношения, связывающие величины P , Δ и Δt :

$$\Phi\left(\frac{\Delta - \hat{\mu}\Delta t}{\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t}}\right) = 1 - P, \quad \Phi\left(\frac{\Delta + \hat{\mu}\Delta t}{\hat{\sigma}\sqrt{\Delta t}}\right) = 1 - P. \quad (11)$$

Рассмотрим теперь случай, когда исследуемый процесс – цена на финансовом рынке [3]. Исходя из изложенных выше результатов, опишем возможные стратегии покупки и продажи. Введем в рассмотрение величину

$$\delta = \frac{H - X(t_n + \Delta t)}{H - X(t_n)}$$

– коэффициент приближения цены к уровню H за время Δt (меньше единицы – цена приблизилась к H , больше единицы – удалилась).

Для принятия решения можно использовать две стратегии. Первая состоит в том, что выбраны устраивающее нас значение δ и время Δt , которое мы готовы ждать, тогда по формулам (11), с учетом очевидного соотношения $\Delta = |\ln(\delta)|$, можно определить вероятность P данного изменения цены. Вторая заключается в следующем: нами выбрано значение вероятности P , на которое мы согласны, а также определено время Δt , которое мы готовы ждать. Тогда из соотношений (11) находим гарантированное с данной вероятностью приращение Δ , а по нему – соответствующее значение $\delta = e^{\Delta}$ или $\delta = e^{-\Delta}$. При обеих стратегиях в зависимости от того, удовлетворяют ли нас полученные значения, принимаем решение о покупке, продаже или бездействии.

На основе полученных выше результатов на ЭВМ была реализована автоматическая торговая система [3] и проведен вычислительный эксперимент на реальных данных. Например, для данных по цене на авиационное топливо в условиях выросшей цены на нефть (исходя из текущей цены на нефть установлена соответствующая минимально допустимая цена на авиационное топливо $H = 21$, см. рис.), применяя описанный выше алгоритм проверки адекватности по доступным значениям, находящимся над зафиксированным уровнем, было установлено, что исследуемый период рынка может быть описан с помощью модели (5), что позволило провести дальнейший анализ и прогнозирование.

Литература

1. М а т а л ы ц к и й М. А. Вероятность и случайные процессы. Гродно, 2005.
2. М е д в е д е в. Г. А. Математические модели финансовых рисков. Ч. 1. Минск, 1999.
3. Э л д е р А. Как играть и выигрывать на бирже. М., 1996.
4. Х а р и н Ю. С., Ж у к Е. Е. Математическая и прикладная статистика. Минск, 2005.

E. E. ZHUK

STATISTICAL ANALYSIS OF RANDOM BROWNIAN MOTION PROCESSES RETURNING TO THE FIXED LEVEL

Summary

To investigate random processes returning to the fixed level the models of Brownian motion type are used. The maximum likelihood estimators of unknown parameters are constructed and their statistical properties are analytically investigated. The procedure of adequacy testing and forecasting is described.

УДК 519.2

В. И. МАЛЮГИН

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РИСКА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ
КЛАССИФИКАЦИИ В СЛУЧАЕ СУЩЕСТВЕННО ЗАВИСИМЫХ ПРИЗНАКОВ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 11.09.2008)

Введение. При решении разнообразных практических задач исследования сложных технических, производственных и экономических систем (установлении причинно-следственных связей, прогнозировании, управлении) приходится иметь дело с анализом многомерных статистических данных, которые представляют собой значения наблюдаемых и, как правило, взаимосвязанных характеристик (признаков) сложных систем. Для описания эмпирических данных, имеющих стохастическую природу, используются различные модели статистических зависимостей [1, 2].

В данной статье предполагается, что сложная система описывается случайным вектором признаков, компоненты которого связаны нелинейной статистической зависимостью. Особенностью рассматриваемой модели зависимости является то, что совместное распределение компонент вектора признаков близко к вырожденному, т. е. концентрируется на многообразии меньшей размерности, чем размерность пространства признаков. Рассматривается случай априорной непараметрической неопределенности, т. е. предполагается, что функциональный вид зависимости не известен.

Имеют место два режима функционирования сложной системы и, соответственно, два класса состояний, различающихся моделями статистических зависимостей для компонент случайного вектора признаков. Задача заключается в построении и исследовании решающего правила, предназначенного для оценки (прогнозирования) состояния сложной системы по имеющимся наблюдениям за системой (значениям вектора признаков). Для оценки состояния системы (классификации наблюдений) используются непараметрические подстановочные байесовские решающие правила (непараметрические классификаторы), получающиеся подстановкой в байесовское решающее правило [3–5] непараметрических ядерных оценок многомерных условных плотностей распределения наблюдений с фиксированным и адаптивным гауссовским ядром [6].

С помощью метода асимптотических разложений в асимптотике растущего объема обучающей выборки и усиливающейся статистической зависимости компонент вектора признаков исследуется условный риск (средние потери) непараметрических подстановочных решающих правил при условии, что значения экзогенных переменных в регрессионных зависимостях являются заданными, и оценивается преимущество предлагаемого непараметрического классификатора с адаптивным ядром.

1. Модель наблюдений и непараметрическая оценка плотности с адаптивным гауссовским ядром. Пусть результаты наблюдения характеристик сложной системы в i -м эксперименте описываются случайным вектором признаков (наблюдений) $y_i \in \mathcal{R}^p$ ($p > 1$), который допускает в общем случае неизвестное разбиение на подвекторы:

$$y_i = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{z}_i \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{iN})' \in \mathcal{R}^N, \mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{iM})' \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^M, p = N + M, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $\mathcal{Z} \subset \mathcal{R}^M$ – ограниченная область в \mathcal{R}^M .

Компоненты вектора $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{R}^{N+M}$ связаны моделью статистической зависимости вида:

$$T(\mathbf{y}_i) = \mathbf{x}_i - f(\mathbf{z}_i) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $T(\cdot)$, $f(\cdot)$ – неизвестные достаточно гладкие векторные функции; $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{iN})' \in \mathfrak{R}^N$ – случайный вектор с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей $\Sigma \in \mathfrak{S}_N$, где \mathfrak{S}_N – семейство положительно определенных симметричных матриц размерности $N \times N$; случайные векторы $\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}$ и $\xi_i \in \mathfrak{R}^N$ являются статистически независимыми и имеют плотности распределения $p_z(\mathbf{z})$ и $p_\xi(\xi)$ соответственно; разбиение (1) в общем случае не известно. Для простоты записи случайный вектор и неслучайный аргумент соответствующей функции плотности распределения обозначаются одним и тем же символом.

С учетом сделанных предположений плотность распределения $p(\mathbf{y})$ случайного вектора $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{R}^p$ ($i = 1, \dots, n$) имеет вид:

$$p(\mathbf{y}) = p_\xi(\mathbf{x} - f(\mathbf{z})) p_z(\mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M, \quad \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{N+M}. \quad (3)$$

Относительно случайного вектора $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{R}^p$ ($i = 1, \dots, n$), удовлетворяющего условиям (1)–(3), делается также предположение

$$\text{tr}(\Sigma) \rightarrow 0. \quad (4)$$

Условие (4) означает усиливающуюся статистическую зависимость компонент вектора \mathbf{y}_i

при уменьшении дисперсий компонент вектора $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{iN})' \in \mathfrak{R}^N$. При этом наблюдения $\{\mathbf{y}_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) концентрируются в пространстве \mathfrak{R}^p «вблизи» некоторой N -мерной ($N < p$) гиперповерхности (многообразия) Γ , определяемой уравнением

$$T(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \in \mathfrak{R}^N, \quad \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p. \quad (5)$$

Тождество (5) можно интерпретировать как некоторое ожидаемое состояние системы в пространстве признаков \mathfrak{R}^p для определенного режима функционирования, а случайный вектор ξ_i – как отклонение системы от этого состояния в i -м эксперименте, обусловленное случайными и неконтролируемыми факторами.

Таким образом, распределение вероятностей случайного вектора $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{R}^p$ ($i = 1, \dots, n$), описываемое соотношениями (1)–(3), при выполнении условия (4) приближается к вырожденному. На этом основании в работе [6] случайный вектор, удовлетворяющий условиям (1)–(4), называется случайным вектором с «существенно зависимыми» компонентами.

Для определенности и избежания громоздкости в аналитических исследованиях будем предполагать, что случайные векторы $\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M$ и $\xi_i \in \mathfrak{R}^N$ имеют соответственно равномерное в ограниченной области $\mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M$ и N -мерное нормальное распределение с плотностями:

$$p_z(\mathbf{z}) = \frac{1}{\text{mes}\{\mathbb{Z}\}} \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z}), \quad p_\xi(\xi) = n_N(\xi | \mathbf{0}_N, \Sigma), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z}, \quad \xi \in \mathfrak{R}^N, \quad (6)$$

где $n_N(\xi | \mathbf{0}_N, \Sigma)$ – функция плотности N -мерного нормального распределения с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей $\Sigma \in \mathfrak{S}_N$; $\mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z})$ и $\text{mes}\{\mathbb{Z}\} < \infty$ – соответственно индикаторная функция и N -мерный объем (мера Лебега) области \mathbb{Z} .

Согласно (3) и (6) плотность распределения случайного вектора $\mathbf{y}_i \in \mathfrak{R}^{N+M}$ определяется выражением:

$$p(\mathbf{y}) = \frac{1}{\text{mes}\{\mathbb{Z}\}} \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z}) n_N(\mathbf{x} | f(\mathbf{z}), \Sigma) = \frac{1}{\text{mes}\{\mathbb{Z}\}} \mathbf{I}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z}) \left((2\pi)^N |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} T'(\mathbf{y}) \Sigma^{-1} T(\mathbf{y}) \right\} \right), \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{N+M}. \quad (7)$$

Поскольку параметрический вид функций $T(\cdot), f(\cdot)$, а также само разбиение вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ на подвекторы не известны для оценивания плотности распределения $p(\mathbf{y})$ по случайной выборке $Y = (\mathbf{y}_i) \in \mathfrak{R}^m$, будем использовать непараметрическую оценку плотности Розенблатта – Парзена с многомерным гауссовским ядром, определяемую по формуле [5]:

$$\hat{p}(\mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_N(\mathbf{y} | \mathbf{y}_j, h^2 H), \quad (8)$$

где H, h – управляемые параметры гауссовского ядра: $H \in \mathfrak{S}_{N+M}$ – матрица гауссовского ядра; $h \equiv h(n)$ – коэффициент сглаживания, удовлетворяющий условиям состоятельности оценки

$$h(n) \rightarrow 0, nh(n) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

При построении оценки (8) возникает проблема задания матрицы ядра H . Обычно [5] в качестве матрицы ядра используется либо фиксированная (например, единичная) матрица, либо выборочная ковариационная матрица, вычисленная по всей выборке $Y = (\mathbf{y}_i) \in \mathfrak{R}^m$.

В работе [6] при оценивании плотности распределения $p_y(\mathbf{y})$ в условиях (1)–(4) показано преимущество выборочной оценки матрицы $H \in \mathfrak{S}_{N+M}$ и предлагается способ вычисления коэффициента сглаживания h для модели статистической зависимости (2) линейного вида (т. е., когда Γ является гиперплоскостью). В общем случае (в случае нелинейной гиперповерхности Γ) предлагается использовать оценку (8) с адаптивным гауссовским ядром. Адаптация ядра достигается за счет использования для каждого наблюдения $\mathbf{y}_i (i = 1, \dots, n)$ своей матрицы ядра $H^{(i,m(i))}$ (локальной выборочной оценки ковариационной матрицы случайного вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$), вычисленной в некоторой окрестности $S(i) \in \mathfrak{R}^p$ наблюдения \mathbf{y}_i . Оптимальный размер локальной окрестности для точки \mathbf{y}_i , определяемый количеством попавших в нее точек $m(i) - 1$ из выборки Y , находится из условия минимума статистики Андерсона [7], характеризующей степень множественной линейной зависимости компонент вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ в окрестности точки $\mathbf{y}_i (i = 1, \dots, n)$.

При этом само наблюдение \mathbf{y}_i в вычислении $H^{(i,m(i))}$ не используется.

2. Задачи исследования. Пусть сложная система характеризуется случайным вектором $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$, описываемым моделью (1)–(4), и имеют место два режима функционирования, которым соответствуют два класса состояний системы Ω_1 или Ω_2 . Номер класса состояния системы в i -м эксперименте описывается ненаблюдаемой случайной величиной $v_i = v(\mathbf{y}_i) \in S = \{1, 2\} (i = 1, \dots, n, \dots)$ с распределением вероятностей

$$P\{v_i = \alpha\} = \pi_\alpha > 0 (\alpha \in S), \pi_1 + \pi_2 = 1, \quad (10)$$

параметры $\{\pi_\alpha\} (\alpha \in S)$ являются априорными вероятностями классов состояний системы.

Классам $\{\Omega_\alpha\}$ в модели (2) соответствуют неизвестные функции $\{f_\alpha(\mathbf{z})\}$ (или $\{T_\alpha(\mathbf{y})\}$), удовлетворяющие условию

$$P(f_1(\mathbf{z}) = f_2(\mathbf{z})) = 0, \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

которое означает, что для различных классов состояний гиперповерхности $\{\Gamma_\alpha\} (\alpha \in S)$ различны.

Условная плотность распределения $p_\alpha(\mathbf{y})$ случайного вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ для класса состояния системы Ω_α имеет вид (7) при $f(\mathbf{z}) \equiv f_\alpha(\mathbf{z})(T(\mathbf{y}) \equiv T_\alpha(\mathbf{y}))$, $\alpha \in S$.

Вероятностные характеристики классов $\{\pi_\alpha, p_\alpha(\mathbf{y})\} (\alpha \in S)$ не известны. Имеется классифицированная обучающая выборка наблюдений $Y = (\mathbf{y}_i) \in \mathfrak{R}^{pn}$, допускающая разбиение на подвыборки наблюдений из классов Ω_1 и Ω_2 : $Y = Y_1 \cup Y_2$, где $Y_\alpha = (\mathbf{y}_{\alpha i}) \in \mathfrak{R}^{pn_\alpha}$ – выборка наблюдений из класса Ω_α ($\alpha \in S$, $n = n_1 + n_2$).

Необходимо исследовать следующие задачи:

1) построить непараметрическое решающее правило, предназначенное для принятия решения относительно класса состояния сложной системы по заданному вектору наблюдений $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$, удовлетворяющему условиям (1)–(4);

2) в случае известной эндогенно-экзогенной структуры модели с помощью метода асимптотических разложений в асимптотике растущего объема обучающей выборки и усиливающейся статистической зависимости компонент вектора признаков исследовать условный риск предлагаемого решающего правила при условии, что значения экзогенных переменных являются заданными.

3. Решающие правила и критерии оптимальности. Оптимальное в смысле минимума риска байесовское решающее правило (БРП) классификации наблюдений из классов $\{\Omega_\alpha\}$ с вероятностными характеристиками $\{\pi_\alpha, p_\alpha(\mathbf{y})\} (\alpha \in S)$ является нерандомизированным и имеет вид [5]:

$$d(\mathbf{y}) = \mathbf{1}(G(\mathbf{y})) + 1 = \begin{cases} 1, & \text{если } G(\mathbf{y}) < 0, \\ 2, & \text{если } G(\mathbf{y}) \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда, $G(\cdot)$ – байесовская дискриминантная функция, определяемая соотношениями:

$$G(\mathbf{y}) = c_2 p_2(\mathbf{y}) - c_1 p_1(\mathbf{y}), \quad c_1 = \pi_1(w_{12} - w_{11}), \quad c_2 = (1 - \pi_1)(w_{21} - w_{22}), \quad (13)$$

где $W = (w_{\alpha\beta}) (\alpha, \beta \in S)$ – заданная матрица потерь.

Будем рассматривать альтернативные решающие правила, получаемые на основании БРП (11), (12) подстановкой в него вместо неизвестных истинных условных плотностей распределений $\{p_\alpha(\mathbf{y})\}$ их непараметрических оценок $\{\hat{p}_\alpha(\mathbf{y})\}$ вида (8), вычисленных по выборкам $\{Y_\alpha\} (\alpha \in S)$.

В рамках аналитического исследования риска подстановочных решающих правил будем предполагать, что модель зависимости (2) определяет в пространстве \mathfrak{R}^p некоторую гиперплоскость (многообразие) Γ размерности $N < p$:

$$T_\alpha(\mathbf{y}_i) \equiv T_\alpha \mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - B_\alpha \mathbf{z}_i = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\alpha \in S), \quad (14)$$

где $T_\alpha = \left(\mathbf{I}_N \mid B_\alpha \right)$ – фиксированная $(N \times p)$ -матрица, B_α – неизвестная фиксированная $(N \times M)$ -матрица, удовлетворяющая условию разделимости классов типа (11):

$$P\left(B_1 \mathbf{z} = B_2 \mathbf{z}\right) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Объектом исследования в данной статье являются решающие правила, использующие непараметрические оценки плотности $\left\{ \hat{p}_\alpha^{(l)}(\mathbf{y}) \right\} (l=0,1,2, \alpha \in S)$, различающиеся выбором матрицы ядра H : оценки $\left\{ \hat{p}_\alpha^{(l)}(\mathbf{y}) \right\}$ имеют место, если $H \equiv H_1 \in \mathfrak{T}_{N+M}$ – произвольная фиксированная матрица; в случае оценок $\left\{ \hat{p}_\alpha^{(2)}(\mathbf{y}) \right\}$ для выборочных наблюдений $\left\{ \mathbf{y}_{\alpha i} \right\} (i=1, \dots, n_\alpha)$ используются матричные статистики $H^{(i,m(\alpha,i))} \in \mathfrak{T}_{N+M}$, вычисленные по $m(\alpha,i)$ наблюдениям из локальной окрестности $S(\alpha,i)$ точки $\mathbf{y}_{\alpha i}$ в соответствии с описанной в п. 1 процедурой. В теоретических исследованиях будем также использовать оценки $\left\{ \hat{p}_\alpha^{(0)}(\mathbf{y}) \right\}$, в которых матрица ядра совпадает с ковариационной матрицей $H_0 \in \mathfrak{T}_{N+M}$ случайного вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$. Для вычисления перечисленных оценок плотностей справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \hat{p}_\alpha^{(l)}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{n_\alpha} \sum_{i=1}^{n_\alpha} n_N \left(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}_{\alpha i}, h^2 H_l \right) \quad (l=0,1), \quad \hat{p}_\alpha^{(2)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{i=1}^{n_\alpha} n_N \left(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}_{\alpha i}, h^2 H^{(i,m(\alpha,i))} \right), \quad (16) \\ H^{(i,m(\alpha,i))} &= \frac{1}{m(\alpha,i) - 1} \sum_{\mathbf{y}_{\alpha j} \in S(\alpha,i) \setminus \mathbf{y}_{\alpha i}} \left(\mathbf{y}_{\alpha j} - \mathbf{y}^{(\alpha,i)} \right) \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}^{(\alpha,i)} \right)', \quad \mathbf{y}^{(\alpha,i)} = \frac{1}{m(\alpha,i) - 1} \sum_{\mathbf{y}_{\alpha j} \in S(\alpha,i) \setminus \mathbf{y}_{\alpha i}} \mathbf{y}_{\alpha j}. \end{aligned}$$

Согласно (12), подстановочные решающие правила $\hat{d}^{(l)}(\mathbf{y}) (l=0,1,2)$ имеют вид:

$$\hat{d}^{(l)}(\mathbf{y}) = \mathbf{1} \left(\hat{G}^{(l)}(\mathbf{y}) \right) + 1, \quad \hat{G}^{(l)}(\mathbf{y}) = c_2 \hat{p}_2^{(l)}(\mathbf{y}) - c_1 \hat{p}_1^{(l)}(\mathbf{y}). \quad (17)$$

При решении задачи 2 в качестве критериев оптимальности подстановочных решающих правил $\hat{d}^{(l)}(\mathbf{y}) (l=0,1,2)$ с учетом вида зависимости (2) компонент вектора $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{N+M}$, ($\mathbf{x} \in \mathfrak{X} = \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M$) будем использовать следующие функционалы риска (средних потерь):

- условный риск (условное математическое ожидание потерь) в фиксированной точке $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$:

$$r_n^{(l)}(\mathbf{z}) = E_Y \left\{ R_n^{(l)}(\mathbf{z}, Y) \right\}, \quad R_n^{(l)}(\mathbf{z}, Y) = \sum_{\alpha \in S} \pi_\alpha \int_{\mathfrak{X}} w\left(\alpha, \hat{d}^{(l)}(\mathbf{y})\right) p_\xi(\mathbf{x} - f_\alpha(\mathbf{z})) dx; \quad (18)$$

- условный ε -риск в фиксированной точке $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$:

$$r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = E_Y \left\{ R_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}, Y) \right\} (l=1,2), \quad R_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}, Y) = \sum_{\alpha \in S} \pi_\alpha \int_{T(\varepsilon, \mathbf{z})} w\left(\alpha, \hat{d}^{(l)}(\mathbf{y})\right) p_\xi(\mathbf{x} - f_\alpha(\mathbf{z})) dx,$$

где $T(\varepsilon, \mathbf{z}) \subset \mathfrak{X}$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию

$$\left| r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}) - r_n^{(l)}(\mathbf{z}) \right| \leq \varepsilon, \quad (19)$$

здесь величина $\varepsilon > 0$ задает точность приближения $r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ к $r_n^{(l)}(\mathbf{z})$. Согласно (19) использование условного ε -риска обеспечивает возможность оценки условного риска классификации с заданной точностью, определяемой величиной ε ($0 < \varepsilon < 1$). При $\varepsilon \rightarrow 0$ точность вычисления условного риска возрастает.

Заметим, что в случае «антиединичной» матрицы потерь W (когда $w_{\alpha\beta} = 1 - \delta_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера) функционалы (17), (18) имеют смысл условных вероятностей ошибок классификации.

Можно показать [4], что условие (19) справедливо, если $P(\mathbf{x} \in T(\varepsilon, z)) \geq 1 - \varepsilon / (c_1 + c_2) \forall z \in \mathcal{Z}$. В этом случае имеет место выражение для условного риска:

$$r_n^{(l)}(\mathbf{z}) = \pi_1(w(1, 1)) + \pi_2(w(2, 1)) - \int_{\mathcal{X}} E_Y \left\{ \mathbf{1}(\tilde{G}^{(l)}(\mathbf{y})) \right\} \tilde{G}(\mathbf{y}) d\mathbf{x} \quad (l=1,2), \quad (20)$$

где $\tilde{G}(\mathbf{y}) = c_2 p_\xi(\mathbf{x} - f_2(\mathbf{z})) - c_1 p_\xi(\mathbf{x} - f_1(\mathbf{z}))$ – дискриминантная функция БРП (12), (13) с учетом рассматриваемой модели зависимости компонент вектора наблюдений (2).

4. Асимптотические разложения риска подстановочных решающих правил. В условиях рассматриваемой модели зависимости компонент вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y}^p$ методом асимптотического разложения исследуем условные риски описанных выше подстановочных решающих правил $\{\tilde{d}^{(l)}(\mathbf{y})\}$. Сформулируем вначале вспомогательные утверждения.

Будем использовать обозначения: $H_0 \in \mathfrak{S}_{N+M}$ и $Q \in \mathfrak{S}_M$ – ковариационные матрицы случайных векторов $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y} = \mathfrak{R}^p$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ соответственно; $b_{n,\alpha}^{(l)}(\mathbf{y})$ и $v_{n,\alpha}^{(l)}(\mathbf{y})$ – смещение и вариация оценки плотности $\hat{p}_\alpha^{(l)}(\mathbf{y})$ вида (16) соответственно; $\tilde{G}^{(l)}(\mathbf{y})$ – дискриминантная функция подстановочных БРП $\tilde{d}^{(l)}(\mathbf{y})$, определяемого соотношениями (17); $g^{(l)}(\mathbf{y}) = \tilde{G}^{(l)}(\mathbf{y}) - G(\mathbf{y})$ – случайное уклонение оценки дискриминантной функции при использовании подстановочных БРП $\tilde{d}^{(l)}(\mathbf{y})$ от дискриминантной функции вида (13) БРП; $T_\alpha = (\mathbf{I}_N \mid -B_\alpha)$ – блочная $(N \times (N + M))$ -матрица, \mathbf{I}_N – единичная $(N \times N)$ -матрица; $\{c_\alpha\} (\alpha \in S)$ определяются по формуле (13); $n_1 = n_2 (n = 2n_1)$;

$$k_l = \frac{1}{(4\pi)^{(N+M)/2} \sqrt{\det(H_\varepsilon)}} \quad (l=0,1), \quad k_2 = \frac{1}{(4\pi)^{(N+M)/2} \sqrt{\det(\Sigma) \det(Q)}}. \quad (21)$$

Л е м м а 1. Если выполняются условия (14), (15), (6), то для фиксированного значения $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y} = \mathfrak{R}^p$ случайные уклонения $\{g^{(l)}(\mathbf{y})\} (l=0,1,2)$ имеют моменты до третьего порядка включительно, причем

$$E \left\{ (g_l(\mathbf{y}))^2 \right\} = \frac{k_l}{n_0 h^{N+M}} \sum_{\alpha \in S} c_\alpha^2 p_\alpha(\mathbf{y}) + (c_1 b_{n,1}^{(l)}(\mathbf{y}) - c_0 b_{n,0}^{(l)}(\mathbf{y}))^2, \quad (22)$$

$$E \left\{ (g_l(\mathbf{y}))^3 \right\} = o_1, \quad o_1 = o(h^4 + n^{-1} h^{-(N+M)}), \quad (23)$$

где

$$b_{n,\alpha}^{(0)}(\mathbf{y}) = -\frac{h^2}{2} (N - \mathbf{y}' T_\alpha' \Sigma^{-1} T_\alpha \mathbf{y}) p_\alpha(\mathbf{y}) + o(h^2), \quad b_{n,\alpha}^{(2)}(\mathbf{y}) = b_{n,\alpha}^{(0)}(\mathbf{y}) + o(h^2), \quad (24)$$

$$b_{n,\alpha}^{(1)}(\mathbf{y}) = -\frac{h^2}{2} \text{tr} \left(T_\alpha H_l T_\alpha' \Sigma^{-1} (\mathbf{I}_N - T_\alpha \mathbf{y} \mathbf{y}' T_\alpha' \Sigma^{-1}) \right) p_\alpha(\mathbf{y}) + o(h^2), \quad (25)$$

$$v_{n,\alpha}^{(0)}(\mathbf{y}) = \frac{p_\alpha(\mathbf{y}) n^{-1} h^{-(N+M)}}{(4\pi)^{(N+M)/2} \sqrt{|H_1| |\Sigma|}} + b_{n,\alpha}^{(0)}(\mathbf{y}) + o_1, \quad v_{n,\alpha}^{(2)}(\mathbf{y}) = v_{n,\alpha}^{(0)}(\mathbf{y}) + o_1, \quad (26)$$

$$v_{n,\alpha}^{(1)}(\mathbf{y}) = \frac{p_\alpha(\mathbf{y}) n^{-1} h^{-(N+M)}}{(4\pi)^{(N+M)/2} \sqrt{|H_1|}} + b_{n,\alpha}^{(l)}(\mathbf{y}) + o_1. \quad (27)$$

Доказательство. Асимптотические разложения (24)–(27) были получены при сделанных в лемме 1 предположениях [8]. Пусть $\zeta_{\alpha l}$ – случайная величина с плотностью распределения $p_{\alpha l}(\zeta_{\alpha l})$ такая, что для фиксированного значения $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$:

$$\zeta_{\alpha l} \equiv \zeta_{\alpha l}(\mathbf{y}) = \hat{p}_{\alpha}^{(l)}(\mathbf{y}) - p_{\alpha}(\mathbf{y}) \quad (l=0,1,2, \alpha \in S). \quad (28)$$

Тогда для отклонений $\{g_l(\mathbf{y})\} (l=0,1,2)$ справедливо представление

$$g_l(\mathbf{y}) = c_2 \zeta_{2l} - c_1 \zeta_{1l}. \quad (29)$$

С учетом (29) искомые моменты случайных величин $\{g_l(\mathbf{y})\}$ выражаются через моменты первого, второго и третьего порядка для взаимно независимых по построению случайных величин $\{\zeta_{\alpha l}\}$. С учетом (24)–(27) имеем: $E\{\zeta_{\alpha l}\} = b_{n,\alpha}^{(l)}(\mathbf{y}) = O(h^2)$, $E\{\zeta_{\alpha}^2\} = v_{n,\alpha}^{(l)}(\mathbf{y}) = O(h^4 + n^{-1}h^{-(N+M)})$, $E\{\zeta_{\alpha}^3\} = o_1$. На основании (25) и свойств математического ожидания случайных величин получаем формулы (22), (23). Лемма 1 доказана.

Введем обозначения: $G_1(\cdot; \mathbf{z}): \mathbf{x} \rightarrow \mathfrak{R}^1$ – байесовская дискриминантная функция для фиксированной точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$;

$$\Gamma_{\mathbf{z}} = \left\{ \mathbf{x} : G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = 0 \right\} \quad (30)$$

– соответствующая дискриминантная гиперповерхность; $T(\varepsilon, \mathbf{z}) \subset \mathbb{X}$ – ограниченная область, представляющая собой объединение двух гиперэллипсоидов:

$$T(\varepsilon, \mathbf{z}) = T^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \cup T^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}), \quad T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \equiv \left\{ \mathbf{x} : (\mathbf{x} - B_{\alpha} \mathbf{z})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - B_{\alpha} \mathbf{z}) \leq u_{\varepsilon, \alpha}^2 \right\} \quad (\varepsilon > 0), \quad (31)$$

где $u_{\varepsilon, \alpha}^2$ – квантиль уровня $1 - \varepsilon$ для χ^2 -распределения с N степенями свободы; $l_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sqrt{(\mathbf{x} - B_{\alpha} \mathbf{z})' \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - B_{\alpha} \mathbf{z})}$ ($\alpha \in S$) – расстояние Махаланобиса от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ до центра гиперэллипсоида $T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})$;

$$l_{\alpha}(\mathbf{z}) = (-1)^{\alpha} \frac{\Delta^2(\mathbf{z})}{2} - \ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right); \quad (32)$$

$\Delta(\mathbf{z}) = \sqrt{\mathbf{z}' B' \Sigma^{-1} B \mathbf{z}}$ ($B = B_2 - B_1$) – расстояние Махаланобиса между центрами гиперэллипсоидов $T^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ и $T^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z})$; $\Delta_1(\mathbf{z}) = \mathbf{z}' B' \Sigma^{-2} B \mathbf{z}$.

Представим матрицу $\Sigma^{-1} = (\bar{\sigma}_{ij})$ в блочном виде, а векторы $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{z}) = (\beta_k(\mathbf{z})) = \Sigma^{-1} B \mathbf{z} \in \mathfrak{R}^N$, $\mathbf{b}_{\alpha}(\mathbf{z}) = (b_{\alpha j}(\mathbf{z})) = B_{\alpha} \mathbf{z} \in \mathfrak{R}^N$ ($N > 1$) разобьем на подвекторы:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}^{-1} & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N' & \tilde{\sigma}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{z}) \\ \tilde{\beta}_N(\mathbf{z}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\alpha}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i(\mathbf{z}) \\ \mathbf{b}_{iN}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 2. Если модель зависимости компонент случайного вектора $\mathbf{y} \in \mathbb{Y} = \mathfrak{R}^p$ определяется соотношениями (14), (15), (6) и область $T(\varepsilon, \mathbf{z}) \subset \mathbb{X}$ имеет вид (31), то область пересече-

ния $\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \equiv \Gamma_z \cap T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ ($\varepsilon > 0$) является гиперэллипсоидом в пространстве $\tilde{\mathbf{X}} = \mathfrak{R}^{N-1}$ $\left(\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{N-1})' \in \tilde{\mathbf{X}} \right)$ и описывается выражением:

$$\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = \left\{ \tilde{\mathbf{x}} : (\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z}))' F(\mathbf{z})(\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z})) \leq \tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^2 \right\}, \quad (33)$$

где

$$F(\mathbf{z}) = \Sigma_1 + \mathbf{a}(\mathbf{z})\mathbf{a}(\mathbf{z})' \in \mathfrak{S}_{N-1}, \quad (34)$$

$$\Sigma_1 = \tilde{\Sigma}^{-1} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{NN}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N', \quad \mathbf{a}(\mathbf{z}) = \left(\beta_N(\mathbf{z}) \sqrt{\bar{\sigma}_{NN}} \right)^{-1} \left(\bar{\sigma}_{NN} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_N(\mathbf{z}) + \beta_N(\mathbf{z}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N' \right),$$

и имеет место:

$$\boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z}) = -\sqrt{\bar{\sigma}_{NN}} \left(\frac{c(\mathbf{z})}{\beta_N(\mathbf{z})} + \beta_{\alpha N}(\mathbf{z}) \right) F(\mathbf{z}) \mathbf{a}(\mathbf{z}) - \left(\Sigma_1 - \frac{1}{\beta_N(\mathbf{z})} \tilde{\boldsymbol{\beta}}_N(\mathbf{z}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N' \right) \tilde{\mathbf{b}}_\alpha(\mathbf{z}), \quad (35)$$

$$\tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^2(\mathbf{z}) = u_{\varepsilon, \alpha}^2 - l_\alpha^2(\mathbf{z}) / \Delta^2(\mathbf{z}) \quad (\alpha \in S). \quad (36)$$

Доказательство. С учетом (14), (15), (6) дискриминантная функция $G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ имеет вид:

$$G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \mathbf{x}' \Sigma^{-1} B \mathbf{z} + c(\mathbf{z}), \quad c(\mathbf{z}) = \mathbf{z}' B' \Sigma^{-1} (B_2 + B_1) \mathbf{z} + \ln(c_1 / c_2). \quad (37)$$

Согласно (30) и (37) компоненты составного вектора $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{x}}, x_N)' \in \Gamma_z$ связаны соотношением:

$$x_N = -\frac{1}{\beta_N(\mathbf{z})} \left(\tilde{\mathbf{x}}' \tilde{\boldsymbol{\beta}}_N(\mathbf{z}) + c(\mathbf{z}) \right).$$

Поэтому квадратичная форма $l_\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ допускает представление:

$$l_\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z}))' F(\mathbf{z})(\tilde{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z})) + d_\alpha^2(\mathbf{z}), \quad (38)$$

где $F(\mathbf{z})$, $\boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z})$ имеют вид (34), (35), а

$$d_\alpha^2(\mathbf{z}) = \left(\tilde{\mathbf{b}}_\alpha(\mathbf{z}) \right)' \tilde{\mathbf{b}}_\alpha(\mathbf{z}) + 2 \left(\frac{c(\mathbf{z})}{\beta_N(\mathbf{z})} + b_{\alpha N}(\mathbf{z}) \right) \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_N \right)' \tilde{\mathbf{b}}_\alpha(\mathbf{z}) +$$

$$\bar{\sigma}_{NN} \left(\frac{c(\mathbf{z})}{\beta_N(\mathbf{z})} + b_{\alpha N}(\mathbf{z}) \right)^2 - \left(\boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z}) \right)' F(\mathbf{z}) \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\mathbf{z}).$$

Из (31), (33), (38) следует, что $\tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^2(\mathbf{z}) = u_\varepsilon^2 - d_\alpha^2(\mathbf{z})$. Заметим, что $d_\alpha^2(\mathbf{z})$ – расстояние Махаланобиса между центрами гиперэллипсоидов $\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ и $T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})$, а $\tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^2(\mathbf{z})$ и u_ε^2 соответственно «радиусы» этих гиперэллипсоидов. Поэтому $d_\alpha^2(\mathbf{z}) = l_\alpha^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{z})$, где $\mathbf{x}^* \in \Gamma_\varepsilon$ – общий центр областей $\{\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})\} (\alpha \in S)$. Решая систему из двух уравнений

$$\begin{cases} l_2^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) - l_1^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) = -2 \ln(c_1 / c_2), \\ l_2^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) + l_1^2(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}) = \Delta^2(\mathbf{z}), \end{cases}$$

получаем $d_\alpha^2(\mathbf{z}) = l^2(\mathbf{z}) / \Delta^2(\mathbf{z})$ ($\alpha \in S$), что влечет (36). Лемма 2 доказана.

Докажем основные утверждения. Будем использовать обозначения: $r(\varepsilon, \mathbf{z}), r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ ($r(\mathbf{z}), r_n^{(l)}(\mathbf{z})$) – условный ε -риск (условный риск) в точке $\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M$ соответственно БРП (12) и подстановочные БРП (17) ($l = 0, 1, 2$); $m = 3 - \arg \min_{\alpha \in S} \{c_\alpha\}$, где $\{c_\alpha\}$ определяются по формулам (13); $p_{\alpha l}^{(k)}(\zeta_{\alpha l})$ – k -я производная функции плотности $p_{\alpha l}(\zeta_{\alpha l})$ ($k = 0, 1, 2$), где $\zeta_{\alpha l} \equiv \zeta_{\alpha l}(\mathbf{y})$, ($l = 0, 1, 2, \alpha \in S$) определяются (28); $p_{g_l}(v)$ ($v \in (-\infty, \infty)$) – плотность распределения случайной величины $g_l(\mathbf{y})$ вида (29) при фиксированном $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$.

Для $t \in \mathfrak{R}^1$ и фиксированной точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M$ определим функции:

$$Q_l(t, \mathbf{z}) = \int_{\mathbf{x}} E \left\{ \mathbf{1} \left(G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) + t g^{(l)}(\mathbf{y}) \right) \right\} G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (l = 1, 2). \quad (39)$$

Т е о р е м а 1. Пусть модель статистической зависимости компонент вектора $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{Y} = \mathfrak{R}^p$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{X} = \mathfrak{R}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \subset \mathfrak{R}^M, \text{mes}\{\mathbb{Z}\} < \infty$) определяется плотностью распределения вида (7), в которой $T_\alpha(\mathbf{y}) = T_\alpha \mathbf{y} = \mathbf{x} - B_\alpha \mathbf{z}$, где B_α ($\alpha \in S$) – фиксированная $(N \times M)$ -матрица, удовлетворяющая условию (15). Тогда, если

$$\left| p_{\alpha l}^{(k)}(\zeta_{\alpha l}) \right| < \infty \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{Y}, k = 0, 1, 2, l = 1, 2, \alpha \in S, \quad (40)$$

то для риска подстановочных решающих правил $\{\tilde{d}^{(l)}(\mathbf{y})\}$ ($l = 1, 2$) вида (17) при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические разложения:

$$r_n^{(l)}(\mathbf{z}) = r(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \text{mes}\{\mathbb{Z}\} \left(\frac{k_l}{2n_0 h^{N+M}} \sum_{\alpha \in S} c_\alpha \bar{\alpha}_l(\mathbf{z}) + \bar{\beta}_n^{(l)}(\mathbf{z}) \right) + o_1, \quad (41)$$

$$\bar{\alpha}_\alpha(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_z} c_\alpha p_\alpha(\mathbf{y}) |G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|^{-1} d\gamma_{N-1}, \quad (42)$$

$$\bar{\beta}_n^{(l)}(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_z} \left(c_1 b_{n,1}^{(l)}(\mathbf{y}) - c_0 b_{n,0}^{(l)}(\mathbf{y}) \right)^2 |G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|^{-1} d\gamma_{N-1}, \quad (43)$$

интегралы в (42), (43) есть поверхностные интегралы по $(N-1)$ -мерной поверхности $\Gamma_z = \{\mathbf{x} : G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = 0\}$, $d\gamma_{N-1}$ – элемент поверхности Γ_z , $|G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|$ – норма вектора первых производных от байесовской дискриминантной функции для фиксированной точки $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение (18) для условных рисков $\{r_n^{(l)}(\mathbf{z})\}$ (при условии, что $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ – фиксированное значение) с учетом (20) и (39) допускает представление:

$$r_n^{(l)}(\mathbf{z}) = \pi_1(w(1, 1)) + \pi_2(w(2, 1)) - \text{mes}\{\mathbb{Z}\} Q_l(1, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{Z} \quad (l = 1, 2). \quad (44)$$

Аналогично для условного риска БРП (12) имеем:

$$r(\mathbf{z}) = \pi_1(w(1, 1)) + \pi_2(w(2, 1)) - \text{mes}\{\mathbb{Z}\} Q_l(0, \mathbf{z}), \quad \forall l = 0, 1, 2. \quad (45)$$

Аналогично [4] можно показать, что если выполняется условие (40), то функция $Q_l(t, \mathbf{z})$ ($\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$) трижды дифференцируема по t в $(0, 1)$, при этом

$$Q_l^{(3)}(t, \mathbf{z}) = \int_{\mathbb{X}} Q_l^*(t, \mathbf{z}) G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (l=1,2), \quad Q_l^*(t, \mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} v^3 p_{g_l}(v) \delta^{(2)}(G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) + tv) d\mathbf{x} \quad (l=1,2), \quad (46)$$

($\delta^{(2)}(\cdot)$ – производная 2-го порядка дельта-функции) и при $n \rightarrow \infty$:

$$|Q_l^{(3)}(t, \mathbf{z})| < \infty, \quad (l=0,1,2). \quad (47)$$

На этом основании применим к функции $Q_l(t, \mathbf{z})$ ($\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$) формулу Тейлора в окрестности точки $t=0$ ($Q_l^{(k)}(\cdot, z)$ – производная k -го порядка функции $Q_l(\cdot, z)$):

$$Q_l(t, z) = Q_l(0, z) + Q_l^{(1)}(0, z)t + Q_l^{(2)}(0, z)\frac{t^2}{2} + Q_l^{(3)}(t_1, z)\frac{t^3}{6} \quad (z \in \mathbb{Z}), \quad \text{где } 0 < t_1 < t. \quad (48)$$

На основании (39), а также свойств дельта-функции и ее производной $u\delta(u) = 0$, $u\delta^{(1)}(u) = -\delta(u)$ [9] получаем:

$$Q_0(0, \mathbf{z}) = \int_{\mathbb{X}} E\{\mathbf{1}(G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}))\} G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) d\mathbf{x},$$

$$Q_l^{(1)}(0, \mathbf{z}) = 0, \quad Q_l^{(2)}(0, \mathbf{z}) = - \int_{\mathbb{X}} E\left\{\left(g^{(l)}(\mathbf{y})\right)^2\right\} \delta(G(\mathbf{y})) d\mathbf{x}. \quad (49)$$

Используя лемму 1 и формулы (46), (47), получаем $Q_l^{(3)}(t_1, \mathbf{z}) = o_1$ для $t_1 \in (0,1)$ ($l=0,1,2$). На основании леммы 3.3 из [4] преобразуем выражение для $Q_l^{(2)}(0, \mathbf{z})$ в (49) к виду:

$$Q_l^{(2)}(0, \mathbf{z}) = - \int_{\Gamma_z} E\left\{\left(g^{(l)}(\mathbf{y})\right)^2\right\} |\nabla_{\mathbf{x}} G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|^{-1} d\gamma_{N-1}. \quad (50)$$

Подставляя (49), (50) в (48) и затем, используя полученное выражение в (44), с учетом (45), получаем:

$$r_n^{(l)}(\mathbf{z}) = r(\mathbf{z}) + \frac{1}{2} \text{mes}\{\mathbb{Z}\} \int_{\Gamma_z} E\left\{\left(g^{(l)}(\mathbf{y})\right)^2\right\} |\nabla_{\mathbf{x}} G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|^{-1} d\gamma_{N-1} + o_1 \quad (l=1,2), \quad (51)$$

откуда на основании (22), (23) следует (41)–(43). Теорема 1 доказана.

Поскольку поверхность $\Gamma_z = \{\mathbf{x} : G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = 0\}$ имеет неограниченную площадь, то интегралы в (42), (43) являются неограниченными. Вследствие чего, вместо разложения (41) будем использовать разложение условного ε -риска:

$$r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = r(\varepsilon, \mathbf{z}) + \frac{1}{2} \text{mes}\{\mathbb{Z}\} \left(\frac{k_l}{2n_0 h^{N+M}} \sum_{\alpha \in S} c_\alpha \alpha_\alpha(\mathbf{z}) + \beta_n^{(l)}(\mathbf{z}) \right) + o_1 \quad (l=1,2), \quad (52)$$

в котором интегралы $\{\alpha_i(\mathbf{z})\}$, $\beta_n^{(l)}(\mathbf{z})$ отличаются от интегралов $\{\bar{\alpha}_i(\mathbf{z})\}$, $\bar{\beta}_n^{(l)}(\mathbf{z})$ областью интегрирования, имеющей с учетом (30), (31) вид: $\Gamma_z \cap T(\varepsilon, \mathbf{z}) = \left(\Gamma_z \cap T^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \right) \cup \left(\Gamma_z \cap T^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \right)$.

Введем обозначения: $\eta_\alpha \in \mathfrak{R}^N$ ($\alpha \in S$) – случайный гауссовский вектор с математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mu_\eta(\alpha, \mathbf{z})$, $\Sigma_\eta(\alpha, \mathbf{z})$, определяемыми по формулам:

$$\mu_\eta(\alpha, \mathbf{z}) = - \frac{l_\alpha(z)}{\Delta^2(\mathbf{z})} \beta^*(\mathbf{z}), \quad \Sigma_\eta(\alpha, \mathbf{z}) = \mathbf{I}_N - \frac{1}{\Delta^2(\mathbf{z})} \beta^*(\mathbf{z}) \left(\beta^*(\mathbf{z}) \right)', \quad \beta^*(\mathbf{z}) = \Sigma^{-\frac{1}{2}} B \mathbf{z} \in \mathfrak{R}^N; \quad (53)$$

$$\tau_{m,\varepsilon}^{(l)}(\mathbf{z}, A) = \int_{\Theta(\varepsilon)} (\boldsymbol{\tau}' A \boldsymbol{\tau})^k n_N(\boldsymbol{\tau} | \boldsymbol{\mu}_\eta(\alpha, \mathbf{z}), \Sigma_\eta(\alpha, \mathbf{z})) d\boldsymbol{\tau}, \quad \Theta(\varepsilon) = \{\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}' \boldsymbol{\tau} \leq u_\varepsilon^2\}; \quad (54)$$

$$\tilde{\Psi}^{(l)} = \Psi_2^{(l)} - \Psi_1^{(l)}, \Psi_\alpha^{(l)} = T_\alpha H_l T_\alpha' \quad (l=0,1,2), \quad C = \text{tr} \left(\Psi^{(1)} + 2(-1)^m \frac{\ln(c_1/c_2)}{N} \Psi_m^{(1)} \Sigma^{-1} \right), \quad (55)$$

где $\{T_\alpha\}$, $\Sigma \in \mathfrak{S}_N$ – определенные выше фиксированные матрицы, $m = 3 - \arg \min_{\alpha \in S} \{c_\alpha\}$.

Т е о р е м а 2. Пусть в условиях теоремы 1 для фиксированного значения $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ область $T(\varepsilon, \mathbf{z}) \subset \mathbb{X}$ ($\varepsilon > 0$) имеет вид (31), тогда для функционала условного ε -риска подстановочных решающих правил $\{\tilde{d}^{(l)}(\mathbf{y})\} (l=1,2)$, определяемых (17), при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические разложения:

$$r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = r(\varepsilon, \mathbf{z}) + \frac{k_l(c_1 + c_2) \text{mes}\{\tilde{T}^{(m)}(\varepsilon, \mathbf{z})\} \text{mes}\{\mathbb{Z}\}}{2\Delta_1(\mathbf{z})} n^{-1} h^{-(N+M)} + \frac{c_m}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{l_m(\mathbf{z})}{\Delta^2(\mathbf{z})}\right\} \beta^{(l)}(\mathbf{z}, A) h^4 + o_1, \quad (56)$$

где $k_1, k_2 > 0$ определяются (21), $o_1 = o(h^4 + n^{-1} h^{-(N+M)})$, $A = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Psi}^{(l)} \Sigma^{-\frac{1}{2}}$,

$$\beta^{(1)}(\mathbf{z}, A) = C^2 \tau_{m,\varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) + 2C \tau_{m,\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{z}, A) + \tau_{m,\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{z}, A) \geq 0, \quad (57)$$

$$\beta^{(2)}(\mathbf{z}, A) = 4 \left(\ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \right)^2 \tau_{m,\varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) \geq 0, \quad (58)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (31) $P\{\mathbf{x} \in T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})\} = 1 - \varepsilon$ (здесь \mathbf{x} – случайный вектор с плотностью распределения $n_N(\mathbf{x} | B_\alpha \mathbf{z}, \Sigma)$) и следовательно справедливо (20). В условиях теоремы $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_z$ справедливо: $c_1 n_N(\mathbf{x} | B_1 \mathbf{z}, \Sigma) = c_0 n_N(\mathbf{x} | B_0 \mathbf{z}, \Sigma)$. Поэтому из (37) для $\mathbf{x} \in \Gamma_z$ и $\alpha \in S$ следует:

$$|\nabla_{\mathbf{x}} G_1(\mathbf{x}; \mathbf{z})|^{-1} = 1 / \Delta_1(\mathbf{z}) c_\alpha p_\alpha(\mathbf{y}). \quad (59)$$

Так как области $\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \equiv \Gamma_z \cap T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ – концентрические гиперэллипсоиды и, согласно (32), (36), $\tilde{T}^{(3-m)}(\varepsilon, \mathbf{z}) \subseteq \tilde{T}^{(m)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ (где $m = 1 - \arg \min_{\alpha \in S} \{c_\alpha\}$), то $\Gamma_z \cap T(\varepsilon, \mathbf{z}) = \tilde{T}^{(m)}(\varepsilon, \mathbf{z})$. Поэтому на основании (42) и (57) имеем:

$$\alpha_\alpha(\mathbf{z}) = \text{mes}\{\tilde{T}^{(m)}(\varepsilon, \mathbf{z})\} / \Delta_1(\mathbf{z}) \quad \forall \alpha \in S. \quad (60)$$

Заметим, что из (42) и (60) следует неограниченность $\{\bar{\alpha}_\alpha(\mathbf{z})\}$. На основании (24), (25), (43), (52) получаем выражения для $\beta^{(1)}(\mathbf{z}, A)$ и $\beta^{(2)}(\mathbf{z}, A)$:

$$\beta^{(1)}(\mathbf{z}, A) = \frac{h^4 c_m}{4\Delta_1(\mathbf{z})} (C^2 J_{m,\varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) + 2C J_{m,\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{z}, A) + J_{m,\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{z}, A)) + o(h^4) \geq 0, \quad (61)$$

$$\beta^{(2)}(\mathbf{z}, A) = \frac{h^4 c_m}{4\Delta_1(\mathbf{z})} \left(\ln \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \right)^2 J_{m,\varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) + o(h^4) \geq 0, \quad (62)$$

где для области $\mathbb{T}(m, \varepsilon, \mathbf{z}) \equiv \tilde{T}^{(m)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ и $k = 0, 1, 2$:

$$J_{m, \varepsilon}^{(k)}(\mathbf{z}, A) = \int_{\mathbb{T}(m, \varepsilon, \mathbf{z})} \left((\mathbf{x} - B_m \mathbf{z})' \Sigma^{-1/2} A \Sigma^{-1/2} (\mathbf{x} - B_m \mathbf{z}) \right)^k n_N(\mathbf{x} | B_m \mathbf{z}, \Sigma) d\gamma_N =$$

$$\Delta_1(\mathbf{z}) n_1(0 | l_m(\mathbf{z}), \Delta^2(\mathbf{z})) \tau_{m, \varepsilon}^{(k)}(\mathbf{z}, A), \quad n_1(0 | l_m(\mathbf{z}), \Delta^2(\mathbf{z})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{l_m(\mathbf{z})}{\Delta^2(\mathbf{z})} \right\}. \quad (63)$$

Подставляя выражения (60)–(63) в (52), получаем (56)–(58). Теорема 2 доказана.

В разложение (56) входят три главных члена: первый характеризует условный ε -риск БРП классификации наблюдений из области $T(\varepsilon, \mathbf{z}) \subset \mathbb{X}$ ($\varepsilon > 0$), второй и третий характеризуют приращение условного ε -риска, обусловленное соответственно вариацией и смещением оценок плотностей $\{\hat{p}_\alpha^{(l)}(\mathbf{y})\}$ ($l = 1, 2$).

С л е д с т в и е 1. В условиях теоремы 2 имеет место соотношение:

$$r_n^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = r_n^{(0)}(\varepsilon, \mathbf{z}) + o_1. \quad (64)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в разложении для $r_n^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ $H_1 = H_0$, получаем (64).

Сравним по точности классификации решающие правила, использующие оценки плотности с фиксированным и переменным ядром в предположении, что точность аппроксимации риска возрастает, а зависимость компонент вектора признаков $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ усиливается (имеет место условие (4)). Обозначим $\bar{\sigma} = \max_{j=1, \dots, N} \{\bar{\sigma}_{jj}\}$ и рассмотрим асимптотику:

$$\varepsilon \rightarrow \infty, \quad \bar{\sigma} \rightarrow \infty \quad (\text{tr}(\Sigma) \rightarrow 0), \quad |Q| \rightarrow \infty, \quad |H_0| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (65)$$

При этом будем предполагать, что $\Delta(\mathbf{z}) \rightarrow \infty$ и $u_{\varepsilon, \alpha}^2 \rightarrow \infty$ с такой скоростью, что для $\tilde{u}_{\varepsilon, m}^2(\mathbf{z})$, определяемого (32), (36), выполняются ограничения: $0 < \tilde{u}_{\varepsilon, m}^2(\mathbf{z}) < \infty (\mathbf{z} \in \mathbb{Z})$. в противном случае при $u_{\varepsilon, \alpha}^2 \rightarrow 0$ уменьшается «степень пересечения» как классов, так и областей $\{T^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})\}$, и точность оценивания риска с помощью функционалов $\{r_n^{(l)}(\varepsilon, \mathbf{z})\}$ убывает. С другой стороны, при $u_{\varepsilon, \alpha}^2 \rightarrow \infty$ интегралы $\{\alpha_\alpha(\mathbf{z})\}$ в разложении (52) становятся неограниченными.

С л е д с т в и е 2. Пусть выполняются условия теоремы 2 и область $\mathbb{Z} = Z_1 \times \dots \times Z_M \subset \mathfrak{R}^M$ – ограниченный параллелепипед, причем компонента $z_j \in Z_j$ вектора $\mathbf{z} = (z_j) \in \mathbb{Z}$ равномерно распределена на интервале Z_j ($j = 1, \dots, M$). Тогда функционалы $r_n^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ и $r_n^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z})$ в асимптотике (65) при условии, что $0 < \tilde{u}_{\varepsilon, m}^2(\mathbf{z}) < \infty (\mathbf{z} \in \mathbb{Z})$ связаны соотношением:

$$r_n^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = r_n^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}) + \rho_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) + o_2, \quad \rho_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) = O(\bar{\sigma}^4) \geq 0, \quad o_2 = o(\bar{\sigma}^4 h^4). \quad (66)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V_{N-1} – объем $(N-1)$ -мерного параллелепипеда. С учетом (30)–(33) имеем:

$$\text{mes}(\tilde{T}^{(\alpha)}(\varepsilon, \mathbf{z})) = V_{N-1} \sqrt{|\Sigma|} \tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^{N-1}(\mathbf{z}) L(\mathbf{z}, \Sigma), \quad L(\mathbf{z}, \Sigma) = \bar{\sigma}_{NN} / \sqrt{(1 + \mathbf{a}'(\mathbf{z}) \Sigma_1^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{z}))}. \quad (67)$$

На основании выражений (56)–(58) и (67) справедливо соотношение:

$$r_n^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z}) = r_n^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}) + \tilde{\rho}_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) n^{-1} h^{-(N+M)} + \rho_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) h^4 + o_1,$$

где $(a = C^2 - 4(\ln(c_1/c_2))^2 \geq 0)$:

$$\tilde{\rho}_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) = \frac{\text{mes}\{\mathbb{Z}\}(c_1 + c_2)V_{N-1}\tilde{u}_{\varepsilon, \alpha}^{N-1}(\mathbf{z})L(\mathbf{z}, \Sigma)\sqrt{|Q||\Sigma|} - \sqrt{|H_1|}}{2\Delta_1(\mathbf{z})\sqrt{|Q||H_1|}},$$

$$\rho_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) = \frac{c_m n_1(0|l_m(\mathbf{z}), \Delta^2(\mathbf{z}))}{4} \left(a\tau_{m, \varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) + 2C\tau_{m, \varepsilon}^{(1)}(\mathbf{z}, A) + \tau_{m, \varepsilon}^{(2)}(\mathbf{z}, A) \right).$$

В асимптотике (65) при $0 < \tilde{u}_{\varepsilon, m}^2(\mathbf{z}) < \infty (\mathbf{z} \in \mathbb{Z})$ имеем: согласно (34), (67) $L(\mathbf{z}, \Sigma) = O(1)$, $\text{mes}\{\mathbb{Z}\} = O(|Q|)$; $|H_0| = |Q| \times |\Sigma| \rightarrow 0$ и $1/\Delta_1(\mathbf{z}) = o(1/\Delta^2(\mathbf{z}))$. Вследствие чего, $\tilde{\rho}_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) \rightarrow 0$.

При тех же условиях с учетом (53)–(55) получаем:

$$\tau_{m, \varepsilon}^{(0)}(\mathbf{z}, A) \rightarrow P\{\eta_m \eta'_m \leq u_\varepsilon^2\} \leq 1, \quad \tau_{m, \varepsilon}^{(1)}(\mathbf{z}, A) \rightarrow E\{\eta_m A \eta'_m\} = \text{tr}\{K_m(\mathbf{z})A\},$$

$$\tau_{m, \varepsilon}^{(2)}(\mathbf{z}, A) \rightarrow E\{(\eta_m A \eta'_m)^2\} = \text{tr}^2\{K_m(\mathbf{z})A\} + 2\text{tr}\{(K_m(\mathbf{z})A)^2\}.$$

где $\eta_\alpha \in \mathfrak{R}^N (\alpha \in S)$ – случайный гауссовский вектор с математическим ожиданием $\mu_\eta(\alpha, \mathbf{z})$ и ковариационной матрицей $\Sigma_\eta(\alpha, \mathbf{z})$; $A = \Sigma^{-1/2} \tilde{\Psi}^{(l)} \Sigma^{-1/2}$, $K_m(\mathbf{z}) = \Sigma_\eta(\alpha, \mathbf{z}) + \mu_\eta(\alpha, \mathbf{z}) \mu'_\eta(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathfrak{T}_N$.

На основании свойств следа матрицы: $\text{tr}(K_m(\mathbf{z})A) + \text{tr}^2(K_m(\mathbf{z})A) + \text{tr}(K_m(\mathbf{z})A)^2 = O(\text{tr}^4(\Sigma^{-1}))$, что влечет $\rho_{\varepsilon, \sigma}(\mathbf{z}) = O(\bar{\sigma}^4)$. Следствие 2 доказано.

Как известно, качество непараметрических ядерных оценок плотности, а, следовательно, и точность непараметрических классификаторов критическим образом зависит от выбора коэффициентов сглаживания $h = h(n)$, удовлетворяющих (9). Применительно к используемым в статье ядерным оценкам плотности данная проблема рассматривается в [6]. В асимптотике усиливающейся зависимости компонент вектора $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ (4) исследуем влияние выбора матрицы ядра и коэффициентов сглаживания на точность рассматриваемых подстановочных решающих правил.

Обозначим $\Delta r_n(\varepsilon, \mathbf{z}) = r_n^{(1)}(\varepsilon, \mathbf{z}) - r_n^{(2)}(\varepsilon, \mathbf{z}) (\mathbf{z} \in \mathbb{Z})$, $\beta = \bar{\sigma}h$ и рассмотрим последовательности однотипных ситуаций, возникающих, если при $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ и $h \rightarrow 0$: а) $\beta \rightarrow 0$, б) $\beta \rightarrow \lambda$ ($0 < \lambda < \infty$), в) $\beta \rightarrow \infty$. С учетом следствия 2 справедливо следующее утверждение.

С л е д с т в и е 3. В условиях теоремы 2 для описанных выше ситуаций имеет место:

$$\text{а) } \Delta r_n(\varepsilon, \mathbf{z}) \rightarrow 0, \quad \text{б) } \Delta r_n(\varepsilon, \mathbf{z}) \rightarrow \lambda > 0, \quad \text{в) } \Delta r_n(\varepsilon, \mathbf{z}) \rightarrow \infty.$$

Таким образом, подстановочное решающее правило вида (17), использующее оценки плотности $\{\hat{p}_\alpha^{(1)}(\mathbf{y})\}$ с фиксированным ядром в ситуациях б), в) (возникающих в случае «малого» объема выборок) проигрывает по точности решающему правилу, использующему оценки $\{\hat{p}_\alpha^{(2)}(\mathbf{y})\}$ с адаптивным ядром, и этот проигрыш обусловлен увеличением в указанных ситуациях смещения оценок плотности с фиксированным ядром, определяемым выражением (25).

Литература

1. Айвазян, С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М., 1985.
2. Харин Ю. С., Малюгин В. И., Харин А. Ю. Эконометрическое моделирование. Минск, 2003.
3. Айвазян С. А. [и др.]. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М., 1989.

4. Харин Ю. С. Робастность в статистическом распознавании образов. Минск, 1992.
5. Фукунга К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. М., 1979.
6. Малюгин, В. И. Об оценивании плотности случайных векторов с существенно зависимыми компонентами // Вестник БГУ. Сер. 1. 1985. № 2. С. 41–44.
7. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ данных. М., 1963.
8. Малюгин В. И. Учет зависимости признаков в задачах непараметрической классификации // Динамика систем. Управление, оптимизация, адаптация. Горький, 1983. С. 143–160.
9. Гельфанд И. М., Шолов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 2007.

V. I. MALUGIN

**ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE RISK OF NONPARAMETRIC CLASSIFICATION
IN THE CASE OF ESSENTIALLY DEPENDENT FEATURES**

Summary

The problem of classification of multivariate observations in the case of essentially dependent features is considered. The decision «plug-in» rules based on the nonparametric kernel density estimators with fixed and adaptive Gaussian kernel are suggested. Analytical investigations of decision rules are conducted for the case when the essential dependence of the features is described by the multivariate linear regression models with univariate distributed exogenous variables and Gaussian disturbances. Alternative decision rules are compared by means of asymptotic expansions of the conditional risk. The preference of the adaptive decision rule in the asymptotic of strengthening dependence of features and growing learning sample size is established.

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

**ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ
СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.04.2008)

Введение. Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши со специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t)\varphi(t) dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + g(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ – заданные на $[-1,1]$ функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция, основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева в классе H (по Мухелишвили).

1. Предварительные сведения. Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, задач электродинамических структур, некоторых важных задач аэродинамики, дифракционных задач и в других вопросах естествознания [1–5]. Характерной особенностью численного решения интегральных уравнений является их дискретизация. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения. Подробный обзор этих методов можно найти в [2–5].

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые спектральные соотношения для сингулярного интеграла:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} = -T_n(x), \quad (2)$$

$-1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos(x)) / \sqrt{1-x^2}$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

В работах [6, 7] на основе разложения характеристического оператора по многочленам Чебышева получена вычислительная схема численного решения СИУ вида

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{m(x,t)}{t-x} \varphi(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (3)$$

где $a(x)$, $m(x,t)$, $f(x)$ – заданные на $[-1,1]$ функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция с регулярной частью, не имеющей специального вида. Используя метод, описанный в [6] для СИУ (3), можно получить аналоги формул (2) для сингулярного интеграла

$$K^0(Zf)(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-t}{1+t} Z(t) f(t) \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1,$$

где $Z(x)$ имеет вид: $Z(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, $|\alpha| = |\beta| = 0,5$.

Сформулируем один из полученных результатов. Для этого запишем представление многочлена $U_n(x)$ через коэффициенты:

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_k^{(n)} x^{n-2k}, \quad b_0^{(n)} = 2^n, \quad b_{k+1}^{(n)} = -b_k^{(n)} \frac{(n-2k)(n-1-2k)}{4(k+1)(n-k)}, \quad k = 0, \overline{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

и зададим следующие обозначения:

$$H_M = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} b_k^{(M)} c_k^{(M)}, & c_k^{(M)} = -\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-k} \frac{2e_n}{M-2k-2n}, \quad M - \text{нечетное,} \\ 0, & M = -1 \text{ или } M - \text{четное,} \end{cases}$$

$$e_0 = 1, \quad e_{n+1} = e_n \frac{2n+1}{2n+2}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$B_{k,j} = \sum_{p=0}^k \int_{-1}^1 U_{j-k+2p}(t) dt, \quad \int_{-1}^1 U_n(t) dt = \begin{cases} 2/(n+1), & n - \text{четное,} \\ 0, & n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Для $x \in (-1, 1)$ справедливы формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = -\frac{\pi U_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{j=0}^{k-2} \beta_j^{(k)} U_j(x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

$$\beta_j^{(k)} = \begin{cases} 0, & k+j - \text{нечетное,} \\ 2B_{k,j} + H_{k-1-j} + H_{k+1+j}, & k+j - \text{четное,} \end{cases} \quad j = \overline{0, k-2}.$$

На основании (2) и (4) построим вычислительную схему численного решения СИУ (1) в классе H и дадим ее обоснование с указанием порядковой оценки погрешности приближенного решения.

2. Приближенное решение характеристического уравнения. Применим полученные формулы (4) к построению приближенного решения характеристического уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (5)$$

Известно [8, 9], что если разыскивается решение $\varphi(x) \in H(\mu)$, тогда при выполнении условия

$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt = 0$ (необходимого и достаточного) решение уравнения (5) определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1. \quad (6)$$

Приближенное решение уравнения (5) найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f_n(x) + q_0, \quad -1 < x < 1, \quad (7)$$

где [10]

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k U_k(x), \quad f_k = G_k - \delta_k G_{k+2}, \quad G_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) T_k(t_j), \quad (8)$$

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & k = n-1, n. \end{cases} \quad t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n+1,$$

а константа q_0 определяется из условия разрешимости уравнения (7)

$$q_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt, \quad \text{причем} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt = -\operatorname{Res}_{z=\infty} \left(\frac{f_n(z)}{\sqrt{z^2-1}} \ln \frac{z-1}{z+1} \right).$$

Выполняя обращение интеграла (7) в заданном классе функций, получим

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2} t-x} dt, \quad -1 < x < 1. \quad \text{Используя (8) и учитывая (4), имеем}$$

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^{n-2} U_j(x) \sum_{k=j+2}^n f_k \beta_j^{(k)}. \quad (9)$$

Приведем порядковую оценку погрешности приближенного решения (9). С этой целью введем класс функций $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$.

Мы говорим, что функция $f(x) \in W^r H^\mu$, $x \in [-1, 1]$, если она имеет производные до порядка r включительно и r -я производная принадлежит классу Гельдера $H(\mu)$:

$$|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leq K |x_1 - x_2|^\mu, \quad \forall x_1, x_2 \in [-1, 1],$$

где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек x_1, x_2 .

На основании (6), (9) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [11], получим следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (5), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Пусть, далее, $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (8) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (5), (7). Тогда

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_\infty \leq M_1 \frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

3. Приближенное решение уравнения (1). Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \varphi(t) dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + g(x), \quad -1 < x < 1, \quad (10)$$

где $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ – заданные на $[-1, 1]$ функции, непрерывные по Гельдеру (последняя по обоим переменным).

Будем искать решение в классе $\varphi(x) \in H(\mu)$. Пусть выполняется необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (10):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{k(x,t) \varphi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (11)$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\varphi(x) = \phi(x) + \psi(x), \quad (12)$$

где $\phi(x)$ – решение простейшего уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + q_0, \quad -1 < x < 1, \quad (13)$$

в котором константа q_0 выбирается так, чтобы выполнялось условие разрешимости уравнения (13)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(f(t) \ln \frac{1-t}{1+t} + q_0 \right) dt = 0:$$

$$q_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(f(t) \ln \frac{1-t}{1+t} \right) dt. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) определяется формулой

$$\phi(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) \frac{dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1,$$

Функция же $\psi(x) = \sqrt{1-x^2} v(x)$ – решение следующего уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k(x,t) v(t) dt = f_1(x), \quad -1 < x < 1, \quad (15)$$

$$f_1(x) = g(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t) \phi(t) dt - q_0,$$

для которого выполняются условия разрешимости (константа q_0 определена в (14)):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t) - q_0}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{k(x,t) \phi(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Задача (15) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\psi(x) + \int_{-1}^1 N(x,t) \psi(t) dt = F_1(x), \quad (16)$$

в котором

$$N(x,t) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} k(\tau,t) \frac{d\tau}{\tau-x}, \quad F_1(x) = -\sqrt{1-x^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f_1(t) \frac{dt}{t-x}.$$

Если однородное уравнение, соответствующее (16), неразрешимо, тогда для любых функций $f(x), g(x) \in H(\mu)$, удовлетворяющих условию (11), существует единственное решение уравнения (10) в классе функций $\phi(x) \in H(\mu)$.

Приближенное решение уравнения (10) будем искать как точное решение двух следующих уравнений:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f_n(x) + \gamma_0, \quad -1 < x < 1, \quad (17)$$

где $f_n(x)$ определяется формулой (8), а константа γ_0 вычисляется из условия разрешимости уравнения (17):

$$\gamma_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt, \quad \text{причем} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} dt = -\text{Res}_{z=\infty} \left(\frac{f_n(z)}{\sqrt{z^2-1}} \ln \frac{z-1}{z+1} \right)$$

его решение дается формулой

$$\phi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^n U_j(x) \sum_{k=j+2}^n f_k \beta_j^{(k)}, \quad (18)$$

и уравнения

$$\frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} v_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} + \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{n,n}(x,t) v_{n-1}(t) dt = F_n(x) + \sigma_0, \quad |x| < 1, \quad (19)$$

$$F_n(x) = g_n(x) - \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 k_{n,n}(x,t) \phi_n(t) dt,$$

в котором константа σ_0 определяется из условия разрешимости уравнения (19):

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} k_{n,n}(x,t) v_{n-1}(t) dt - F_n(x) \right) dx,$$

$$v_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k U_k(x), \quad (20)$$

c_k – числа, подлежащие определению,

$$k_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^{**} T_j(t), \quad t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (21)$$

$$k_{m,j}^{**} = \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(t_r) \left[\frac{\delta_j}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} k(t_r, t_l) T_j(t_l) \right], \quad \delta_k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 2, & k>0, \end{cases}$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k T_k(x), \quad g_k = \frac{\delta_k}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} g(t_j) T_k(t_j). \quad (22)$$

Используя (8), (18) и (21), упростим $F_n(x)$. Имеем $F_n(x) = \sum_{m=0}^n g_m T_m(x) - \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j}^{**} T_j(t) \left(\pi \sum_{k=0}^n f_k U_k(t) - \sum_{j=0}^n \sqrt{1-t^2} U_j(t) A_j \right) dt$, $A_j = \sum_{k=j+2}^n f_k \beta_j^{(k)}$.

Изменяя порядок суммирования и явно вычисляя некоторые интегралы, получим представление

$$F_n(x) = \sum_{p=0}^n F_p T_p(x), \quad \text{где}$$

$$F_p = g_p - \sum_{l=0}^n k_{p,l}^{**} d_l, \quad d_l = \sum_{k=0}^n f_k \omega_{l,k} - r(l, j),$$

$$\omega_{l,k} = \begin{cases} 0, & k+l - \text{нечетное}, \\ \frac{1}{k-l+1} + \frac{1}{k+l+1}, & k+l - \text{четное}, \end{cases} \quad r(l, j) = \begin{cases} 0,5A_0, & l=0, \\ 0,25A_1, & l=1, \\ 0,25(A_l - A_{l-2}), & 2 \leq l \leq n-2, \\ -0,25A_{l-2}, & l > n-2. \end{cases}$$

Используя (2), (19)–(22), упростим задачу (17):

$$-\sum_{p=0}^{n-1} c_p T_{p+1}(x) + \sum_{p=0}^n T_p(x) \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left\{ \sum_{l=0}^n k_{p,l}^{**} \frac{1}{\pi_{-1}} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) T_l(t) dt \right\} = \sum_{p=0}^n F_p T_p(x).$$

Вычисляя явно интегралы и приравнявая коэффициенты при функции $T_p(x)$, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных c_p , $p = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\begin{cases} -c_{p-1} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_{p,k} = F_p, & p = \overline{1, n}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} c_k s_{0,k} = F_0 + Q_0^*, \end{cases} \quad s_{p,k} = \begin{cases} 0,5 k_{p,0}^{**}, & k=0, \\ 0,25 (k_{p,k}^{**} - k_{p,k+2}^{**}), & 0 < k \leq n-2, \\ 0,25 k_{p,k}^{**}, & k = n-1. \end{cases} \quad (23)$$

Вычисляя (18), а затем, решая систему линейных алгебраических уравнений (23), получим приближенное решение уравнения (10):

$$\varphi_n(x) = \phi_n(x) + \sqrt{1-x^2} v_{n-1}(x). \quad (24)$$

Для обоснования вычислительной схемы (23) и оценки погрешности приближенного решения, следуя методике работы [12], имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Пусть уравнение (10) удовлетворяет следующим условиям: 1) решение разыскивается в классе $H(\mu)$; 2) функции $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ принадлежат классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$ (последняя по обоим переменным); 3) в качестве аппроксимирующих многочленов для функций $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ взяты соответственно многочлены $f_n(x)$, $g_n(x)$, $k_{n,n}(x,t)$, определяемые (8), (21), (22); 4) однородное уравнение (16) неразрешимо. Тогда при достаточно больших n система (23) разрешима и имеет место оценка

$$\sqrt{1-x^2} \|v(x) - v_n(x)\|_\infty \leq M_2 \frac{\ln^3(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in (-1, 1).$$

На основании теоремы 1 и 2 для точного решения уравнения (10), определяемого формулой (12), и приближенного решения (24) имеет место следующее утверждение.

С л е д с т в и е. Пусть выполняются условия теорем 1 и 2. Тогда при достаточно больших n имеет место оценка

$$\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_\infty \leq M_3 \frac{\ln^3(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

4. Численный эксперимент. Приведем результаты численного решения характеристического сингулярного уравнения (5) в классе H , если $f(x) = 4x^2 - 1$. Нетрудно убедиться, что решением будет функция $\varphi(x) = \pi(4x^2 - 1) + 8\sqrt{1-x^2}$.

Численные расчеты показали, что уже $|\varphi(x) - \varphi_2(x)| < 1,2 \cdot 10^{-14}$.

В таблице даны результаты численного решения уравнения (1) в классе H при $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $g(x) = \frac{-\sqrt{2}x}{(1+x^2)}$, $k(x,t) = \frac{t}{(x+2)(t^2+1)}$. Функция $\varphi(x) = \frac{1 + (1 - \sqrt{2}/4)\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ в данном случае и будет решением.

n	10	15	20	25
$\max_{ x <1} \varphi(x) - \varphi_n(x) $	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$2,6 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-9}$

З а к л ю ч е н и е. Исходя из разложений сингулярного интегрального оператора по многочленам Чебышева построены вычислительные схемы приближенного решения уравнения (1), доказана их сходимости и выполнен численный эксперимент. Надо отметить, что классический прием, используемый, например, в [2-4], при численном решении предложенных уравнений дает только один верный знак после запятой.

Литература

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. П а н а с ю к В. В., С а в р у к М. П., Д а ц ы ш и н А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.
3. П а н а с ю к В. В., С а в р у к М. П., Н а з а р ч у к З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.

4. Саврук М. П., Осиев П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. Киев, 1989.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
6. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 2. С. 52–58.
7. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 26–34.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
10. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
11. Якименко Т. С. Квадратурные формулы для интегралов с ядром Коши со степенно-логарифмической особенностью и смежные вопросы. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1991.
12. Расолько Г. А. Прямые методы решения некоторых сингулярных интегральных уравнений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1990.

G. A. RASOLKO

Chebyshev's Polynomials Application for Solution of the First-kind Singular Integral Equation with the Cauchy's Kernel and a Special Right Hand-Side

Summary

An algorithm of solution of the first-kind singular integral equation

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t)\varphi(t) dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + g(x), \quad -1 < x < 1,$$

is suggested. Here Hölder's continuous functions f, g are given on $[-1, 1]$; $\varphi(x)$ is an unknown function. The algorithm is on the decomposition of the singular integral with respect to Chebyshev's polynomials in Mushelishvili's H based class.

УДК 519.63+519.65

А. В. САМУСЕНКО, С. В. ФРОЛОВА

**МНОГОТОЧЕЧНЫЕ СХЕМЫ ПРОДОЛЬНОГО ВАРИАНТА
МЕТОДА ПРЯМЫХ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 16.05.2008)

Введение. В связи с результатами, достигнутыми в области численного решения систем ОДУ [1–3], актуальным является построение дифференциально-разностных схем повышенной точности для граничных задач в случае уравнений с частными производными, которые сводят исходную задачу к задаче Коши для системы ОДУ.

Порядок аппроксимации схем, построенных с помощью метода прямых [4] на трехточечном шаблоне, не превосходил $O(h^4)$, поскольку дальнейшее повышение порядка аппроксимации увеличением шаблона разностной схемы приводило к затруднению аппроксимации вблизи границы [5].

В настоящей работе построены схемы повышенного порядка аппроксимации, а также решена проблема аппроксимации вблизи граничных точек для некоторых задач математической физики с одной пространственной переменной. При этом используется интерполирование Эрмита–Биркгофа, а также интерполирование специального вида в приграничных узлах. Работа является дальнейшим развитием идей, предложенных ранее в работах [6–8].

Принцип построения. Не ограничивая общности в выборе типа уравнений, рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Проведем частичную дискретизацию по переменной x : введем сетку узлов $\bar{\omega}_h = (x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = 1/N)$, временную переменную t считаем непрерывной. В качестве базисных функций введем известные вспомогательные финитные кусочно-линейные непрерывные функции $E_i^{(3)}(x)$ (3), основное свойство которых отражает соотношение (4) [9]:

$$E_i^{(3)}(x) = \begin{cases} x - x_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -(x - x_{i+1}), & x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{1}{h^2} \int_0^1 E_i^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t))}{h^2} = u_{xx}^-(x_i,t). \quad (4)$$

Для учета первого граничного условия из (2) выберем вспомогательную функцию $E_0^{(3)}(x)$ в виде:

$$E_0^{(3)}(x) = \begin{cases} -2(x - x_1), & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1], \end{cases}$$

при этом $\frac{1}{h^2} \int_0^1 E_0^{(3)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \frac{2u(x_1,t) - 2u(x_0,t)}{h^2} - \frac{2}{h} \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x}$.

Для построения пятиточечных схем введем непрерывные кусочно-линейные функции:

$$\begin{aligned} E_0^{(5)}(x) &= \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x), \\ E_1^{(5)}(x) &= \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + \alpha_0 E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x), \\ E_i^{(5)}(x) &= \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-2}, \\ E_{N-1}^{(5)}(x) &= \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-1}^{(3)}(x), \end{aligned}$$

где α_0, α_1 – пока произвольные параметры.

Умножим уравнение (1) на введенные функции и проинтегрируем по x от 0 до 1:

$$\int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_0^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad (5)$$

$$\int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_1^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad (6)$$

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad (7)$$

$$\int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx - \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) f(x,t) dx = \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx. \quad (8)$$

Интегралы в правых частях равенств (5) – (8) вычисляются точно. Они выражаются через конечные разности второго и четвертого порядков:

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_0^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= -2\alpha_0 h \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x} + (\alpha_0 + 2\alpha_1)(-2u(x_0,t) + 2u(x_1,t)) + \\ &\quad \alpha_1(6u(x_0,t) - 8u(x_1,t) + 2u(x_2,t)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= -2\alpha_1 h \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x} + (\alpha_0 + 2\alpha_1)(u(x_0,t) - 2u(x_1,t) + u(x_2,t)) + \\ &\quad \alpha_1(-4u(x_0,t) + 7u(x_1,t) - 4u(x_2,t) + u(x_3,t)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = (\alpha_0 + 2\alpha_1)\Delta^2 u(x_{i-1},t) + \alpha_1 \Delta^4 u(x_{i-2},t), \quad i = \overline{2, N-2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= (\alpha_0 + 2\alpha_1)(u(x_{N-2},t) - 2u(x_{N-1},t)) + \\ &\quad \alpha_1(u(x_{N-3},t) - 4u(x_{N-2},t) + 5u(x_{N-1},t)) + \alpha_0 u(x_N,t). \end{aligned} \quad (12)$$

Для вычисления интегралов в левых частях равенств (5) – (8) применим, в предположении достаточной гладкости решения, интерполирование функции $y(x,t) := \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ по переменной x .

В зависимости от количества узлов применяемого интерполирования получим разные по порядку аппроксимации пятиточечные схемы. Интегралы $\int_0^1 E_i^{(5)}(x) f(x,t) dx, i = \overline{0, N-1}$ можно вычислить либо точно, либо приближенно с необходимой точностью.

Проинтерполируем функцию $y(x, t)$, например, по пяти узлам:

$$y(x, t) = y(x_i + ph, t) = y(x_i, t) + \frac{p \Delta y(x_i, t) + \Delta y(x_{i-1}, t)}{1!} + \frac{p^2}{2!} \Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \frac{p(p^2 - 1^2)}{3!} \Delta^3 y(x_{i-1}, t) + \frac{\Delta^3 y(x_{i-2}, t)}{2} + \frac{p^2(p^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y(x_{i-2}, t) + R_4(x, t), \quad (13)$$

где $i = \overline{2, N-2}$, $\Delta^{n+1} y(x_i, t) = \Delta^n y(x_{i+1}, t) - \Delta^n y(x_i, t)$, $n = 1, 2, 3$ – конечная разность $n + 1$ порядка, $x = x_i + ph$, $R_4(x, t)$ – остаток интерполирования, разложенный по степеням h [6, 10, 11]. Такое представление остатка поможет распорядиться выбором параметров схемы α_0, α_1 для повышения порядка аппроксимации:

$$R_4(x, t) = R_4(x_i + ph, t) = \frac{h^5}{5!} p \left(p^4 - \frac{2^4 - 1}{3} p^2 + \frac{2^4 - 4}{3} \right) y^{(5)}(x_i, t) + \frac{h^6}{6!} p^2 \left(p^4 - \frac{2^4 - 1}{3} p^2 + \frac{2^4 - 4}{3} \right) y^{(6)}(x_i, t) + \frac{h^7}{7!} p \left(p^6 - \frac{2^6 - 1}{3} p^2 + \frac{2^6 - 4}{3} \right) y^{(7)}(x_i, t) + \frac{h^8}{8!} p^2 \left(p^6 - \frac{2^6 - 1}{3} p^2 + \frac{2^6 - 4}{3} \right) y^{(8)}(x_i, t) + \frac{h^9}{9!} p \left(p^8 - \frac{2^8 - 1}{3} p^2 + \frac{2^8 - 4}{3} \right) y^{(9)}(x_i, t) + O(h^{10}). \quad (14)$$

Вычислим $\int_0^1 E_i^{(5)}(x) y(x, t) dx$, $i = \overline{2, N-2}$, учитывая представления (13), (14):

$$\int_0^1 E_i^{(5)}(x) y(x, t) dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_i, t) + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) \Delta^2 y(x_{i-1}, t) + \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) \Delta^4 y(x_{i-2}, t) \right] + \frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_i, t) + O(h^{10}), \quad i = \overline{2, N-2}. \quad (15)$$

Необходимо добавить оставшиеся три уравнения в приграничных узлах x_i , $i = 0, 1, N-1$ так, чтобы порядок аппроксимации не стал ниже порядка аппроксимации для внутренних узлов. Применим интерполирование Эрмита–Биркгофа [11] функции $y(x, t)$ для вычисления левой части равенств (5), (6), (8).

Интерполяционный полином $P(x, t)$ для функции $y(x, t)$ в приграничном узле x_0 должен удовлетворять условиям:

$$P(x_i, t) = y(x_i, t), \quad i = 0, 1, 2, \quad P^{(k)}(x_0, t) = y^{(k)}(x_0, t), \quad k = 1, 3, 5, 6, 7.$$

Производные $y^{(k)}(x_0, t)$ получаем, используя граничные условия и дифференциальное уравнение:

$$\int_0^1 E_0^{(5)}(x) y(x, t) dx = h^2 \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_0, t) + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) (-2y(x_0, t) + 2y(x_1, t)) + \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) (6y(x_0, t) - 8y(x_1, t) + 2y(x_2, t)) \right] + \left(\frac{3}{20} \alpha_0 - \frac{1}{30} \alpha_1 \right) h^3 y'(x_0, t) + \left(\frac{-1}{180} \alpha_0 + \frac{1}{90} \alpha_1 \right) h^5 y'''(x_0, t) + \left(\frac{1}{1050} \alpha_0 - \frac{1}{225} \alpha_1 \right) h^7 y^{(5)}(x_0, t) + \left(\frac{23}{129600} \alpha_0 - \frac{29}{21600} \alpha_1 \right) h^9 y^{(7)}(x_0, t) + \frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_0, t) + O(h^{10}). \quad (16)$$

Для приграничного узла x_1 интерполяционный полином $P(x, t)$ должен удовлетворять условиям:

$$P(x_1, t) = y(x_1, t), \quad P(x_3, t) = y(x_3, t), \quad P(x_0, t) + P(x_2, t) = y(x_0, t) + y(x_2, t), \quad P^{(k)}(x_0, t) = y^{(k)}(x_0, t), \quad k = 1, 3, 5, 7, \quad P^{(6)}(x_1, t) = y^{(6)}(x_1, t). \quad (17)$$

Следует заметить, что для интерполирования мы применили в качестве условия линейную комбинацию интерполируемых функций:

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_1^{(5)}(x) y(x, t) dx = h^2 & \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_1, t) + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) (y(x_0, t) - 2y(x_1, t) + y(x_2, t)) + \right. \\ & \left. \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) (-4y(x_0, t) + 7y(x_1, t) - 4y(x_2, t) + y(x_3, t)) \right] + \left(\frac{11}{60} \alpha_1 + \frac{1}{120} \alpha_0 \right) h^3 y'(x_0, t) + \\ & \left(-\frac{1}{120} \alpha_1 + \frac{1}{720} \alpha_0 \right) h^5 y'''(x_0, t) + \left(-\frac{43}{50400} \alpha_1 + \frac{1}{14400} \alpha_0 \right) h^7 y^{(5)}(x_0, t) + \\ & \left(-\frac{11}{453600} \alpha_1 + \frac{1}{604800} \alpha_0 \right) h^9 y^{(7)}(x_0, t) + \frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_1, t) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (18)$$

Для приграничного узла x_{N-1} интерполяционный полином строится аналогично:

$$\begin{aligned} P(x_i, t) &= y(x_i, t), \quad i = N-3, N-2, N-1, N, \\ P^{(k)}(x_N, t) &= y^{(k)}(x_N, t), \quad k = 2, 4, 6, \quad P^{(6)}(x_{N-1}) = y^{(6)}(x_{N-1}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 E_{N-1}^{(5)}(x) y(x, t) dx = h^2 & \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_{N-1}, t) + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) (y(x_{N-2}, t) - 2y(x_{N-1}, t)) + \right. \\ & \left. \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) (y(x_{N-3}, t) - 4y(x_{N-2}, t) + 5y(x_{N-1}, t)) \right] + \\ & \frac{h^2}{120} (11\alpha_0 + 2\alpha_1) y(x_N, t) - \frac{h^4}{240} (\alpha_0 + 2\alpha_1) y''(x_N, t) + \frac{h^6}{2880} (-\alpha_0 + 10\alpha_1) y^{(4)}(x_N, t) + \\ & h^8 \left(-\frac{\alpha_0}{86400} + \frac{\alpha_1}{6300} \right) y^{(6)}(x_N, t) + \frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_{N-1}, t) + O(h^{10}). \end{aligned} \quad (20)$$

Производные $y^{(k)}(x_N, t)$ находим, используя граничные условия и дифференциальное уравнение.

Заметим, что главные части остатка для приграничных узлов (16), (18), (20) и внутренних узлов (15) совпадают и равны $\frac{1}{60480} (31\alpha_0 - 190\alpha_1) h^8 y^{(6)}(x_i, t)$, $i = \overline{0, N-1}$.

Приравняем теперь левые и правые части равенств (5) – (8), вычисленные отдельно в (15) – (20) и (9) – (12). Разделив полученные равенства на h^2 и отбросив остаточный член порядка $O(h^6)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для приближенного решения $u_i(t)$ на прямых $x = x_i$, $i = \overline{0, N-1}$. Дополнив ее начальными условиями, приходим к задаче Коши, которая аппроксимирует с порядком $O(h^6)$ исходную краевую задачу (1) – (2) для уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} \left[(\alpha_0 + 2\alpha_1) E + \frac{1}{12} (\alpha_0 + 14\alpha_1) Q + \frac{1}{240} (18\alpha_1 - \alpha_0) Q^2 \right] U' &= \frac{1}{h^2} [(\alpha_0 + 2\alpha_1) Q + \alpha_1 Q^2] U + \frac{1}{h^2} F, \\ U(0) &= \Phi, \end{aligned}$$

где $U = (u_0(t), u_1(t), \dots, u_{N-1}(t))^T$ – вектор-столбец приближенного решения; вектор F зависит от $f(x, t)$, параметров α_0, α_1 и граничных условий $\mu_0(t), \mu_1(t)$; $\Phi = (\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{N-1}))^T$; матрица $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=0}^{N-1}$, $q_{ii} = -2$, $q_{ij} = 1$ для $|i-j|=1$, $i \neq 0, j \neq 1$, $q_{0,1} = 2$, $q_{ij} = 0$ для $|i-j| > 1$.

Выбрав параметры α_0, α_1 так, что $31\alpha_0 - 190\alpha_1 = 0$, мы обнулили главный член остатка для всех уравнений системы и получим остаток порядка $O(h^8)$.

Построение многоточечных схем. Семиточечные схемы позволяют еще более повысить порядок аппроксимации. Вспомогательными функциями в этом случае являются:

$$\begin{aligned} E_0^{(7)}(x) &= \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x) + 2\alpha_2 E_2^{(3)}(x), \\ E_1^{(7)}(x) &= \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_0 + \alpha_2) E_1^{(3)}(x) + \alpha_1 E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x), \\ E_i^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x), \quad i = \overline{2, N-3}, \\ E_{N-2}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(7)}(x) &= \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_0 - \alpha_2) E_{N-1}^{(3)}(x). \end{aligned}$$

Для девятиточечных схем вспомогательные функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_0^{(9)}(x) &= \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2\alpha_1 E_1^{(3)}(x) + 2\alpha_2 E_2^{(3)}(x) + 2\alpha_3 E_3^{(3)}(x), \\ E_1^{(9)}(x) &= \alpha_1 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_0 + \alpha_2) E_1^{(3)}(x) + (\alpha_1 + \alpha_3) E_2^{(3)}(x) + \alpha_2 E_3^{(3)}(x) + \alpha_3 E_4^{(3)}(x), \\ E_2^{(9)}(x) &= \alpha_2 E_0^{(3)}(x) + (\alpha_1 + \alpha_3) E_1^{(3)}(x) + \alpha_0 E_2^{(3)}(x) + \alpha_1 E_3^{(3)}(x) + \alpha_2 E_4^{(3)}(x) + \alpha_3 E_5^{(3)}(x), \\ E_i^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{i-3}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i-2}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i-1}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{i+1}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{i+2}^{(3)}(x) + \alpha_3 E_{i+3}^{(3)}(x), \\ & \quad i = \overline{3, N-4}, \\ E_{N-3}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-6}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-5}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-2}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-2}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-5}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_1 E_{N-3}^{(3)}(x) + \alpha_0 E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_1 - \alpha_3) E_{N-1}^{(3)}(x), \\ E_{N-1}^{(9)}(x) &= \alpha_3 E_{N-4}^{(3)}(x) + \alpha_2 E_{N-3}^{(3)}(x) + (\alpha_1 - \alpha_3) E_{N-2}^{(3)}(x) + (\alpha_0 - \alpha_2) E_{N-1}^{(3)}(x). \end{aligned}$$

Для построения $(2k+1)$ -точечной схемы используем вспомогательные функции:

$$E_i^{(2k+1)}(x) = \alpha_0 E_i^{(3)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (E_{i-j}^{(3)}(x) + E_{i+j}^{(3)}(x)), \quad i = \overline{k-1, N-k}. \quad (21)$$

В приграничных узлах $i = \overline{0, k-2}$, $i = \overline{N-k+1, N-1}$ используются урезанные функции:

$$E_0^{(2k+1)}(x) = \alpha_0 E_0^{(3)}(x) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j E_j^{(3)}(x), \quad (22)$$

$$E_i^{(2k+1)}(x) = \alpha_i E_0^{(3)}(x) + \sum_{j=1}^{k-i-1} (\alpha_{|i-j|} + \alpha_{i+j}) E_j^{(3)}(x) + \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \alpha_{|i-j|} E_j^{(3)}(x), \quad i = \overline{1, k-2}, \quad (23)$$

$$E_{N-k+1}^{(2k+1)}(x) = \sum_{j=1}^{2k-2} \alpha_{|k-1-j|} E_{N-j}^{(3)}(x), \quad (24)$$

$$E_{N-i}^{(2k+1)}(x) = \sum_{j=1}^{k-i-1} (\alpha_{|i-j|} - \alpha_{i+j}) E_{N-j}^{(3)}(x) + \sum_{j=k-i}^{k+i-1} \alpha_{|i-j|} E_{N-j}^{(3)}(x), \quad i = \overline{1, k-2}. \quad (25)$$

Умножим исходное уравнение (1) на функции $E_i^{(2k+1)}(x)$, $i = \overline{0, N-1}$ и проинтегрируем по x от 0 до 1. При этом правая часть в матричном виде будет иметь вид (26).

Т е о р е м а. *Имеет место равенство:*

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2k+1)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}, \quad k \geq 1. \quad (26)$$

Здесь $P_{j+1}(z) = 2zT_j\left(\frac{z+2}{2}\right)$, где $T_j(x)$ – многочлены Чебышева первого рода, при этом $P_1(z) =$

$2z$, $P_2(z) = z^2 + 2z$; $N > 2k$; $\tilde{F}_i = -2\alpha_i h \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x}$, $i = \overline{0, k-1}$; $\tilde{F}_i = 0$, $i = \overline{k, N-k-1}$; $\tilde{F}_{N-k} = \alpha_{k-1} u(x_N, t)$;

$\tilde{F}_{N-k+1} = \alpha_{k-2} u(x_N, t)$, $k \geq 2$; $\tilde{F}_{N-i} = (\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1}) u(x_N, t)$, $i = \overline{k-2, 1}$, $k \geq 3$.

Доказательство. Применим метод математической индукции. Из (9) – (12) следует, что при $k = 2$ равенство (26) выполняется. Для $k = 1$ (26) очевидно.

Предположим, что (26) выполняется для $k = m, k = m - 1$. Тогда, например, для $k = m$ верно:

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2m+1)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}. \quad (27)$$

Докажем, что равенство (26) выполняется при $k = m + 1$, т. е. докажем, что будет выполняться

$$\left\{ \int_0^1 E_i^{(2m+3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right\}_{i=0}^{N-1} = \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^m \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \tilde{F}. \quad (28)$$

Исходя из формул (21) – (25), очевидно, что базисные функции для $(2m + 3)$ -точечной схемы выражается через базисные функции для $(2m + 1)$ -точечной схемы следующим образом:

$$E_0^{(2m+3)}(x) = E_0^{(2m+1)}(x) + 2\alpha_m E_m^{(3)}(x), \quad (29)$$

$$E_i^{(2m+3)}(x) = E_i^{(2m+1)}(x) + \alpha_m \left(E_{m-i}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x) \right), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (30)$$

$$E_i^{(2m+3)}(x) = E_i^{(2m+1)}(x) + \alpha_m \left(E_{i-m}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x) \right), \quad i = \overline{m, N-m-1}, \quad (31)$$

$$E_{N-m}^{(2m+3)}(x) = E_{N-m}^{(2m+1)}(x) + \alpha_m E_{N-2m}^{(3)}(x), \quad (32)$$

$$E_{N-i}^{(2m+3)}(x) = E_{N-i}^{(2m+1)}(x) + \alpha_m \left(E_{N-i-m}^{(3)}(x) - E_{N-m+i}^{(3)}(x) \right), \quad i = \overline{m-1, 1}. \quad (33)$$

Таким образом, как следует из (27) – (28) с учетом (29) – (33), нужно доказать, что:-

$$2 \int_0^1 E_m^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = \text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_0, \quad (34)$$

$$\int_0^1 \left(E_{m-i}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x) \right) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = i\text{-я строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_i, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (35)$$

$$\int_0^1 \left(E_{i-m}^{(3)}(x) + E_{i+m}^{(3)}(x) \right) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = i\text{-я строка } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_i, \quad i = \overline{m, N-m-1}, \quad (36)$$

$$\int_0^1 E_{N-2m}^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = (N-m)\text{-я строка матрицы } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_{N-m}, \quad (37)$$

$$\int_0^1 \left(E_{N-i-m}^{(3)}(x) - E_{N-m+i}^{(3)}(x) \right) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = (N-i)\text{-я строка } P_{m+1}(Q) + \hat{F}_{N-i}, \quad i = \overline{m-1, 1}. \quad (38)$$

Здесь $\hat{F}_i = 0, i \neq m, N-m \pm 1, \hat{F}_m = -2h \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial x}, \hat{F}_{N-m-1} = u(x_N, t), \hat{F}_{N-m+1} = -u(x_N, t)$.

Используя рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева, получим рекуррентное соотношение для полиномов $P_m(z)$:

$$P_{m+1}(z) = 2z T_m \left(\frac{z+2}{2} \right) = 2z \left(2 \left(\frac{z+2}{2} \right) T_{m-1} \left(\frac{z+2}{2} \right) - T_{m-2} \left(\frac{z+2}{2} \right) \right) = (z+2) P_m(z) - P_{m-1}(z),$$

или

$$P_{m+1}(Q) = (Q + 2E) P_m(Q) - P_{m-1}(Q). \quad (39)$$

Матрица $A = Q + 2E = \{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{N-1}$ имеет вид: $a_{ij} = 1$ для $|i-j|=1$, $i \neq 0, j \neq 1$, $a_{0,1} = 2$, $a_{ij} = 0$ для $|i-j| > 1$.

Тогда с учетом (39) для строк матрицы $P_{m+1}(Q)$ справедливы равенства:

$$\text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) = (\text{первая строка } P_m(Q)) \times 2 - (\text{нулевая строка } P_{m-1}(Q)), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} i\text{-я строка матрицы } P_{m+1}(Q) &= ((i-1)\text{-я строка } P_m(Q)) + \\ &((i+1)\text{-я строка } P_m(Q)) - (i\text{-я строка } P_{m-1}(Q)), i = \overline{1, N-2}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$(N-1)\text{-я строка } P_{m+1}(Q) = ((N-2)\text{-я строка } P_m(Q)) - ((N-1)\text{-я строка } P_{m-1}(Q)). \quad (42)$$

В предположении индукции строки матриц $P_i(Q)$, $i = m, m-1$ выражаются из формул (34) – (38) для соответствующих значений i . Тогда, например, формула (40) перейдет в формулу:

$$\begin{aligned} \text{нулевая строка матрицы } P_{m+1}(Q) &= \left(\int_0^1 (E_{m-2}^{(3)}(x) + E_m^{(3)}(x)) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right) \times 2 - \\ &\left(2 \int_0^1 E_{m-2}^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \right) = 2 \int_0^1 E_m^{(3)}(x) \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx, \end{aligned}$$

что доказывает (34), поскольку $\hat{F}_0 = 0$. Нетрудно убедиться, что (35) – (38) верны на основании (40) – (42). Теорема доказана.

Можно показать, что в общем случае, для $(2k+1)$ -точечной схемы с $2m+1$ узлами интерполирования, $m = \overline{0, k}$, задача Коши, которая аппроксимирует исходную краевую задачу для уравнения в частных производных, имеет вид (43):

$$\begin{aligned} \left[\sum_{l=0}^m B_l(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot Q^l \right] U' &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{\alpha_0}{2} P_1(Q) + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j P_{j+1}(Q) \right] U + \frac{1}{h^2} F, \\ U(0) &= \Phi, \end{aligned} \quad (43)$$

где $B_l(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) = \alpha_0 M_0^l + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i M_i^l$, $l = \overline{0, m}$;

$$M_i^0 = 1, M_i^l = \frac{1}{(2l)!} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j A_j^{l-1} \left[\frac{(i-1)^{2(l-j)+2} - 2i^{2(l-j)+2} + (i+1)^{2(l-j)+2}}{(2(l-j)+1)(2(l-j)+2)} \right], l \neq 0, i = \overline{0, k-1},$$

$$A_0^s = 1, A_s^s = (s!)^2, 0 \leq s \leq m-1, A_j^s = s^2 A_{j-1}^{s-1} + A_j^{s-1}, 0 < j < s.$$

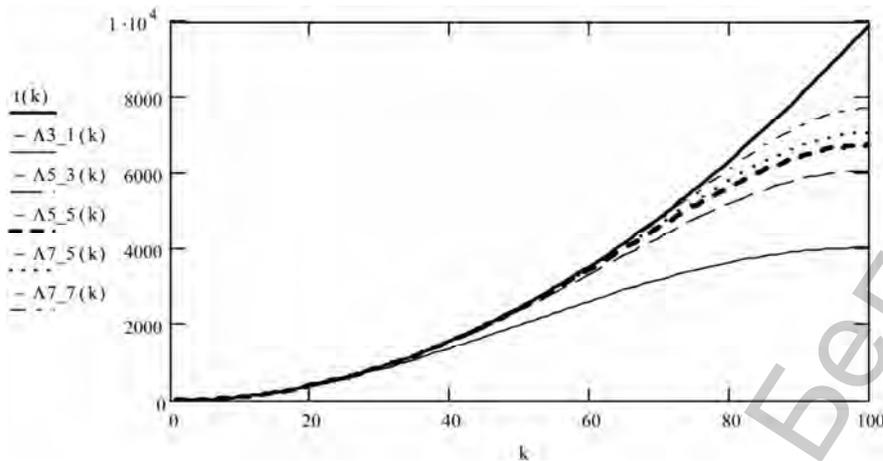
Исследование сходимости. Исследование сходимости схем проводится с помощью логарифмической нормы [12, 13], как в работе [8]. Решение $(2k+1)$ -точечной схемы с $2k+1$ узлами интерполирования и наилучшим выбором параметров α_i , $i = \overline{0, k-1}$ сходится к решению исходного дифференциального уравнения в частных производных со скоростью порядка $O(h^{4k-0.5})$. Погрешность аппроксимации в этом случае есть величина порядка $O(h^{4k})$.

Спектр задачи

Получающуюся задачу Коши в общем случае можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} A_1 U'(t) = A_2 U(t) + \frac{1}{h^2} F(t), \\ U(0) = \Phi, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} U'(t) = A_1^{-1} A_2 U(t) + A_1^{-1} \frac{1}{h^2} F(t), \\ U(0) = \Phi. \end{cases} \quad (44)$$

Проводя аналогию с формулами компактного численного дифференцирования [14, 15] (для $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ в случае трехточечной замены), систему ОДУ (44) можно трактовать как дифференциально-разностную схему, полученную с помощью формулы компактного $(2k+1)$ -точечного



численного дифференцирования, и поэтому оператор $A_1^{-1}A_2$ есть оператор замены $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ с соответствующими граничными условиями на $(2k + 1)$ -точечном шаблоне. Отсюда следует, что оператор $A_1^{-1}A_2$ должен быть отрицательно определенным, поэтому параметры α_i , $i = \overline{0, k-1}$, входящие в схему, необходимо выбирать из условия отрицательной определенности оператора.

Рассмотрим спектры разностного оператора $(-1)A_1^{-1}A_2$ и дифференциального оператора $(-1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ на примере задачи $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$. Собственными значениями являются $\lambda_k = \left(\frac{\pi + 2\pi k}{2l}\right)^2$, $k = \overline{0, N-1}$.

Из рисунка следует, что с увеличением точности $(2k + 1)$ -точечной схемы ($k \geq 1$) наблюдается приближение спектров дифференциального и разностного операторов ($t(k)$ – собственные значения дифференциального оператора, $\Lambda_{m_n}(k)$ – собственные значения разностного оператора $(-1)A_1^{-1}A_2$, соответствующие m -точечной схеме с применением интерполирования по n узлам).

Вычислительный эксперимент. На примере тестовой задачи (45) с точным решением $u(x, t) = A \sin \alpha x e^{\beta t}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + (\alpha^2 + \beta) A \sin \alpha x e^{\beta t}, \\ u(x, 0) = A \sin \alpha x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A \alpha e^{\beta t}, \quad u(1, t) = A \sin \alpha e^{\beta t}, \end{cases} \quad (45)$$

проведем сравнение 5-точечной схемы с тремя и пятью узлами интерполирования с известной схемой второго порядка аппроксимации (46) и компактной схемой четвертого порядка аппроксимации (47), дополненными соответствующими уравнениями для приграничных узлов и начальными условиями:

$$u'_i(t) = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + f_i(t), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (46)$$

$$\frac{u'_{i-1}(t) + 10u'_i(t) + u'_{i+1}(t)}{12} = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{h^2} + \frac{f_{i-1}(t) + 10f_i(t) + f_{i+1}(t)}{12}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (47)$$

Для проведения вычислительного эксперимента возьмем, к примеру, $\alpha = \pm 3$, $\beta = -2$, $A = 1$. Погрешности приближенного решения в узлах сетки приведены в таблице. Для пятиточечных схем вторые столбцы соответствуют расчетам с оптимальными параметрами α_0 , α_1 , обнуляющими главный член остатка.

$x, t = 0,1$	Трехточечные схемы		Пятиточечные схемы			
	Второго порядка аппроксимации	Четвертого порядка аппроксимации	Интерполирование по трем узлам		Интерполирование по пяти узлам	
			$\alpha_0 = -18,$ $\alpha_1 = 1$	$\alpha_0 = 18,$ $\alpha_1 = 1$	$\alpha_0 = -1/31,$ $\alpha_1 = 1/190$	$\alpha_0 = 1/31,$ $\alpha_1 = 1/190$
$x = 0$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,1$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,2$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,3$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,4$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$8,8 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,5$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$2,3 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,6$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,7$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,0 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,8$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-8}$
$x = 0,9$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$4,3 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$

Известные схемы второго (46) и четвертого (47) порядков аппроксимации являются частными случаями построенных $(2k + 1)$ -точечных схем при $k = 1$ с использованием интерполирования по одному и трем узлам соответственно. Из результатов эксперимента видно, что порядок аппроксимации приближенного решения повышается за счет использования схем с большим числом точек и оптимального выбора параметров.

Заключение. Построен класс $(2k + 1)$ -точечных схем ($k \geq 1$) с последовательно улучшающимися свойствами согласованности дифференциальной и разностной задач, с увеличением k , вследствие близости спектров дифференциальных и разностных операторов. Благодаря использованию интерполирования Эрмита–Биркгофа, а также некоторого его обобщения (17), (19) удалось повысить порядок аппроксимации схемы в приграничных узлах и получить величину $O(h^{4k})$ для $(2k + 1)$ -точечной схемы. Полученный класс схем включает в себя компактные схемы.

Настоящий подход успешно применяется для решения не только параболических, но и гиперболических, а также эллиптических уравнений с граничными условиями различных типов.

Литература

1. В о б к о в В. В. // Computational Methods In Applied Mathematics. 2002. Vol. 2. N 4. P. 354–377.
2. Х а й р е р Э., В а н н е р Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М., 1999.
3. F a l e i c h i k В. В. // Computational Methods In Applied Mathematics. 2008. Vol. 8. N 2. P. 116–129.
4. Л и с к о в е ц О. А. // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 12. С. 1662–1678.
5. П и н ч у к о в В. И. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, № 10. С. 1717–1720.
6. О г р ы з к о С. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2006. № 1. С. 79–83.
7. С а м у с е н к о А. В., О г р ы з к о С. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2006. № 2. С. 65–69.
8. Ф р о л о в а С. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 2007. № 2. С. 107–110.
9. М а р ч у к Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1989. С. 81–109.
10. О г р ы з к о С. В. // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (МоАРМИ-2004): Сб. науч. ст. междунар. конф. Минск, 2004. С. 183–187.
11. М ы с о в с к и х И. П. Лекции по методам вычислений. СПб., 1998. С. 50–55.
12. Л о з и н с к и й С. М. // Изв. вузов СССР. Математика. 1958. № 5. С. 52–90.
13. D a h l q u i s t G. // Trans. Royal Inst. Tech., Stockholm, Sweden. 1959. N 130.
14. Т о л с т ы х А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М., 1990. С. 48–54, 117–127, 153.
15. Г а п о н о в В. А. Компактные разностные аппроксимации повышенного порядка точности в задачах вычислительной гидродинамики. Новосибирск, 1994. С. 5–27.

A. V. SAMUSENKO, S. V. FROLOVA

MULTIPOINT SCHEMES OF THE LONGITUDINAL VARIANT OF THE METHOD OF LINES OF HIGH ORDER OF ACCURACY FOR SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Summary

This article introduces differential-difference schemes of high order of accuracy for some problems of mathematical physics with one variable in space. The problem of approximation near boundary nodes is solved. For that, Hermite–Birkhoff's interpolation and a special type of interpolation near boundary nodes are used.

УДК 517.911.5+519.216.73

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ β -МАРТИНГАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 01.07.2008)

Рассмотрим стохастическое эволюционное уравнение [1]

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X \in H, \quad (1)$$

где H – сепарабельное гильбертово пространство, A – генератор C_0 -полугруппы $S(t)$ на H , функции $f: [0, T] \times H \rightarrow H$, $g: [0, T] \times H \rightarrow L_2(U_0, H)$ измеримы по Борелю, $W(t)$ – Q -винеровский процесс (цилиндрический, если $\text{tr}(Q) = \infty$) со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U , Q – заданный симметрический положительно определенный оператор на U , $L_2(U_0, H)$ – пространство операторов Гильберта–Шмидта $B: U_0 \rightarrow H$ с нормой $\|B\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Bu_i\|^2 \right)^{1/2}$ (u_i – полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $U_0 = Q^{1/2}U$, состоящем из элементов пространства U , скалярное произведение в котором задается следующим образом: $\langle u, v \rangle_{U_0} = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle_U$, $u, v \in U_0$).

Для стохастического уравнения $dX(t) = AX(t)dt + f(X(t))dt + g(X(t))dW(t)$ М. Вио [2] доказал теорему существования мартингальных решений при следующих условиях: отображения f и g непрерывны, имеют линейный порядок роста, оператор A является генератором C_0 -полугруппы $S(\cdot)$ такой, что при каждом $t > 0$ оператор $S(t)$ компактен. В работе [3] получена теорема существования мартингальных решений стохастического эволюционного включения

$$dX(t) \in AX(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X \in H, \quad (2)$$

при следующих предположениях: A – генератор C_0 -полугруппы, отображения $F(t, X)$, $G(t, X)$ принимают непустые компактные выпуклые значения, имеют линейный порядок роста по X и удовлетворяют по переменной X условию, несколько более слабому, чем условие Липшица. В этой же работе показано, что в случае однозначных отображений F , G , мартингальное решение является сильным, т. е. процесс $X(t)$, являющийся мартингальным решением включения (2), согласован с потоком σ -алгебр, порожденным винеровским процессом $W(t)$ и начальным условием $X(0)$. В работе [4] приводится теорема существования мартингальных решений включения (2) при следующих условиях: оператор A является генератором C_0 -полугруппы $S(\cdot)$ такой, что при каждом $t > 0$ оператор $S(t)$ компактен, отображения $F(t, X)$, $G(t, X)$ измеримы по Борелю, полунепрерывны сверху, имеют линейный порядок роста по X , принимают непустые выпуклые

компактные значения. В настоящей статье доказана теорема существования β -мартингалльных решений уравнения (1) в предположении, что отображения $f(t, X)$, $g(t, X)$ измеримы по Борелю, имеют линейный порядок роста по X , оператор A порождает C_0 -полугруппу $S(t)$ такую, что при каждом $t > 0$ оператор $S(t)$ компактен; а под β -мартингалльным решением уравнения (1) понимаем мартингалльное решение соответствующего стохастического эволюционного включения, построенного по уравнению (1). В доказательстве теоремы реализуется схема из работы [4], тогда как в [4] приведен лишь план доказательства без подробных выкладок.

В статье будем использовать следующие обозначения: P^x – распределение вероятностей случайной величины x , равенство $P^x = P^y$ означает, что распределения случайных величин x , y совпадают; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x ; п. н. – почти наверное; C, C_1, C_2, \dots – универсальные постоянные; $\overline{co}(X)$ – замкнутая выпуклая оболочка множества X ; $\|\cdot\|_E$ – норма в пространстве E ; $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ – скалярное произведение в пространстве E (если E совпадает с H , то индекс пространства будем опускать); A^* – сопряженный оператор к оператору A ; $\text{tr}(A)$ – след оператора A ; $[X]_\varepsilon$ – ε -окрестность множества X , т. е. множество точек, расстояние от каждой из которых до множества X не превосходит ε .

Построим многозначные отображения $F(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}[f(t, [X]_\delta)]_\delta$, $G(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{co}[g(t, [X]_\delta)]_\delta$, $(t, X) \in [0, T] \times H$.

О п р е д е л е н и е. Предположим, что существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathbf{F}, P) с потоком σ -алгебр (\mathbf{F}_t) такой, что выполняются следующие условия:

- 1) процесс $X(t)$ непрерывен и (\mathbf{F}_t) -согласован;
- 2) существует (\mathbf{F}_t) -согласованный Q -винеровский процесс $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;
- 3) существуют измеримые (\mathbf{F}_t) -согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, определенные на (Ω, \mathbf{F}, P) такие, что $v(t) \in F(t, X(t))$, $u(t) \in G(t, X(t))$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, и $\int_0^T \|v(s)\| ds < \infty$, $\int_0^T \|u(s)\|_{L_2(U_0, H)}^2 ds < \infty$, где μ – мера Лебега;

$$4) \text{ для всех } t \in [0, T] \text{ выполняется соотношение } X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)v(s)ds + \int_0^t S(t-s)u(s)dW(s)$$

п. н., где $S(t) = e^{At}$, $t \in [0, T]$, – C_0 -полугруппа на H ;

- 5) случайная величина $X(0)$ имеет распределение λ , где λ – вероятность на $(H, \mathbf{B}(H))$.

Тогда набор $(\Omega, \mathbf{F}, P, \mathbf{F}_t, W(t), X(t), v(t), u(t))$ называется β -мартингалльным решением уравнения (1) с начальным распределением λ .

Будем говорить, что функция $h(t, X)$, $t \in [0, T]$, $X \in H$, со значениями в банаховом пространстве E имеет линейный порядок роста по X , если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|h(t, X)\|_E \leq C(1 + \|X\|)$ для любых $t \in [0, T]$, $X \in H$.

Т е о р е м а. Пусть отображения $f(t, X)$ и $g(t, X)$ измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста по X , при каждом $t \in (0, T]$ оператор $S(t)$ компактен. Тогда для любой заданной вероятности λ на $(H, \mathbf{B}(H))$ уравнение (1) имеет β -мартингалльное решение с начальным распределением λ .

Д о к а з а т е л ь с т в о разобьем на несколько этапов.

1. Построение последовательности решений $X_n(t)$ уравнения (1) с гладкими коэффициентами $f_n(t, X)$, $g_n(t, X)$.

2. Доказательство плотности последовательности X_n , $n \geq 1$, в пространстве $C([0, T], H)$.

3. Построение, с помощью теоремы Скорохода, на новом вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ последовательности процессов $\tilde{X}_n(t)$, $n \geq 1$, с теми же распределениями, что и процессы $X_n(t)$, такими, что $\tilde{X}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(t)$ в $C([0, T], H)$ п. н.

4. Доказательство относительно слабой компактности последовательностей $f_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $g_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $n \geq 1$, соответственно в $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, H)$, $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, L_2(U_0, H))$, построение процессов $v(t)$, $u(t)$, которые являются слабыми пределами некоторых подпоследовательностей последовательностей $f_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $g_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $n \geq 1$, соответственно.

5. Построение Q -винеровского процесса $W(t)$ на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ с потоком $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ вероятностного пространства $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ с потоком $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$, где $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ – поток σ -алгебр, порожденный процессом $X(t)$, такого, что набор $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P}, \tilde{\mathbf{F}}_t, W(t), X(t), v(t), u(t))$ является β -мартингальным решением уравнения (1) с начальным распределением λ .

Этап 1. Зафиксируем полный ортонормированный базис h_n , $n \geq 1$, в H , обозначим $X^i = \langle X, h_i \rangle$ – координаты вектора X . Пусть Π_n , π_n – операторы ортогонального проектирования соответственно на $H_n = L\{h_1, \dots, h_n\}$, $U_{0,n} = L\{u_1, \dots, u_n\}$. Построим отображения $\tilde{f}_n(t, X) = \Pi_n f(t, \Pi_n X)$, $\tilde{g}_n(t, X) = \Pi_n g(t, \Pi_n X) \pi_n$, $n \geq 1$. Для каждого натурального n определим функцию $J_n(X^1, \dots, X^n)$, которая является неотрицательной бесконечно дифференцируемой, равной 0 при $\|(X^1, \dots, X^n)\|_{H_n} > 1$, для которой $\int_{H_n} J(X^1, \dots, X^n) dX^1 \dots dX^n = 1$. Построим функции

$$f_n(t, X) = n^n J(nX^1, \dots, nX^n) * \tilde{f}_n(t, X^1, \dots, X^n), \quad n \geq 1,$$

$$g_n(t, X) = n^n J(nX^1, \dots, nX^n) * \tilde{g}_n(t, X^1, \dots, X^n), \quad n \geq 1,$$

где $*$ означает свертку функций. При каждом натуральном n функции $f_n(t, X)$, $g_n(t, X)$ бесконечно дифференцируемы по переменной X , кроме того, существует постоянная $C > 0$, что $\|f_n(t, X)\| + \|g_n(t, X)\|_{L_2(U_0, H)} \leq C(1 + \|X\|)$ для любого натурального n и для любых $(t, X) \in [0, T] \times H$. По теореме 7.4 [1] на заданном вероятностном пространстве (Ω, \mathbf{F}, P) с потоком σ -алгебр (\mathbf{F}_t) и (\mathbf{F}_t) -согласованным Q -винеровским процессом $W(t)$ для каждого натурального n существует непрерывный (\mathbf{F}_t) -согласованный процесс $X_n(t)$ с начальным распределением $P^{X_n(0)} = \lambda$ такой, что с вероятностью 1 для любого $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$X_n(t) = S(t)X_n(0) + \int_0^t S(t-s)f_n(s, X_n(s))ds + \int_0^t S(t-s)g_n(s, X_n(s))dW(s). \quad (3)$$

Через $\sigma_{n,t+\varepsilon}$ обозначим наименьшую σ -алгебру, относительно которой измеримы все случайные векторы $X_n(s)$, $0 \leq s \leq \min\{t+\varepsilon, T\}$. Для каждого натурального n построим поток σ -алгебр (\mathbf{F}_{nt}) , где $\mathbf{F}_{nt} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{n,t+\varepsilon}$.

Этап 2. Возьмем числа $\alpha \in (0, 1]$ и $p \in (1, +\infty)$ и рассмотрим оператор

$$G_\alpha : L^p([0, T], H) \rightarrow C([0, T], H),$$

задаваемый соотношением

$$G_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s)f(s)ds, \quad f \in L^p([0, T], H), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Л е м м а 1. Пусть для любого $t \in (0, T]$ оператор $S(t)$ компактный, и выполняются неравенства $0 < 1/p < \alpha \leq 1$, тогда оператор G_α , определяемый соотношением (4), является компактным оператором из $L^p([0, T], H)$ в $C([0, T], H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\|\cdot\|_p$ норму в пространстве $L^p([0, T], H)$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что выполняются условия теоремы Арцела–Асколи в бесконечномерном пространстве.

1. Для любого $t \in [0, T]$ множество $\{G_\alpha f(t) \mid \|f\|_p \leq 1\}$ относительно компактно в H .

2. Существует постоянная $M > 0$, что для любого $f \in L^p([0, T], H)$, $\|f\|_p \leq 1$, для любого $t \in [0, T]$ выполняется неравенство $\|G_\alpha f(t)\| \leq M$.

3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $t, s \in [0, T]$, $|t - s| \leq \delta$, выполняется неравенство $\|G_\alpha f(t) - G_\alpha f(s)\| \leq \varepsilon$ для всех $f \in L^p([0, T], H)$, $\|f\|_p \leq 1$.

Проверим первое условие. Зафиксируем $t \in (0, T]$ и определим для $\varepsilon \in (0, t)$ оператор $G_\alpha^\varepsilon : L^p([0, T], H) \rightarrow H$ следующим образом:

$$G_\alpha^\varepsilon f = \int_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) f(s) ds, \quad f \in L^p([0, T], H).$$

Так как $G_\alpha^\varepsilon f = S(\varepsilon) \int_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{\alpha-1} S(t-\varepsilon-s) f(s) ds$, $f \in L^p([0, T], H)$, а оператор $S(\varepsilon)$ компактный, то оператор G_α^ε также компактный. Пусть $M = \sup_{\tau \in [0, T]} \|S(\tau)\|$, $q = p/(p-1)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \|G_\alpha f(t) - G_\alpha^\varepsilon f\| &= \left\| \int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) f(s) ds \right\| \leq \\ &\left(\int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{(\alpha-1)q} \|S(t-s)\|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_{t-\varepsilon}^t \|f(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq M \left(\frac{\varepsilon^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Поскольку $((\alpha-1)q+1)/q = \alpha - 1/p > 0$, то $G_\alpha^\varepsilon f \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G_\alpha f(t)$ для любого $f \in L^p([0, T], H)$, $\|f\|_p \leq 1$. Учитывая, что оператор G_α^ε компактен, заключаем, что множество $\{G_\alpha f(t) \mid \|f\|_p \leq 1\}$ относительно компактно в H .

Проверим второе условие. Для любого $f \in L^p([0, T], H)$, $\|f\|_p \leq 1$, для любого $t \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} \|G_\alpha f(t)\| &= \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) f(s) ds \right\| \leq \left(\int_0^t (t-s)^{(\alpha-1)q} \|S(t-s)\|^q ds \right)^{1/q} \left(\int_0^t \|f(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq \\ &M \left(\frac{T^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Остается проверить третье условие. Возьмем произвольно $f \in L^p([0, T], H)$, $\|f\|_p \leq 1$, $t \in [0, T]$, $u > 0$ так, что $t+u \in [0, T]$. Выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
& \|G_\alpha f(t+u) - G_\alpha f(t)\| \leq \int_0^t (t+u-s)^{\alpha-1} S(t+u-s) - (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) \|f(s)\| ds + \\
& \int_t^{t+u} (t+u-s)^{\alpha-1} S(t+u-s) f(s) ds \leq \|f\|_p \left(\int_0^t \|(t+u-s)^{\alpha-1} S(t+u-s) - (t-s)^{\alpha-1} S(t-s)\|^q ds \right)^{1/q} + \\
& \|f\|_p \left(\int_t^{t+u} \|(t+u-s)^{\alpha-1} S(t+u-s)\|^q ds \right)^{1/q} = \|f\|_p \left(\int_0^t \|(u+\tau)^{\alpha-1} S(u+\tau) - \tau^{\alpha-1} S(\tau)\|^q d\tau \right)^{1/q} + \\
& \|f\|_p \left(\int_0^u \tau^{(\alpha-1)q} \|S(\tau)\|^q d\tau \right)^{1/q} \leq \|f\|_p \left(\int_0^T \|(u+\tau)^{\alpha-1} S(u+\tau) - \tau^{\alpha-1} S(\tau)\|^q d\tau \right)^{1/q} + \\
& M \left(\frac{u^{(\alpha-1)q+1}}{(\alpha-1)q+1} \right)^{1/q} \|f\|_p = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Очевидно, $I_2 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Рассмотрим слагаемое I_1 . Так как оператор $S(t)$ компактен при $t > 0$, то для любого фиксированного $s > 0$ имеем $\|S(u+s) - S(s)\| \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Кроме того, $\|(u+\tau)^{\alpha-1} S(u+\tau) - \tau^{\alpha-1} S(\tau)\|^q \leq 2M^q T^{(\alpha-1)q}$. Следовательно, по теореме Лебега $I_1 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Лемма доказана.

Не нарушая общности, можем предполагать, что $E(\|X(0)\|^p) < \infty$ для некоторого $p > 2$ [5, с. 155 – 156].

Лемма 2. Последовательность X_n , $n \geq 1$, плотна в $C([0, T], H)$.

Доказательство. Зафиксируем числа $p > 2$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $0 < 1/p < \alpha < 1/2$. Из доказательства теоремы 7.4 [1] вытекает, что существует константа $C_p > 0$, что $E(\|X_n(t)\|^p) \leq C_p$ для любого натурального n и для всех $t \in [0, T]$.

Докажем, что справедливо следующее соотношение:

$$\int_0^t S(t-s) \Phi(s) dW(s) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} G_\alpha Y(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где

$$Y(t) = \int_0^t (t-r)^{-\alpha} S(t-r) \Phi(r) dW(r), \quad t \in [0, T].$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} G_\alpha Y(t) &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s) \int_0^s (s-r)^{-\alpha} S(s-r) \Phi(r) dW(r) ds = \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{-\alpha} S(t-r) \Phi(r) dW(r) ds = \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^t dW(r) \Phi(r) S(t-r) \int_r^t (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{-\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_r^t (t-s)^{\alpha-1} (s-r)^{-\alpha} ds = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

приходим к соотношению (5).

Из равенств (3) и (5) вытекает, что

$$X_n(t) = S(t)X_n(0) + G_1(f_n(\cdot, X_n(\cdot)))(t) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} G_\alpha(Y_n)(t),$$

где

$$Y_n(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s) g_n(s, X_n(s)) dW(s).$$

Из доказательства леммы 7.2 [1] следует существование положительной постоянной \tilde{C}_p , при которой для любого натурального n выполняется неравенство

$$E \left(\int_0^T \|Y_n(s)\|^p ds \right) \leq \tilde{C}_p E \left(\int_0^T \|g_n(s, X_n(s))\|_{L_2(U_0, H)}^p ds \right).$$

Следовательно,

$$E \left(\int_0^T \|Y_n(s)\|^p ds \right) \leq C^p \tilde{C}_p E \left(\int_0^T (1 + \|X_n(s)\|)^p ds \right) \leq C_1.$$

Из неравенства Чебышева следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r(\varepsilon) > 0$, что для всех натуральных n имеем

$$P \left(\|X_n(0)\| \leq r, \left(\int_0^T \|Y_n(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq r, \left(\int_0^T \|f_n(s, X_n(s))\|^p ds \right)^{1/p} \leq r \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Из леммы 1 вытекает, что множество

$$K(\varepsilon) = \left\{ S(\cdot)X + G_1 f(\cdot) + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} G_\alpha g(\cdot) \mid \|X\| \leq r, \|f\|_p \leq r, \|g\|_p \leq r \right\}$$

компактно в $C([0, T], H)$. Так как для любого натурального n выполняется неравенство $P^{X_n}(K(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$, то последовательность X_n , $n \geq 1$, плотна в $C([0, T], H)$. Лемма доказана.

Этап 3. Последовательность X_n , $n \geq 1$, удовлетворяют условиям теоремы Скорохода (теорема 2.4 [1]), следовательно, существуют вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$, подпоследовательность n_k последовательности n (для упрощения обозначений вместо n_k будем писать n), непрерывные процессы \tilde{X}_n , X , определенные на $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ такие, что $P^{\tilde{X}_n} = P^{X_n}$, $n \geq 1$, $\tilde{X}_n(t) \rightarrow X(t)$ равномерно на $[0, T]$ п. н. Через $\sigma_{t+\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}_{n, t+\varepsilon}$ обозначим наименьшие σ -алгебры, относительно которых измеримы соответственно все случайные величины $X(s)$, $0 \leq s \leq \min\{t + \varepsilon, T\}$, и все случайные величины $\tilde{X}_n(s)$, $0 \leq s \leq \min\{t + \varepsilon, T\}$. Пусть $\tilde{\mathbf{F}}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{t+\varepsilon}$ и $\tilde{\mathbf{F}}_{nt} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \tilde{\sigma}_{n, t+\varepsilon}$.

Этап 4.

Л е м м а 3. Последовательности $f_n(t, \tilde{X}_n(t))$ и $g_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $n \geq 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, H)$ и $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, L_2(U_0, H))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем число $p > 2$. Существует положительная постоянная c_p такая, что для всех натуральных n выполняются неравенства

$$\tilde{E} \left(\int_0^T \|f_n(s, \tilde{X}_n(s))\|^p ds \right) \leq c_p, \quad \tilde{E} \left(\int_0^T \|g_n(s, \tilde{X}_n(s))\|_{L_2(U_0, H)}^p ds \right) \leq c_p.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех натуральных n имеем

$$\left(\mu \times \tilde{P} \left(\left\| f_n(s, \tilde{X}_n(s)) \right\| \leq \delta(\varepsilon), \left\| g_n(s, \tilde{X}_n(s)) \right\|_{L_2(U_0, H)} \leq \delta(\varepsilon) \right) \geq 1 - \varepsilon. \right.$$

Множества $\{h \in H \mid \|h\| \leq \delta(\varepsilon)\}$, $\{l \in L_2(U_0, H) \mid \|l\|_{L_2(U_0, H)} \leq \delta(\varepsilon)\}$ слабо компактны соответственно в H и $L_2(U_0, H)$. Следовательно, последовательности $f_n(t, \tilde{X}_n(t))$ и $g_n(t, \tilde{X}_n(t))$, $n \geq 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, H)$ и $L^1([0, T] \times \tilde{\Omega}, L_2(U_0, H))$ [6]. Лемма доказана.

Существуют подпоследовательности $f_{n_k}(t, \tilde{X}_{n_k}(t, \omega))$ и $g_{n_k}(t, \tilde{X}_{n_k}(t, \omega))$ последовательностей $f_n(t, \tilde{X}_n(t, \omega))$ и $g_n(t, \tilde{X}_n(t, \omega))$, $n \geq 1$, сходящиеся слабо соответственно к $v(t, \omega)$ и $u(t, \omega)$ на $[0, T] \times \tilde{\Omega}$ (для простоты обозначений вместо n_k будем писать n). Для $(\mu \times \tilde{P})$ почти всех $(t, \omega) \in [0, T] \times \tilde{\Omega}$ выполняются включения

$$\begin{aligned} v(t, \omega) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k(t, \tilde{X}_k(t, \omega)) \subset F(t, X(t, \omega)), \\ u(t, \omega) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} g_k(t, \tilde{X}_k(t, \omega)) \subset G(t, X(t, \omega)). \end{aligned}$$

Кроме того, процессы $v(t)$ и $u(t)$ являются измеримыми, (F_t) -согласованными, и $\int_0^T \|v(s)\| ds < \infty$, $\int_0^T \|u(s)\|_{L_2(U_0, H)}^2 ds < \infty$.

Этап 5. Покажем, что для любого $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$X_n(t) = X_n(0) + A \left(\int_0^t X_n(s) ds \right) + \int_0^t f_n(s, X_n(s)) ds + \int_0^t g_n(s, X_n(s)) dW(s) \text{ п. н.} \quad (6)$$

Пусть $A_m = AJ_m$ – аппроксимация Иосиды оператора A , где $J_m = mA(mI - A)^{-1}$, $m > \gamma$, γ – константа, при которой выполняется условие $\|S(t)\| \leq Me^{\gamma t} \quad \forall t \in [0, T]$ для некоторого $M > 0$. Тогда по теореме 7.4 [1] при каждых натуральных n и m существует непрерывный (F_t) -согласованный процесс $X_{n,m}(t)$, заданный на вероятностном пространстве (Ω, \mathbf{F}, P) , такой, что для любого $t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$X_{n,m}(t) = X_{n,m}(0) + A_m \left(\int_0^t X_{n,m}(s) ds \right) + \int_0^t f_n(s, X_{n,m}(s)) ds + \int_0^t g_n(s, X_{n,m}(s)) dW(s) \text{ п. н.}, P^{X_{n,m}(0)} = \lambda.$$

Из предложения 7.5 [1] вытекает, что для любого $t \in [0, T]$ и для любого натурального n

$$\int_0^t X_{n,m}(s) ds \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_0^t X_n(s) ds \text{ п. н.}, A_m \left(\int_0^t X_{n,m}(s) ds \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \eta_n(t) \text{ п. н.}$$

Так как оператор A замкнут, то для любого натурального n и для любого $t \in [0, T]$

$$\int_0^t X_n(s) ds \in D(A) \text{ п. н. и } A \left(\int_0^t X_n(s) ds \right) = \eta_n(t) \text{ п. н.}$$

Следовательно, соотношение (6) доказано.

Докажем, что для каждого натурального n процесс

$$\tilde{M}_n(t) = \tilde{X}_n(t) - \tilde{X}_n(0) - A \left(\int_0^t \tilde{X}_n(s) ds \right) - \int_0^t f_n(s, \tilde{X}_n(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

является квадратично интегрируемым $(\tilde{\mathbf{F}}_n)$ -мартингалом и имеет квадратичную вариацию

$$\ll \tilde{M}_n(t) \gg = \int_0^t (g_n(s, \tilde{X}_n(s))Q^{1/2}) (g_n(s, \tilde{X}_n(s))Q^{1/2})^* ds, \quad t \in [0, T].$$

Так как

$$X_n(t) - X_n(0) - A \left(\int_0^t X_n(s) ds \right) - \int_0^t f_n(s, X_n(s)) ds = \int_0^t g_n(s, X_n(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

то процесс

$$M_n(t) = X_n(t) - X_n(0) - A \left(\int_0^t X_n(s) ds \right) - \int_0^t f_n(s, X_n(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

является квадратично интегрируемым (\mathbf{F}_n) -мартингалом и имеет квадратичную вариацию

$$\ll M_n(t) \gg = \int_0^t (g_n(s, X_n(s))Q^{1/2}) (g_n(s, X_n(s))Q^{1/2})^* ds, \quad t \in [0, T].$$

В силу $P^{X_n} = P^{\tilde{X}_n}$, $n \geq 1$, и $\sup_n E(\|M_n(t)\|^2) < \infty \quad \forall t \in [0, T]$, заключаем, что $\sup_n \tilde{E}(\|\tilde{M}_n(t)\|^2) < \infty \quad \forall t \in [0, T]$. Возьмем произвольно: $a, b \in H$, $s, t \in [0, T]$, $s \leq t$, ограниченную непрерывную $(\mathbf{B}_s(C([0, T], H)))$ -измеримую функцию $\varphi: C([0, T], H) \rightarrow R$. Для всех натуральных n выполняется равенство

$$E((M_n(t) - M_n(s))\varphi(X_n)) = 0. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (7) в (8), получим

$$E \left(\left(X_n(t) - X_n(s) - A \left(\int_s^t X_n(\tau) d\tau \right) - \int_s^t f_n(\tau, X_n(\tau)) d\tau \right) \varphi(X_n) \right) = 0. \quad (9)$$

Учитывая $P^{X_n} = P^{\tilde{X}_n}$, $n \geq 1$, и равенство (9), имеем

$$E \left(\left(\tilde{X}_n(t) - \tilde{X}_n(s) - A \left(\int_s^t \tilde{X}_n(\tau) d\tau \right) - \int_s^t f_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau)) d\tau \right) \varphi(\tilde{X}_n) \right) = 0. \quad (10)$$

Из (10) вытекает, что процесс является $(\tilde{\mathbf{F}}_n)$ -мартингалом.

Так как справедливо равенство

$$E \left(\left(\langle M_n(t), a \rangle \langle M_n(t), b \rangle - \int_0^t \langle g_n(\tau, X_n(\tau))Q^{1/2}a, g_n(\tau, X_n(\tau))Q^{1/2}b \rangle d\tau \right) \varphi(X_n) \right) = 0,$$

то с учетом $P^{X_n} = P^{\tilde{X}_n}$, $n \geq 1$, заключаем, что

$$\tilde{E} \left(\left(\left(\langle \tilde{X}_n(t) - \tilde{X}_n(0) - A \left(\int_0^t \tilde{X}_n(\tau) d\tau \right) - \int_0^t f_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau)) d\tau, a \rangle \langle \tilde{X}_n(t) - \tilde{X}_n(0) - A \left(\int_0^t \tilde{X}_n(\tau) d\tau \right) - \int_0^t f_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau)) d\tau, b \rangle - \int_0^t \langle g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2}a, g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2}b \rangle d\tau \right) \varphi(\tilde{X}_n) \right) \right) = 0. \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что

$$\ll \tilde{M}_n(t) \gg = \int_0^t (g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2}) (g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2})^* d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Не нарушая общности, можно считать, что оператор A^{-1} определен всюду на H и ограничен (если это не так, то в последующих предельных переходах достаточно вместо оператора A рассматривать оператор $A - \gamma I$ для достаточно большого $\gamma > 0$).

Для каждого натурального n определим мартингал

$$\tilde{N}_n(t) = A^{-1}\tilde{M}_n(t) = A^{-1}\tilde{X}_n(t) - A^{-1}\tilde{X}_n(0) - \int_0^t \tilde{X}_n(\tau) - \int_0^t A^{-1}f_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что $\tilde{N}_n(t)$ является квадратично интегрируемым $(\tilde{\mathbf{F}}_n)$ -мартингалом с квадратичной вариацией

$$\ll M_n(t) \gg = \int_0^t \left(A^{-1}g_n(\tau, X_n(\tau))Q^{1/2} \right) \left(A^{-1}g_n(\tau, X_n(\tau))Q^{1/2} \right)^* d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в соотношениях

$$\tilde{E}\left(\left(\tilde{N}_n(t) - \tilde{N}_n(s)\right)\varphi(\tilde{X}_n)\right) = 0,$$

$$\tilde{E}\left(\left(\left\langle \tilde{N}_n(t), a \right\rangle \left\langle \tilde{N}_n(t), b \right\rangle - \int_0^t \left\langle A^{-1}g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2}a, A^{-1}g_n(\tau, \tilde{X}_n(\tau))Q^{1/2}b \right\rangle d\tau\right)\varphi(\tilde{X}_n)\right) = 0,$$

получим

$$\tilde{E}\left(\left(\tilde{N}(t) - \tilde{N}(s)\right)\varphi(X)\right) = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{E}\left(\left(\left\langle \tilde{N}(t), a \right\rangle \left\langle \tilde{N}(t), b \right\rangle - \int_0^t \left\langle A^{-1}u(\tau)Q^{1/2}a, A^{-1}u(\tau)Q^{1/2}b \right\rangle d\tau\right)\varphi(X)\right) = 0, \quad (13)$$

где

$$\tilde{N}(t) = A^{-1}X(t) - A^{-1}X(0) - \int_0^t X(\tau)d\tau - \int_0^t A^{-1}v(\tau)d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Из соотношений (12), (13) и условия $\sup_n \tilde{E}\left(\left\|\tilde{M}_n(t)\right\|^2\right) < \infty \quad \forall t \in [0, T]$, следует, что процесс $\tilde{N}(t)$ является квадратично интегрируемым $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ -мартингалом с квадратичной вариацией

$$\ll \tilde{N}(t) \gg = \int_0^t \left(A^{-1}u(\tau)Q^{1/2} \right) \left(A^{-1}u(\tau)Q^{1/2} \right)^* d\tau, \quad t \in [0, T].$$

По теореме о представлении мартингала (теорема 8.2 [1]) на расширении $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ с потоком $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ вероятностного пространства $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{P})$ с потоком $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ можно определить $(\tilde{\mathbf{F}}_t)$ -согласованный Q -винеровский процесс $\tilde{W}(t)$, что для любого $t \in [0, T]$

$$A^{-1}X(t) - A^{-1}X(0) - \int_0^t X(\tau)d\tau - \int_0^t A^{-1}v(\tau)d\tau = \int_0^t A^{-1}u(\tau)d\tilde{W}(\tau) \text{ п. н.}$$

Так как

$$\int_0^t A^{-1}u(s)d\tilde{W}(s) = A^{-1}\left(\int_0^t u(s)d\tilde{W}(s)\right)$$

и процесс $A^{-1}X(\cdot)$ непрерывный, как процесс со значением в $D(A)$, то для любого $t \in [0, T]$

$$X(t) = X(0) + A\left(\int_0^t X(s)ds\right) + \int_0^t v(s)ds + \int_0^t u(s)d\tilde{W}(s) \text{ п. н.}$$

Следовательно, для любого $t \in [0, T]$ и для любого $\xi \in D(A^*)$ имеем

$$\langle X(t), \xi \rangle = \langle X(0), \xi \rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* \xi \rangle ds + \int_0^t \langle v(s), \xi \rangle ds + \int_0^t \langle \xi, u(s) d\tilde{W}(s) \rangle \text{ п. н.} \quad (14)$$

Используя (14) и предложение 6.3 [1], получаем, что для любого $t \in [0, T]$ имеет место соотношение

$$X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)v(s)ds + \int_0^t S(t-s)u(s)d\tilde{W}(s) \text{ п. н.}$$

Таким образом, $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathbf{F}}_t, \tilde{W}(t), X(t), v(t), u(t))$ – β -мартингальное решение уравнения (1) с начальным распределением λ . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если пространства H и U конечномерны, то теорема настоящей работы совпадает с соответствующей теоремой из [7].

Рассмотрим начально-краевую задачу для стохастического уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, \omega) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, \omega) + 10\text{sign}(2 - u(t, x, \omega)) + u(t, x, \omega)\dot{W}(t, \omega), \quad t \in (0, \pi], \quad x \in (0, 1), \quad \omega \in \Omega, \quad (15)$$

$$u(t, 0, \omega) = 3, \quad u(t, 1, \omega) = 1, \quad t \in [0, \pi], \quad \omega \in \Omega, \quad (16)$$

$$u(0, x, \omega) = \cos(\pi x) + 2, \quad x \in [0, 1], \quad \omega \in \Omega, \quad (17)$$

где $u: [0, \pi] \times [0, 1] \times \Omega \rightarrow \mathcal{R}$. Пусть $X(t, \omega) = u(t, \cdot, \omega)$ – случайный процесс со значениями в гильбертовом пространстве $H = L^2([0, 1], \mathcal{R})$, $X_0(\omega)(x) = \cos(\pi x) + 2$, $x \in [0, 1]$, – случайная величина

со значениями в H , $W(t, \omega)$ – Q -винеровский процесс со значениями в H , $\text{tr}(Q) < \infty$, $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ –

линейный оператор из H в H с областью определения $D(A) = \{z \in W^{2,2}([0, 1], \mathcal{R}) \mid z(0) = 3, z(1) = 1\}$.

Построим функции $f: H \rightarrow H$, $g: H \rightarrow L(H, H)$ следующим образом:

$$f(Y)(x) = 10\text{sign}(2 - Y(x)), \quad x \in [0, 1], \quad Y \in H,$$

$$(g(Y)v)(x) = Y(x)v(x), \quad v \in H, \quad x \in [0, 1], \quad Y \in H.$$

Тогда задачу (15) – (17) можно записать так:

$$dX(t) = AX(t)dt + f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \in (0, \pi], \quad X(0) = X_0. \quad (18)$$

Теоремы из работ [2, 3] не дают информации о существовании мартингальных решений задачи (18). По теореме настоящей статьи уравнение (18) имеет β -мартингальное решение, отображения $F: H \rightarrow 2^H$, $G: H \rightarrow 2^{L(H, H)}$ имеют следующий вид: $F(X) = \{Y \in H \mid$ для почти всех $x \in [0, 1]: Y(x) = 10\text{sign}(2 - X(x))$, если $X(x) \neq 2$, и $Y(x) = \eta \in [-10, 10]$, если $X(x) = 2\}$, $G(X) = g(X)$, $X \in H$.

В заключение приведем некоторые результаты численного моделирования в Matlab 7.0 для задачи (15) – (17) (рис. 1, 2).

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук А. А. Левакову за ценные советы и постоянное внимание к настоящей работе, а также рецензенту за замечания, позволившие улучшить содержание статьи.

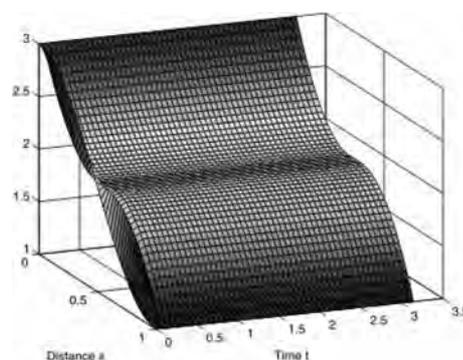


Рис. 1. Численное решение задачи (15) – (17), у которой в правой части уравнения (15) отсутствует слагаемое

$$u(t, x, \omega)\dot{W}(t, \omega)$$

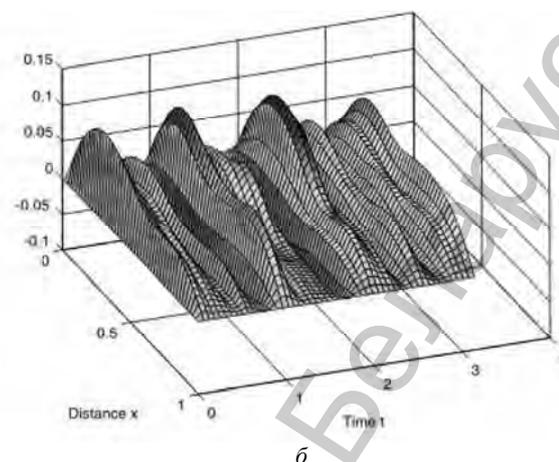
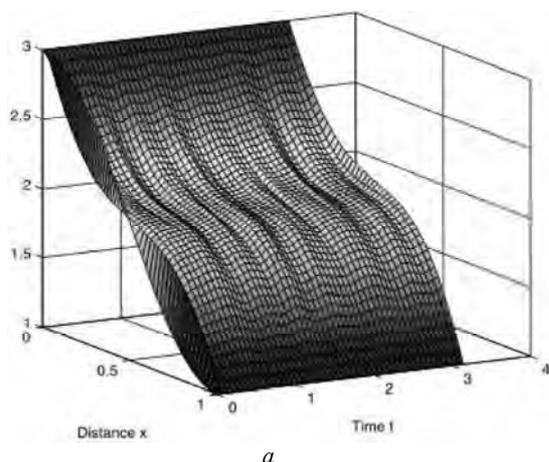


Рис. 2. Численные значения среднего (а) и дисперсии решения $u(t, x, \omega)$ (б) задачи (15) – (17)

Литература

1. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic evolution equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, 1992.
2. Viot M. Solutions faibles d'equations aux derivees partielles non lineaires // These Univ. Pierre et Marie Curie. Paris, 1976.
3. Jakubowski A., Kamenskii M., de Fittes P. R. Existence of weak solutions to stochastic evolution inclusions // Stochastic Anal. Appl. 2005. N 23. P. 723–749.
4. Vas'kovskii M. M. Existence of martingale solutions of stochastic evolution inclusions // Proceedings of the 4th International Workshop on Applied Probability. France. 2008. (CD-ROM).
5. Kallianpur G. K., Xiong J. Stochastic differential equations in infinite dimensional spaces // IMS Lecture Notes-Monograph Series. Vol. 26. IMS. Hayward, 1995.
6. Diestel J. Remarks on weak compactness in $L_1(\mu, X)$ // Glasgow Math. J. 1977. Vol. 18, N 1. P. 87–91.
7. Левakov А. А. Теоремы существования стохастических дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и с отражением от границы // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 210–216.

M. M. VAS'KOVSKII

THEOREM OF EXISTENCE OF β -MARTINGALE SOLUTIONS TO PARABOLIC STOCHASTIC EVOLUTION EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS RIGHT HAND-SIDES

Summary

The theorem of existence of β -martingale solutions to the stochastic evolution equation $dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$, $X \in H$ is proved. H is the separable Hilbert space, $W(t)$ is the Wiener process, assuming that the operator A is the generator of a C_0 -semigroup $S(\cdot)$ on H , the functions $f(t, X)$, $g(t, X)$, $t \in [0, T]$, $X \in H$, are Borel measurable and have a linear-order growth at $X \in H$.

УДК 511.36

О. С. КУКСО

**О СВОЙСТВАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ, ПРИНИМАЮЩИХ
МАЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЫ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 24.09.2008)

Г. Минковский [1] доказал несколько теорем о разрешимости специальных линейных неравенств в целых числах. Применительно к многочленам его теорема о линейных формах означает следующее. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ многочлен с целыми коэффициентами, т. е. $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $H = H(P) = \max_{1 \leq j \leq n} |a_j|$ – высота многочлена, $I = [a, b]$ некоторый интервал.

Т е о р е м а 1 [1]. Пусть $Q > 1$ и $Q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in I$ справедлива система неравенств

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ H(P) \leq Q. \end{cases} \quad (1)$$

Из теоремы 1 легко выводится следующее следствие.

Для $\forall x \in I$ неравенство

$$|P_n(x)| < H^{-n} \quad (2)$$

имеет бесконечно много решений.

Известны два способа доказательства теоремы 1. Первый из них основан на теореме Минковского о выпуклом теле [2], а второй – на очень простом и остроумном принципе ящиков Дирихле. В обоих способах по существу многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий (1) и (2), получается как разность двух целочисленных многочленов. Поэтому про него трудно что-нибудь сказать. Например, какой величины $|P_n^{(j)}(x)|$, $1 \leq j \leq n-1$; каковы степень $P_n(x)$ и величина коэффициентов $P_n(x)$. Все поставленные вопросы важны, но очень трудны для индивидуальных значений x . Однако для подмножеств B точек интервала I с мерой Лебега μB , например, большей $(b-a)/2$, на сформулированные выше вопросы можно дать ответ. В. И. Берник в [3] доказал следующую теорему.

Т е о р е м а 2. Для любого $\varepsilon > 0$ система неравенств

$$\begin{cases} |P_n(x)| < H^{-n}, \\ |P_n'(x)| < H^{1-\varepsilon} \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений только на множестве нулевой меры.

Усиление теоремы 2 позволило В. В. Бересневичу [4] доказать для многочленов произвольной степени аналог классической теоремы Хинчина [5] в случае расходимости. Было доказано, что мера тех $x \in I \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, для которых выполняется неравенство

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ |P'_n(x)| < n^{-1}2^{-n-5}Q, \end{cases}$$

не превосходит $(b-a)/2$.

В данной работе мы установим некоторых иные свойства многочленов $P_n(x)$. Далее Q – достаточно большое действительное число. При некотором фиксированном j , $2 \leq j \leq n$, обозначим через $\mathbb{P}_j(Q)$ множество целочисленных многочленов с условиями $H(P) \leq Q$, $|a_j| < c_1Q$, $c_1 < 1$.

Т е о р е м а 3. Пусть $B_1 \subset I$ и для $\forall x \in B_1$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ P_n(x) \in \mathbb{P}_j(Q). \end{cases}$$

Тогда при $c_1 < n^{-3}2^{-n-10}3^{-n-1}$ справедливо $\mu B_1 < (b-a)/2$.

Если же рассмотреть случай когда k , $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n-1$, коэффициентов многочлена ограничены по модулю, тогда для класса многочленов

$$\mathbb{P}_{\bar{j}}(Q, c_2) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : H(P) \leq Q, \bar{j} = (j_1, \dots, j_k) \in \{2, \dots, n\}, |a_{j_s}| < c_2Q\}$$

верна аналогичная теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть $B_2 \subset I$ и для $\forall x \in B_2$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ P_n(x) \in \mathbb{P}_{\bar{j}}(Q, c_2). \end{cases} \quad (3)$$

Тогда при $c_2 < n^{-3/k}2^{-(n+10)/k}3^{-(n+1)/k}$ справедливо $\mu B_2 < (b-a)/2$.

Ясно, что теорема 3 – частный случай теореммы 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Рассмотрим две возможности для многочленов класса $\mathbb{P}_{\bar{j}}(Q, c_2)$, удовлетворяющих (3).

1. В случае подкласса $\mathbb{P}_{\bar{j}}^{(1)}(Q) = \{P(x) \in \mathbb{P}_{\bar{j}}(Q) : |P'(x)| \leq n^{-1}2^{-n-7}Q\}$ в [4] доказано, что мера тех x , для которых система

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ |P'_n(x)| \leq n^{-1}2^{-n-7}Q \end{cases}$$

разрешима, не превосходит $(b-a)/4$.

2. Для подкласса $\mathbb{P}_{\bar{j}}^{(2)}(Q) = \{P(x) \in \mathbb{P}_{\bar{j}}(Q) : |P'(x)| > n^{-1}2^{-n-7}Q\}$ система (3) переписется в виде

$$\begin{cases} |P_n(x)| < Q^{-n}, \\ |P'_n(x)| > n^{-1}2^{-n-7}Q, \\ P_n(x) \in \mathbb{P}_{\bar{j}}(x). \end{cases} \quad (4)$$

При фиксированном многочлене $P(x)$ оценим меру тех точек x , для которых выбранный многочлен является решением (4). Для этого введем в рассмотрение интервал $\sigma(\alpha)$, содержащий все x , для которых α – ближайший из корней $P(x)$. Пользуясь [3], оценим меру множества $\sigma(\alpha)$:

$$\sigma(\alpha) : \left\{ x \in I : |x - \alpha| < n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|} \right\}.$$

Тогда $|\sigma(\alpha)| < 2 \frac{n|P(x)|}{|P'(x)|} < n^2 2^{n+8} Q^{-n-1}$.

Объединение по всем корням $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ многочлена $P(x)$ дает следующую оценку:

$$\left| \bigcup_{j=1}^n \sigma(\alpha_j) \right| \leq n^3 2^{n+8} Q^{-n-1}.$$

Просуммировав по всем многочленам подмножества $\mathbb{P}_j^{(2)}(Q) = \{P(x) \in \mathbb{P}_j(Q) : |P'(x)| > n^{-1} 2^{-n-7} Q\}$ класса $\mathbb{P}_j(Q, c_2)$, получим, что для нашего случая мера не превосходит

$$n^3 2^{n+8} Q^{-n-1} \cdot 3^{n+1} Q^{n+1} c_3^k |I| = n^3 2^{n+8} 3^{n+1} n^{-3} 2^{-n-10} 3^{-n-1} |I| < \frac{1}{4} |I|,$$

что вместе с оценкой для первого случая дает $\mu B_2 < (b-a)/2$.

Литература

1. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М., 1961.
2. Шмидт В. М. Диофантовы приближения. М., 1983.
3. Берник В. И. // Докл. АН БССР. 1986. Т. 30, № 5. С. 403–405.
4. Beresnevich V. V. // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 90, N 2. P. 97–112.
5. Khintchine A. J. // Math. Ann. 1924. Vol. 92. S. 115–125.

O. S. KUKSO

PROPERTIES OF INTEGER POLYNOMIALS POSSESSING SMALL VALUES ON THE SETS OF POSITIVE MEASURE

Summary

In the article it is shown that the Diophantine approximation of zero by values of integer polynomials with small values of chosen coefficients is possible for the set with the measure less than the half of the given interval.

УДК 511.36

Н. В. ШАМУКОВА

**СВЯЗЬ РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ**

Бобруйский филиал БГЭУ

(Поступила в редакцию 24.09.2008)

Позитивные и негативные стороны резонансных явлений широко описаны и находят свое применение в физических и технических процессах, машинах и механизмах различного назначения.

Резонансные явления возникают в частности тогда, когда в математической модели выражение вида

$$A(\vec{k}, \vec{\omega}) = |k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n| \quad (1)$$

при целом векторе $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ и $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \mathcal{R}^n$ попадает в знаменатель членов функционального ряда, являющегося решением дифференциального, функционального или др. уравнений. Проблема малых знаменателей впервые возникла в 18 веке при исследовании дифференциальных уравнений в задачах небесной механики, описывающих движение планетарных систем в ньютоновских гравитационных полях. Влияние малых знаменателей состоит в том, что в решениях дифференциальных уравнений, представленных рядами Фурье, имеется бесконечно много членов с коэффициентами, знаменатели которых сколь угодно близки к нулю, что обуславливает расходимость этих рядов.

В данной работе будут проанализированы $A(\vec{k}, \vec{\omega})$, когда между координатами вектора $\vec{\omega}$ имеется зависимость, а малость $A(\vec{k}, \vec{\omega})$ выражается через произведение модулей координат вектора \vec{k} .

Пусть $I = [a, b]$ – некоторый интервал, на котором заданы функции

$$f_1(x), \dots, f_n(x) \in C^n(I),$$

у которых вронскиан для производных

$$W_n = \begin{vmatrix} f' & \dots & f'_n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

для почти всех $x \in I$ (в смысле меры Лебега) отличен от нуля. Задача о нахождении меры тех x , для которых неравенство

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &= |a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \dots + a_1 f_1(x) + a_0| < H^{-w} \\ a_j &\in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq n, H = H(F) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j| \end{aligned} \quad (2)$$

выполняется для бесконечного числа векторов $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, имеет давнюю историю. При $f_j = x^j, 1 \leq j \leq n$, и $w > n$ это известная проблема К. Малера [5], решенная В. Г. Спринджуком [7], который для ее решения разработал так называемый метод существенных и несущественных областей. В виде (2) при $w > n$ задача известна как проблема Спринджука и решена при $n = 2$ В. Шмидтом [6], при $n = 3$ – В. И. Берником и В. В. Бересневичем [2], а для произвольного n – Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом [4], которыми был рассмотрен класс невырожденных многообразий. В последние годы разрешимость и неразрешимость неравенства (2) для почти всех x была связана с расходимостью и сходимостью ряда, составленного из значений достаточно общей функции, стоящей в правой части (2), в целых точках [3, 1].

Значительно сложнее оказалась задача, сформулированная при условии, когда правая часть в (2) зависит от произведения коэффициентов. Положим для упрощения изложения $f_1(x) = x$, что не умаляет общности задачи. Введем символ Виноградова \ll . Пусть далее $\Psi(x)$ – монотонно убывающая функция положительного аргумента x такая, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \Psi(m) \log^{n-2} m$ сходится.

Т е о р е м а. Система неравенств

$$\begin{aligned} |F(x)| &< \Psi(P), \quad P = \prod_{i=1}^n a'_i, \quad a'_i = \max\{1, |a_i|\}, \\ |F'(x)| &>> 1 \end{aligned}$$

имеет для почти всех $x \in I$ лишь конечное число решений в векторах \vec{a} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. При переходе от одного этапа доказательства к другому мы будем конкретизировать условие $|F'(x)| >> 1$. Заметим, что при этом условии требования, налагаемые на функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ можно ослаблять. Из теоремы Минковского о линейных формах следует, что в первом неравенстве формулировки теоремы правая часть бесконечно меньше P^{-1} для любого x и поэтому далее считаем

$$\Psi(P) \ll P^{-1}. \quad (3)$$

При фиксированном P каждое целое число a_j может принимать значения $1 \leq a_j \leq P$.

Если $2^t \leq P < 2^{t+1}$, $2^{t_j} \leq a'_j < 2^{t_j+1}$, $1 \leq j \leq n$ для некоторых неотрицательных целых t, t_1, t_2, \dots, t_n ,

$$S_t = \sum_{j=1}^n t_j,$$

то ясно, что

$$\begin{cases} 0 \leq t_j \leq t \\ t - n < S_t < t + 1. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что число решений системы неравенств не превосходит

$$c(n)t^{n-1}$$

и

$$c(n)t^{n-2} \quad (4)$$

при фиксированной одной из координат вектора $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Введем классы функций

$$\begin{aligned} F_n &= F_n(t, t_1, \dots, t_n) = \left\{ F : 2^t \leq P < 2^{t+1}, 2^{t_j} \leq a'_j < 2^{t_j+1}, 1 \leq j \leq n, t - n + 1 \leq S \leq t \right\}, \\ F_{n-1} &= F_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \left\{ F \in F_n : t - n + 1 - t_n \leq S - t_n \leq t - t_n \right\}, \\ F_t &= \left\{ F : 2^t \leq P < 2^{t+1} \right\}. \end{aligned}$$

Зафиксируем вектор $(t, t_1, t_2, \dots, t_n)$. Будем считать, что его координаты упорядочены следующим образом:

$$t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t.$$

Перепишем (2) в виде

$$|F(x)| \ll \Psi(2^t). \quad (5)$$

Обозначим

$$\max_{x \in I} f''(x) = M.$$

Если теперь $t_n > d(n, M)t_{n-1}$, то $|F'(x)| \gg 2^{t_n}$ для всех $x \in I$ и мера $\sigma(F)$ тех x , для которых выполняется (5) при фиксированных a_0, a_1, \dots, a_n , не превосходит

$$|\sigma(F)| < c(n) \frac{\Psi(2^t)}{2^{t_n}}. \quad (6)$$

Просуммируем оценку (6) по всем a_0 . Получим

$$\sum_{a_0} |\sigma(F)| \ll \Psi(2^t).$$

Просуммируем эту оценку по всем a'_1, \dots, a'_{n-1} из класса F_{n-1} , а затем по всем классам (t_1, \dots, t_{n-1}) . Тогда с учетом

$$\# F_{n-1} \leq 2^{t-t_n+n-1} \Psi(2^t)$$

и (4) получим

$$\sum_{F \in F_{n-1}} |\sigma(F)| \ll t^{n-2} 2^{s_1-t_n} \Psi(2^t).$$

Суммирование (6) по $2^{t_n} \leq a'_n < 2^{t_n+1}$ дает

$$\sum_{F \in F_n} |\sigma(F)| \ll t^{n-2} 2^t \Psi(2^t).$$

Поскольку ряд

$$\sum_{t=1}^{\infty} t^{n-2} 2^t \Psi(2^t)$$

сходится, то, используя лемму Бореля–Кантелли, получаем доказательство теоремы в этом случае.

Оставшиеся случаи могут быть рассмотрены с помощью метода существенных и несущественных областей [7].

Литература

1. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A. // Moscow Math. Journal. 2002. Vol. 2. N 2. P. 203–225.
2. Beresnevich V. V., Bernik V. I. // Acta Arithmetica. 1996. Vol. 75. N 3. P. 219–233.
3. Beresnevich V. V. // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 90. N 2. P. 97–112.
4. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. // Ann. Math. 1998. Vol. 148. P. 339–360.
5. Mahler K. // Math. Annalen. 1932. Vol. 106. S. 131–139.
6. Schmidt W. M. // Monatsch. Math. 1964. Vol. 63. S. 154–166.
7. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.

N. V. SHAMUKOVA

RELATIONSHIP OF RESONANCE PHENOMENA AND HYPERBOLIC DIOPHANTINE APPROXIMATIONS

Summary

The article is devoted to the proof of the metric theorem on zero approximations by values of integer linear combinations of non-singular functions provided the convergence of the series that depends on the product of absolute values of these integer numbers.

УДК 511.36

О. В. БАБУЛЬ

**О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
В АЛГОРИТМЕ РЕШЕТА ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 31.08.2008)

Введение и необходимые определения. Пусть дана конечная группа G и два произвольных элемента g, b из G . Задача дискретного логарифмирования заключается в нахождении целого числа x такого, что

$$g^x = b. \quad (1)$$

Особый интерес представляет случай группы обратимых элементов кольца вычетов по модулю простого числа. В этом случае, для заданного простого числа p , уравнение (1) переписывается в виде:

$$g^x \equiv b \pmod{p}. \quad (2)$$

Именно на сложности разрешимости задачи дискретного логарифмирования в $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ основываются схемы цифровой подписи, использованные в стандартах DSS [1], ГОСТ Р 34.10–90, СТБ 1176.2–99 [2]. Более того, можно считать что искомым x действительно существует, так как это является необходимым для функционирования схем цифровой подписи. В дальнейшем под задачей дискретного логарифмирования будем понимать именно этот случай.

На данный момент наиболее быстрым алгоритмом для решения задачи дискретного логарифмирования в $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ в случае простого p произвольного вида и имеющего более 120 десятичных знаков является алгоритм решета числового поля. Алгоритм решета числового поля для дискретного логарифмирования впервые был предложен Гордоном [3] в 1993 г. и впоследствии усовершенствован Широкауэром [4], Жу и Лерсьером [5]. Для оценки времени работы алгоритма удобно использовать следующую функцию:

$$L_p[s, c] := e^{(c+o(1))(\log p)^s (\log \log p)^{1-s}}. \quad (3)$$

Тогда асимптотическая оценка времени работы алгоритма запишется как:

$$L_p[1/3, (64/9)^{1/3}]. \quad (4)$$

На сегодняшний день (август 2008) рекорд в решении задачи дискретного логарифмирования принадлежит немецким ученым, решившим задачу для простого числа, имеющего 160 десятичных знаков. Для простоты изложения можно считать, что основание дискретного логарифма g является образующим элементом $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Для определения неизвестного x достаточно найти вычеты $x \pmod{q}$, где q – степень простого числа, делящая $p-1$, и применить китайскую теорему об остатках. Алгоритм решета числового поля применяется для нахождения $x \pmod{q}$, где q – большой простой делитель $p-1$, для нахождения остатков числа x по модулю малых простых и их степеней применяются другие алгоритмы, например, алгоритмы Полларда или

Шенкса. Основными и наиболее трудоемкими стадиями алгоритма решета числового поля являются стадия просеивания и стадия решения большой системы линейных уравнений по модулю q . Первоначальный способ построения системы линейных уравнений предполагал, что для решения задачи для различных правых частей b необходимо повторно решать систему. В 1999 г. Жу и Лерсьер в статье [5] предложили альтернативный способ построения системы (без четкого теоретического обоснования), который позволяет находить решения задачи для различных b после решения одной большой системы линейных уравнений. В данной статье приведено теоретическое обоснование метода построения системы, предложенного в статье [5].

Построение системы линейных уравнений. Результатом стадии просеивания является множество S пар взаимно простых целых чисел, обладающее следующими свойствами.

- Пусть $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\beta)$ – алгебраические расширения, использовавшиеся на стадии просеивания (для простоты изложения будем считать, что α и β – целые алгебраические числа степени, большей двух) и (r_α, s_α) , (r_β, s_β) – сигнатуры многочленов, задающих эти поля. Для каждой пары $(a, b) \in S$ выполняется:

$$\begin{aligned}(a - b\alpha) &= \prod_{\mathfrak{p} \in F_\alpha} \mathfrak{p}^{e_{a,b,\mathfrak{p}}}, \\(a - b\beta) &= \prod_{\mathfrak{q} \in F_\beta} \mathfrak{q}^{l_{a,b,\mathfrak{q}}}, \\N_{\mathbb{Q}(\alpha)}(a - b\alpha) &\not\equiv 0 \pmod{q}, \\N_{\mathbb{Q}(\beta)}(a - b\beta) &\not\equiv 0 \pmod{q},\end{aligned}$$

где F_α и F_β – множества взаимно простых идеалов алгебраических расширений $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\beta)$ соответственно.

- $|F_\alpha| + |F_\beta| + r_\alpha + s_\alpha + r_\beta + s_\beta - 2 = |S| + 1$.

Пусть $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, \mathcal{O}_K – множество целых алгебраических чисел K и $r = r_\alpha + s_\alpha - 1$. Для каждой пары из S будем строить линейное уравнение, для этого рассмотрим равенство

$$(a - b\alpha) = \prod_{\mathfrak{p} \in F_\alpha} \mathfrak{p}^{e_{a,b,\mathfrak{p}}}. \quad (5)$$

Пусть $h(K)$ – число классов идеалов \mathcal{O}_K . Так как классы идеалов алгебраического расширения образуют конечную группу порядка $h(K)$, то для произвольного $\mathfrak{p} \in F_\alpha$ существует целое алгебраическое число $\delta_\mathfrak{p}$ такое, что $\mathfrak{p}^{h(K)} = (\delta_\mathfrak{p})$. Таким образом, из равенства (5) следует равенство для алгебраических чисел:

$$(a - b\alpha)^{h(K)} = u \prod_{\mathfrak{p} \in F_\alpha} \delta_\mathfrak{p}^{e_{a,b,\mathfrak{p}}} \quad (6)$$

где u – единица поля K . Для выяснения структуры единиц u воспользуемся отображением Широкауэра. Рассмотрим множество целых алгебраических чисел, норма которых не делится на q :

$$\Gamma_q = \{\gamma \in \mathcal{O}_K \mid N_K(\gamma) \not\equiv 0 \pmod{q}\}.$$

Пусть главный идеал (q) не является ветвящимся в \mathcal{O}_K , т. е. разложение (q) на простые идеалы имеет вид:

$$(q) = \prod_i \mathfrak{p}_i.$$

Пусть $\varepsilon = \text{НОК}(\mathcal{O}_K^* / \mathfrak{p}_i)$, тогда отображение Широкауэра имеет вид:

$$\begin{aligned}\lambda : \Gamma_q &\rightarrow q\mathcal{O}_K^* / q^2\mathcal{O}_K^* \\ \lambda(\gamma) &= \gamma^\varepsilon - 1 \pmod{q^2}\end{aligned}$$

В дальнейших рассуждениях будет использоваться следующая теорема [4].

Т е о р е м а. Пусть K – алгебраическое расширение и q – простое число, главный идеал которого не является ветвящимся в K , положим $U_e^K = \{u \in \mathcal{O}_K^* \mid u \equiv 1 \pmod{q^e}\}$, тогда, если для произвольного числа γ из \mathcal{O}_K выполняются:

$$\begin{aligned} N_K(\gamma) &\not\equiv 0 \pmod{q} \\ (\gamma) &= \prod_{\mathfrak{p}-\text{простой идеал } K} \mathfrak{p}^{q^e \gamma, \mathfrak{p}} \\ \lambda(\gamma) &= 0 \\ U_2^K &\subseteq (\mathcal{O}_K^*)^q, \end{aligned}$$

то существует число $\delta \in \mathcal{O}_K$ такое, что $\gamma = \delta^q$.

Пусть ζ, u_1, \dots, u_r – главные единицы K , тогда произвольную единицу можно единственным образом записать в виде:

$$u = \zeta^{r_0} \prod_{i=1}^r u_i^{r_i}, \quad (7)$$

где r_i – произвольные целые, а $0 \leq r_0 < m$, m – порядок ζ . Предположим, что $(m, q) = 1$ и возведем обе части равенства (7) в степень m :

$$u^m = \prod_{i=1}^r (u_i^m)^{r_i}. \quad (8)$$

Для произвольного числа $\gamma \in \mathcal{O}_K$ запишем:

$$\lambda(\gamma) = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i(\gamma) \cdot q \cdot \alpha^i + q^2 \mathcal{O}_K, \quad (9)$$

где $0 \leq \lambda_i(\gamma) < q$. Обозначим $\bar{\lambda}(\gamma) = (\lambda_0(\gamma), \dots, \lambda_{d-1}(\gamma))$. Построим единицы e_0, e_1, \dots, e_{r-1} такие, что $\bar{\lambda}(e_i)$ имеет нули в первых r координатах за исключением i -й координаты, в которой стоит 1. Для этого необходимо решить следующую систему линейных уравнений над $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$:

$$X_r \cdot \Lambda_r = E_{r,r}, \quad (10)$$

где

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}(u_1^m) \\ \bar{\lambda}(u_2^m) \\ \vdots \\ \bar{\lambda}(u_r^m) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_r = \begin{pmatrix} x_{00} & \dots & x_{0r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{r-11} & \dots & x_{r-1r-1} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что для поля K выполняется $U_2^K \subseteq (\mathcal{O}_K^*)^q$ и покажем, что $\det \Lambda_r \not\equiv 0 \pmod{q}$. Предположим, что существуют $a_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i \cdot \bar{\lambda}_i(u_i^m) \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow \lambda \left(\prod_{i=0}^{r-1} u_i^{m a_i} \right) = 0.$$

Так как $(m, q) = 1$, то по теореме 1 получим: $a_i \equiv 0 \pmod{q}$ для $i = 0 \dots r-1$. Покажем, что при сделанных предположениях любую единицу u можно представить в виде:

$$u^m = \hat{u}^q \prod_{i=1}^r e_i^{m l_i}, \quad (11)$$

где \hat{u} – некоторая единица. Из (8) и (10) следует:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(u^m) &= (r_1 \ \dots \ r_r) \cdot \Lambda = (r_1 \ \dots \ r_r) \cdot X_r^{-1} \cdot E_r = \\ &= (r_1 \ \dots \ r_r) \cdot X_r^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}(e_1^m) \\ \bar{\lambda}(e_2^m) \\ \vdots \\ \bar{\lambda}(e_r^m) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{r-1} l_i \cdot \bar{\lambda}_i(e_i^m). \end{aligned}$$

По теореме получаем равенство (11). Вернемся к равенству (6) и пусть $q \mid h(K)$. Возведем обе части равенства в степень m :

$$(a - b\alpha)^{m \cdot h(K)} = u^m \prod_{p \in F_\alpha} \delta_p^{m \cdot e_{a,b,p}}. \quad (12)$$

Для каждого p положим $\bar{\delta}_p^m = \delta_p^m \prod_{i=0}^{r-1} e_i^{-m \cdot \bar{\lambda}_i} (\delta_p^m)$, тогда $\bar{\lambda}(\bar{\delta}_p^m)$ имеет нули в первых r координатах. Тогда (12) переписется в виде:

$$(a - b\alpha)^{m \cdot h(K)} = \hat{u}^q \prod_{i=1}^r e_i^{m \cdot l_i} \prod_{p \in F_\alpha} \bar{\delta}_p^{m \cdot e_{a,b,p}}. \quad (13)$$

Применив отображения Широкауэра к обеим частям равенства (13), получим $\bar{\lambda}_i((a - b\alpha)^{h(K)}) = l_i$ для $i = 0 \dots r-1$, тогда

$$(a - b\alpha)^{m \cdot h(K)} = \hat{u}^q \prod_{i=1}^r e_i^{m \cdot \bar{\lambda}_i((a - b\alpha)^{h(K)})} \prod_{p \in F_\alpha} \bar{\delta}_p^{m \cdot e_{a,b,p}}. \quad (14)$$

Применяя гомоморфизм из K в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, переводящий α в n , где n – корень минимального многочлена α по модулю p и логарифмируя полученное равенство по основанию g , получим:

$$\log_g(a - b \cdot n) \equiv \sum_{i=0}^{r-1} \bar{\lambda}_i((a - b\alpha)) \log_g(e_i) + \sum_{p \in F_\alpha} e_{a,b,p} \cdot h(K)^{-1} \log_g \bar{\delta}_p \pmod{q}.$$

Проведя аналогичные рассуждения для $\mathbb{Q}(\beta)$, получим уравнение системы:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r_\alpha + s_\alpha - 2} \bar{\lambda}_i((a - b\alpha)) \log_g(e_i) + \sum_{p \in F_\alpha} e_{a,b,p} \cdot h(\mathbb{Q}(\alpha))^{-1} \log_g \bar{\delta}_p &\equiv \\ \sum_{i=0}^{r_\beta + s_\beta - 2} \bar{\lambda}_i((a - b\beta)) \log_g(\bar{e}_i) + \sum_{q \in F_\beta} l_{a,b,q} \cdot h(\mathbb{Q}(\beta))^{-1} \log_g \bar{\delta}_q \pmod{q}. \end{aligned} \quad (15)$$

Построив для каждой пары из S уравнения вида (15), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $\log_g(e_i)$, $\log_g(\bar{e}_i)$, $h(\mathbb{Q}(\beta))^{-1} \log_g \bar{\delta}_q$, $h(\mathbb{Q}(\alpha))^{-1} \log_g \bar{\delta}_p$. После решения полученной системы для логарифма произвольного числа, допускающего представление вида

$$(l) = \frac{\prod_{p \in F_\alpha} p^{e_{l,p}}}{\prod_{q \in F_\beta} q^{l_{l,q}}}, \quad (16)$$

норма которого не делится на q , получим равенство:

$$\log_g(l) = \sum_{i=0}^{r_\alpha + s_\alpha - 2} \bar{\lambda}_i(l) \log_g(e_i) + \sum_{p \in F_\alpha} e_{l,p} \cdot h(\mathbb{Q}(\alpha))^{-1} \log_g \bar{\delta}_p -$$

$$\sum_{i=0}^{r_\beta + s_\beta - 2} \bar{\lambda}_i(l) \log_g(\bar{e}_i) - \sum_{q \in F_\beta} l_{l,q} \cdot h(\mathbb{Q}(\beta))^{-1} \log_g \bar{\delta}_q \pmod{q}.$$

Следует подчеркнуть, что для построения системы необходимо выполнение следующих условий:

- главный идеал (q) не является ветвящимся в $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta)}$;
- порядки конечных подгрупп групп единиц $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta)}$ не делятся на q ;
- $q \nmid h(\mathbb{Q}(\alpha))$ и $q \nmid h(\mathbb{Q}(\beta))$;
- $U_2^{\mathbb{Q}(\alpha)} \subseteq (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\alpha)}^*)^q$ и $U_2^{\mathbb{Q}(\beta)} \subseteq (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\beta)}^*)^q$.

Литература

1. Menezes A., Oorschot P. van, Vanstone S. Handbook of Applied Cryptography. London, CRC Press, 1996.
2. Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В. Математические и компьютерные основы криптологии. Минск, 2003.
3. Gordon D. // J. Discrete Math. 1993. Vol. 6. P. 124–138.
4. Schirokauer O. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1993. Vol. 345, N 1676. P. 409–423.
5. Joux A., Lercier R. // Math. Comp. 2003. Vol. 72, iss. 242. P. 953–967.

O. V. BABUL

CONSTRUCTION OF THE SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS IN THE NUMBER FIELD SIEVE ALGORITHM FOR SOLUTION OF THE DISCRETE LOGARITHM PROBLEM

Summary

Theoretical justification for construction of the system of linear equations in the number field sieve algorithm for solution of the discrete logarithm problem is presented.

УДК 512.548

А. М. ГАЛЬМАК

ЛЕММА ФРАТТИНИ ДЛЯ n -АРНЫХ ГРУПП

Могилевский государственный университет продовольствия

(Поступила в редакцию 12.09.2008)

Введение. Цель данной работы – получение n -арных аналогов леммы Фраттини [1, Satz 7.8], утверждающей, что если C – нормальная подгруппа конечной группы A , P – силовская подгруппа из C , то $A = CN_A(P)$. Так как при переходе от групп к n -арным группам ($n > 2$) бинарные понятия могут иметь несколько n -арных аналогов, то прежде чем формулировать n -арные аналоги леммы Фраттини, необходимо ответить на следующие вопросы:

- 1) какой из многочисленных n -арных аналогов нормальных подгрупп выбрать в качестве основного;
- 2) что считать n -арным аналогом нормализатора подгруппы в группе;
- 3) как должно выглядеть в n -арном случае произведение $CN_A(P)$?

В качестве n -арного аналога нормальных подгрупп можно выбрать либо инвариантные, либо полуинвариантные n -арные подгруппы, которые определяются следующим образом: n -арная подгруппа $\langle B, [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [2, 3] инвариантной в ней, если

$$[\underbrace{x B \dots B}_{n-1}] = [B x \underbrace{B \dots B}_{n-2}] = \dots = [B \dots \underbrace{B x}_{n-1}]$$

для любого $x \in A$; полуинвариантной в ней, если

$$[\underbrace{x B \dots B}_{n-1}] = [B \dots \underbrace{B x}_{n-1}]$$

для любого $x \in A$.

Ясно, что понятие полуинвариантности шире понятия инвариантности.

Еще одним n -арным аналогом нормальных подгрупп являются конгруэнции n -арной группы. Аналогично бинарному случаю, всякая полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы определяет конгруэнцию этой n -арной группы, классы которой совпадают со смежными классами n -арной группы по рассматриваемой полуинвариантной n -арной подгруппе.

Отличие n -арного случая ($n > 2$) от бинарного состоит в том, что различным полуинвариантным n -арным подгруппам одной и той же n -арной группы может отвечать одна и та же конгруэнция. Более того, существуют n -арные группы, в которых некоторой конгруэнции не отвечает ни одна полуинвариантная n -арная подгруппа. Таковыми будут, например, найденные Постом [4] циклические n -арные группы, в которых нет собственных n -арных подгрупп, но в которых, как установлено в [5], для любого делителя их порядка существует единственная конгруэнция, порядок которой равен этому делителю. Порядок конгруэнции в n -арной группе определяется как мощность классов этой конгруэнции [6]. Такое определение корректно, так как все классы конгруэнции n -арной группы имеют одну и ту же мощность [7].

Таким образом, в n -арных группах при $n > 2$ конгруэнции являются более широким n -арным аналогом нормальных подгрупп, чем полуинвариантные n -арные подгруппы. По этой причине при выборе n -арного аналога нормальных подгрупп предпочтение следует отдать конгруэнциям n -арной группы.

n -Арными аналогами нормализатора подгруппы в группе являются [3] нормализатор

$$N_A(B) = \{x \in A \mid \underbrace{[xB \dots B]}_{n-1} = \underbrace{[BxB \dots B]}_{n-2} = \dots = \underbrace{[B \dots Bx]}_{n-1}\} = \{x \in A \mid [xB\bar{x} \underbrace{x \dots x}_{n-3}] = B\}$$

и полунормализатор

$$HN_A(B) = \{x \in A \mid \underbrace{[xB \dots B]}_{n-1} = \underbrace{[B \dots Bx]}_{n-1}\}$$

n -арной подгруппы $\langle B, [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, которые при $n = 2$ совпадают с нормализатором подгруппы в группе.

Символ \bar{a} используется для обозначения косога элемента для элемента $a \in A$, т. е. для обозначения решения уравнения $\underbrace{[xa \dots a]}_{n-1} = a$.

Нормализатор $N_A(B)$ и полунормализатор $HN_A(B)$ являются n -арными подгруппами в $\langle A, [] \rangle$, причем $B \subseteq N_A(B) \subseteq HN_A(B)$.

Для всякой n -арной подгруппы $\langle B, [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и любой конгруэнции σ на $\langle A, [] \rangle$ полагают (см., например, [8, с. 65])

$$\sigma B = \{x \in A \mid b \in B, (x, b) \in \sigma\}.$$

Легко проверяется, что $\langle \sigma B, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, [] \rangle$. Эта n -арная подгруппа может рассматриваться как n -арный аналог произведения нормальной подгруппы на подгруппу.

Вспомогательные утверждения. Для всякого элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ определим на A бинарную операцию $x \textcircled{a} y = [x\alpha y]$, где α – обратная последовательность для элемента a [7, 9]. Легко проверяется, что $\langle A, \textcircled{a} \rangle$ – группа с единицей a . Нормализатор подгруппы $\langle B, \textcircled{a} \rangle$ группы $\langle A, \textcircled{a} \rangle$ обозначим через $N_A(B, \textcircled{a})$.

Определение обратной последовательности, как и других используемых в работе понятий теории n -арных групп, можно найти в [9, 10].

Л е м м а 1 [7, следствие 6.16]. Полунормализатор n -арной подгруппы $\langle B, [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ совпадает с нормализатором подгруппы $\langle B, \textcircled{a} \rangle$ группы $\langle A, \textcircled{a} \rangle$ для любого $a \in B$: $HN_A(B) = N_A(B, \textcircled{a})$.

Л е м м а 2 [11, следствие 1]. Если σ – конгруэнция n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, то $\langle \sigma(a), \textcircled{a} \rangle$ – инвариантная подгруппа группы $\langle A, \textcircled{a} \rangle$ для любого $a \in A$.

Л е м м а 3 [12, теорема 3]. Пусть $\langle B, [] \rangle$ – n -арная подгруппа, σ – конгруэнция n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Тогда

$$\sigma B = [\sigma(a) \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-3} B] = [B \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \sigma(a)], \sigma B = \sigma(a) \textcircled{a} B = B \textcircled{a} \sigma(a)$$

для любого $a \in A$.

Л е м м а 4 [12, следствие 8]. Пусть $\langle B, [] \rangle$ – n -арная подгруппа, σ – конгруэнция n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Тогда

$$\sigma B = [\sigma(a) \underbrace{B \dots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \dots B}_{n-1} \sigma(a)].$$

для любого $a \in B$.

Л е м м а 5 [7, предложение 7.4]. Если $\langle C, [] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, то определенное на A отношение

$$\rho_C = \{(x, y) \mid [x \underbrace{C \dots C}_{n-1}] = [y \underbrace{C \dots C}_{n-1}]\}$$

является конгруэнцией n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, классы которой совпадают со смежными классами $\langle A, [] \rangle$ по $\langle B, [] \rangle$: $\rho_C(a) = [a \underbrace{C \dots C}_{n-1}]$, $a \in A$.

Л е м м а 6 [7, теорема 10.8]. Пусть $\langle B, [\] \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, σ – конгруэнция на $\langle A, [\] \rangle$, некоторый класс C которой включает B . Тогда $\langle C, [\] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа в $\langle A, [\] \rangle$, а конгруэнция σ совпадает с конгруэнцией ρ_C из леммы 5: $\sigma = \rho_C$.

Л е м м а 7 [7, лемма 5.22]. Если $\langle B, [\] \rangle$ и $\langle C, [\] \rangle$ – n -арные подгруппы n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $B \cap C \neq \emptyset$, то $[\underbrace{B \dots B}_{n-1} C] = [B \underbrace{C \dots C}_{n-1}]$.

Л е м м а 8 [9, теорема 2.3.9]. n -Арная подгруппа $\langle B, [\] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ инвариантна в ней тогда и только тогда, когда $[x \underbrace{B x \dots x}_{n-3} \bar{x}] = B$ для любого $x \in A$.

Следующая лемма является следствием определения полуинвариантной n -арной подгруппы.

Л е м м а 9. Если $\langle B, [\] \rangle$ и $\langle C, [\] \rangle$ – n -арные подгруппы n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, причем $\langle C, [\] \rangle$ – полуинвариантна в $\langle A, [\] \rangle$, то $[\underbrace{C \dots C}_{n-1} B] = [B \underbrace{C \dots C}_{n-1}]$.

Л е м м а 10 [3, 4, теорема Силова для n -арных групп]. Если $\langle A, [\] \rangle$ – конечная n -арная группа, $|A| = rp^a$, $(r, p) = 1$, $(r, n-1) = 1$, то в $\langle A, [\] \rangle$ существует по крайней мере одна p -силовская n -арная подгруппа и любые две p -силовские n -арные подгруппы сопряжены в $\langle A, [\] \rangle$.

Л е м м а 11 [3, следствие 3.12п]. Пусть $\langle B, [\] \rangle$ и $\langle C, [\] \rangle$ – конечные n -арные подгруппы n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $B \cap C \neq \emptyset$. Тогда

$$|[\underbrace{B \dots B}_{n-1} C]| = \frac{|B||C|}{|B \cap C|}.$$

Основные результаты. Следующая теорема является n -арным аналогом леммы Фраттини.

Т е о р е м а 1. Пусть $\langle P, [\] \rangle$ – n -арная подгруппа, σ – конгруэнция конечной n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $P \subseteq C$ для некоторого класса C конгруэнции σ , при этом порядок $\langle P, [\] \rangle$ является наибольшим p -делителем порядка конгруэнции σ для некоторого простого p . Тогда:

$$1) A = \sigma HN_A(P) = [\underbrace{C HN_A(P) \dots HN_A(P)}_{n-1}] = [\underbrace{HN_A(P) \dots HN_A(P)}_{n-1} C];$$

2) $\langle C, [\] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа в $\langle A, [\] \rangle$ и $\sigma = \rho_C$;

3) $A = \rho_C HN_A(P)$.

Доказательство. Зафиксируем $a \in P$. Тогда $\langle P, \textcircled{a} \rangle$ – подгруппа в $\langle A, \textcircled{a} \rangle$, $C = \sigma(a)$. А так как $a \in P \subseteq HN_A(P)$, то $\langle HN_A(P), \textcircled{a} \rangle$ также является подгруппой в $\langle A, \textcircled{a} \rangle$. По лемме 1

$$HN_A(P) = N_A(P, \textcircled{a}), \quad (1)$$

а по лемме 3

$$\sigma HN_A(P) = \sigma(a) \textcircled{a} HN_A(P), \quad (2)$$

причем, ввиду леммы 2, $\langle C = \sigma(a), \textcircled{a} \rangle$ – инвариантная подгруппа группы $\langle A, \textcircled{a} \rangle$. Ясно, что $\langle P, \textcircled{a} \rangle$ – p -силовская подгруппа в $\langle C, \textcircled{a} \rangle$. Поэтому по лемме Фраттини для конечных групп

$$A = \sigma(a) \textcircled{a} N_A(P, \textcircled{a}). \quad (3)$$

Из (3), применяя (1), получим $A = \sigma(a) \textcircled{a} HN_A(P)$, откуда и из (2), следует $A = \sigma HN_A(P)$.

Так как $C = \sigma(a)$, $a \in HN_A(P)$, то по лемме 4

$$\sigma HN_A(P) = [\underbrace{C HN_A(P) \dots HN_A(P)}_{n-1}] = [\underbrace{HN_A(P) \dots HN_A(P)}_{n-1} C].$$

2) Следует из леммы 6.

3) Следует из 1) и 2). Теорема доказана.

Если в теореме 1 положить $\sigma = \rho_C$, где $\langle C[\] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, то получим следующий n -арный аналог леммы Фраттини.

Т е о р е м а 2. Если $\langle C, [\] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа конечной n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $\langle P, [\] \rangle$ – силовская n -арная подгруппа в $\langle C, [\] \rangle$, то

$$A = \rho_C H N_A(P) = [\underbrace{C H N_A(P) \dots H N_A(P)}_{n-1}] = [\underbrace{H N_A(P) \dots H N_A(P)}_{n-1} C].$$

Из $P \subseteq H N_A(P)$, $P \subseteq C$ следует $H N_A(P) \cap C \neq \emptyset$. Поэтому ввиду леммы 7, теорема 2 позволяет сформулировать еще один n -арный аналог леммы Фраттини.

Т е о р е м а 3. Если $\langle C, [\] \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа конечной n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $\langle P, [\] \rangle$ – силовская n -арная подгруппа в $\langle C, [\] \rangle$, то

$$A = \rho_C H N_A(P) = [\underbrace{C \dots C H N_A(P)}_{n-1}] = [H N_A(P) \underbrace{C \dots C}_{n-1}].$$

Если вместо полуинвариантных n -арных подгрупп рассматривать инвариантные n -арные подгруппы, а полуномализатор заменить нормализатором, то получим n -арный аналог леммы Фраттини, отличный от предыдущих.

Т е о р е м а 4. Если $\langle C, [\] \rangle$ – инвариантная n -арная подгруппа конечной n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, $\langle P, [\] \rangle$ – p -силовская n -арная подгруппа из $\langle C, [\] \rangle$, $|C| = r p^\alpha$, $(r, p) = 1$, $(r, n - 1) = 1$, то

$$A = [\underbrace{C \dots C N_A(P)}_{n-1}] = [N_A(P) \underbrace{C \dots C}_{n-1}],$$

$$A = [\underbrace{C N_A(P) \dots N_A(P)}_{n-1}] = [\underbrace{N_A(P) \dots N_A(P)}_{n-1} C].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $P \subseteq C$, то для любого $a \in A$ верно включение

$$[\underbrace{a P a \dots a \bar{a}}_{n-3}] \subseteq [\underbrace{a C a \dots a \bar{a}}_{n-3}],$$

а так как $\langle C, [\] \rangle$ инвариантна в $\langle A, [\] \rangle$, то по лемме 8 $[\underbrace{a C a \dots a \bar{a}}_{n-3}] = C$, откуда и из преды-

дущего включения следует $[\underbrace{a P a \dots a \bar{a}}_{n-3}] \subseteq C$. Это означает, что n -арная подгруппа

$\langle D = [\underbrace{a P a \dots a \bar{a}}_{n-3}], [\] \rangle$ является p -силовской в $\langle C, [\] \rangle$. Тогда по лемме 10 n -арные под-

группы $\langle D, [\] \rangle$ и $\langle P, [\] \rangle$ сопряжены в $\langle C, [\] \rangle$, то есть существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in C$ такие, что $D = [\alpha_1 \dots \alpha_i P \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1}]$, где $\beta = \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1}$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_i$, причем $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1} \in C$. Далее

$$[\beta D \alpha] = [\beta [\alpha P \beta] \alpha], [\alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1} [\underbrace{a P a \dots a \bar{a}}_{n-3}] \alpha_1 \dots \alpha_i] = P.$$

Если зафиксировать $u_1, \dots, u_i \in P$ и выбрать $u_{i+1}, \dots, u_{n-1} \in P$ так, что $\delta = u_{i+1} \dots u_{n-1}$ – обратная последовательность для последовательности $\gamma = u_1 \dots u_i$, то из записанного выше равенства получаем

$$[u_1 \dots u_i [\alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1} \underbrace{a P a \dots a \bar{a}}_{n-3} \alpha_1 \dots \alpha_i] u_{i+1} \dots u_{n-1}] = [u_1 \dots u_i P u_{i+1} \dots u_{n-1}],$$

$$[[u_1 \dots u_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1} a] \underbrace{P a \dots a}_{n-3} [\bar{a} \alpha_1 \dots \alpha_i u_{i+1} \dots u_{n-1}]] = P.$$

Так как последовательность $\underbrace{a \dots a}_{n-3} [\bar{a} \alpha_1 \dots \alpha_i u_{i+1} \dots u_{n-1}]$ является обратной для элемента $v = [u_1 \dots u_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{n-1} a]$, то последнее равенство можно переписать в следующем виде $[v \underbrace{P v \dots v}_{n-3} \bar{v}] = P$. Это означает, что $v \in N_A(P)$, то есть $[\gamma \beta a] \in N_A(P)$, откуда

$$[\alpha \delta [\gamma \beta a]] \in [\alpha \delta N_A(P)], a \in [\alpha \delta N_A(P)], a \in [\alpha_1 \dots \alpha_i u_{i+1} \dots u_{n-1} N_A(P)].$$

Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in C$, $u_{i+1}, \dots, u_{n-1} \in P \subseteq C$, то $[\alpha \delta N_A(P)] \subseteq [\underbrace{C \dots C}_{n-1} N_A(P)]$. Следовательно, $a \in [\underbrace{C \dots C}_{n-1} N_A(P)]$. Так как элемент a выбран в A произвольно, то доказано включение $A \subseteq [\underbrace{C \dots C}_{n-1} N_A(P)]$, а значит и равенство $A = [\underbrace{C \dots C}_{n-1} N_A(P)]$. Применяя лемму 9, получаем равенство $A = [N_A(P) \underbrace{C \dots C}_{n-1}]$. Так как $P \subseteq N_A(P)$, $P \subseteq C$, то $N_A(P) \cap C \neq \emptyset$. Поэтому из последних двух равенств, ввиду леммы 7, получаем

$$A = [\underbrace{C N_A(P) \dots N_A(P)}_{n-1}] = [\underbrace{N_A(P) \dots N_A(P)}_{n-1} C].$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $\langle D_6, [] \rangle$ – тернарная группа, производная от диэдральной группы $D_6 = C_6 \cup B_6$, где $C_6 = \{e, c, \dots, c^5\}$ и $B_6 = \{b, bc, \dots, bc^5\}$ – соответственно циклическая группа поворотов и множество отражений правильного шестиугольника. Легко проверяется [13], что $\langle B_6, [] \rangle$ – инвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $\langle D_6, [] \rangle$, и в $\langle B_6, [] \rangle$ имеется 2-силовская тернарная подгруппа $\langle P, [] \rangle$, где $P = \{b, bc^3\}$. Так как $|B_6| = 6 = 3 \cdot 2$, $(3, 2) = 1$, $(3, n-1) = 1$, где $n = 2$, то выполняются все условия теоремы 4, согласно которой

$$D_6 = [B_6 B_6 N_{D_6}(P)] = [N_{D_6}(P) B_6 B_6] = [B_6 N_{D_6}(P) N_{D_6}(P)] = [N_{D_6}(P) N_{D_6}(P) B_6].$$

Убедимся в справедливости этих равенств, не используя теорему 4.

Так как $\bar{e} = e$, $\bar{c} = c^5$, $\bar{c^2} = c^4$, $\bar{c^3} = c^3$, $\bar{c^4} = c^2$, $\bar{c^5} = c$, то

$$\begin{aligned} [ePe] &= P, [cP\bar{c}] = \{bc, bc^4\}, [c^2 P \bar{c^2}] = \{bc^2, bc^5\}, \\ [c^3 P \bar{c^3}] &= P, [c^4 P \bar{c^4}] = \{bc, bc^4\}, [c^5 P \bar{c^5}] = \{bc^2, bc^5\}. \end{aligned}$$

Кроме того, так как $\bar{x} = x$ для любого $x \in B_6$, то

$$\begin{aligned} [bP\bar{b}] &= P, [bcP\bar{bc}] = \{bc^2, bc^5\}, [bc^2 P \bar{bc^2}] = \{bc, bc^4\}, \\ [bc^3 P \bar{bc^3}] &= P, [bc^4 P \bar{bc^4}] = \{bc^2, bc^5\}, [bc^5 P \bar{bc^5}] = \{bc, bc^4\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $N_{D_6}(P) = \{e, c^3, bc, bc^3\}$, $B_6 \cap N_{D_6}(P) = \{bc, bc^3\}$. Тогда по лемме 11

$$|[B_6 B_6 N_{D_6}(P)]| = \frac{|B_6| \cdot |N_{D_6}(P)|}{|B_6 \cap N_{D_6}(P)|} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 = |D_6|.$$

Это означает, что $D_6 = [B_6 B_6 N_{D_6}(P)]$. Остальные равенства являются следствиями этого равенства.

Теоремы 1 – 3 были анонсированы в [14].

Литература

1. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin; Heidelberg; New York, 1967.
2. Dörnte W. // Math. Z. 1928. Bd. 29. S. 1–19.
3. Русаков С. А. Алгебраические n -арные системы. Минск, 1992.
4. Post. E. L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N 2. P. 208–350.
5. Гальмак А. М. // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. № 6. С. 93–100.
6. Гальмак А. М. // Вестник МГУ им. А. А. Кулешова. 2001. № 2–3. С. 117–123.
7. Гальмак А. М. Конгруэнции n -арных групп. Минск, 1999.
8. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970.
9. Гальмак А. М. n -Арные группы. Ч. 1. Гомель, 2003.
10. Гальмак А. М. n -Арные группы. Ч. 2. Минск, 2007.
11. Гальмак А. М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. № 1. С. 26–31.
12. Гальмак А. М. // Веснік ВДУ ім. П. М. Машэрава. 2002. № 2(24). С. 114–118.
13. Гальмак А. М., Воробьев Г. Н. Тернарные группы отражений. Минск, 1998.
14. Гальмак А. М. // Тез. докл. Междунар. алгебраической конф. Москва, 2008. М., 2008. С. 65–67.

A. M. GALMAK

FRATTINI'S LEMMA FOR n -ARY GROUPS

Summary

The n -ary analogies of Frattini's Lemma are proved.

517.956.6

В. И. КОРЗЮК^{1,2}, О. А. КОНОПЕЛЬКО²

**ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ
 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

¹Институт математики НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 23.05.2008)

В статье рассматриваются граничные задачи в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка, оператор главной части которого представляет собой композицию волнового оператора и эллиптического оператора типа Лапласа. Задачи для уравнений составного типа представляют интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения для многих приложений и исследуются многими математиками, начиная с Адамара [1, 2] и до настоящего времени [3–8]. В данной статье доказывается однозначная разрешимость упомянутых выше задач. При доказательстве используется метод работ [9–13] с привлечением операторов осреднения с переменным шагом [14, 15]. В [16] можно найти доказательство существования и единственности сильного решения граничной задачи в цилиндрической области для этого уравнения при других граничных условиях.

1. Постановка задач. Для функции u независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$ $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^{n+1} рассматривается линейное дифференциальное уравнение составного типа четвертого порядка

$$\mathcal{L}u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - a^2 b^2 \Delta^2 u + A^{(2)}u = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где a и b – некоторые постоянные, удовлетворяющие соотношению $a^2 > b^2$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа относительно независимых переменных $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_n)$, $A^{(2)} = \sum_{|\alpha| \leq 2} a^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^\alpha$,

$\mathbf{D}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_0^{\alpha_0} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, α_i , $i = 0, \dots, n$, – целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_n$.

Уравнение (1) задается в цилиндрической области $Q = (0, T) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Граница ∂Q области Q состоит из нижнего основания $\Omega^{(0)} = \{\mathbf{x} \in \partial Q \mid x_0 = 0\}$, верхнего основания $\Omega^{(T)} = \{\mathbf{x} \in \partial Q \mid x_0 = T\}$ и боковой поверхности $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \partial Q \mid 0 < x_0 < T\}$.

Обозначим через $C^l(\bar{Q})$ множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка l в замыкании \bar{Q} области Q , где l – целое неотрицательное число. В уравнении (1) $a^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ – заданные функции и $a^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{Q})$.

К уравнению (1) присоединяются следующие граничные условия:

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \Big|_{\Omega^{(0)}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \Big|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{\Omega^{(T)}} = 0 \quad (3)$$

и

$$u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n)$ – единичный вектор внешней относительно области Q нормали к гиперповерхности Γ .

Вместо условий (4) на боковой поверхности Γ можно задать условия

$$u|_{\Gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}^2} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (5)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{v}^3} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

В задачах (1)–(4), (1)–(3), (5) и (1)–(3), (6) можно поменять местами условия, которые задаются на $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(T)}$, а также задать неоднородные граничные условия, но они сводятся к однородным путем продолжения в область Q функциями из подходящих пространств их правых частей и замены искомой функции [17].

2. Определение обобщенного решения. Рассмотрим сначала задачу (1)–(4) и определим для нее функциональные пространства, в которых будет введено обобщенное решение. Обобщенное решение определяется через равенство соответствующих функционалов. Для этого наряду с задачей (1)–(4) будем рассматривать и сопряженную по отношению к ней задачу, т. е. уравнение

$$\mathcal{L}'v \equiv \frac{\partial^4 v}{\partial x_0^4} + (b^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \Delta v - a^2 b^2 \Delta^2 v + A^{(2)'} v = g(\mathbf{x}) \quad (7)$$

и граничные условия

$$v|_{\Omega^{(0)}} = 0, \quad (8)$$

$$v|_{\Omega^{(T)}} = \frac{\partial v}{\partial x_0} \Big|_{\Omega^{(T)}} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} \Big|_{\Omega^{(T)}} = 0, \quad (9)$$

$$v|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (10)$$

где $A^{(2)'} v = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} \mathbf{D}^\alpha (a^{(\alpha)}(\mathbf{x})v)$.

Для операторов \mathcal{L} и \mathcal{L}' определим области определения следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \left\{ u \in C^4(\bar{Q}) \mid u|_{\Omega^{(0)}} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \Big|_{\Omega^{(0)}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \Big|_{\Omega^{(0)}} = 0, u|_{\Omega^{(T)}} = 0, u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}') = \left\{ v \in C^4(\bar{Q}) \mid v|_{\Omega^{(0)}} = 0, v|_{\Omega^{(T)}} = \frac{\partial v}{\partial x_0} \Big|_{\Omega^{(T)}} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} \Big|_{\Omega^{(T)}} = 0, v|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

Легко проверяется, что

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} = (u, \mathcal{L}'v)_{L_2(Q)} \quad (11)$$

для любых функций $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ и $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$, где $(\cdot, \cdot)_{L_2(Q)}$ – значение скалярного произведения пространства $L_2(Q)$ квадратично суммируемых по Лебегу в Q функций.

Обозначим через $H^l(Q)$ гильбертово пространство, элементы которого $u \in L_2(Q)$ и обобщенные производные $\mathbf{D}^\alpha u$, $|\alpha| \leq l$, также принадлежат $L_2(Q)$. Скалярное произведение в $H^l(Q)$ определяется выражением $(u, v)_{H^l(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq l} (\mathbf{D}^\alpha u, \mathbf{D}^\alpha v)_{L_2(Q)}$. Пусть $H_0^l(Q)$ ($l = 1, 2, 3$) – подпространства пространства $H^l(Q)$, элементы которых удовлетворяют граничным условиям (2)–(4) согласно теоремам вложения С. Л. Соболева. Аналогично определяются подпространства $\overset{0}{H}^l(Q)$ пространства $H^l(Q)$, где их элементы удовлетворяют условиям (8)–(10).

У с л о в и е. Граница ∂Q области Q такова, что замыкание множества $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ по норме пространства $H^l(Q)$ совпадает с подпространством $H_0^l(Q)$, а замыкание множества $\mathcal{D}(\mathcal{L}')$ – с подпространством $\overset{0}{H}^l(Q)$, $l = 1, 2, 3$.

Отметим, что элементы пространства $H_0^2(Q)$ имеют смысл не для всех граничных условий (2)–(4). Если $u \in H_0^2(Q)$, то u фактически удовлетворяет условиям (3), (4) и первым двум условиям из (2). Если $u \in H_0^1(Q)$, то

$$u|_{\partial Q} = 0.$$

Аналогичное замечание имеет место и для элементов $v \in \overset{0}{H}^l(Q)$ ($l = 1, 2$) относительно условий (8)–(10). Здесь, согласно введенным обозначениям и определениям пространств, $H_0^1(Q) = \overset{0}{H}^1(Q)$. Отметим, что подпространства $H_0^l(Q)$ и $\overset{0}{H}^l(Q)$, $l = 1, 2, 3$, также являются гильбертовыми пространствами.

Обозначим через H_0^{-1} и $\overset{0}{H}^{-1}$ пространства с негативной нормой [18] по отношению к пространствам $H_0^1(Q)$ и $\overset{0}{H}^1(Q)$, т. е. пространства всех непрерывных линейных функционалов над пространствами $H_0^1(Q)$ и $\overset{0}{H}^1(Q)$. Поскольку $H_0^1(Q) = \overset{0}{H}^1(Q)$, то и $H_0^{-1} = \overset{0}{H}^{-1}$.

Для определения обобщенного решения задачи (1)–(4) рассмотрим билинейную форму

$$\Phi(u, v) = (u, \mathcal{L}'v)_{L_2(Q)}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}').$$

Если функция $u \in H_0^2(Q)$, а $v \in \overset{0}{H}^3(Q)$, то форму $\Phi(u, v)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} \right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial x_i} \right)_{L_2(Q)} - \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)}u, v)_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для каждого элемента $u \in H_0^2(Q)$ $\Phi(u, v)$ будем рассматривать как линейный функционал $v \rightarrow \Phi(u, v)$.

Определим расширение \mathcal{L} оператора \mathcal{L} следующим образом, при этом во внимание принимается равенство (11). Функцию u отнесем к области определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ оператора \mathcal{L} , если $u \in H_0^2(Q)$ и отображение $v \rightarrow \Phi(u, v)$ есть линейный непрерывный функционал на плотном множестве $\overset{0}{H}^3(Q)$ пространства $\overset{0}{H}^1(Q)$ в топологии, индуцированной из пространства $\overset{0}{H}^1(Q)$.

Тогда этот функционал допускает непрерывное продолжение на все пространство $H^1(Q)$. Следовательно, существует единственный такой элемент $\mathcal{L}u \in H^{-1}$, что

$$\Phi(u, v) = \langle \mathcal{L}u, v \rangle$$

при $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ и любых $v \in H^1(Q)$, где $\langle w, v \rangle$ – каноническая билинейная форма для $w \in H^{-1}$ и $v \in H^1(Q)$, являющаяся продолжением по непрерывности билинейной формы $(w, v)_{L_2(Q)}$, где $w \in L_2(Q)$, $v \in H^1(Q)$.

Поскольку множество $H^3(Q)$ плотно в пространстве $H^1(Q)$, то

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}} = \sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_{H^1(Q)}}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}). \quad (13)$$

Из формул (11) и (12) следует, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, то $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Действительно, $\Phi(u, v) = (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}$ и является линейным непрерывным функционалом по v при $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, $v \in H^1(Q)$, т. е. при $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ $\mathcal{L}u = \mathcal{L}u$. Следовательно, \mathcal{L} является расширением оператора \mathcal{L} .

О п р е д е л е н и е 1. Всякое решение операторного уравнения

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in H^{-1},$$

назовем *обобщенным* решением задачи (1)–(4).

Аналогично, исходя из равенства (11), строим расширение \mathcal{L}' оператора \mathcal{L}' .

Функцию v отнесем к области определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}')$ оператора \mathcal{L}' , если $v \in H^2(Q)$ и отображение $u \rightarrow \Psi(u, v)$, где

$$\begin{aligned} \Psi(u, v) = & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} \right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial x_i} \right)_{L_2(Q)} - \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)}u, v)_{L_2(Q)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$u \in H_0^3(Q)$ есть линейный непрерывный функционал на плотном множестве $H_0^3(Q)$ пространства $H_0^1(Q)$ в топологии, индуцированной из пространства $H_0^1(Q)$. Тогда этот функционал допускает непрерывное продолжение на все пространство $H_0^1(Q)$. Следовательно, существует единственный такой элемент $\mathcal{L}'v \in H_0^{-1}$, что

$$\Psi(u, v) = \langle u, \mathcal{L}'v \rangle$$

при $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$ и любых $u \in H_0^1(Q)$, где $\langle u, w \rangle$ – каноническая билинейная форма для $u \in H_0^1(Q)$ и $w \in H_0^{-1}$, являющаяся продолжением по непрерывности билинейной формы $(u, w)_{L_2(Q)}$, где $u \in H_0^1(Q)$ и $w \in L_2(Q)$.

Поскольку множество $H_0^3(Q)$ плотно в пространстве $H_0^1(Q)$, то

$$\|\mathcal{L}'v\|_{H_0^{-1}} = \sup_{u \in H_0^3(Q)} \frac{|\Psi(u,v)|}{\|u\|_{H_0^1(Q)}}, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}').$$

Из формул (11) и (14) также следует, что если $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$, то $v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}')$.

Сравнивая формулы (12) и (14), заключаем, что справедливо равенство

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}'v \rangle, \quad u \in H_0^3(Q), \quad v \in H^3(Q). \quad (15)$$

3. Существование единственного обобщенного решения. Существование обобщенного решения будет доказано на основании (15), если будут установлены для операторов \mathcal{L} и \mathcal{L}' соответствующие априорные оценки. При этом учитывается, что пространства $H_0^2(Q)$ и $H^2(Q)$ являются рефлексивными.

Т е о р е м а 1. *Справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^2(Q)} \leq c_1 \|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}}, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \quad (16)$$

$$\|v\|_{H^2(Q)} \leq c_2 \|\mathcal{L}'v\|_{H_0^{-1}}, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}'), \quad (17)$$

где $c_i, i = 1, 2$, – некоторые постоянные, не зависящие от функций u и v .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим справедливость неравенства (16). Для этого предположим сначала, что $u \in H_0^2(Q) \cap H^3(Q)$. Из (13) следует, что для того, чтобы функционал $v \rightarrow \Phi(u, v)$

был непрерывным над пространством $H^1(Q)$, должно выполняться равенство $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \right|_{\Omega^{(0)}} = 0$, т. е.

фактически $u \in H_0^3(Q)$, если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. В этом случае значение функционала $\Phi(u, v)$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) = & - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}, \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)_{L_2(Q)} - (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2 \partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(Q)} + \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)}u, v)_{L_2(Q)}, \quad v \in H^3(Q). \end{aligned} \quad (18)$$

Функционал $\Phi(u, v)$, записанный в виде (18), продолжается по непрерывности на все пространство $H^1(Q)$. В (18) полагаем $v = Mu$, где $Mu = (x_0 - T) \frac{\partial u}{\partial x_0} - u$. При таком выборе

$v \in H^1(Q)$ в силу условий (2)–(4). В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi(u, Mu) = & \int_Q \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} (x_0 - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2 \partial x_i} (x_0 - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2 \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} (x_0 - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j} - a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + A^{(2)}u Mu \right) dx. \end{aligned}$$

Представим главную часть подынтегрального выражения в последнем соотношении в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \Phi(u, \mathcal{M}u) = & \int_Q \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left((x_0 - T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \right)^2 - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_0} \left((x_0 - T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \right)^2 \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \right)^2 + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x_0 - T) \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_j} \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_0} \left((x_0 - T) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) + \frac{3}{2} a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 - a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + A^{(2)} u \mathcal{M}u \right) dx. \end{aligned}$$

В силу условий (2)–(4) получим после перехода к норме пространства $L_2(Q)$

$$\Phi(u, \mathcal{M}u) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \right\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{b^2 - a^2}{2} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{3a^2 b^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(Q)}^2 + \int_Q A^{(2)} u \mathcal{M}u dx.$$

С помощью неравенства Коши–Буняковского для интеграла $\int_Q A^{(2)} u \mathcal{M}u dx$ получим оценку сверху

$$\left| \int_Q A^{(2)} u \mathcal{M}u dx \right| \leq c_3 \|u\|_{H_0^2(Q)} \|u\|_{H_0^1(Q)}.$$

С учетом этой оценки функционал $\Phi(u, \mathcal{M}u)$ оценивается снизу следующим образом:

$$\Phi(u, \mathcal{M}u) \geq c_4 \|u\|_{H_0^2(Q)}^2 - c_5 \|u\|_{H_0^2(Q)} \|u\|_{H_0^1(Q)}. \quad (19)$$

Поскольку $\|\mathcal{M}u\|_{H^1(Q)} \leq c_6 \|u\|_{H_0^2(Q)}$, получаем с учетом (13) и (19)

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}} \geq c_7 \|u\|_{H_0^2(Q)} - c_8 \|u\|_{H_0^1(Q)}. \quad (20)$$

Проинтегрируем по области $Q^{(t)} = (0, t) \times \Omega$, $t \in (0, T)$, тождество $c_9 \sum_{|\alpha| \leq 1} \frac{\partial}{\partial x_0} (\mathbf{D}^\alpha u)^2 =$

$2c_9 \sum_{|\alpha| \leq 1} \mathbf{D}^\alpha u \frac{\partial}{\partial x_0} \mathbf{D}^\alpha u$, где c_9 – некоторая достаточно большая положительная постоянная:

$$\begin{aligned} c_9 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} (\mathbf{D}^\alpha u)^2(t, \mathbf{x}) dx' &= 2c_9 \int_{Q^{(t)}} \sum_{|\alpha| \leq 1} \mathbf{D}^\alpha u \frac{\partial}{\partial x_0} \mathbf{D}^\alpha u dx \leq \frac{c_9}{\varepsilon} \int_{Q^{(t)}} \sum_{|\alpha| \leq 1} (\mathbf{D}^\alpha u)^2 dx + \\ & \varepsilon c_9 \int_{Q^{(t)}} \sum_{|\alpha| \leq 1} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \mathbf{D}^\alpha u \right)^2 dx \leq \frac{c_9}{\varepsilon} \int_{Q^{(t)}} \sum_{|\alpha| \leq 1} (\mathbf{D}^\alpha u)^2 dx + \varepsilon c_9 \|u\|_{H_0^2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varepsilon > 0$. В (21) мы воспользовались неравенством $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$, $\forall \varepsilon > 0$. Обозна-

чим $v(t) = c_9 \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} (\mathbf{D}^\alpha u)^2(t, \mathbf{x}) dx'$. Тогда $c_9 \int_{Q^{(t)}} \sum_{|\alpha| \leq 1} (\mathbf{D}^\alpha u)^2 dx = \int_0^t v(x_0) dx_0$ и неравенство (21) при-

мет вид $v(t) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t v(x_0) dx_0 + \varepsilon c_9 \|u\|_{H_0^2(Q)}^2$. Сложим его с неравенством (20), выберем ε таким об-

разом, чтобы выполнялось неравенство $c_7 - \varepsilon c_9 > 0$, и применим неравенство Гронуолла:

$$c_{10} \|u\|_{H_0^2(Q)} + v(t) \leq e^{\frac{t}{\varepsilon}} \left(\|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}} + c_8 \|u\|_{H_0^1(Q)} \right) \leq e^{\frac{T}{\varepsilon}} \|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}} + e^{\frac{T}{\varepsilon}} c_8 \|u\|_{H_0^1(Q)}. \quad (22)$$

Правая часть неравенства (22) не зависит от t , поэтому в левой части его можно перейти к точной верхней грани по t . Получим следующее неравенство:

$$c_{10} \|u\|_{H_0^2(Q)} + c_9 \sup_{0 < t < T} \|u\|_{H_0^1(Q)}^2 (t) \geq e^{\frac{T}{\varepsilon}} \|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}} + e^{\frac{T}{\varepsilon}} c_8 \|u\|_{H_0^1(Q)},$$

из которого с учетом оценки $\sup_{0 < t < T} \|u\|_{H_0^1(Q)}^2 (t) \geq \frac{1}{T} \|u\|_{H_0^1(Q)}^2$ следует доказываемое неравенство $\|u\|_{H_0^2(Q)} \leq c_{11} \|\mathcal{L}u\|_{H^{-1}}$ в случае $u \in H_0^2(Q) \cap H^3(Q)$.

Пусть теперь $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Тогда $J_k u \in H_0^2(Q) \cap H^3(Q)$, где J_k – оператор осреднения с переменным шагом [14, 15]. В силу доказанного выше

$$\|J_k u\|_{H_0^2(Q)} \leq \sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(J_k u, v)|}{\|v\|_{H^2(Q)}}. \quad (23)$$

Представим функционал $\Phi(J_k u, v)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi(J_k u, v) = & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} J_k^* v \right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}, \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_i} J_k^* v \right)_{L_2(Q)} - \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} J_k^* v \right)_{L_2(Q)} + (A^{(2)} u, J_k^* v)_{L_2(Q)} + K_1(u, v; k) + K_2(u, v; k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(u, v; k) = & \left(J_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} - \frac{\partial}{\partial x_0} J_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(J_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_0^2 \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_0} J_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L_2(Q)} - \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(J_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^2 \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} J_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2(Q)} + (J_k A^{(2)} J_k u - A^{(2)} u, v)_{L_2(Q)}, \\ K_2(u, v; k) = & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, J_k^* \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} J_k^* v \right)_{L_2(Q)} + (b^2 - a^2) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_i}, J_k^* \frac{\partial^2 v}{\partial x_0 \partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial x_i} J_k^* v \right)_{L_2(Q)} - \\ & a^2 b^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, J_k^* \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} J_k^* v \right)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующее: для того чтобы функционал $v \rightarrow \Phi(u, v)$ был непрерывным над пространством $H^1(Q)$, должно выполняться равенство $J_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \Big|_{\Omega^{(0)}} = 0$.

В силу свойств операторов осреднения J_k и J_k^*

$$K_1(u, v; k), K_2(u, v; k) \leq \frac{1}{k} \|u\|_{H_0^2(Q)} \|v\|_{H^1(Q)} \quad (24)$$

и

$$\|J_k^* v\|_{H^2(Q)} \leq c_{12} \|v\|_{H^2(Q)}. \quad (25)$$

В силу оценок (24), (25) неравенство (23) можно продолжить следующим образом:

$$\|J_k u\|_{H_0^2(Q)} \leq \sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(J_k u, v)|}{\|v\|_0} \leq \sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(u, J_k v)|}{\|v\|_0} + \frac{2}{k} \|u\|_{H_0^2(Q)} \leq$$

$$\sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(u, J_k v)|}{\|J_k v\|_0} + \frac{2}{k} \|u\|_{H_0^2(Q)} \leq \sup_{v \in H^3(Q)} \frac{|\Phi(u, v)|}{\|v\|_0} + \frac{2}{k} \|u\|_{H_0^2(Q)}.$$

Переходя в нем к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем требуемое неравенство (16). Неравенство (17) доказывается аналогично.

Теорема 2. Если выполняется указанное выше условие и $f \in H^{-1}$, то существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

Доказательство. Из теоремы 1 следует единственность обобщенного решения задачи (1)–(3). Оператор \mathcal{L} является замкнутым, поэтому для доказательства теоремы 2 осталось доказать, что $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = H^{-1}$. Для этого достаточно показать плотность элементов $\mathcal{L}u$, где $u \in H_0^3(Q)$, в пространстве H^{-1} .

Пусть элемент $v \in H^3(Q)$ таков, что при любой функции u из указанного класса $\langle \mathcal{L}u, v \rangle = 0$.

Так как $u \in H_0^3$ и $v \in H^3(Q)$, то в силу формулы (15) $\langle u, \mathcal{L}'v \rangle = 0$. Следовательно, из неравенства (17) вытекает, что $v = 0$ в $H^3(Q)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство однозначной разрешимости задач (1)–(3), (5) и (1)–(3), (6) аналогично.

Литература

1. N a d a m a r d J. // The Tohoku Mathematical Journal. 1933. Vol. 37. P. 133.
2. N a d a m a r d J. // L'enseignement mathématique. 1936. Vol. 35. P. 5.
3. Дж у р а е в Т. Д., С а б и р о в А. // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 36–43.
4. Л е с е в В. Н. // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 3 Всероссийской науч. конф., Самара, 29–31 мая, 2006. Ч. 3. Секц. Дифференциальные уравнения и краевые задачи. Самара: СамГТУ. 2006. С. 148–150.
5. Дж у р а е в Т. Д. // Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. 2006. № 2. С. 5–8.
6. А б д у л л а е в О. Х. // Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. 2006, № 1. С. 7–11.
7. Дж у р а е в Т. Д. Об одной спектральной задаче для уравнения третьего порядка составного типа // Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. 2006. № 3. С. 3–7.
8. К а в е р и н а И. А., С к р я б и н а Е. С. // Вестн. Волж. ун-та. Сер. Информат. 2006. № 9. С. 143–145.
9. Д е з и н А. А. // Успехи матем. наук. 1959. Т. XIV, вып. 3 (87). С. 22–73.
10. К о р з ю к В. И. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. IV, № 10. С. 1854–1866.
11. Д а й н я к В. В., К о р з ю к В. И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. XXIII, № 5. С. 867–872.
12. К о р з ю к В. И., Д а й н я к В. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. XXVIII, № 6. С. 1056–1066.
13. К о р з ю к В. И., Д а й н я к В. В. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 3. С. 54–60.
14. В и г е н к о в V. I. Sobolev Spaces on Domains. Stuttgart-Leipzig, 1998.
15. К о р з ю к В. И. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1996. № 2. С. 55–71.
16. К о н о п е л ь к о О. А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 73–79.
17. М и х а й л о в В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
18. Б е р е з а н с к и й Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.

V. I. KORZYUK, O. A. KONOPELKO

WEAK SOLUTIONS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN TUBE DOMAINS FOR THE FOURTH-ORDER EQUATION OF COMPOSITE TYPE

Summary

One-valued solvability of boundary-value problems in tube domains for the fourth-order equation of composite type is proved in the article.

ФІЗІКА

УДК 539.172

В. В. АНДРЕЕВ, Т. В. ШИШКИНА

О ВОЗМОЖНОСТИ ДИСКРИМИНАЦИИ РАСШИРЕННЫХ
 КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ В ПРОЦЕССАХ АННИГИЛЯЦИИ
 ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛЕПТОНОВ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 10.07.2008)

Введение. Стандартная теория электрослабого взаимодействия Глэшоу–Вайнберга–Салама [1] дает удовлетворительное описание имеющихся сегодня данных физики элементарных частиц. Предсказания Стандартной модели (СМ) подтверждены в результате многочисленных экспериментов. Однако объединение сильного и электрослабого взаимодействий происходит в рамках расширенных калибровочных групп. В связи с этим исследование данных калибровочных моделей, их анализ и поиск дополнительного нейтрального бозона является важной задачей экспериментов на ускорителях настоящего и будущего поколений.

Целью данной работы является анализ возможных эффектов, выходящих за рамки стандартной теории электрослабого взаимодействия, для процесса электрон-позитронной аннигиляции в два фермиона: $f\bar{f}$ ($f \neq e$), а также поиск таких наблюдаемых величин, для которых данные эффекты были бы максимальны. Обсуждаются возможности дифференциации расширенных калибровочных моделей, дающих близкие результаты. Для прецизионных исследований используются точные лоренц-инвариантные выражения наблюдаемых величин.

1. Матричный элемент процесса. Рассмотрим матричный элемент процесса лептон-антилептонной аннигиляции в первом ненулевом порядке теории возмущений:

$$e^- + e^+ \rightarrow f + \bar{f}. \quad (1)$$

В борновском приближении данный процесс описывается двумя диаграммами Фейнмана. Одна из них соответствует обмену фотоном, вторая – Z -бозоном. Для расширенных калибровочных моделей характерна дополнительная диаграмма, отвечающая за обмен дополнительным нейтральным бозоном Z' . Тогда матричный элемент процесса может быть записан следующим образом:

$$M = M_\gamma + M_Z + M_{Z'}. \quad (2)$$

Здесь

$$M_\gamma = iN_{k_1} N_{k_2} N_{p_1} N_{p_2} e^2 (2\pi)^4 \bar{U}(k_1, \lambda_{k_1}) \gamma_\nu V(k_2, \lambda_{k_2}) \frac{1}{q^2} \times \\ \bar{V}(p_2, \lambda_{p_2}) \gamma^\nu U(p_1, \lambda_{p_1}) \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2), \quad (3)$$

$$M_Z = iN_{k_1} N_{k_2} N_{p_1} N_{p_2} \frac{g^2}{4\cos^2 \theta_W} (2\pi)^4 \bar{U}(k_1, \lambda_{k_1}) \gamma^\mu (g_V + g_A \gamma_5) V(k_2, \lambda_{k_2}) \times \\ \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_Z^2}}{q^2 - m_Z^2} \bar{V}(p_2, \lambda_{p_2}) \gamma^\nu (g_V + g_A \gamma_5) U(p_1, \lambda_{p_1}) \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2), \quad (4)$$

$$M_{Z'} = iN_{k_1} N_{k_2} N_{p_1} N_{p_2} \frac{\tilde{g}^2}{4\cos^2\theta_W} (2\pi)^4 \bar{U}(k_1, \lambda_{k_1}) \gamma^\mu (\tilde{g}_V + \tilde{g}_A \gamma_5) V(k_2, \lambda_{k_2}) \times$$

$$\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2}}{q^2 - m_{Z'}^2} \bar{V}(p_2, \lambda_{p_2}) \gamma^\nu (\tilde{g}_V + \tilde{g}_A \gamma_5) U(p_1, \lambda_{p_1}) \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2), \quad (5)$$

где p_1 и p_2 – импульсы соответственно электрона и позитрона, k_1 и k_2 – импульсы фермиона f и антифермиона \bar{f} . Также обозначим λ_1 и λ_2 – спиральности электрона и позитрона соответственно, а σ_1 и σ_2 – спиральности фермиона f и антифермиона \bar{f} ; $N_p = 1/\left((2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p_0}\right)$, $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$, $q = p_1 + p_2 = k_1 + k_2$, $g_V = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$, $g_A = -\frac{1}{2}$, θ_W – угол Вайнберга, U и V – биспиноры Дирака, $\tilde{g}, \tilde{g}_A, \tilde{g}_V$ – константы связи, определяемые в рамках формализма конкретной модели.

Сведем слагаемые матричного элемента M_γ , M_Z и $M_{Z'}$ к скалярным функциям. Для этого используем бесшпуровой метод [2], позволяющий записать матричный элемент M , используя скалярные функции (метод базисных спиноров).

В результате для слагаемого M_γ получим:

$$M_\gamma(\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) = (-1) 8\pi\alpha Q_f \left(\delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} + \sqrt{\frac{2}{s}} m_f \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right) \times$$

$$\left(\delta_{\lambda_{p_1}, -\lambda_{p_2}} d_{\lambda_{p_1}, \lambda_{k_1}}^1(\theta) + \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \sqrt{\frac{2}{s}} m_e d_{0, \lambda_{k_1}}^1(\theta) \right); \quad (6)$$

для слагаемых M_Z и $M_{Z'}$ –

$$M_Z(\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}; \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) = 2\pi\alpha s G_Z \times \left[\left[g_V^f - \lambda_{k_1} \beta_f g_A^f \right] \delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} + \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \sqrt{\frac{2}{s}} m_f g_V^f \right] \times$$

$$\times \left(\delta_{\lambda_{p_1}, -\lambda_{p_2}} d_{\lambda_{p_1}, \nu}^1(\theta) (g_V^e + \lambda_{p_1} \beta_e g_A^e) + \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \sqrt{\frac{2}{s}} m_e g_V^e d_{0, \lambda_{k_1}}^1(\theta) \right) +$$

$$\delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \frac{\lambda_{p_1} \lambda_{k_1} m_e m_f g_A^e g_A^f}{s} \left(1 - \frac{m_{Z'}^2}{s} \right), \quad (7)$$

$$M_{Z'}(\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}; \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}) = 2\pi\alpha s G_{Z'} \times \left[\left[\tilde{g}_V^f - \lambda_{k_1} \beta_f \tilde{g}_A^f \right] \delta_{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}} + \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \sqrt{\frac{2}{s}} m_f \tilde{g}_V^f \right] \times$$

$$\times \left(\delta_{\lambda_{p_1}, -\lambda_{p_2}} d_{\lambda_{p_1}, \nu}^1(\theta') (\tilde{g}_V^e + \lambda_{p_1} \beta_e \tilde{g}_A^e) + \delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \sqrt{\frac{2}{s}} m_e \tilde{g}_V^e d_{0, \lambda_{k_1}}^1(\theta') \right) +$$

$$\delta_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \frac{\lambda_{p_1} \lambda_{k_1} m_e m_f \tilde{g}_A^e \tilde{g}_A^f}{s} \left(1 - \frac{m_{Z'}^2}{s} \right), \quad (8)$$

где $\lambda_k = (\lambda_{k1} - \lambda_{k2})/2$, $d_{\lambda, \nu}^1(\theta)$ – малая функция Вигнера с индексом 1, определяющая угловое распределения конечных фермионов, $m_{Z(Z')}$ – масса $Z(Z')$ -бозона, $G_{Z(Z')} = 1/\left(\cos^2 \theta_W \sin^2 \theta_W \left(s - m_{Z(Z')}^2 + im_{Z(Z')} \Gamma_{Z(Z')}\right)\right)$, $\alpha = e^2/4\pi$, $s = (p_1 + p_2)^2$, $\Gamma_{Z(Z')}$ – ширина распада $Z(Z')$ -бозона, $\beta_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e}{s}}$, $\beta_f = \sqrt{1 - \frac{4m_f}{s}}$, Q_f – заряд фермиона в единицах заряда электрона.

2. Сечения и асимметрии. В качестве экспериментально наблюдаемых величин, необходимых для исследования эффектов, выходящих за рамки предсказаний Стандартной модели, в первую очередь рассматривают дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\beta_f}{\beta_e} \frac{|M|^2}{16(2\pi)^2 s}, \quad (9)$$

а также полное сечение процесса аннигиляции

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} \sin \theta d\theta. \quad (10)$$

С использованием дифференциальных (9) и полных сечений (10) могут быть построены различные типы наблюдаемых величин, исследование которых позволяет оценить симметричные эффекты разного рода.

Поляризационная асимметрия определяется выражением:

$$A_{LR} = \frac{d\sigma_{+-} - d\sigma_{-+}}{d\sigma_{+-} + d\sigma_{-+}}, \quad (11)$$

где $d\sigma_{+-}$ – дифференциальное сечение процесса (1) при следующих значениях спиральностей начальных частиц: $\lambda_{p_1} = 1$ и $\lambda_{p_2} = -1$, $d\sigma_{-+}$ – дифференциальное сечение процесса при значениях спиральностей начальных частиц: $\lambda_{p_1} = -1$ и $\lambda_{p_2} = 1$. Эта асимметрия позволяет исследовать эффекты, связанные с поляризацией частиц, участвующих в процессе.

Важной наблюдаемой величиной, представляющей интерес для исследования в процессах взаимодействия элементарных частиц, является асимметрия рассеяния вперед-назад. Эта асимметрия представляет собой комбинацию полных сечений процесса, проинтегрированных в областях $(0 \leq \theta \leq \pi/2)$ и $(\pi/2 \leq \theta \leq \pi)$ соответственно:

$$A_{FB} = \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma - \int_{\pi/2}^\pi d\sigma}{\int_0^{\pi/2} d\sigma + \int_{\pi/2}^\pi d\sigma}. \quad (12)$$

Асимметрия рассеяния вперед-назад позволяет исследовать эффекты, связанные с неравномерным распределением частиц, образованных в результате процесса аннигиляции.

Подробное исследование возможных спиновых конфигураций показало, что значительный интерес представляют также дополнительные типы асимметрий

$$A_1 = \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} - \int_{\pi/2}^\pi d\sigma_{\mp}}{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} + \int_{\pi/2}^\pi d\sigma_{\mp}},$$

$$A_2 = \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\mp} - \int_{\pi/2}^\pi d\sigma_{\pm}}{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\mp} + \int_{\pi/2}^\pi d\sigma_{\pm}},$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\mp} - \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\pm}}{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\mp}}, \\
A_1 &= \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} - \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\mp}}{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\mp}}, \\
A_4 &= \frac{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\pm} - \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\mp}}{\int_0^{\pi/2} d\sigma_{\mp} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\sigma_{\pm}},
\end{aligned} \tag{13}$$

поскольку они сочетают в себе проявление эффектов, связанных с поляризацией частиц и эффектов, аналогичных тем, что имеют место в асимметрии рассеяния вперед-назад.

Исследование этих типов асимметрий могут дать новые возможности именно при изучении процессов в рамках расширенных калибровочных групп. Как видно, числитель и знаменатель асимметрий A_1 и A_2 симметричны, т. е. числитель всегда меньше знаменателя, откуда следует, что значения A_1 и A_2 всегда меньше единицы. Величины A_3 и A_4 комбинируют сечения рассеяния частиц с разными поляризациями. Значения этих величин могут в некоторых областях энергий превышать единицу, поэтому их нельзя отнести к асимметриям.

3. Расширенные калибровочные модели. В работе исследуются следующие расширенные калибровочные модели:

1. **Sequential Standard Model (SSM)** [3]. Модель основана на калибровочной группе $SU(2)_L \times U(1)_Y \times U'(1)_{Z'}$.

2. **Left-Right Symmetric Model (LR model)** [4]. Модель основана на калибровочной группе $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Имеет свободный параметр α , который определяется как

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} \frac{g_R^2}{g_L^2} - 1} \text{ и принимает значения в области } \sqrt{2/3} \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} - 1}. \tag{14}$$

В данной работе будут рассмотрены два случая при различных фиксированных значениях параметра α : а) когда $\alpha = \sqrt{2/3}$ и б) когда $\alpha = \sqrt{\frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} - 1}$.

3. **E_6 -motivated Model (E_6 model)** [4]. Модель основана на калибровочной группе E_6 . В качестве свободного параметра выступает угол β , отвечающий за возможное нарушение E_6 симметрии. Как и любой другой угол принимает значения от 0 до 2π . Будут исследованы 3 различных варианта для этой модели в зависимости от значений параметра β : а) λ -модель ($\beta = 0$); б) ψ -модель ($\beta = \pi/2$); в) η -модель ($\beta = -\arctan \sqrt{5/3}$).

4. **$SU(3)_C \times U(1)_{Z'}$ -motivated Model ($SU(3) \times U(1)$ model)** [5]. Модель основана на калибровочной группе $SU(3)_C \times U(1)_{Z'}$.

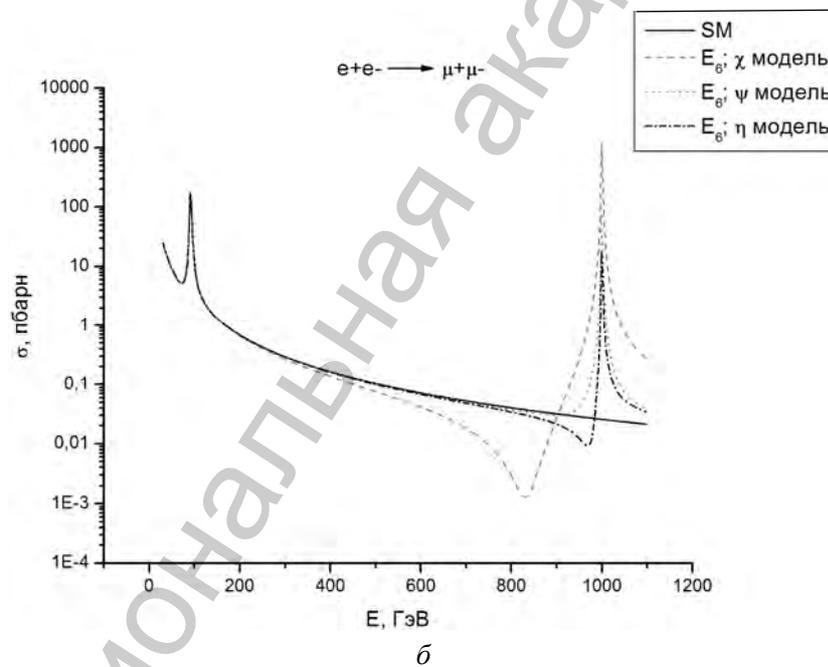
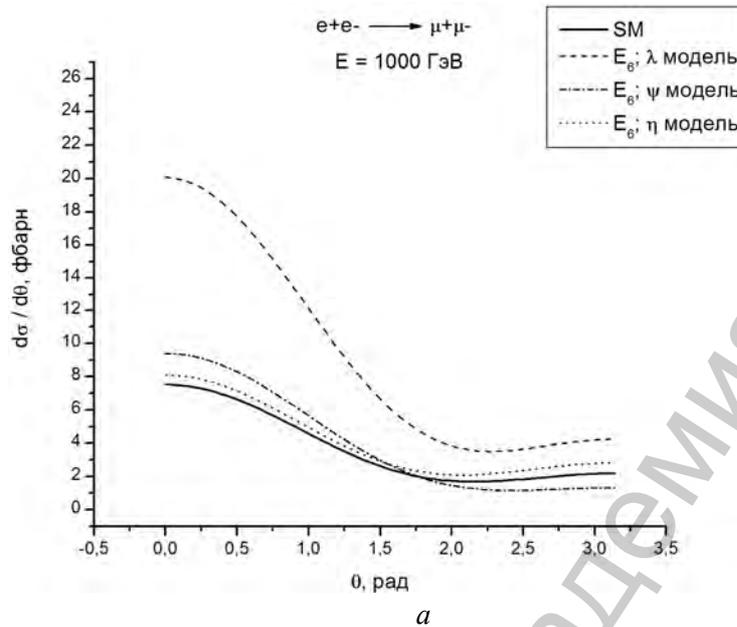
Каждая модель характеризуется набором констант связи $\tilde{g}, \tilde{g}_A, \tilde{g}_V$. Кроме того, используются еще два параметра Z' -бозона: масса $M_{Z'}$ и ширина распада в два фермиона $\Gamma_{Z'}$. Масса Z' -бозона $M_{Z'}$ во всех расчетах полагается равной 1 ТэВ. Во многих моделях для массы дополнительного бозона естественным образом получают значения, близкие к 1 ТэВ. Ширина распада в два фермиона $\Gamma_{Z'}$ для каждой модели рассчитывалась отдельно. В качестве выражения для $\Gamma_{Z'}$ была использована следующая формула:

$$\Gamma_{Z'}(Z' \rightarrow f\bar{f}) = N_f \eta M_{Z'} \frac{\tilde{g}^2}{12\pi} \left[\tilde{g}_V^2 + \tilde{g}_A^2 \right] \left(1 + 2 \frac{m_f^2}{M_{Z'}^2} \right) - 6 \tilde{g}_A^2 \frac{m_f^2}{M_{Z'}^2}, \quad (15)$$

где $N_f = 1(3)$ для лептонов(кварков), $\eta = \sqrt{1 - 4m_f^2 / M_{Z'}^2}$.

4. Численный анализ и обсуждение результатов. На основе полученных выражений были построены дифференциальные и полные сечения процесса $e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}$ для исследуемого набора расширенных калибровочных моделей. В качестве конечных фермионов была рассмотрена мюон-антимюонная пара (результаты представлены на рис. 1–2).

Как видно на графиках, форма дифференциальных сечений (9) в случае расширенных калибровочных моделей в целом не отличается от таковой, полученной на основе Стандартной модели.



Для большинства моделей отклонение величины дифференциального сечения составляет порядка 2–4 фбарн во всей кинематической области, для модели LR ($\alpha = \sqrt{2/3}$) и λ -модели величина отклонения составляет немногим более 10 фбарн в начальной части кинематической области ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) и менее 2 фбарн – в конечной ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$). Очевидно, что значения отклонений для дифференциальных сечений малы, поэтому регистрация эффектов за рамками Стандартной модели при исследовании этих величин затруднительна.

Для графиков полных сечений в случае расширенных калибровочных моделей характерно наличие Z' -пика в области энергий, близких к 1 ТэВ. Существует ряд расширенных калибровочных моделей, для которых характерно наличие некоторых особенностей в поведении величины полного сечения. Для модели LR ($\alpha = \sqrt{2/3}$) и λ -модели характерно значительное отклонение от Стандартной модели в области, непосредственно предшествующей Z' -пику. Оно проявляется в наличии четко выраженного «анти-пика», перед которым наблюдается постепенное уменьшения функции

Рис. 1. Дифференциальные (а) и полные (б) сечения для E_6 -мотивированных калибровочных моделей

полного сечения. Для модели LR ($\alpha = \sqrt{2/3}$) наиболее удобная область поиска возможных отклонений лежит между 700 и 800 ГэВ, для λ -модели – между 750 и 850 ГэВ. В этих областях энергии величина отклонения наибольшая, однако его регистрация возможна уже при энергиях 600–650 ГэВ. Аналогичное весьма значительное отклонение характерно для $SU(3) \times U(1)$ модели. Форма «анти-пика» для этой модели более резкая, да и локализован он в узкой области 970–1000 ГэВ. Для η -модели также характерно наличие «анти-пика» в этой области, однако он менее выражен. Исследование обнаружило, что полное сечение является более удобной величиной для регистрации и изучения физических эффектов за рамками Стандартной модели, так как отклонения для данной величины более значительны. Также четким сигналом Z' -бозона служит характерный пик вблизи энергии, равной массе Z' -бозона. Однако многие модели дают весьма близкие результаты, что делает проблему дифференциации этих моделей довольно сложной.

Были также исследованы асимметрии рассеяния вперед-назад (12). Для Стандартной модели величина асимметрии рассеяния вперед-назад практически не изменяется с ростом энергии взаимодействия частиц и составляет величину 0,40 при энергии взаимодействия 1 ТэВ. Как видно из графиков, для расширенных калибровочных моделей поведение данной асимметрии значительно отличается от характерного поведения для Стандартной модели. Для большинства моделей с ростом энергии происходит уменьшение значения асимметрии, далее она изменяет знак на противоположный при энергиях 700–800 ГэВ и достигает минимума при энергиях 850–950 ГэВ. Очевидно, что данная величина является достаточно удобной для исследования расширенных калибровочных моделей и эффектов, связанных с их возможной реализацией. Величина отклонения от Стандартной модели довольно значительна, для некоторых моделей их регистрация возможна уже при энергиях 700 ГэВ.

Поиск возможных отклонений от Стандартной модели представляет собой сложную

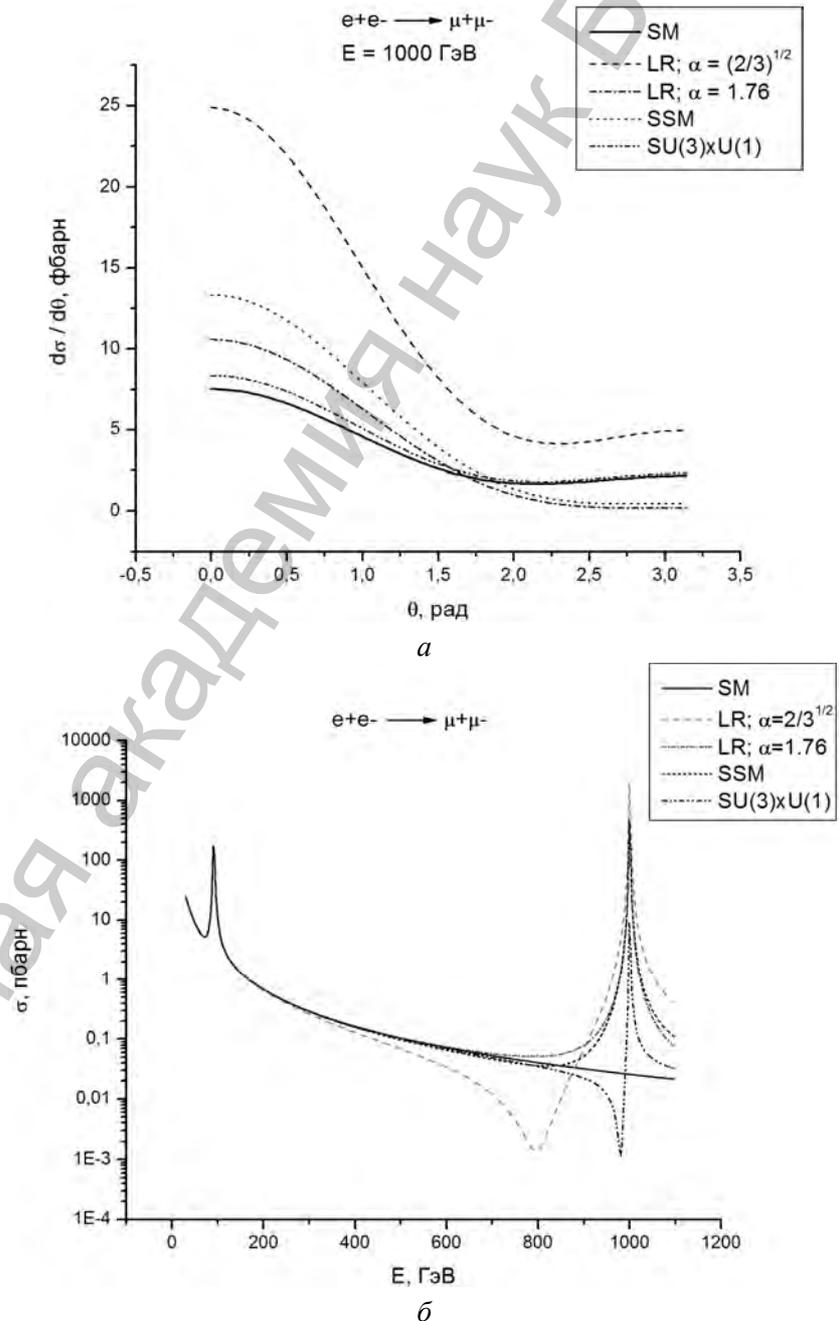


Рис. 2. Дифференциальные (а) и полные (б) сечения для SSM, LR и $SU(3)_C \times U(1)_Y$ -мотивированных калибровочных моделей

задачу. Для большинства моделей такие отклонения весьма незначительны и, следовательно, их регистрация является крайне сложной. Для решения этой проблемы, очевидно, необходимо исследование таких наблюдаемых, для которых величина этих отклонений значительна. Этот факт приводит к возникновению проблемы поиска удобных наблюдаемых. Исследование дифференциальных сечений для этих целей не является оптимальным. Для анализа эффектов за рамками Стандартной модели более удобными являются, очевидно, полные сечения процесса, различные асимметрии, как поляризационные (11) и асимметрии рассеяния вперед-назад (12), так и дополнительные (13). Для них величины отклонений более значительны, что облегчает задачу их поиска.

Однако, как видно из графиков, для ряда моделей различные наблюдаемые величины дают весьма близкие результаты. Таким образом, существует также проблема дифференциации таких моделей. А информация о том, какая из моделей реализуется, представляет огромный интерес.

Для решения этой проблемы предложено использовать наборы наблюдаемых, каждая из которых для одних и тех же моделей дает существенно различающиеся результаты. Таким образом, рассматривая несколько таких наблюдаемых вместе, можно определить, какая именно модель реализуется. Хорошим набором являются предложенные в данной работе дополнительные асимметрии (13).

Для ряда моделей проблема дифференциации не стоит настолько остро. Тогда для определения, какая именно из моделей реализуется, достаточно осуществить одновременное измерение и сравнение двух асимметрий, например A_1 и A_2 . Такой случай представлен на рис. 3. Видно, что измерение асимметрии A_2 для данных двух моделей не дает информации о возможной реализации какой-либо из моделей, так как в достаточно узкой области энергий (900–1000 ГэВ) значения асимметрии очень близки. Измерение же асимметрии A_1 позволяет дифференцировать эти модели, так как они дают существенно различающиеся результаты в этой области энергий (900–1000 ГэВ).

Для некоторых моделей может быть необходимо последовательное измерение

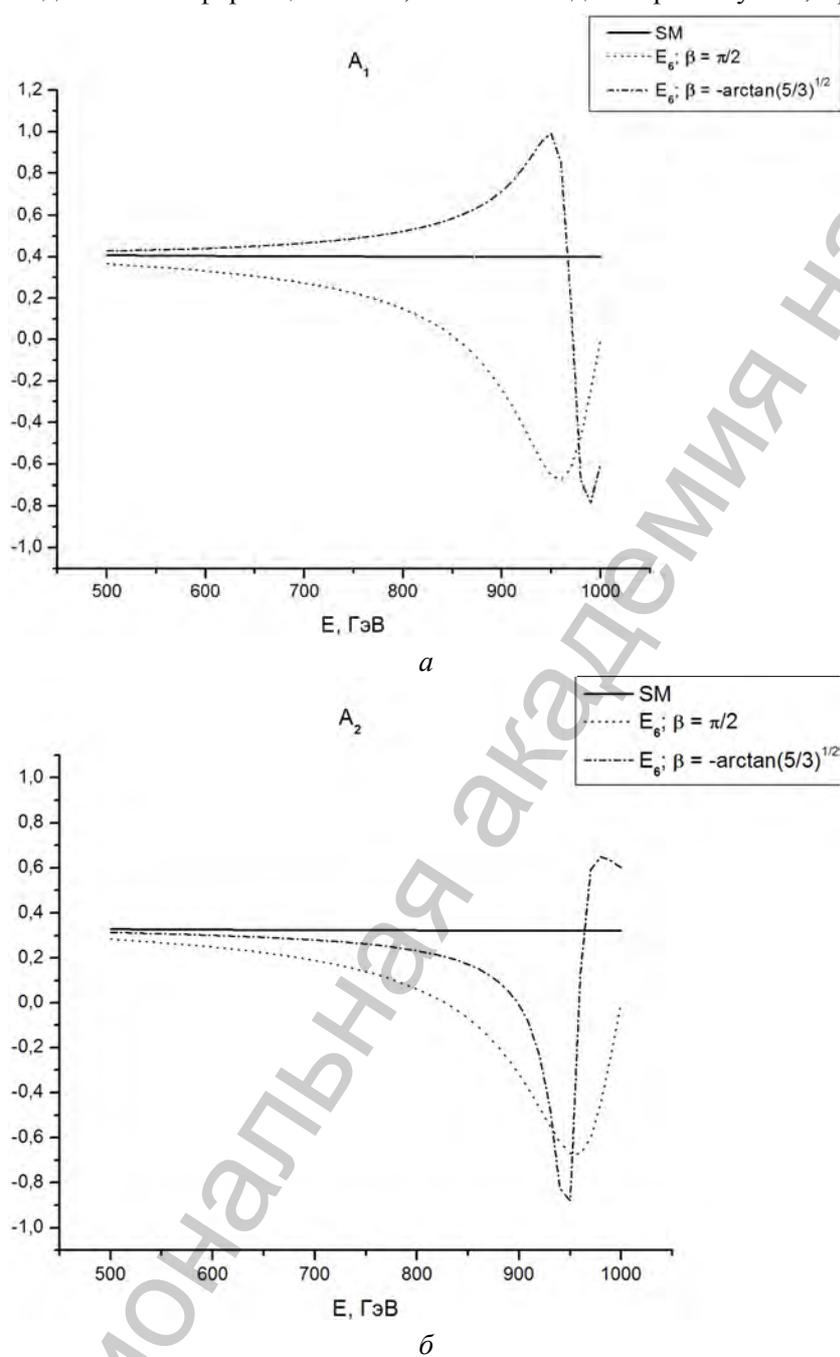


Рис. 3. Комбинированная асимметрия A_1 (а) и A_2 (б) для E_6 -мотивированных калибровочных моделей

и анализ еще большего числа асимметрий (A_3 и A_4). Важной задачей является поиск наборов таких наблюдаемых, которые были бы эффективными для исследования и в то же время представляли бы прецизионную информацию о возможной реализации расширенных калибровочных моделей.

Литература

1. В а й н б е р г С. Квантовая теория полей: в 2 т. Т. 2. М., 2001.
2. А н д р е е в В. Вычисление амплитуд рассеяния в квантовополевых теориях и моделях. Гомель, 2004.
3. I n o u e K., K a k u t o A., K o m a t s u H., N a k a n o Y. SU(2) x U(1) x U(1) gauge theory of weak and electromagnetic interactions in a unified SU(6) scheme / Prog. Theor. Phys. 1977. Vol. 58. P. 1914.
4. L e i k e A. The phenomenology of extra neutral gauge bosons // Phys. Rept. 1999. Vol. 317. P. 143–250.
5. L e e B. W., S h r o c k R. E. An SU(3) x U(1) gauge theory of the weak and electromagnetic interactions // Phys. Rev. 1978. Vol. D17. P. 2410.

V. V. ANDREEV, T. V. SHISHKINA

POSSIBILITY OF DISCRIMINATION OF NON-MINIMAL GAUGE MODELS IN THE ANNIHILATION PROCESSES OF POLARIZED LEPTONS

Summary

The matrix element of the annihilation process of polarized leptons was obtained in the lowest order of perturbative theory of electroweak interaction. An annihilation process of additional diagram, which corresponds to possible Z' -exchange, was included. It was reduced to scalar functions using the method of basis spinors. Differential and total cross sections, polarization and other combined types of asymmetries were calculated and analyzed. Several non-minimal gauge models were considered and analyzed. Probable kinematic and energy regions of deviations from the Standard Model were investigated and possible directions of deviations were suggested. Probable methods of models discrimination were considered.

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК, Н. Г. ТОКАРЕВСКАЯ, В. М. РЕДЬКОВ

АНАЛОГ ПЛОСКИХ ВОЛН В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА И КОМПЛЕКСНЫЕ ОРИСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 03.10.2008)

Введение. Известно, что в полевой теории элементарных частиц наиболее часто используется базис плоских волн. Однако, в пространстве-времени с кривизной в общем случае плоских волн в стандартном понимании просто не существует. Поэтому особый интерес вызывают специальные примеры пространств, в которых аналоги таких решений все же есть. В частности, в пространстве Лобачевского, как было показано в работах [1–3], есть такие решения. Аналог плоских волн Шапиро в пространстве Римана был введен Волобуевым [4]. Относительно недавно плоские волны Шапиро были использованы в [5] при построении теории рассеяния на кулоновском центре в пространстве Лобачевского.

Плоские волны для уравнений Максвелла в пространстве Лобачевского рассматривались на основе использования цилиндрических координат [6]. В пространстве S_3 волны Шапиро также легко строятся в цилиндрических координатах. Поскольку эти координаты тесно связаны с углами Эйлера на группе $SU(2)$, то плоские волны Шапиро легко выражаются в терминах D -функций Вигнера [см. 10].

В работе [7] для построения плоских волн скалярного волнового уравнения и уравнений Максвелла в пространстве Лобачевского были применены цилиндрические и орисферические координаты [3], последние координаты интересны тем, что в них одно из решений в виде плоской волны формально очень мало отличается от известного представления плоской волны в плоском пространстве. Однако, в отличие от цилиндрических координат, для орисферических координат нет аналога в пространстве Римана (полный список координат в пространствах Лобачевского и Римана, интересных с точки зрения метода разделения переменных, получен в работе Олевского [8]). Поэтому вопрос о представлении решений в виде плоских волн в орисферических координатах в пространстве Римана не может быть даже поставлен. Однако, в работе [9] было указано на возможность для всех систем координат в пространстве Лобачевского построить некоторые аналоги и в пространстве Римана – для этого достаточно допустить использование комплексных криволинейных координат.

Цель данной работы – развить эту возможность применительно к орисферическим координатам и на этой основе проанализировать вопрос о плоских волнах в сферическом пространстве. Отметим, что отдельный и значимый интерес может представлять и само обобщение метода разделения переменных на комплексные координаты.

1. Плоские волны в орисферических координатах в пространстве H_3 . Орисферические координаты в пространстве Лобачевского описаны в работе Олевского [8] под номером XIV¹:

$$ds^2 = dt^2 - e^{-2z} dr^2 - e^{-2z} r^2 d\phi^2 - dz^2, \quad u_1 = re^{-z} \cos \phi, \quad u_2 = re^{-z} \sin \phi, \\ u_3 = \operatorname{sh} z + \frac{r^2}{2} e^{-z} = \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 - 1)e^{-z}], \quad u_0 = \operatorname{ch} z + \frac{r^2}{2} e^{-z} = \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 + 1)e^{-z}]. \quad (1)$$

¹ Следует отметить, что в работах [3, 7] вместо переменных (r, ϕ, z) использовались другие: $(r, \pi/2 - \phi, -a)$.

Произвольным образом ориентированная волна Шапиро в пространстве S_3 определяется соотношением

$$u_0^2 - \mathbf{u}^2 = 1, \quad \Psi = e^{-iEt/\hbar} (u_0 + \mathbf{nu})^\alpha.$$

Выбирая вектор $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$, получаем явное представление в координатах (1):

$$\Psi = e^{-iEt/\hbar} (u_0 - u_3)^\alpha = e^{-iEt/\hbar} e^{-\alpha z}. \quad (2)$$

Легко можно убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера в H_3 :

$$i \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[\frac{e^{2z}}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{2z}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{e^{-2z}} \frac{\partial}{\partial z} e^{-2z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Psi, \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar^2 / M\rho^2};$$

при этом находим выражение для α через энергию частицы $\alpha = 1 \mp i \sqrt{2\varepsilon - 1}$.

Получим выражение для оператора третьей проекции импульса P_3 в орисферических координатах¹. Используя соотношения

$$q_1 = \frac{2r \cos \phi}{e^{2z} + r^2 + 1}, \quad q_2 = \frac{2r \sin \phi}{e^{2z} + r^2 + 1}, \quad q_3 = \frac{e^{2z} + r^2 - 1}{e^{2z} + r^2 + 1},$$

и обратные им

$$r = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}{1 - q_3}, \quad e^{2z} = \frac{1 - q^2}{(1 - q_3)^2}, \quad \cos \phi = \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}, \quad \sin \phi = \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}},$$

после необходимых вычислений находим:

$$P_3 = -i \left[\frac{\partial x^i}{\partial q_3} \frac{\partial}{\partial x^i} - q_3 \left(q_1 \frac{\partial x^i}{\partial q_1} + q_2 \frac{\partial x^i}{\partial q_2} + q_3 \frac{\partial x^i}{\partial q_3} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = -i \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Очевидно, что плоская волна (2) является собственной функцией оператора P_3 :

$$\Psi_- = e^{-iEt/\hbar} (u_0 - u_3)^\alpha = e^{-iEt/\hbar} e^{-\alpha z}, \quad P_3 \Psi_- = +i\alpha \Psi_-. \quad (4)$$

Волна с противоположной ориентацией также является собственной функцией оператора P_3 :

$$\mathbf{n} = (0, 0, +1), \quad \Psi_+ = e^{-iEt/\hbar} (u_0 + u_3)^\alpha = e^{-iEt/\hbar} (e^z + r^2 e^{-z})^\alpha, \quad P_3 \Psi_+ = -i\alpha \Psi_+. \quad (5)$$

Следовательно, обе функции Ψ_\pm нужно рассматривать как представляющие плоские волны в пространстве Лобачевского. Кроме того, легко убедиться, что и вторая волна Шапиро (5) также удовлетворяет уравнению Шредингера в орисферических координатах, если $\alpha = 1 \mp i \sqrt{2\varepsilon - 1}$.

2. Комплексные орисферические координаты в пространстве S_3 . Будем исходить из соотношений, определяющих орисферические координаты в пространстве Лобачевского H_3 :

$$u_1 = r e^{-z} \cos \phi, \quad u_2 = r e^{-z} \sin \phi, \\ u_3 = \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 - 1)e^{-z}], \quad u_0 = \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 + 1)e^{-z}]; \quad (6)$$

¹ Из-за кривизны пространства, невозможно одновременно диагонализировать больше одной проекции вектора импульса.

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, & \sin \phi &= \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \\ e^z &= \frac{1}{u_0 - u_3}, & r^2 &= \frac{u_0 + u_3}{u_0 - u_3} - \frac{1}{(u_0 - u_3)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Переход к модели сферического пространства S_3 осуществляется формальной заменой:

$$u_0 = V_0, \quad \mathbf{u} = i \mathbf{V}, \quad V_0^2 + \mathbf{V}^2 = 1;$$

следовательно, орисферические координаты в пространстве S_3 должны быть определены соотношениями

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, & \sin \phi &= \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \\ e^z &= \frac{1}{V_0 - iV_3}, & r^2 &= \frac{V_0 + iV_3}{V_0 - iV_3} - \frac{1}{(V_0 - iV_3)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Орисферические координаты в S_3 оказываются комплексными, чтобы параметризовать вещественное пространство, они должны подчиняться дополнительным условиям. Учитывая тождества $V_0 - iV_3 = e^{-z}$, $V_0 + iV_3 = e^{-z^*}$, легко находим такое дополнительное ограничение для координат (r, z) :

$$r^2 = e^{z-z^*} - e^{2z}. \quad (9)$$

Введем следующие обозначения для комплексных переменных: $r = A + iB$, $z = a + ib$, тогда уравнение (9) примет вид

$$A^2 - B^2 = -\cos 2b (e^{2a} - 1), \quad 2AB = -\sin 2b (e^{2a} - 1); \quad (10)$$

откуда находим

$$A = -\sqrt{e^{2a} - 1} \sin b, \quad B = +\sqrt{e^{2a} - 1} \cos b. \quad (11)$$

Ниже можно использовать (a, b) как две независимые вещественные координаты:

$$z = a + ib, \quad r = i \sqrt{e^{2a} - 1} e^{ib}. \quad (12)$$

Обратные к (8) соотношения выглядят как (сравн. с (6)):

$$\begin{aligned} iV_1 &= re^{-z} \cos \phi, & iV_2 &= re^{-z} \sin \phi, \\ iV_3 &= \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 - 1)e^{-z}], & V_0 &= \frac{1}{2} [e^{+z} + (r^2 + 1)e^{-z}]; \end{aligned} \quad (13)$$

из них следуют формулы

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{e^{2a} - 1} e^{-a} \cos \phi, & V_2 &= \sqrt{e^{2a} - 1} e^{-a} \sin \phi, \\ V_3 &= e^{-a} \sin b, & V_0 &= e^{-a} \cos b. \end{aligned} \quad (14)$$

В свою очередь, из (14) легко вывести тождества

$$V_1^2 + V_2^2 = 1 - e^{-2a}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \operatorname{tg} \phi, \quad V_0^2 + V_3^2 = e^{-2a}, \quad \frac{V_3}{V_0} = \operatorname{tg} b, \quad (15)$$

на основе которых можно описать особенности в параметризации пространства S_3 координатами $a \in [0, +\infty)$, $b \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
a \rightarrow 0, \quad V_1 = 0, V_2 = 0, \quad V_0^2 + V_3^2 = 1, \\
V_0 = \cos b, \quad V_3 = \sin b, \quad \phi - \text{немая переменная}; \\
a \rightarrow +\infty, \quad V_0 = 0, V_3 = 0, \quad V_1^2 + V_2^2 = 1, \\
V_1 = \cos \phi, \quad V_2 = \sin \phi, \quad b - \text{немая переменная}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Заметим, что тождество (9) позволяет выразить все четыре вещественные координаты (V_0, \mathbf{V}) из (13) через переменные (z, z^*, ϕ) :

$$\begin{aligned}
V_1 = \sqrt{1 - e^{-z-z^*}} \cos \phi, \quad V_2 = \sqrt{1 - e^{-z-z^*}} \sin \phi, \\
V_3 = \frac{e^{-z^*} - e^{-z}}{2i}, \quad V_0 = \frac{e^{-z^*} + e^{-z}}{2}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Кроме того, с помощью тождеств

$$e^z = i \sqrt{(1 + rr^*)} \frac{r}{r^*}, \quad e^{-z} = -i \sqrt{\frac{1}{1 + rr^*}} \frac{r^*}{r},$$

координаты (V_0, \mathbf{V}) (13) можно выразить через переменные (r, r^*, ϕ) :

$$\begin{aligned}
V_1 = -\sqrt{\frac{rr^*}{1 + rr^*}} \cos \phi, \quad V_2 = -\sqrt{\frac{rr^*}{1 + rr^*}} \sin \phi, \\
V_3 = \frac{r + r^*}{2} \sqrt{\frac{1}{1 + rr^*}} \frac{1}{rr^*}, \quad V_0 = \frac{r^* - r}{2i} \sqrt{\frac{1}{1 + rr^*}} \frac{1}{rr^*}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Таким образом, есть возможность параметризовать сферическое пространство четырьмя наборами координат: (r, z, ϕ) , (z, z^*, ϕ) , (r, r^*, ϕ) , (a, b, ϕ) .

3. Плоские волны в комплексных координатах в S_3 . Выразим плоские волны через комплексные орисферические координаты (для краткости множитель $e^{-iEt/\hbar}$ не пишем):

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = (0, 0, -1), \quad \Psi_- = (V_0 - iV_3)^\alpha = e^{-\alpha z} = e^{-\alpha(a+ib)}, \\
\mathbf{n} = (0, 0, +1), \quad \Psi_+ = (V_0 + iV_3)^\alpha = e^{-\alpha z^*} = (e^z + r^2 e^{-z})^\alpha = e^{-\alpha(a-ib)}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Эти решения являются собственными функциями оператора P_3 в S_3 :

$$P_3 = -i \left(r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad P_3 \Psi_- = +i\alpha \Psi_-, \quad P_3 \Psi_+ = -i\alpha \Psi_+.$$

Решения (19) могут быть выражены и через переменные (r, r^*) :

$$\Psi_- = \left[\sqrt{-\frac{r^*}{r} \frac{1}{1 + rr^*}} \right]^\alpha; \quad \Psi_+ = \left[\sqrt{\frac{r}{r^*} \frac{1}{1 + rr^*}} \right]^\alpha. \quad (20)$$

Теперь рассмотрим детальнее уравнение Шредингера в этих координатах. Для этого следует получить представление для метрики пространства Римана S_3 во всех данных координатах. Исходя из равенства

$$dS^2 = dt^2 - dl^2, \quad dl^2 = dV_0^2 + dV_1^2 + dV_2^2 + dV_3^2,$$

находим (следует обратить внимание на появление четырех знаков «+» в метрическом тензоре)

$$dS^2 = dt^2 + e^{-2z} dr^2 + e^{-2z} r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad \sqrt{-g} = \sqrt{-e^{4z} r^2} = ir e^{-2z}. \quad (21)$$

Соответственно, уравнение Шредингера принимает вид

$$H = \frac{\hbar^2}{2M^2\rho^2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i \sqrt{-g} g^{ij} \partial_j = + \frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left(\frac{e^{2z}}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{e^{2z}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{e^{-2z}} \frac{\partial}{\partial z} e^{-2z} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (22)$$

Можно легко показать, что две плоские волны Ψ_{\pm} удовлетворяют уравнению Шредингера с гамильтонианом (22), если $\alpha = -1 \pm \sqrt{2\varepsilon + 1}$:

$$2\varepsilon e^{-\alpha z} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} \right) e^{-\alpha z},$$

$$2\varepsilon (e^z + r^2 e^{-z})^\alpha = \left[e^{2z} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{e^{2z}}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right] (e^z + r^2 e^{-z})^\alpha. \quad (23)$$

Найденные решения уравнения Шредингера (23) следует проанализировать с точки зрения условий непрерывности и однозначности в пространстве S_3 . Для этого удобно выразить эти решения через переменные (a, b) (см. 14):

$$\Psi_- = e^{-\alpha z} = e^{-\alpha(a+ib)}, \quad \Psi_+ = e^{-\alpha z^*} = e^{-\alpha(a-ib)}, \quad \alpha = -1 \pm \sqrt{2\varepsilon + 1}.$$

Очевидно, следует потребовать периодичности волновых функций Ψ_{\pm} по переменной b :

$$\alpha = -1 \pm \sqrt{2\varepsilon + 1} = n = 0, +1, +2, \dots, \quad \varepsilon = \frac{(n+1)^2 - 1}{2}. \quad (24)$$

Возникает четыре типа решений:

$$\Psi_-^{\alpha \geq 0} = e^{(1-\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{+i(1-\sqrt{2\varepsilon+1})b}, \quad \Psi_-^{\alpha \leq 0} = e^{(1+\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{+i(1+\sqrt{2\varepsilon+1})b},$$

$$\Psi_+^{\alpha \geq 0} = e^{(1-\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{-i(1-\sqrt{2\varepsilon+1})b}, \quad \Psi_+^{\alpha \leq 0} = e^{(1+\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{-i(1+\sqrt{2\varepsilon+1})b}.$$

Помня об особенности (16) в параметризации точек пространства S_3 при $a \rightarrow +\infty$, нужно отбросить второе и четвертое решения, как не являющиеся везде непрерывными на сфере S_3 . Таким образом, физическими плоскими волнами являются две следующие:

$$\Psi_-^{\alpha > 0} = e^{(1-\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{+i(1-\sqrt{2\varepsilon+1})b},$$

$$\Psi_+^{\alpha > 0} = e^{(1-\sqrt{2\varepsilon+1})a} e^{-i(1-\sqrt{2\varepsilon+1})b}. \quad (25)$$

Отметим, что есть очень специальный тип решения

$$\varepsilon = 0, \alpha = 0, \quad \Psi_{\pm}^{\varepsilon=0} = (V_0 \pm iV_3)^0 = 1. \quad (26)$$

Эта волновая функция представляет квантовое состояние с однородным распределением плотности вероятности по компактному пространству S_3 .

Поскольку можно выразить плоские волны через переменные z, z^* , (r, r^*) , или (a, b) , найдем представление для метрического тензора сферического пространства в этих координатах.

Так, сначала получаем:

$$dS^2 = dt^2 - \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a}} d\phi^2 - \frac{da^2}{e^{2a} - 1} - \frac{db^2}{e^{2a}}, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{e^{2a}}; \quad (27)$$

соответствующее уравнение Шредингера имеет вид:

$$-2\varepsilon \Psi = \left(\frac{e^{2a}}{e^{2a} - 1} \partial_\phi^2 + e^{2a} \partial_a \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a}} \partial_a + e^{2a} \partial_b^2 \right) \Psi; \quad (28)$$

плоские волны удовлетворяют этому уравнению:

$$-2\varepsilon e^{-\alpha(a \pm ib)} = \left[(e^{2a} - 1) \partial_a^2 + 2\partial_a + e^{2a} \partial_b^2 \right] e^{-\alpha(a \pm ib)}, \quad \alpha = -1 \pm \sqrt{2\varepsilon + 1}. \quad (29)$$

Аналогично находим выражение для метрики в переменных (t, z, z^*, ϕ) :

$$dS^2 = dt^2 - \frac{e^{z+z^*} - 1}{e^{z+z^*}} d\phi^2 - \frac{1}{4e^{z+z^*}(e^{z+z^*} - 1)} [dz^2 + dz^{*2} + 2(2e^{z+z^*} - 1) dz dz^*]. \quad (30)$$

В обозначениях $(z, z^*) = (z, W)$ метрика представляется в виде:

$$f = e^{z+W}, \quad dS^2 = dt^2 - \frac{f-1}{f} d\phi^2 - \frac{1}{4f(f-1)} [dz^2 + dW^2 + 2(2f-1) dz dW]. \quad (31)$$

Уравнение Шредингера приводим к виду

$$2\varepsilon\Psi = \left[-\frac{f}{f-1} \partial_\phi^2 + \partial_z^2 - \partial_z + \partial_W^2 - \partial_W - (2f-1)\partial_z\partial_W - \partial_W - (2f-1)\partial_W\partial_z - \partial_z \right] \Psi. \quad (32)$$

Две волны Шапиро удовлетворяют этому уравнению:

$$2\varepsilon e^{-\alpha z} = [\partial_z^2 - 2\partial_z] e^{-\alpha z}, \quad 2\varepsilon e^{-\alpha W} = [\partial_W^2 - 2\partial_W] e^{-\alpha W}. \quad (33)$$

Наконец, приведем метрику в переменных:

$$dS^2 = dt^2 + \frac{1}{4(1+rr^*)^2} \frac{dr^2}{r^2} + \frac{1}{4(1+rr^*)^2} \frac{dr^{*2}}{r^{*2}} - 2 \frac{(2rr^*+1)}{4(1+rr^*)^2} \frac{1}{rr^*} dr dr^* - \frac{rr^*}{1+rr^*} d\phi^2. \quad (34)$$

Можно убедиться прямым вычислением, что приведенные выше решения (20) удовлетворяют соответствующему уравнению Шредингера.

Таким образом, описание плоских волн Шапиро в сферическом пространстве S_3 на основе комплексных орисферических координат является полностью корректным, что указывает на полезность и эффективность использования комплексных координат в общем методе разделения переменных.

Авторы благодарны участникам семинара Лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за обсуждение и советы.

Литература

1. Шапиро И. С. // Докл. АН СССР. 1956. Т. 106. С. 647.
2. Shapiro I. S. // Phys. Lett. 1962. Vol. 1. N 7. P. 253–255.
3. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. // ЖЕТФ. 1964. Т. 46. С. 1793–1808.
4. Волобуев И. П. // ТМФ. Т. 45. № 3. С. 421–426.
5. Богущ А. А., Курочкин Ю. А., Отчик В. С. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 5. С. 54–57
6. Бычкова Е. М. // Весті НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат. навук. 2006. № 5. С. 45–48.
7. Богущ А. А., Курочкин Ю. А., Отчик В. С., Бычкова Е. М. // Proc. of the 5-th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky (BGL-5). Non-Euclidean Geometry in Modern Physics. Minsk, October 10–13. Minsk, 2006. P. 111–115.
8. Олевский М. Н. // Матем. сб. 1950, Т. 27. С. 379–426.
9. Bogush A. A., Otchik V. S., Red'kov V. M. // Proc. of 5th International Conference Bolyai-Gauss-Lobachevsky: Non-Euclidean Geometry In Modern Physics (BGL-5). Minsk, October 10–13. Minsk, 2006. P. 135–144.
10. Бучковская Е. М., Токареvская Н. Г., Ред'ков В. М. // Proc. of 14th International School & Conference «Foundation & Advances in Nonlinear Science» / Eds.: V. I. Kuvshinov, G. G. Krylov. Minsk, 2008.

E. M. OVSIYUK, N. G. TOKAREVSKAYA, V. M. RED'KOV

ANALOG OF PLANE WAVES IN THE SPHERICAL RIEMANN SPACE AND COMPLEX HORISPHERICAL COORDINATES

Summary

In the space of a constant positive curvature S_3 , a complex analog of horispherical coordinates of the Lobachevsky space H_3 is introduced. To parameterize a real space S_3 , two complex coordinates (r, z) must obey additional restriction. The metrical tensor of the space S_3 is expressed in terms of (r, z) with additional constraint, or through pairs of conjugate variables (r, r^*) or (z, z^*) ; correspondingly, there exist three different representations for the Schrödinger Hamiltonian. Shapiro plane waves are determined and explored as solutions of the Schrödinger equation in the complex horispherical coordinates of S_3 . Solutions constructed are single-valued, finite, and continuous functions in the spherical space and correspond to discrete energy levels.

УДК 530.1; 535.3

А. М. ГОНЧАРЕНКО

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ
В ПОГЛОЩАЮЩИХ СРЕДАХ**

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 21.11.2008)

Теория распространения солитонов довольно сложна (см., напр., [1–4]). Аналитическое решение соответствующих нелинейных уравнений возможно только в одномерном случае. Свойства трехмерных солитонов можно исследовать либо численными методами, либо приближенными методами с помощью подбора подходящих функций. Например, достаточно эффективно светлые солитоны моделируются функциями Гаусса [2–7]. В этой краткой статье мы используем такие функции для рассмотрения особенностей распространения пространственных светлых солитонов в средах с поглощением.

Огибающая функция электромагнитного поля солитона $E(x, y, z)$ в таких средах удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta E + i\beta_0 |E|^2 E = 0. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{k} = k + i\alpha$ – комплексная постоянная распространения, β_0 – параметр нелинейности среды. Для простоты далее ограничимся случаем плоских солитонов, для которых имеем уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2\tilde{k}} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + i\beta_0 |E|^2 E = 0. \quad (2)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $E = A_0 \psi$, где ψ – следующая функция Гаусса

$$\psi = \exp\left(i\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{x^2}{a_1^2} + i\frac{x^2}{a_2^2}\right). \quad (3)$$

Здесь γ_1, γ_2 – неизвестные функции от z , a_1, a_2 – неизвестные постоянные. Этим мы предполагаем, что поперечная форма солитона не изменяется с глубиной проникновения в поглощающей среде, что для случая слабого поглощения вполне оправдано.

Ограничимся первым приближением для модуля функции ψ

$$|\psi|^2 = 1 - 2\gamma_2 - 2\frac{x^2}{a_1^2}. \quad (4)$$

При этом уравнение (2) перепишем в виде

$$(2ik - 2\alpha) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (2k + 2i\alpha) \beta \left(1 - 2\gamma_2 - 2\frac{x^2}{a_1^2}\right) \psi = 0, \quad (5)$$

где $\beta = \beta_0 A_0^2$. Подставляя (3), (4) в последнее уравнение, получаем:

$$\begin{aligned}
& k\gamma'_1 + i\alpha\gamma'_1 + ik\gamma'_2 - \alpha\gamma'_2 - \frac{1}{a_1^2} + i\frac{1}{a_2^2} + 2\frac{x^2}{a_1^4} - 2\frac{x^2}{a_2^4} - 4i\frac{x^2}{a_1^2 a_2^2} + \\
& k\beta - 2k\beta\gamma_2 - 2k\beta\frac{x^2}{a_1^2} + i\alpha\beta - 2i\alpha\beta - 2i\alpha\beta\frac{x^2}{a_1^2} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь штрих означает производную по z . Из этого уравнения следует система

$$k\gamma'_1 - \alpha\gamma'_2 - \frac{1}{a_1^2} + k\beta - 2k\beta\gamma_2 = 0, \tag{7}$$

$$\alpha\gamma'_1 + k\gamma'_2 + \frac{1}{a_2^2} + \alpha\beta - 2\alpha\beta\gamma_2 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{a_1^4} - \frac{1}{a_2^4} - \frac{k\beta}{a_1^2} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{2}\alpha\beta = 0. \tag{10}$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\frac{1}{a_1^2} = k\beta + \frac{1}{4}\frac{\alpha^2\beta}{k},$$

или с учетом малости поглощения

$$\frac{1}{a_1^2} = k\beta. \tag{11}$$

Подставляя выражения (10), (11) в уравнения (7), (8), получаем следующую систему:

$$k\gamma'_1 - \alpha\gamma'_2 - 2k\beta\gamma_2 = 0, \tag{12}$$

$$\alpha\gamma'_1 + k\gamma'_2 + \frac{1}{2}\alpha\beta - 2\alpha\beta\gamma_2 = 0. \tag{13}$$

Из этих уравнений находим

$$\gamma'_1 = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{k^2}\beta - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta^2}{k}z, \tag{14}$$

$$\gamma'_2 = -\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{k}. \tag{15}$$

Очевидным решением последнего уравнения является функция $\gamma_2 = -\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{k}z$. Учитывая малость величин α, β по сравнению с k и тот факт, что в поглощающей среде солитонный импульс может существовать на ограниченной глубине, с достаточной точностью можем положить

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha\beta^2}{4k}z^2.$$

В итоге приближенно функция ψ может быть записана в виде

$$\psi = \exp\left(-k\beta x^2 - \frac{i}{2}\alpha\beta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{k}z - \frac{i}{4}\frac{\alpha\beta^2}{k}z^2\right). \tag{16}$$

При этом полное поле оптического солитона в поглощающей среде представляется в виде

$$E = A_0 \exp \left(ikz - \frac{i}{4} \frac{\alpha \beta^2}{k} z^2 - \frac{i}{2} \alpha \beta x^2 - \alpha z + \frac{1}{2} \frac{\alpha \beta}{k} z - k \beta x^2 \right). \quad (17)$$

Как видим, слабое поглощение искривляет фазовую поверхность солитона. Уравнение последней можем записать в виде

$$kz \left(1 - \frac{\alpha \beta^2}{4k^2} z \right) = \frac{1}{2} \alpha \beta x^2,$$

или приближенно

$$kz = \frac{1}{2} \alpha \beta x^2.$$

Это уравнение параболы. Интенсивность солитона естественно убывает с глубиной, но медленней чем в обычной поглощающей среде, что обусловлено просветляющим эффектом солитона.

Заметим, наконец, что мы предполагали неизменность поперечного профиля формы солитона. Фактически же в поглощающих средах из-за уменьшения его энергии сомнительно существование таких постоянных солитонов, но теория переменных солитонов даже в прозрачных средах достаточно сложна (см., например, [7]). В итоге учет поглощения приводит к дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами, решение которых трудно или невозможно получить в известных функциях.

Литература

1. Silberberg J. // Opt. Lett. 1990. Vol. 15, N 22. P. 1283–1284.
2. Snyder A. W., Mitchell D. J. // Science. 1997. Vol. 276. P. 1538–1541.
3. Rosanov N. // Progr. in Optics. 1996. Vol. 35. P. 1–60.
4. Гончаренко А. М. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 1999. № 3. С. 44–46.
5. Гончаренко А. М. // Докл. НАН Беларусі. 2005. Т. 49, № 5. С. 45–47.
6. Scafa V. and all. // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 35. P. 1–60.
7. Гончаренко А. М. Гауссовы световые пучки и солитоны // Препринт № 747. 2008. / Институт физики НАН Беларусі. 76 с.

A. M. GONCHARENKO

PROPAGATION OF OPTICAL SOLITONS IN ABSORBING MEDIA

Summary

Some properties of the optical solitons in the absorbing media are considered.

УДК 06;07;12

Н. А. ГУСАК, Н. С. ПЕТРОВ

**КИНЕТИКА РЕШЕТОК ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
В ФОТОРЕФРАКТИВНОМ КРИСТАЛЛЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВО ВРЕМЕНИ
ВОЗБУЖДАЮЩЕГО СВЕТОВОГО ПОЛЯ**

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 10.12.2008)

В работе [1] исследована кинетика решеток пространственного заряда в фоторефрактивных (ФР) кристаллах при наличии внешнего электрического поля. Показано, что корректная постановка задачи и ее решение в этом случае должны базироваться на представлении о возбуждении в кристалле двух решеток свободных носителей и двух решеток заряда.

Здесь мы рассмотрим поведение решеток заряда в ФР кристалле при изменении со временем постоянной в пространстве картины неоднородного по интенсивности светового поля. При этом исследуем наиболее простой случай, когда стоячая световая волна изменяется по гармоническому закону, а внешнее электрическое поле отсутствует.

Будем исходить из системы уравнений для описания кинетических процессов в ФР кристаллах, предложенной Кухтаревым [2]. Она имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \text{ (уравнение непрерывности),} \quad (1)$$

$$\mathbf{j} = e\mu N_e \mathbf{E} + \mu k_B T \nabla N_e \text{ (выражение для плотности тока),} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \epsilon \text{ (уравнение Пуассона)} \quad (3)$$

и кинетическое уравнение

$$\frac{\partial N^+}{\partial t} = (\beta + SI)(N - N^+) - \gamma N^+ N_e. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность заряда, \mathbf{E} – напряженность электрического поля в ФР кристалле, ∇N_e – градиент концентрации электронов N_e , ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 – электрическая постоянная, μ – подвижность электронов, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура среды, e – элементарный заряд электрона, β – вероятность тепловой генерации свободных электронов, γ – коэффициент рекомбинации, S – сечение оптического поглощения, $I = I(z) = I_0[1 + m \cos(kz)]$, где I_0 – среднее значение интенсивности стоячей волны, создающей неоднородное распределение и соответственно модуляцию концентрации свободных носителей N_e , m – коэффициент модуляции, k – волновое число.

Для использованной в нашем рассмотрении модели ФР кристалла донорного типа величины N и N^+ соответственно суть концентрации незаряженных и заряженных фоторефрактивных центров.

Предположим, что коэффициент модуляции света $m(t)$ изменяется с некоторой частотой Ω

$$m = m_0 \cos(\Omega t), \quad (5)$$

где m_0 – амплитудное значение m . Тогда концентрация свободных электронов N_e в зоне проводимости становится пространственно модулированной и ее можно представить в виде

$$N_e = N_e^0 [1 + m_e \cos(kz)]. \quad (6)$$

Здесь N_e^0 – среднее значение N_e , m_e – коэффициент модуляции.

Из системы уравнений (1)–(4) с учетом (5) и (6) можно получить уравнение для плотности заряда ρ . Для этого прежде всего запишем уравнение для \mathbf{j} в развернутом виде, а именно:

$$\mathbf{j} = e\mu(N_e^0 + N_e')\mathbf{E} + \mu k_B T \text{grad}(N_e^0 + N_e'), \quad (7)$$

где $N_e' = N_e^0 m_e \cos(kz)$.

Используя известные соотношения $\text{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{div} \mathbf{a} + (\text{grad} \varphi, \mathbf{a})$ и $\text{div grad} \varphi = \Delta^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi$ с учетом (2) из выражения (7) имеем $\text{div} \mathbf{j} = e\mu N_e^0 \rho / \varepsilon_0 \varepsilon + e\mu N_e' \rho / \varepsilon_0 \varepsilon - ke\mu N_e^0 m_e \times \sin(kz)(\mathbf{qE}) - \mu k^2 k_B T N_e'$, где \mathbf{q} – единичный вектор вдоль z ($\mathbf{q}^2 = 1$). Ограничиваясь линейными по m_e членами, т. е. считая $m_e \rho$ и $m_e(\mathbf{qE})$ величинами второго порядка малости (ввиду малости ρ и \mathbf{E}), для выражения $\text{div} \mathbf{j}$ окончательно получаем:

$$\text{div} \mathbf{j} = e\mu N_e^0 \rho / \varepsilon_0 \varepsilon - \mu k^2 k_B T N_e'. \quad (8)$$

При этом уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + e\mu N_e^0 \rho / \varepsilon_0 \varepsilon - \mu k^2 k_B T N_e' = 0. \quad (9)$$

Последнее можно представить в виде:

$$\frac{\partial N_\rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_M} N_\rho = \frac{1}{\tau_D} N_e', \quad (10)$$

где $\tau_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{e\mu N_e^0}$, $\tau_D = \frac{e}{\mu k^2 k_B T}$, $N_\rho = \frac{\rho}{e}$ (концентрация объемного заряда в ФР кристалле).

Обратимся теперь к уравнению (4). Для случая небольших значений интенсивности I можно приближенно считать $N^+ = N_c$, где N_c – концентрация неактивных центров. Тогда с учетом того, что $N^+ = N_\rho + N_e$, имеем

$$\frac{\partial N^+}{\partial t} = \{ \beta + SI_0 [1 + m \cos(kz)] \} (N - N_c) - \gamma N_c N_e = \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\partial N_\rho}{\partial t}.$$

Отсюда следует еще одно уравнение:

$$\frac{\partial N_\rho}{\partial t} = (\beta + SI_0)(N - N_c) + SI_0 m_0 (N - N_c) \cos(kz) \cos(\Omega t) - \gamma N_c N_e^0 - \gamma N_c N_e' - \frac{\partial N_e'}{\partial t}. \quad (11)$$

Поскольку в принятом приближении.

$$\beta + SI_0 (N - N_c) - \gamma N_c N_e^0 = 0 \quad (12)$$

(последнее как раз определяет среднее значение N_e^0), то уравнение (11) принимает вид:

$$\frac{\partial N_\rho}{\partial t} + \frac{\partial N_e'}{\partial t} + \gamma N_c N_e' = B \cos(\Omega t), \quad (13)$$

где $B = SI_0 (N - N_c) m_0 \cos(kz)$,

Исключая из уравнений (10), (13) N_e' , нетрудно получить следующее уравнение 2-го порядка для N_ρ :

$$\frac{\partial^2 N_\rho}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_D} \right) \frac{\partial N_\rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_M \tau_r} N_\rho = \frac{1}{\tau_D} B \cos(\Omega t), \quad (14)$$

где $\tau_r = \frac{1}{\gamma N_c}$.

По внешнему виду это уравнение совпадает с известным дифференциальным уравнением малых вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы (см., например, [3]).

Общее решение неоднородного уравнения (14), как известно, равно сумме его частного решения $N_\rho^{(1)}$ и общего решения $N_\rho^{(2)}$ соответствующего однородного уравнения (т. е. при $B = 0$).

Решение $N_\rho^{(2)}$ можно представить в виде:

$$N_\rho^{(2)} = \frac{A \tau_M \tau_r}{\tau_D} \left[\frac{t_1}{t_1 - t_2} \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right) - \frac{t_2}{t_1 - t_2} \exp\left(-\frac{t}{t_2}\right) \right], \quad (15)$$

где A – произвольная постоянная, а величины $\frac{1}{t_1}$ и $\frac{1}{t_2}$ являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$\frac{1}{t^2} - \left(\frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_D} \right) \frac{1}{t} + \frac{1}{\tau_M \tau_r} = 0. \quad (16)$$

Из (15) видно, что в пределе $t \rightarrow \infty$ решение $N_\rho^{(2)} \rightarrow 0$, т. е. это решение является быстро затухающим со временем. Следовательно, можно считать, что при установившихся вынужденных колебаниях, $N_\rho = N_\rho^{(1)}$.

Поскольку уравнение (14) описывает гармонические колебания под действием вынуждающей силы, изменяющейся по гармоническому закону, то и установившиеся вынужденные колебания будут также гармоническими с той же частотой Ω , но с некоторым сдвигом по фазе. Следовательно, частное решение уравнения (14) можно искать в виде:

$$N_\rho = A \cos(\Omega t + \varphi). \quad (17)$$

Тогда при подстановке (17) для амплитуды вынужденных колебаний A и фазы φ получаем:

$$A = \frac{B}{\tau_D} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau_M \tau_r} - \Omega^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_D} \right)^2 \Omega^2}}, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\left(\frac{1}{\tau_M} + \frac{1}{\tau_r} + \frac{1}{\tau_D} \right) \Omega}{\left(\frac{1}{\tau_M \tau_r} - \Omega^2 \right)}.$$

Проведем анализ полученных выражений. Рассмотрим сначала случай малых частот, когда Ω много меньше любой из величин $\tau_M^{-1}, \tau_r^{-1}, \tau_D^{-1}$, т. е.

$$\Omega \ll (\tau_M^{-1}, \tau_r^{-1}, \tau_D^{-1}). \quad (19)$$

Заметим, что выполнение условия (19) автоматически приводит к выполнению условия

$$\Omega^2 \ll \tau_M^{-1} \tau_r^{-1}. \quad (19a)$$

При этом выражения (18) принимают вид

$$A = \frac{\tau_M \tau_r}{\tau_D} B, \quad (18a)$$

$$tg \varphi = -(\tau_r + \tau_M + \frac{\tau_M \tau_r}{\tau_D}) \Omega.$$

Выражение для амплитуды заряда решетки A в этом случае совпадает с выражением для концентрации пространственного заряда, полученным в работе [4] и отвечающим постоянной возбуждающей силе. Следовательно, в некоторой области частот (19) амплитуда заряда сохраняется постоянной, что влечет за собой неизменность и внутреннего поля решетки.

Из выражений (18a) следует также, что колебания заряда решетки при этом отстают по фазе от колебаний светового поля. Однако для малых частот Ω этот сдвиг по фазе является незначительным. Действительно, согласно оценкам [4], произведение

$$\tau_M \tau_r \sim 10^{-12} s^2 \quad (20)$$

для большинства ФР кристаллов. Поэтому для случая малых частот $\varphi \gg -45^\circ$.

Однако несмотря на справедливость соотношения (20) сами величины τ_M и τ_r могут сильно изменяться (на порядки) при переходе от одного кристалла к другому. Естественно, условие (19) численно может быть существенно различным для разных кристаллов. Как правило, $\tau_D \sim 10^{-8} s$. Согласно данным работы [5], для кристалла ниобата лития можно получить значения $\tau_r \sim 10^{-10} s$ и $\tau_M \sim 10^{-2} s$. При этом условие (19) дает $\Omega \ll 10^2 s^{-1}$. В то же время для кристалла силикосиллента по данным работы [6] $\tau_r \sim 10^{-7} s$ и $\tau_M \sim 10^{-5} s$. Для этого кристалла условие малости частоты означает, что $\Omega \ll 10^5 s^{-1}$. Как видно, малые частоты в случае одного кристалла могут быть большими для второго.

В связи со сказанным выше уместно исследовать поведение решеток заряда при больших частотах изменения возбуждающего поля. Рассмотрим этот вопрос на примере конкретного кристалла, например, ниобата лития. В этом случае выражение для амплитуды A (18) с достаточной степенью точности можно представить в виде

$$A = \frac{B}{\tau_D \sqrt{(10^{12} - \Omega^2)^2 + 10^{20} \Omega^2}}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что с возрастанием частоты Ω второе слагаемое в знаменателе (21) быстро достигает по величине значения первого и уже при $\Omega = 10^2 s^{-1}$ эти слагаемые становятся практически одинаковыми. Дальнейший рост частоты возбуждающего поля Ω приводит к росту всего подкоренного выражения в (21), в результате чего амплитуда заряда решетки монотонно падает. Таким образом, в данном случае существование резонанса невозможно. В этом состоит принципиальное отличие характера рассмотренного здесь случая колебательного поведения заряда решетки от колебаний механической системы.

Аналогичные выводы можно получить и в случае кристалла, для которого $\tau_M \ll \tau_r$.

Рассмотрим еще один важный случай, когда $\tau_M = \tau_r = \tau_D$. При этом для амплитуды A из (18) имеем

$$A = \frac{B}{t_D \sqrt{(10^{12} - \Omega^2)^2 + 9 \cdot 10^{12} \Omega^2}}. \quad (22)$$

Хотя здесь область малых частот уже гораздо шире, но и в этом случае явление резонанса невозможно. Так, при $\Omega \sim \frac{10^6}{3} s^{-1}$ амплитуда заряда решетки только в два раза меньше ее величины в статическом случае ($\Omega = 0$).

Таким образом, при изменении во времени с некоторой частотой Ω падающего на ФР кристалл неоднородного по интенсивности светового поля колебания заряда решетки, создаваемой этим полем, совершаются с той же частотой. Однако, несмотря на казалось бы полную аналогию процесса колебаний заряда решеток с колебательным процессом механической системы, в этом случае он существенно отличается от последнего тем, что явление резонанса здесь невозможно ни при каком соотношении электрических параметров кристалла.

Литература

1. Гусак Н. А. // ЖТФ. 2009. Т. 79, вып. 3. С. 63–70.
2. Кухтарев Н. В. // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2, вып. 24. С. 1114–1118.
3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М., 1961.
4. Гусак Н. А. // ЖТФ. 2006. Т. 76, вып. 2. С. 96–101.
5. Valley G. C. // IEEE J. Quant. Elect. 1983. QE-19. Vol. 11. P. 1637–1645.
6. Johansen P. M. // IEEE J. Quant. Elect. 1989. Vol. 25. P. 530–539.

N. A. GUSAK, N. S. PETROV

KINETICS OF SPACE-CHARGE GRATINGS IN THE PHOTOREFRACTIVE CRYSTAL WITH TIME VARIATION OF THE EXCITING LIGHT FIELD PATTERN

Summary

It is shown that an influence of an inhomogeneous light field changing with some frequency on a photorefractive crystal gives a space-charge grating changing with the same frequency. In spite of analogy to the oscillation process of the mechanical system, however in this case the resonance phenomenon is absent at any correlation of electric parameters of the crystal.

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО, Т. А. ЖУР

PIONEER ANOMALY КАК РЕЛИКТОВОЕ УСКОРЕНИЕ ПРОБНОГО ТЕЛА В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 01.10.2008)

Введение. В работах [1–4] рассмотрены различные модели сферически симметричного распределения плотности материи в шаре радиусом R , в центре которого находится сосредоточенная масса m (гравитирующий центр), а также найдены соответствующие этим распределениям масс гравитационные поля и уравнения движения тел внутри шара в ньютоновском приближении (НП) и постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности (ОТО). Эти модели могут интерпретировать ситуацию в некоторых системах типа «сосредоточенная масса плюс окружающее ее материальное облако» и определять особенности движения тел внутри облака. Но они не отражают всех тонкостей распределения *реликтовой материи* (РМ) в Солнечной системе (С.с.), т. е. материи, которая осталась (relict – остаточный, остаток) после образования Солнца и планет со спутниками.

Данная работа посвящена исследованию влияния *реликтового гравитационного поля* (РГП), порожденного РМ Солнечной системы, на движение малых по сравнению с планетами тел. Для этого следует: 1) прежде всего построить близкую к реальности модель распределения плотности РМ; 2) используя построенную модель, найти РГП; 3) в этом поле получить уравнения движения (УД) тел; 4) проинтегрировать эти УД; 5) выявить особенности (реликтовые эффекты) в движении тел; 6) дать числовые оценки предсказываемым эффектам в НП и ПНП ОТО.

В настоящей работе будут осуществлены три первых пункта намеченной программы исследований и только в НП ОТО. Попутно будет окончательно обосновано при использовании полученных УД утверждение: Pioneer anomaly является *реликтовым ускорением* (РУ) пробного тела в Солнечной системе. Предварительное обоснование этого утверждения содержится в [3].

1. Построение экспериментально обоснованной модели распределения плотности РМ в Солнечной системе. Согласно современным представлениям (см., например, [5–8]) С.с. является облаком неоднородной материи, заполняющей шар радиусом $R \approx (1,5 - 2) \cdot 10^5$ а.е. (1 а.е. $\approx 1,5 \cdot 10^{13}$ см – среднее расстояние от Земли до Солнца), в центре которого находится Солнце. Далее располагаются девять планет (от 0,4 а.е. – Меркурий до 40 а.е. – Плутон), «плавающие» в газопылевой составляющей межпланетной среды. Кроме газопылевой среды, в С.с. находится, как это выяснилось в последние два десятка лет в связи с бурным прогрессом в области наблюдательной техники (см. обзор в монографии [6] и [7, 8]), огромное количество порядка 10^{13} малых тел (комет, астероидов) диаметром от 1 до 1000 км. Они образуют целые пояса и облака, в которых тела распределены с разной плотностью.

В близком к Солнцу сферически-симметричном слое от поверхности Солнца до 2 а.е. находится сравнительно небольшое количество малых тел, но зато эта область заполнена плазмой хромосферы и солнечной короны, плотность которых достаточно высока и по оценкам специалистов [9–11] меняется от $10^{-8} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ в нижних слоях до $10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ в верхних слоях солнечной короны. Далее плотность короны и газопылевой составляющей падает и в окрестностях орбиты Земли оценивается $10^{-24} - 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Масса РМ в этом первом слое примерно равна 10^{29} г.

Следующий, второй, сферически-симметричный слой 2–6 а.е. замечателен тем, что в нем находится так называемый главный астероидный пояс и примерно $1,2 \cdot 10^7$ комет семейства Юпитера диаметром более 50–100 км, общая масса которых примерно равна $0,5m_3$ [12, 13] ($m_3 = 6 \cdot 10^{27}$ г – масса Земли). Объем шарового слоя 2–6 а.е. примерно равен $3 \cdot 10^{42}$ см³. Если массу этого шарового слоя разделить на его объем, то получим усредненную плотность РМ во втором слое: $\bar{\rho}_2 = 0,5m_3 / 3 \cdot 10^{42} \approx 10^{-15}$ г · см⁻³.

Особого внимания заслуживает насыщенная малыми телами область околосолнечного пространства, находящаяся примерно от 30 до 60 а.е. от Солнца, которую называют транснептуновым поясом или поясом Эджеверса–Койпера. Согласно наблюдениям и оценкам астрономов число тел диаметром более 1 км в этом поясе имеет порядок 10^{10} [14, 15] или даже 10^{11} [16]. Общая масса тел транснептунового пояса оценивается учеными по-разному: от $0,25m_3$ [17], $0,42m_3$ [18] до $10m_3$ [19, 20] или даже больше.

В области от 45 до 10^3 а.е., согласно проведенным исследованиям [21], находится 10^{13} объектов, суммарная масса которых равна нескольким сотням масс Земли.

Несколько уплощенное почти сферически-симметричное облако Хиллса находится на расстоянии порядка $10^3 - (2-3) \cdot 10^4$ а.е. от Солнца, содержит огромное количество комет и астероидов с общей массой порядка $1600m_3$ [22, 23].

И, наконец, на периферии С.с. на расстояниях $(2-3) \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5$ а.е. от Солнца находится сферически-симметричное облако Оорта, которое содержит $10^{12} - 10^{13}$ комет и астероидов с общей массой $16m_3$ (см. [24–26], [6–8]).

Согласно сделанному обзору распределения РМ можно утверждать, что она в среднем в С.с. распределена сферически-симметрично, но с разной плотностью ρ . Отсюда следует, что ρ является функцией расстояния r до центра С.с., т. е. $\rho = \rho(r)$. Кроме того, всю С.с. следует разделить не менее, чем на четыре сферических слоя: до 1 а.е., 1–5 а.е., 5–1005 а.е., $1005 - 2 \cdot 10^5$ а.е., в каждом из которых характер изменения плотности РМ подчинен своей закономерности. Если ввести на плоскости условную прямоугольную декартову систему координат Opr , то получим опорные экспериментальные точки $M_0(0, \rho_0)$, $M_1(r_1, \rho_1)$, $M_2(r_2, \rho_2)$, $M_3(r_3, \rho_3)$, $M_4(R, 0)$, через которые должна проходить кривая распределения плотностей РМ $\rho = \rho(r)$ (рис. 1). Для параметров $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, r_1, r_2, r_3, R$ выбираем экспериментально обоснованные значения:

$$\rho_0 = 3 \cdot 10^{-11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_1 = 10^{-24} - 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_2 = 3 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \rho_3 = 3 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (1)$$

$$r_1 = 1 \text{ а.е.}, \quad r_2 = 5 \text{ а.е.}, \quad r_3 = 1005 \text{ а.е.}, \quad R = 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.} \quad (2)$$

Уравнение кривой распределения плотностей $\rho = \rho(r)$ неизвестно, но эту кривую мы можем аппроксимировать ломаной из четырех звеньев, вершины которой находятся в опорных точках $M_\alpha, \alpha = \overline{0, 4}$ (см. рис. 1). Таким образом, принимаем полигональную модель распределения плотности РМ из четырех звеньев (в [3, 27] рассматривалась полигональная модель из трех звеньев и тем самым не учитывались облака Хиллса и Оорта). Тогда формулы для $\rho = \rho(r)$ в каждом слое имеют вид:

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{r}{r_1}, \quad 0 = r_0 < r \leq r_1; \quad (3)$$

$$\rho = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (4)$$

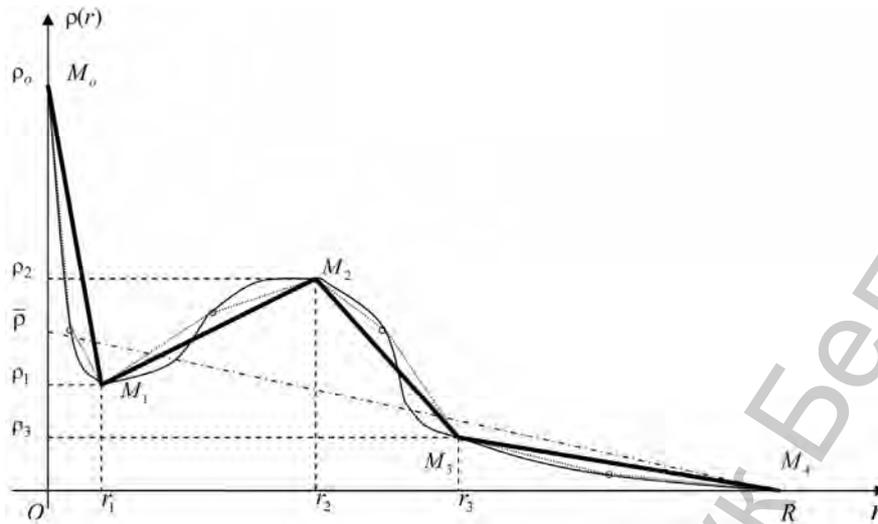


Рис. 1. Схема качественного распределения плотности $\rho(r)$ реликтовой материи Солнечной системы согласно (3)–(7), (1), (2) (масштабы по осям не соблюдаются). Сплошная тонкая линия изображает примерное поведение истинной плотности реликтовой материи. Эту линию можно аппроксимировать с любой степенью точности ломаной с нужным количеством звеньев n . Одна из таких возможных ломаных при $n = 8$ изображена пунктирными отрезками. Штрихпунктирная линия обозначает усредненное значение реликтовой материи

$$\rho = \rho_2 + (\rho_3 - \rho_2) \frac{r - r_2}{r_3 - r_2}, \quad r_2 \leq r \leq r_3; \quad (5)$$

$$\rho = \rho_3 - \rho_3 \frac{r - r_3}{R - r_3} = \rho_3 \frac{R - r}{R - r_3}, \quad r_3 \leq r \leq r_4 = R; \quad (6)$$

$$\rho = 0, \quad R \leq r < +\infty. \quad (7)$$

2. Нахождение РГП и вывод УД пробного тела в Солнечной системе. В НП ОТО уравнения Эйнштейна с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна–Инфельда сводятся в случае нашей задачи к одному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^1{}^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^2{}^2} + \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^3{}^2} = 8\pi\gamma [m\delta(\vec{r}) + \rho(r)], \quad (8)$$

а три уравнения геодезической, которые являются УД пробного тела, имеют вид:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0, \quad (9)$$

где x^i – координаты точки M в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой находится в центре Солнечной системы; $r = (x^1{}^2 + x^2{}^2 + x^3{}^2)^{1/2}$, $\vec{r} = x^i \vec{e}_i$ – радиус-вектор точки $M(x^i)$, \vec{e}_i – базисные векторы, $|\vec{e}_i| = 1$, $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$; $\delta(\vec{r})$ – трехмерная функция Дирака; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}$ – ньютоновская постоянная тяготения; t – ньютоновское время (более подробно см. [1, 28]).

С помощью стандартных методов решаем уравнение (8) (см., например, [29]), учитывая выражения для $\rho(r)$ в слоях (3)–(7), и находим выражения для функции g_{00} в каждом слое, которые не выписываем из-за их громоздкости. Эти выражения для g_{00} на границах слоев гладко «сшиваются», т. е. g_{00} и $\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}$ на границах слоев являются, как и всюду, непрерывными функциями r .

Наконец, найденные выражения для g_{00} подставляем в (9) и приходим к точным ньютоновским УД пробного тела в слоях (3)–(7). В векторной форме эти впервые выведенные УД имеют вид:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\left(4\rho_0 - 3\rho_0\frac{r}{r_1} + 3\rho_1\frac{r}{r_1}\right)\vec{r} = 0, \quad 0 < r \leq r_1; \quad (10)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\left[4\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}(3r - 4r_1) + \left(\rho_0 - \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}r_1\right)\frac{r_1^3}{r^3}\right]\vec{r} = 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad (11)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\left\{4\rho_2 + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2}(3r - 4r_2) + \frac{1}{r^3}\left[(\rho_0 - \rho_1)r_1^3 + 4(\rho_1 - \rho_2)r_2^3 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}(r_1^4 - 4r_1r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2}r_2^4\right]\right\}\vec{r} = 0, \quad r_2 \leq r \leq r_3; \quad (12)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\left\{\left[(\rho_0 - \rho_1)r_1^3 + 4\rho_1r_2^3 + 4\rho_2(r_3^3 - r_2^3) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}(r_1^4 - 4r_1r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2}(r_2^4 - 4r_2r_3^3 + 3r_3^4) + \frac{\rho_3r_3^3}{R - r_3}(3r_3 - 4R)\right]\frac{1}{r^3} + \frac{\rho_3}{R - r_3}(4R - 3r)\right\}\vec{r} = 0, \quad r_3 \leq r \leq R; \quad (13)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{\gamma m}{r^3}\vec{r} + \frac{1}{3}\pi\gamma\left\{(\rho_0 - \rho_1)r_1^3 + 4\rho_1r_2^3 + 4\rho_2(r_3^3 - r_2^3) + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}(r_1^4 - 4r_1r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2}(r_2^4 - 4r_2r_3^3 + 3r_3^4) + \frac{\rho_3}{R - r_3}(R^4 - 4Rr_3^3 + 3r_3^4)\right\}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad R \leq r < +\infty. \quad (14)$$

Следствием непрерывности $\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i}$ на границах слоев является непрерывность ускорения $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ во всем интервале $0 < r < +\infty$, т. е. УД (10)–(14) также непрерывно «сшиваются» на границах слоев.

Уместным будет отметить, что УД (10)–(14) можно представить в компактном виде (аналогично УД (9)):

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma\frac{m + M(r)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad (9^*)$$

где масса M $M(r)$ находится по формуле:

$$M(r) = \iiint_V \rho(r)dV = 4\pi\int_0^r \rho(r)r^2 dr.$$

Из УД (9*) следует, что движение внутри материального шара можно считать происходящим по закону, совпадающему с законом движения пробного тела в гравитационном поле, создаваемом центральным телом с переменной массой $m + M(r)$.

3. Простейшие следствия из УД (10)–(14).

Прежде всего, при экспериментально обоснованных для Солнечной системы значениях восьми параметров (1), (2) коэффициенты в (10)–(14), зависящие от M и стоящие перед \vec{r} , всегда положительны, что проверяется прямой подстановкой значений (1), (2) в (10)–(14). Этот вывод также вытекает из (9*) и очевидного неравенства $M(r) > 0$. Отсюда немедленно следует, что

в любой точке Солнечной системы на пробное тело действует дополнительное ускорение, названное нами реликтовым ускорением, которое *строго* направлено на Солнце, как и основное ускорение $\vec{a}_C = -\gamma m \vec{r} / r^3$, создаваемое гравитационным полем Солнца.

Нас особо будет интересовать величина РУ в третьем слое $r_2 = 5 \text{ а.е.} \leq r \leq 1005 \text{ а.е.} = r_3$, с которым связана так называемая проблема Pioneer anomaly и суть которой состоит в следующем. С целью исследования межпланетного пространства в 1972 и 1973 г. были запущены космические аппараты (КА) Pioneer 10 и Pioneer 11. После тщательной обработки информации, переданной этими КА при их движении к Юпитеру, Сатурну и далее в открытый космос, выяснилось, что на КА кроме ускорений, вызываемых гравитационными полями Солнца и планет со спутниками, воздействовало некоторое дополнительное неизвестной природы ускорение, которое было строго направлено на Солнце и в диапазоне расстояний от Солнца 20–70 а.е. по модулю равнялось величине

$$a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2} \quad (15)$$

(см. обзорные работы [30, 31]). Возникла проблема: выяснить природу, а также постоянный источник этого дополнительного ускорения. Эта проблема получила название «Pioneer anomaly» и для ее решения было выдвинуто и обсуждено на протяжении десятков лет множество идей и гипотез, опубликованы сотни работ. Но специалисты в этой области до сих пор считают, что проблема не получила своего разрешения.

В настоящей работе выдвигается и обосновывается гипотеза: Pioneer anomaly является РУ, порожденным РГП, которое в свою очередь возникает благодаря наличию РМ, причем основную роль играет не газопылевая составляющая РМ, а совокупное гравитационное поле множества малых тел Солнечной системы (комет, астероидов семейства Юпитера, объектов пояса Эджеверса–Койпера, облаков Хиллса и Оорта).

Для обоснования этой гипотезы в НП ОТО все подготовлено. Как отмечено выше, РУ пробного тела в любом слое *строго* направлено на Солнце. Остается вычислить модуль РУ в третьем слое, выражение для которого находим из (12):

$$a_3 = |\vec{a}_3| = \frac{1}{3} \pi \gamma \left\{ 4\rho_2 r + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} (3r - 4r_2)r + \frac{1}{r^2} \left[(\rho_0 - \rho_1)r_1^3 + 4(\rho_1 - \rho_2)r_2^3 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1} (r_1^4 - 4r_1r_2^3 + 3r_2^4) + \frac{\rho_3 - \rho_2}{r_3 - r_2} r_2^4 \right] \right\}. \quad (16)$$

Подставляя в (16) экспериментально обоснованные значения параметров (1), (2), в диапазоне $20 \text{ а.е.} \leq r \leq 70 \text{ а.е.}$ легко находим:

$$\begin{aligned} a_3(20 \text{ а.е.}) &= 10,36 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(30 \text{ а.е.}) &= 7,21 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(40 \text{ а.е.}) &= 6,86 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(50 \text{ а.е.}) &= 7,42 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_3(60 \text{ а.е.}) &= 8,26 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_3(70 \text{ а.е.}) &= 9,03 \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как видим, значения (17) для a_3 практически повторяют значения (15) для a_p и тем самым есть основания считать, что наше предположение из разряда гипотез переходит в разряд научно обоснованных истин: $a_p = a_3 = \text{РУ}$ пробного тела в Солнечной системе.

Отметим также, что структура a_3 (16) указывает на ничтожное влияние четвертой зоны, где находятся облака Хиллса и Оорта, на величину a_3 , так как последний член в (16) для r в диапазоне $r_2 \leq r \leq r_3$ имеет наибольшее значение $\approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ при параметрах (1), (2). Отсюда следует, что облака Хиллса и Оорта не причастны к Pioneer anomaly, но создают РУ в зоне $r_3 \leq r \leq R$. Поэтому вывод работы [3], основанный на полигональной трехзвенной модели и утверждающий, что a_p является РУ пробного тела в Солнечной системе, можно также считать обоснованным уже в 2007 г.

Будет интересным привести прогнозные значения РУ пробных тел и планет в других диапазонах расстояний r до Солнца.

Пользуясь (10) и (1), (2) находим РУ: в окрестностях орбиты Меркурия $a_1(0,4 \text{ а.е.}) = 3,53 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Венеры $a_1(0,7 \text{ а.е.}) = 4,19 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Земли $a_1(1,0 \text{ а.е.}) = 3,15 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. Далее из (11) и (1), (2) находим РУ: в окрестностях орбиты Марса $a_2(1,5 \text{ а.е.}) = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; в окрестностях орбиты Юпитера $a_2(5,0 \text{ а.е.}) = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. На ближней к Солнцу границе облака Хилса согласно (12) и (1), (2) РУ $a_3(10^3 \text{ а.е.}) = 0,33 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$; на дальней границе согласно (13) и (1), (2) РУ $a_4(3 \cdot 10^4 \text{ а.е.}) = 0,36 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$. Наконец, на границе С.с. РУ $a_4(2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}) = 0,147 \cdot 10^{-10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$ (воспользовались (14) при $r = R$ и (1), (2)). На рис. 2 дан график РУ.

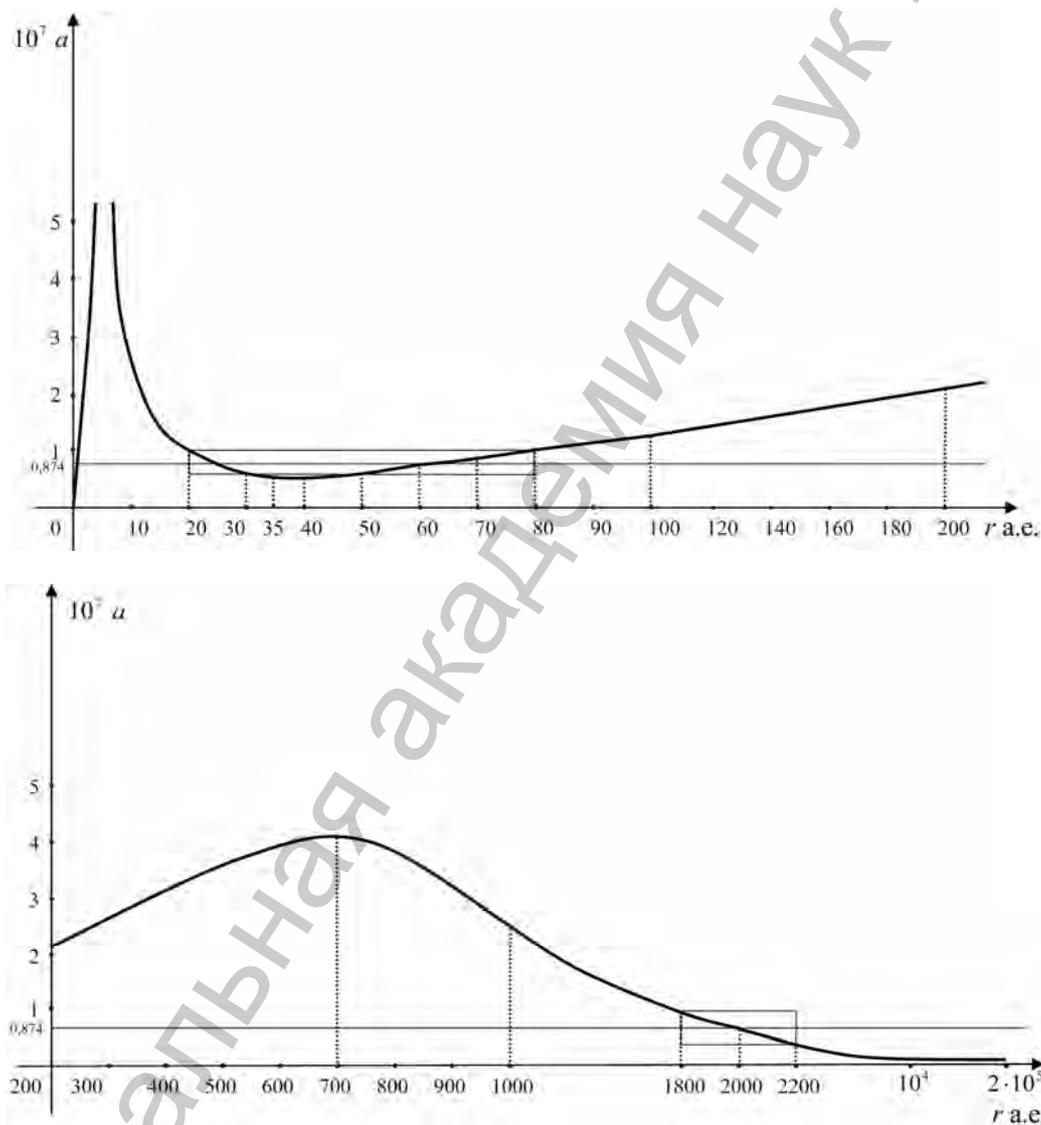


Рис. 2. График поведения РУ a в интервале $0 < r < R = 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}$ (масштаб по оси Ор – меняющийся) для параметров (1), (2). В интервалах $0 < r < 1$, $100 < r < 1005$ график выпуклый, в интервалах $1 < r < 100$, $1005 < r < 2 \cdot 10^5$ график вогнутый. В точках $r = 1$, $r = 100$, $r = 1005$ имеем точки перегиба. В точках $r = \frac{2}{3}$, $r = 700$ локальный максимум, в точке $r \approx 35$ – локальный минимум. В интервалах $20 \text{ а.е.} < r < 80 \text{ а.е.}$ и $1800 \text{ а.е.} < r < 2200 \text{ а.е.}$ РУ $a \approx a_p = (8,74 \pm 1,33) \cdot 10^{-8} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}$

Для сравнения выпишем значения ускорений, которые испытывают пробные тела под воздействием гравитационного поля Солнца, т. е. укажем значения $a_C = |\vec{a}_C| = \frac{\gamma m}{r^2}$ на разных расстояниях от Солнца. Имеем:

$$\begin{aligned} a_C(0,4 \text{ а.е.}) &= 3,69 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_C(0,7 \text{ а.е.}) &= 1,21 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_C(1 \text{ а.е.}) &= 0,59 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_C(5 \text{ а.е.}) &= 2,38 \cdot 10^{-2} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_C(20 \text{ а.е.}) &= 1,48 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_C(40 \text{ а.е.}) &= 0,37 \cdot 10^{-4} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_C(10^3 \text{ а.е.}) &= 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, & a_C(3 \cdot 10^4 \text{ а.е.}) &= 0,66 \cdot 10^{-9} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}, \\ a_C(2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}) &= 0,148 \cdot 10^{-10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) следует, что значения $\text{PУ } a_1, a_2$ малы по сравнению с a_C на тех же расстояниях, но вдали от Солнца в диапазоне $10^3 \text{ а.е.} \leq r \leq 2 \cdot 10^5 \text{ а.е.}$ $\text{PУ } a_3, a_4$ практически сравниваются с a_C , что должно существенно влиять на формирование орбит и орбитальных скоростей малых тел в этом диапазоне.

В заключение заметим, что наше исходное предположение (3)–(7) о полигональном законе распределения плотности РМ является хорошим, но все-таки приближением к истине. Не испытывая принципиальных затруднений, это приближение можно неограниченно улучшать, вписывая в истинную кривую распределения плотности РМ $\rho = \rho(r)$ ломаную не из четырех, а из пяти, шести и т. д. звеньев (см. рис. 1). Кроме того, дальнейшее приближение к истине может происходить по пути экспериментального уточнения значений параметров ρ_i, r_i , замены сферически симметричного распределения РМ, например, на осесимметричное, эллипсоидальное и т. д.

Более подробные исследования УД (10)–(14) и обобщение на ПНП ОТО будут осуществлены в следующих работах авторов.

Литература

1. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Весні НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2006. № 3. С. 64–71.
2. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Весні НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2007. № 2. С. 86–90.
3. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Научно-инновационная деятельность и предпринимательство в АПК: проблемы эффективности и управления. Сб. научн. статей. Минск, 2007. Ч. 1. С. 95–102.
4. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Весні НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2009. № 1. С. 70–75.
5. Маров М. Я. Планеты Солнечной системы. М., 1986.
6. Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе. М., 2000.
7. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
8. Стражев В. И. К тайнам Вселенной. Минск, 2006.
9. Всехсвятский С. К. // Проблемы современной космогонии. М., 1972.
10. Никольский Г. М. Солнечная система и межпланетное пространство. М., 1975.
11. Лившиц М. А. Солнечная корона. Маленькая Энциклопедия «Физика космоса». М., 1976.
12. Bailey M. E. // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1992. Vol. 54, N 1. P. 49–61.
13. Levison H. F., Duncan M. J. // Icarus, 1997. Vol. 127. P. 13–23.
14. Duncan M. J., Levison H. F., Budd S. M. // Astron. J. 1995. Vol. 110. P. 3073–3081.
15. Davis D., Farinella P., Marzari F. // Abstracts of 28th Lunar and Planetary Science Conference. Houston, USA. 1997.
16. Jewitt D. // Annu. Rev. Earth. Planet. Sci. 1999. Vol. 27. P. 287–312.
17. Jewitt D., Luu J., Chen J. // Astron. J. 1996. Vol. 112. P. 1225–1238.
18. Stern S. A. // Astron. J. 1995. Vol. 110. N 2. P. 856–868.
19. Эннеев Т. М. // Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР. 1979. № 166.
20. Fernandez J. A. // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 1980. Vol. 192. N 2. P. 481–491.
21. Weissman P. R. // Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1995. Vol. 33. P. 327–357.
22. Hills J. G. // Astron. J. 1981. Vol. 86. N 11. P. 1730–1740.
23. Bailey M. E. // Nature. 1990. Vol. 345. P. 21–22.
24. Weissman P. R., Levison H. F. // Abstracts of 28th Lunar and Planetary Science Conference. Houston, USA. 1997.
25. Talkot R. // Astronomy. August. 1999. P. 24.
26. Wiegert P., Tremaine S. // Icarus. 1999. Vol. 137. P. 84–121.
27. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Тезисы докл. XII Международной научн. конф. по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения-2007). Минск, май 2007. Минск, 2007. С. 112–113.
28. Рябушко А. П., Жур Т. А. // Весні НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2005. № 4. С. 77–85.
29. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. М., 1961.
30. Anderson J. D. [и др.] // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 65. P. 1–50.
31. Nieto M. M., Turyshev S. G. // Class. Quant. Grav. 2004. Vol. 21. P. 4005–4023.

A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR

PIONEER ANOMALY AS THE RELICT ACCELERATION OF A TEST BODY IN THE SOLAR SYSTEM

Summary

The affirmation is substantiated: Pioneer anomaly is the relict acceleration of a test body in the Solar system.

ІНФАРМАТЫКА

УДК 619.85

С. В. ЧЕБАКОВ

АЛГОРИТМЫ ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 31.10.2008)

Введение. Вопросы организации параллельных вычислений для решения оптимизационных комбинаторных задач, определенных на конечных множествах начальных данных с целью минимизации времени их выполнения являются востребованными с практической точки зрения, так как многие из них являются задачами переборного типа, и время их выполнения зависит от числа элементов, составляющих множество начальных данных. При больших значениях этой величины время решения существенно возрастает. Рассматриваются задачи, решением которых является некоторое подмножество начальных данных. Включение альтернатив в оптимальное подмножество задается определенным правилом, исходя из которого и формируется алгоритм решения данной задачи.

1. Общая схема алгоритма параллельных вычислений.

О п р е д е л е н и е 1. Частичным решением комбинаторной задачи назовем ее решение на некотором подмножестве всего множества начальных данных.

При организации параллельных вычислений мы предполагаем, что существуют независимые части алгоритма решения комбинаторной задачи, которые могут быть реализованы в параллельном режиме и результаты каждой отдельной части алгоритма используются на его последующих шагах.

Разобьем все множество начальных альтернативных вариантов на L отдельных подмножеств H_i , $i = \overline{1, L}$. Пусть $L = 2$ и на первом уровне параллельных вычислений определены множества B_{11} и B_{12} , которые являются частичными решениями на подмножествах H_1 и H_2 . На втором уровне параллельных вычислений требуется определить частичное решение B_{21} на объединении подмножеств H_1 и H_2 . Объединение этих подмножеств совпадает со всем множеством начальных данных и, следовательно, B_{21} является решением искомой оптимизационной задачи. Для построения множества B_{21} необходимо рассмотреть, например, частичное решение B_{11} и все элементы подмножества начальных данных H_2 . Но в режиме параллельных вычислений одновременно с множеством B_{11} было сформировано множество B_{12} , представляющее собой частичное решение на множестве H_2 . Эффективность параллельных вычислений для решения заданной комбинаторной задачи является максимальной, если для формирования B_{21} необходимо рассмотреть только альтернативы, составляющие частичное решение B_{12} . Эффективность уменьшается с ростом числа рассматриваемых альтернатив подмножества H_2 , не входящих в множество B_{12} и равна нулю, если для построения частичного решения B_{21} необходимо рассматривать все альтернативы подмножества H_2 . Очевидно, что в последнем случае результаты параллельных вычислений на первом уровне в виде частичного решения B_{12} не использовались и сокра-

шение времени решения задачи не произошло. Можно ли ограничиться на втором уровне параллельных вычислений элементами только частичного решения, зависит от постановки исходной оптимизационной задачи и от предлагаемых алгоритмов ее решения.

Если число подмножеств H_i достаточно велико, то нахождение решения комбинаторной задачи в режиме параллельных вычислений представляет собой многоуровневый процесс формирования частичных решений B_{ij} . Его можно представить в виде ориентированного графа древовидной структуры, начальные вершины которого – подмножества H_i , вершины на последующих уровнях – множества B_{ij} , а ребра, связывающие две вершины дерева указывают, элементы каких частичных множеств являются начальными данными для следующего уровня параллельных вычислений. Число вершин очередного уровня и связь между отдельными вершинами не задается заранее, а формируется в процессе реализации параллельных вычислений. Множество B_{ij} , соответствующее некоторой вершине графа V , представляет собой частичное решение на объединении подмножеств начальных данных H_i , из вершин которых существует путь, ведущий в вершину V . Частичное решение на последнем уровне графа собственно и есть решение рассматриваемой оптимизационной задачи.

Таким образом, основным вопросом при разработке алгоритмов параллельных вычислений для задач рассматриваемого типа является нахождение условий, позволяющих при нахождении каждого частичного решения B_{ij} структурировать подмножество начальных данных и определять альтернативы, которые можно исключить из дальнейшего рассмотрения на последующих уровнях. Если попытка сформулировать такие условия не дала результата, то можно поставить под сомнение саму возможность решения данной задачи в режиме параллельных вычислений. Отметим, что возможность формирования по некоторому алгоритму частичного решения B_{ij} еще не означает что альтернативы, не вошедшие в B_{ij} , не требуется рассматривать на последующих уровнях параллельных вычислений. Далее на примере двух оптимизационных задач показаны различные подходы к построению алгоритмов параллельных вычислений.

2. Организация параллельных вычислений для решения многокритериальной задачи нахождения множества Парето. Рассмотрим первую классическую задачу нахождения множества Парето на конечном наборе альтернативных вариантов [1]. Имеется множество начальных альтернативных вариантов, каждому из которых соответствует его многокритериальная оценка. В заданном критериальном пространстве задается отношение предпочтения между отдельными альтернативами. Будем говорить, что альтернатива A доминирует альтернативу C , если A превосходит C по всем заданным критериям оптимизации. Для построения множества Парето требуется найти все недоминируемые альтернативы на множестве начальных данных. Очевидно, что частичные решения B_{ij} представляют собой паретовские множества на некотором подмножестве начальных данных.

Пусть отношение предпочтения между отдельными альтернативами транзитивно.

У т в е р ж д е н и е 1. Если альтернатива A не вошла на некотором i -м уровне параллельных вычислений в частичное решение B_{ij} , то она не может войти как в частичное решение $B_{i+1,q}$ на следующем уровне, так и в частичные решения на всех последующих уровнях параллельных вычислений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Частичное решение $B_{i+1,q}$ представляет собой паретовское множество на некотором множестве начальных данных. По определению паретовского множества для каждой альтернативы A из множества начальных данных, не вошедшей в частичное решение B_{ij} , существует в B_{ij} хотя бы один доминирующий ее элемент P . Пусть альтернатива P на следующем уровне параллельных вычислений включается в соответствующее частичное решение $B_{i+1,q}$. Так как альтернатива A доминируется альтернативой P , то она не может войти в ча-

стичное решение $B_{i+1,q}$. Второй возможный случай, когда альтернатива P при формировании частичного решения $B_{i+1,q}$ доминируется некоторой альтернативой F и не может быть включена в $B_{i+1,q}$. Вследствие транзитивности отношения предпочтения альтернатива F будет доминировать не только P , но и альтернативу A . Тогда A также не может войти в частичное решение $B_{i+1,q}$. Все частичные решения на последующих уровнях представляют собой паретовские множества и отношение предпочтения транзитивно. Следовательно, альтернатива A не может войти и в частичные решения на последующих уровнях параллельных вычислений. Утверждение доказано.

Таким образом, если отношение предпочтения транзитивно, то альтернативы, являющиеся доминируемыми на любом шаге параллельных вычислений, не могут войти в частичные решения B_{ij} на всех последующих уровнях. Так как частичное решение на последнем уровне представляет собой решение всей искомой задачи, то доминируемые альтернативы, определяемые при формировании любых частичных решений B_{ij} , могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения.

Утверждение 1 дает возможность использовать для нахождения множеств B_{ij} на втором и последующих уровнях параллельных вычислений только элементы частичных решений, полученных на предыдущем уровне, что удовлетворяет критерию максимальной эффективности. Главное условие – транзитивность отношения предпочтения. В этом случае предложенная схема организации параллельных вычислений для нахождения множества Парето на конечном числе альтернативных вариантов является достаточно эффективной. Если отношение предпочтения не транзитивно, то вывод об исключении из дальнейшего рассмотрения всех альтернатив, не входящих в частичные решения, вообще говоря, неверен, и требуются дополнительные рассуждения с учетом возможной специфики рассматриваемой задачи. Кроме того, так как каждое частичное решение представляет собой отдельное паретовское множество и новое частичное решение формируется на основе двух или нескольких частичных решений предыдущего уровня, то возникает собственная оптимизационная задача разработки алгоритма нахождения множества Парето на объединении конечного числа отдельных паретовских множеств, решение которой позволило бы в определенной степени увеличить эффективность предлагаемых методов.

3. Двухкритериальная модель параллельных вычислений для решения комбинаторной «задачи о ранце». Рассмотрим еще одну комбинаторную задачу, так называемую «задачу о ранце» в следующей постановке. Имеется множество альтернативных вариантов достижения заданной цели. Каждой альтернативе соответствует время ее выполнения и вероятность достижения цели. Общее время процесса достижения цели при последовательном выполнении вариантов до момента, когда цель будет достигнута, не должно превышать заданной величины T . Допустимым подмножеством вариантов считается подмножество, если суммарное время выполнения составляющих его альтернатив не превышает заданной величины T и при добавлении хотя бы одной альтернативы общее время выполнения становится больше T . Каждому допустимому подмножеству соответствует суммарная вероятность входящих в него альтернатив. Требуется среди всех допустимых подмножеств определить подмножество с максимальной суммарной вероятностью достижения цели. Очевидно, что эта оптимизационная задача включается в класс рассматриваемых в данной работе задач. Однако, в отличие от задачи нахождения множества Парето, альтернативные варианты в «задаче о ранце» являются основой для построения допустимых подмножеств, среди которых и осуществляется поиск оптимального варианта.

Анализ применяемых алгоритмов решения «задачи о ранце» [2, 3] показал, что авторами не предлагалось введение какого-либо отношения предпочтения между исходными альтернативами для определения приоритета включения их в допустимые подмножества. Вместе с тем, существование такого отношения является ключевым для возможности организации параллельных вычислений. Если подобного отношения предпочтения не существует, то при построении частичных решений B_{ij} затруднительно каким-либо образом структурировать и исключить из рассмотрения часть начальных альтернатив, и в этом случае эффект от организации параллельных вычислений полностью исчезает.

Очевидно, что частичным решением в рассматриваемой задаче является допустимое подмножество с максимальной суммарной вероятностью достижения заданной цели, построенное на некотором подмножестве начальных альтернатив. В работе [4] автором следующим образом введено двухкритериальное отношение предпочтения между альтернативными вариантами A и C достижения заданной цели. Альтернатива A доминирует альтернативу C , если A имеет большую вероятность достижения цели и меньшее время выполнения. Очевидно, что введенное отношение предпочтения транзитивно. Существование многокритериального отношения предпочтения между отдельными альтернативами дает возможность при построении частичных решений B_{ij} упорядочить соответствующие подмножества начальных альтернатив, разбивая их на паретовские слои в заданном критериальном пространстве.

О п р е д е л е н и е 2. Паретовским слоем с номером $N + 1$ называется паретовское множество на множестве начальных данных, полученное после исключения из первоначального набора альтернатив всех элементов первых N паретовских слоев. Собственно множество Парето на заданном множестве альтернативных вариантов является первым паретовским слоем.

О п р е д е л е н и е 3. Верхней критериальной границей паретовского множества P назовем вектор L^+ , чьи координаты представляют собой максимум по каждой координате на всем множестве P . Нижней критериальной границей множества P назовем вектор L^- , чьи координаты представляют собой минимум по каждой координате на множестве P .

Из способа построения векторов L^+ и L^- получаем, что L^+ доминирует любую альтернативу множества P , а вектор L^- доминируется каждой альтернативой из P . Следовательно, по определению множества Парето, векторы L^+ , L^- не могут совпадать ни с одной альтернативой множества P при условии, что множество P отлично от единственного элемента.

Пусть все множество альтернативных вариантов в «задаче о ранце» разбито на подмножества H_i . Все H_i представлены в виде паретовских слоев S_{ij} , $j = \overline{1, n_i}$ в заданном критериальном пространстве и B_i является частичным решением на подмножестве H_i . Каждый из паретовских слоев S_{ij} , $j = \overline{1, n_i}$ имеет собственные верхние и нижние критериальные границы L^+_{ij} , L^-_{ij} .

У т в е р ж д е н и е 2. Верхняя критериальная граница L^+_{ij} паретовского слоя с номером j доминирует все верхние критериальные границы L^+_{ik} , $k > j$ последующих паретовских слоев.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что вектор L^+_{ij} доминирует верхнюю критериальную границу L^+_{ij+1} следующего паретовского слоя. Допустим, это предположение неверно, и вектор L^+_{ij} доминируется вектором L^+_{ij+1} либо находится с ним в отношении Парето. Тогда существует хотя бы одна координата из заданного критериального пространства, по которой вектор L^+_{ij+1} превосходит вектор L^+_{ij} . Вектор L^+_{ij} , по определению 3, состоит из максимальных значений по каждой координате среди альтернатив паретовского слоя S_{ij} . Тогда существует альтернатива Y из паретовского слоя S_{ij+1} , которая хотя бы по одной координате доминирует все альтернативы паретовского слоя S_{ij} . Это означает, что не существует ни одной альтернативы в паретовском слое S_{ij} , которая доминировала бы альтернативу Y , что противоречит алгоритму построения паретовского слоя S_{ij+1} . Следовательно, верхняя критериальная граница L^+_{ij} паретовского слоя S_{ij} может только доминировать верхнюю критериальную границу следующего паретовского слоя S_{ij+1} . Аналогичным образом можно показать, что верхняя критериальная граница L^+_{ij+1} паретовского слоя S_{ij+1} доминирует верхнюю критериальную границу L^+_{ij+2} паретовского слоя S_{ij+2} . Из транзитивности введенного отношения предпочтения следует, что вектор L^+_{ij} домини-

рует вектор L_{ij+2}^+ . Таким же образом, можно показать, что вектор L_{ij}^+ доминирует верхние критериальные границы всех последующих паретовских слоев.

У т в е р ж д е н и е 3. Если нижние критериальные границы паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ доминируют верхнюю критериальную границу паретовского слоя $S_{iv}, v > k$, и сумма времени выполнения всех альтернатив первых паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ больше величины T , то альтернативы паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, не могут войти как в частичное решение B_i , так и в частичные решения на последующих уровнях параллельных вычислений

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения 2, а также транзитивности введенного отношения предпочтения следует, что нижние критериальные границы всех первых паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ доминируют верхние критериальные границы слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$. Из свойств векторов L_{ij}^+, L_{ij}^- следует, что любая альтернатива из паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ доминирует любую альтернативу паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, т. е. имеет меньшее время выполнения и большую вероятность достижения цели. Так как сумма времени выполнения всех элементов первых k паретовских слоев больше величины T , то из элементов $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ можно построить некоторое число допустимых подмножеств $D_r, r = \overline{1, g}$. Предположим, что последующие допустимые подмножества формируются только из элементов паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$. Поскольку каждый из данных элементов имеет большее время выполнения, чем элементы паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{1, k}$, то общее число альтернатив в формируемых подмножествах не превосходит числа элементов в любом из подмножеств D_r . Кроме того, элементы из $S_{ij}, j = \overline{1, k}$ имеют большую вероятность достижения цели, и, следовательно, все допустимые подмножества, включающие в себя альтернативы только из паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, будут иметь меньшую суммарную вероятность, чем допустимые подмножества D_r . Если очередное допустимое подмножество формируется из некоторого D_r путем замены в нем некоторого элемента на альтернативу из паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, то суммарная вероятность формируемого подмножества также будет иметь меньшее значение, чем суммарная вероятность D_r . Таким образом, если формируемое допустимое подмножество включает в себя хотя бы одну альтернативу из паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, то его суммарная вероятность всегда имеет меньшее значение, чем у любого $D_r, r = \overline{1, g}$. Следовательно, альтернативы паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$ нет смысла рассматривать при формировании частичного решения B_i на рассматриваемом уровне организации параллельных вычислений. Из факта транзитивности отношения предпочтения и приоритета включения в допустимые подмножества доминирующих альтернатив следует, что эти же альтернативы не могут войти в частичные решения и на последующих уровнях параллельных вычислений. Утверждение доказано.

Таким образом, в случае выполнении условий утверждения 3 при построении некоторого частичного решения B_i существует подмножество U_i , включающее в себя все альтернативы паретовских слоев $S_{ij}, j = \overline{v, n_i}$, элементы которого могут быть исключены из рассмотрения на всех последующих уровнях, что является основным условием применения алгоритма параллельных вычислений для решения рассматриваемой комбинаторной задачи.

Утверждение 3 говорит о достаточных условиях существования подмножеств U_i . Предположим, что U_i является не единственным подмножеством, чьи элементы могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения при построении частичного решения B_i . В этом случае возникает задача нахождения подмножества $U_{i\text{опт}}$ с максимально возможным числом элементов. Построение

подмножества $U_{\text{опт}}$ дает возможность уменьшить число начальных данных на каждом уровне параллельных вычислений, что может существенно повысить их эффективность. Далее предлагается алгоритм решения этой задачи, основанный на представлении паретовского множества в виде объединения подмножеств с упорядоченными верхними и нижними критериальными границами.

Рассмотрим некоторое паретовское множество P_m . Определим верхнюю L_{m1}^+ и нижнюю L_{m1}^- критериальные границы множества P_m . Выделим из множества P_m те элементы, которые содержат хотя бы одну свою координату либо в векторе L_{m1}^+ , либо в векторе L_{m1}^- . Обозначим это подмножество Z_{m1}^* . Множество P_{m1}^* определим следующим образом: $P_{m1}^* = P_m \setminus Z_{m1}^*$. Очевидно, что P_{m1}^* также представляет собой паретовское множество. Построим далее векторы L_{m2}^+ и L_{m2}^- , координаты которых представляют собой максимальные и минимальные значения соответствующих координат элементов множества P_{m1}^* . Если все критериальные оценки альтернатив множества P_m не равны между собой, то, исходя из способа их построения, вектор L_{m2}^- доминирует вектор L_{m1}^- , а вектор L_{m2}^+ доминируется вектором L_{m1}^+ . Из множества P_{m1}^* исключаем элементы, имеющие хотя бы одну координату в векторах L_{m2}^+ и L_{m2}^- . На множестве $P_{m2}^* = P_{m1}^* \setminus Z_{m2}^*$ определяем его верхнюю и нижнюю критериальные границы L_{m3}^+ и L_{m3}^- . Продолжаем процесс построения векторов L_{mj}^+ и L_{mj}^- до тех пор, пока не исчерпаем все элементы множества P_m . Из приведенного алгоритма построения множеств P_{mj}^* следует, что справедливо соотношение:

$$P_{mj}^* = \bigcup_{k=j+1}^l Z_{mk}^*, \quad j=0, l-1, P_{m0}^* = P_m, \quad (1)$$

где l – число построенных подмножеств Z_{mj}^* . Векторы L_{mj}^+ и L_{mj}^- связаны соотношениями:

$$L_{m1}^+ > L_{m2}^+ > L_{m3}^+ > \dots > L_{ml}^+, \quad L_{m1}^- < L_{m2}^- < L_{m3}^- < \dots < L_{ml}^-, \quad (2)$$

где $>$ – символ доминирования.

Ранее было показано, что векторы L_{mj+1}^+ и L_{mj+1}^- не могут совпадать ни с одной альтернативой паретовского множества P_{mj}^* . Данное разбиение паретовского множества представляет собой отображение (обозначим его F), область определения которого представляет элементы множества P_m , а область значений – набор подмножества Z_{mj}^* , $j = \overline{1, l}$ со следующим законом их формирования. Каждый элемент P_m принадлежит только одному Z_{mj}^* , объединение всех элементов подмножеств Z_{mj}^* совпадает с множеством P_m . Хотя бы одна координата каждого элемента подмножества Z_{m1}^* принадлежит верхней или нижней критериальной границе всего паретовского множества P_m , и одна из координат элементов, входящих в подмножества Z_{mj}^* , $j = \overline{2, l}$ обязательно принадлежит верхней или нижней критериальной границе подмножеств $P_{mj-1}^* = P_{mj-2}^* \setminus Z_{mj-1}^*$, $P_{m0}^* = P_m$. Следовательно, координаты любого элемента подмножеств Z_{mj}^* могут принадлежать одному из векторов L_{mj}^+ , L_{mj}^- , либо одновременно и вектору L_{mj}^+ и вектору L_{mj}^- , либо какая-либо координата некоторого элемента из подмножеств Z_{mj}^* может не входить ни в один из этих векторов.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение F назовем полным, если все координаты любого из элементов подмножеств Z_{mj}^* , $j = \overline{1, l}$ принадлежат векторам L_{mj}^+ , L_{mj}^- .

Очевидно, что если отображение полное, то все подмножества Z_{mj}^* содержат только два элемента, и это минимальное количество элементов, которое может содержать подмножество Z_{mj}^* .

Можно доказать, что для двухкритериального пространства отображение F является полным. Если же отображение F не является полным, т. е. существуют координаты элементов подмножеств Z_{mj}^* , не являющиеся координатами векторов L_{mj}^+ , L_{mj}^- , то число элементов в подмножестве Z_{mj}^* больше двух. Максимальное число элементов в Z_{mj}^* равно удвоенной размерности критериального пространства, что возможно только в том случае, если любой координате каждого элемента из Z_{mj}^* соответствует только одна координата в векторе L_{mj}^+ или в векторе L_{mj}^- . Можно предположить, что чем больше размерность критериального пространства, тем большее число альтернатив содержат подмножества Z_{mj}^* .

О п р е д е л е н и е 5. Векторы L_{mj}^+ , L_{mj}^- назовем симметричными к элементам образующего их подмножества Z_{mj}^* , если каждый элемент из Z_{mj}^* включает хотя бы одну свою координату, как в вектор L_{mj}^+ , так и в вектор L_{mj}^- .

Соответственно, отображение F назовем симметричным, если все векторы L_{mj}^+ , L_{mj}^- являются симметричными. Для критериального пространства произвольной размерности свойство симметричности не является заранее известным фактом. Однако справедливо следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 4. Любое полное отображение является симметричным.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно и справедливо только для двухкритериального пространства.

Пусть все паретовские слои S_{ij} , $j = \overline{1, n_i}$, на которые разбиваются подмножества начальных данных H_i , представлены в виде (1), и для верхних и нижних критериальных оценок L_{ijs}^+ , L_{ijs}^- отдельных подмножеств P_{ijs}^* выполняются соотношения (2). Покажем, что такое представление паретовских слоев позволяет увеличить область применения предлагаемых алгоритмов и максимизировать общее число исключаемых альтернатив при построении отдельных частичных подмножеств.

Предположим, что для некоторых паретовских слоев выполняются условия утверждения 3, т. е. сумма времени выполнения элементов первых k паретовских слоев больше величины T и нижние критериальные границы L_{ik}^- паретовских слоев S_{ij} , $j = \overline{1, k}$ доминируют верхние критериальные границы паретовских слоев S_{ik+2} , S_{ik+3} и не доминируют верхнюю критериальную границу L_{ik+1}^+ слоя S_{ik+1} . Очевидно, что элементы паретовских слоев S_{ik+2} , S_{ik+3} могут быть исключены из последующего рассмотрения. Рассмотрим элементы паретовского слоя S_{ik+1} . Вектор L_{ik}^- доминируется либо находится в отношении Парето с вектором L_{ik+1}^+ . Выполняется соотношение (2), т. е. все верхние критериальные границы $L_{ik+1,s}^+$ подмножеств $P_{ik+1,s}^*$, на которые разбивается паретовский слой S_{ik+1} , доминируются вектором L_{ik+1}^+ . Тогда вектор L_{ik}^- , не доминируя вектор L_{ik+1}^+ , может доминировать верхние критериальные границы $L_{ik+1,s}^+$ некоторых подмножеств $P_{ik+1,s}^*$, а следовательно, и все альтернативы подмножеств $P_{ik+1,s}^*$ которые могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения. Следовательно, представление паретовских слоев в виде (1) дает возможность определить альтернативы в паретовском слое S_{ik+1} , которые может доминировать нижняя критериальная граница паретовского слоя S_{ik} .

Рассмотрим теперь нижние критериальные границы L_{iks}^- подмножеств P_{iks}^* , на которые разбивается паретовский слой S_{ik} . По предположению сумма всех элементов первых k паретовских слоев больше T . В соответствии с алгоритмом разбиения паретовских множеств подмножество

P_{ik1}^* формируется из паретовского слоя S_{ik} , за исключением тех элементов, чьи координаты содержатся в его верхней L_{ik}^+ либо в нижней L_{ik}^- критериальных границах. Пусть величина Z_1 , равная сумме элементов первых $k-1$ паретовских слоев и элементов подмножества P_{ik1}^* больше величины T . Рассмотрим следующее подмножество P_{ik2}^* этого же паретовского слоя и предположим что величина Z_2 , равная сумме элементов подмножества P_{ik2}^* и элементов первых $k-1$ паретовских слоев, также больше T . Продолжаем процесс рассмотрения подмножеств P_{iks}^* паретовского слоя S_{ik} до тех пор, пока величина Z_i не станет меньше T либо не исчерпаются все подмножества P_{ijs}^* . Нижнюю критериальную границу последнего подмножества P_{ikh}^* , для которого выполняется условие $Z_i > T$, обозначим Q . В частности, если для первого же рассмотренного подмножества P_{ik1}^* выполняется соотношение $Z_i < T$, то вектор Q совпадает с нижней критериальной границей L_{ik}^- паретовского слоя S_{ik} .

По соотношению (2) вектор Q доминирует вектор L_{ik}^- . Следовательно, вектор Q может доминировать верхнюю критериальную оценку L_{ik+1}^+ паретовского слоя S_{ik+1} , которая не доминируется вектором L_{ik}^- . Если это соотношение справедливо, то все альтернативы паретовского слоя S_{ik+1} доминируются вектором Q и могут быть исключены из рассмотрения на последующих уровнях параллельных вычислений. Выполнение условий утверждения 3 не дает возможности исключить элементы паретовского слоя S_{ik+1} . Справедливость этого факта можно установить только после представления паретовских слоев в виде (1).

У т в е р ж д е н и е 5. Пусть для паретовского слоя S_{ik} выполняются следующие условия:

1) вектор Q доминирует верхние критериальные границы L_{its}^+ подмножеств P_{its}^* , $t = r, m, t > k$, каждое из которых принадлежит отдельному паретовскому слою S_{it} в соответствии с представлением S_{it} в виде (1). В частности, это могут быть верхние критериальные границы собственно паретовских слоев S_{it} ;

2) сумма времени выполнения элементов паретовских слоев S_{ij} , $j = \overline{1, k-1}$ и элементов подмножества P_{ikh}^* , имеющего своей нижней критериальной оценкой вектор Q , больше T ;

3) нижние критериальные границы паретовских слоев S_{ij} , $j = \overline{1, k-1}$ доминируют вектор Q .

Тогда все элементы множества $W_i = \bigcup_{t=r}^m P_{its}^*$ не могут войти как в частичное решение B_i , так и в частичные решения на последующих уровнях параллельных вычислений.

Схема доказательства утверждения 5 аналогична доказательству утверждения 3, только вместо нижней критериальной границы всего паретовского слоя S_{ik} рассматривается вектор Q и паретовские слои представлены в виде вложенных друг в друга подмножеств P_{its}^* с соответствующими верхними L_{its}^+ и нижними L_{its}^- критериальными границами $P_{it0}^* = S_{it}$.

Таким образом, представление S_{ij} , $j = \overline{1, n_i}$ в виде (1) дает возможность при выполнении определенных условий найти дополнительные паретовские слои либо подмножества альтернатив паретовских слоев, элементы которых могут быть удалены из рассмотрения на последующих уровнях параллельных вычислений.

Общую схему организации параллельных вычислений для решения «задачи о ранце» можно представить следующим образом. Все подмножества начальных данных H_i разобьем на паретовские слои в заданном критериальном пространстве с представлением их в виде (1). На каждом H_i при выполнении условий утверждения 5 сформируем соответствующие подмножества W_i и подмножества $R_{i1} = H_i \setminus W_i$. Если условия утверждения 5 не выполняются, то множество

R_{i1} включает в себя все множество H_i . Далее проводим разбиение всех подмножеств R_{i1} на отдельные группы и в каждой группе выполняем операцию объединения альтернатив паретовских слоев, на которые разбиваются подмножества R_{i1} , составляющие данную группу. Каждое подмножество альтернатив, полученное после объединения соответствующих паретовских слоев, представляет собой отдельный набор начальных данных для следующего уровня параллельных вычислений. На новых наборах начальных данных определяем собственные подмножества R_{i2} . Продолжаем процесс формирования множеств R_{is} до тех пор, пока не достигнем последнего уровня, где и определяем искомое оптимальное допустимое подмножество с максимальной суммарной вероятностью достижения заданной цели как частичное решение на соответствующем множестве начальных данных. Для нахождения оптимального подмножества на последнем уровне параллельных вычислений могут быть применены алгоритмы, предложенные в работе [4].

Отметим, что для задачи нахождения множества Парето справедливость утверждения 1 означает, что выполнение основного условия для применения алгоритмов организации параллельных вычислений заложено в самой постановке задачи нахождения частичных паретовских множеств. В «задаче о ранце» непосредственный поиск частичного решения на некотором подмножестве начальных данных не дает возможности исключить из дальнейшего рассмотрения какие-либо альтернативы. Введение двухкритериального отношения предпочтения, представление множества альтернативных вариантов в виде объединения паретовских слоев, справедливость утверждений 3 и 5 – все это позволяет использовать режим параллельных вычислений для нахождения решения данной комбинаторной задачи. В предлагаемой модифицированной схеме общего алгоритма на каждом шаге, за исключением последнего, формируются не частичные решения, а подмножества R_{is} , содержащие частичные решения. Это связано с тем, что в исключаемые альтернативы на очередном уровне параллельных вычислений может войти часть альтернатив частичного решения предыдущего уровня, что сделало бы излишними все операции, совершенные ранее для его нахождения.

Можно предположить, что введение транзитивного многокритериального отношения предпочтения представляет собой необходимый элемент алгоритма организации параллельных вычислений для решения задач, альтернативы которых являются основой для построения некоторых допустимых подмножеств. В качестве примера можно привести задачу о покрытии [5] множества X семейством его подмножеств, которая формулируется следующим образом. Среди всех подмножеств F , покрывающих X , требуется найти подмножество с минимальным числом элементов. Начальной альтернативой является любое подмножество из F . Допустимый набор альтернатив в данной задаче представляет собой любой набор подмножеств из F , покрывающий множество X .

Заключение. Предложена общая схема алгоритма параллельных вычислений для решения комбинаторных оптимизационных задач заданного типа. Сформулировано условие применимости предлагаемых алгоритмов. Рассмотрено применение предложенных математических моделей для решения двух классических оптимизационных задач.

Литература

1. Дубов Ю. А. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
2. Сэвидж Дж. Сложность вычислений. М., 1998.
3. Контратьев О. Л. Приближенные алгоритмы решения задачи «Об М-рюкзаках». М., 1990.
4. Чебаков С. В. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 2. С. 112–119.
5. Пападимтриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М., 1985.

S. V. CHEBAKOV

ALGORITHMS OF ORGANIZING PARALLEL CALCULATIONS FOR SOME COMBINATORIAL TASKS

Summary

The article deals with organizing parallel calculations for finding solutions of optimizational combinatorial tasks on the finite sets of the initial data. The solution of these tasks represents some subset of the initial data, and the inclusion of alternatives into the optimal subset is given by the definite rule which is used for forming the given task solution algorithm. The general scheme for the parallel calculations algorithm has been developed, and the condition of its optimization has been formulated. The realization of the proposed mathematical models has been considered by an example of solving two classical optimization tasks where different approaches to their application have been shown.

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

К ГИПОТЕЗЕ АЛЬБЕРТСОНА–БУТИНА ОБ ОТЛИЧИТЕЛЬНОМ ЧИСЛЕ КЛИКИ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 30.06.2008)

Пусть задан абстрактный граф G , и \bar{G} обозначает геометрический граф, который реализует G на плоскости. Точнее, $V(\bar{G}) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ является множеством n точек в общем положении на евклидовой плоскости, а ребром $x_i x_j \in E(\bar{G})$ является прямолинейный отрезок, соединяющий соответствующую пару точек. Говорят, что два ребра uv и xu , *пересекаются*, если отрезки uv и xu имеют общую, внутреннюю для обоих точку – *точку пересечения*. Это имеет место в точности тогда, когда вершины u , x , v и y являются вершинами (в циклическом порядке) выпуклого четырехугольника.

Напомним, что два абстрактных графа G и H *изоморфны*, если существует взаимно-однозначное соответствие между их множествами вершин $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$, такое, что $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. Аналогично, два геометрических графа \bar{G} и \bar{H} *геометрически изоморфны*, если существует графовый изоморфизм $\varphi: V(G) \rightarrow V(H)$, такой, что ребра uv и xu пересекаются в \bar{G} тогда и только тогда, когда ребра $\varphi(u)\varphi(v)$ и $\varphi(x)\varphi(y)$ пересекаются в \bar{H} . Геометрический изоморфизм геометрического графа \bar{G} на себя называется *геометрическим автоморфизмом*. Пусть $\text{Aut}(\bar{G})$ обозначает группу геометрических автоморфизмов геометрического графа \bar{G} . Очевидно, что если \bar{G} является геометрической реализацией абстрактного графа G , то группа $\text{Aut}(\bar{G})$ является подгруппой $\text{Aut}(G)$. Говорят, что подграф \bar{G}_2 графа \bar{G} является *геометрическим образом* подграфа \bar{G}_1 , если существует геометрический автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\bar{G})$, такой, что $\varphi(\bar{G}_1) = \bar{G}_2$. Граф \bar{K}_n , являющийся геометрической реализацией клики K_n , называется *геометрической кликой*. Исследование геометрической клики тесно взаимосвязано с границей ее выпуклой оболочки, которую будем обозначать через C . Часто будем подразумевать под C как саму полигональную границу, так и множество вершин этого полигона. В последнем случае мощность множества вершин C будем обозначать через $c = |C|$.

Пусть задан абстрактный граф G . Раскраска его вершин $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$ называется *r-отличительной*, если единственным автоморфизмом, который сохраняет цвета вершин, является тождественный, т. е., если из того, что $\varphi \in \text{Aut}(G)$ и $f(\varphi(x)) = f(x)$ для всех $x \in V(G)$ следует, что $\varphi = id$. *Отличительным числом графа G* , обозначаемым через $\text{Dist}(G)$, называется минимальное число r , такое, что граф G обладает r -отличительной раскраской вершин. Легко видеть, что раскраска вершин является отличительной тогда и только тогда, когда каждая вершина графа однозначно определяется своей вершинной орбитой и своим цветом. Следует отметить, что различные графы с одной и той же группой автоморфизмов могут иметь различные отличительные числа.

Заменяя понятие автоморфизма на геометрический автоморфизм, можно распространить понятие отличительного числа на геометрический граф. *Отличительное число геометрического графа \bar{G}* будем обозначать через $\text{Dist}(\bar{G})$, т. е.

$$\text{Dist}(\bar{G}) = \min\{r \mid \bar{G} \text{ имеет раскраску вершин, которая } r\text{-отличительна}\}.$$

Ясно, что если \bar{G} является геометрическим графом, реализующим абстрактный граф G , то $\text{Dist}(\bar{G}) \leq \text{Dist}(G)$. Кроме того, если $\text{Dist}(\bar{G}) = 1$, то $\text{Aut}(\bar{G}) = \{id\}$.

Часто возникает необходимость поиска таких геометрических реализаций абстрактного графа, которые требуют максимального числа цветов для отличительности раскраски вершин: в некотором смысле такие реализации обладают большей симметрией. Поэтому *геометрическим отличительным числом* абстрактного графа G , которое будем обозначать через $\text{Dist}_g(G)$, называется число, равное

$$\text{Dist}_g(G) = \max \{ \text{Dist}(\bar{G}) \mid \bar{G} \text{ – геометрический граф, реализующий } G \}.$$

Пусть $E_0(\bar{G})$ (соответственно, $E_+(\bar{G})$) – множество ребер без пересечений (имеющих хотя бы одно пересечение) в графе \bar{G} . Обозначим через H_0 (соответственно, H_+) остовный подграф графа \bar{G} , чьи ребра образуют множество $E_0(\bar{G})$ (соответственно, $E_+(\bar{G})$). Нетрудно заметить, что тогда справедливо неравенство $\text{Dist}(\bar{G}) \leq \min \{ \text{Dist}(H_0), \text{Dist}(H_+) \}$ (лемма 1 [1]).

Для произвольной вершины $x \in \bar{G}$ пусть e_1, e_2, \dots, e_s – ребра, инцидентные ей. Тогда последовательность чисел $cr(e_1), cr(e_2), \dots, cr(e_s)$, где $cr(e_i)$, $i = \overline{1, s}$, обозначает число ребер, которые пересекают ребро e_i и называется *последовательностью пересечений* вершины x . Отметим, что порядок в этой последовательности не имеет значения и обычно числа в ней упорядочиваются в неубывающем порядке. По определению последовательность пересечений для произвольной вершины x графа \bar{G} сохраняется при любом автоморфизме геометрического графа \bar{G} .

Важным понятием при нахождении отличительного числа геометрического графа служит так называемое *определяющее множество*. Говорят, что подмножество вершин $S \subseteq V(\bar{G})$ является *определяющим множеством*, если из того, что $g, h \in \text{Aut}(\bar{G})$ и $g(s) = h(s)$ для всех $s \in S$ следует, что $g = h$. Другими словами, по действию произвольного автоморфизма $h \in \text{Aut}(\bar{G})$ на множестве S можно определить его действие на всем множестве вершин $V(\bar{G})$. *Определяющим числом геометрического графа \bar{G}* , обозначаемым через $\text{Det}(\bar{G})$, называется минимальное число r , такое, что геометрический граф \bar{G} имеет определяющее множество мощности r :

$$\text{Det}(\bar{G}) = \min \{ r \mid \bar{G} \text{ имеет определяющее множество мощности } r \}.$$

Очевидно, каждый геометрический граф имеет определяющее множество, поскольку любое множество, содержащее все вершины, кроме одной, является определяющим. Понятия *определяющее множество* и *определяющее число* впервые были введены в 2006 г. [2] для нахождения отличительного числа геометрического графа.

Каждый выпуклый геометрический цикл \bar{C}_n имеет определяющее множество, состоящее из любых двух не диаметрально противоположных вершин. Отметим, что если $n \geq 6$ и \bar{C}_n выпукло, то $\text{Dist}(\bar{C}_n) = \text{Det}(\bar{C}_n) = 2$, а для $3 \leq n \leq 5$ $\text{Dist}(\bar{C}_n) = 3$, в то время как $\text{Det}(\bar{C}_n) = 2$. Эти числа зависят от конкретной геометрической реализации. Так, если цикл \bar{C}_4 имеет самопересечение, то $\text{Dist}(\bar{C}_4) = 2$, в то время как $\text{Det}(\bar{C}_4) = 1$.

Для характеристики определяющих множеств используются стабилизаторы вершин. Напомним, что для вершины $s \in V(\bar{G})$ ее *стабилизатором* называется подгруппа $\text{Stab}(s)$ группы автоморфизмов $\text{Aut}(\bar{G})$, которая оставляет неподвижной вершину s : $\text{Stab}(s) = \{ \varphi \in \text{Aut}(\bar{G}) \mid \varphi(s) = s \}$. *Поточечным стабилизатором* подмножества вершин $S \subseteq V(\bar{G})$ называется множество автоморфизмов $\text{Stab}(S)$, фиксирующих каждую точку $s \in S$: $\text{Stab}(S) = \bigcap_{s \in S} \text{Stab}(s)$. Можно показать, что

подмножество вершин $S \subseteq V(\bar{G})$ геометрического графа \bar{G} является определяющим множеством тогда и только тогда, когда $\text{Stab}(S) = \{id\}$.

Проблема нахождения отличительного числа для произвольного геометрического графа является актуальной задачей топологической теории графов и особенно интенсивно исследуется

в последнее десятилетие. Однако по-прежнему остается открытым вопрос его определения даже для клики K_n . Известно, что при $3 \leq n \leq 6$ ее отличительное число равно $\text{Dist}(K_n) = 3$. В 2004 г. [1] была выдвинута гипотеза, что при $n \geq 7$ $\text{Dist}(K_n) = 2$. В 2006 г. [2] было установлено, что она верна при условии, когда мощность ее выпуклой оболочки $c \geq 4$. В частности, доказательство последнего утверждения основано на следующей теореме.

Т е о р е м а 1 [2]. *Поточечный стабилизатор множества вершин S выпуклой оболочки геометрического графа \bar{K}_n тривиален.*

В данной работе рассматривается оставшийся случай, когда мощность выпуклой оболочки $c = 3$ и число вершин клики $n \geq 7$. Введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1. В треугольнике Δuiv внешним углом при вершине v (относительно треугольника Δuiv) называется угол, образующий вместе с углом $\angle uiv$ треугольника Δuiv внутренние углы, и далее будем обозначать его через v^\sphericalangle .

Нетрудно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1. *Вершина t образует непересекающиеся ребра со всеми тремя вершинами треугольника Δuiv тогда и только тогда, когда t лежит или внутри треугольника Δuiv или в одном из внешних углов v^\sphericalangle , u^\sphericalangle или w^\sphericalangle .*

О п р е д е л е н и е 2. Вершина v геометрической клики \bar{K}_n называется крайней для ребра iw выпуклой оболочки S клики \bar{K}_n , если v не принадлежит S и все ребра треугольника Δuiv не имеют пересечений.

Нетрудно заметить, что если крайняя точка существует для ребра iw выпуклой оболочки, то она единственна. Кроме того, одна и та же вершина не может быть крайней вершиной одновременно для двух ребер выпуклой оболочки.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Для геометрической клики \bar{K}_n , $n \geq 7$, у которой мощность выпуклой оболочки $c = 3$ и имеющей три крайние вершины, отличительное число $\text{Dist}(\bar{K}_n) \leq 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим вершины выпуклой оболочки S геометрической клики \bar{K}_n через v_1, v_2, v_3 , а крайние вершины для ребер v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 – через v_4, v_5, v_6 соответственно (рис. 1, а). Выберем произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\bar{K}_n)$ и для простоты будем обозначать образы вершин v геометрической клики \bar{K}_n при этом автоморфизме через v' ($=\varphi(v)$).

Покажем, что множества вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{v_4, v_5, v_6\}$ инвариантны относительно $\varphi \in \text{Aut}(\bar{K}_n)$. Для этого заметим, что образы вершин v_4', v_5', v_6' лежат внутри треугольника $\Delta v_1'v_2'v_3'$. Действительно, рассмотрим вершину v_4' . Если она лежит вне треугольника $\Delta v_1'v_2'v_3'$, а все ребра этого треугольника не имеют пересечений, то по лемме 1 вершина v_4' может лежать только в одном из внешних углов $v_1'^\sphericalangle, v_2'^\sphericalangle, v_3'^\sphericalangle$.

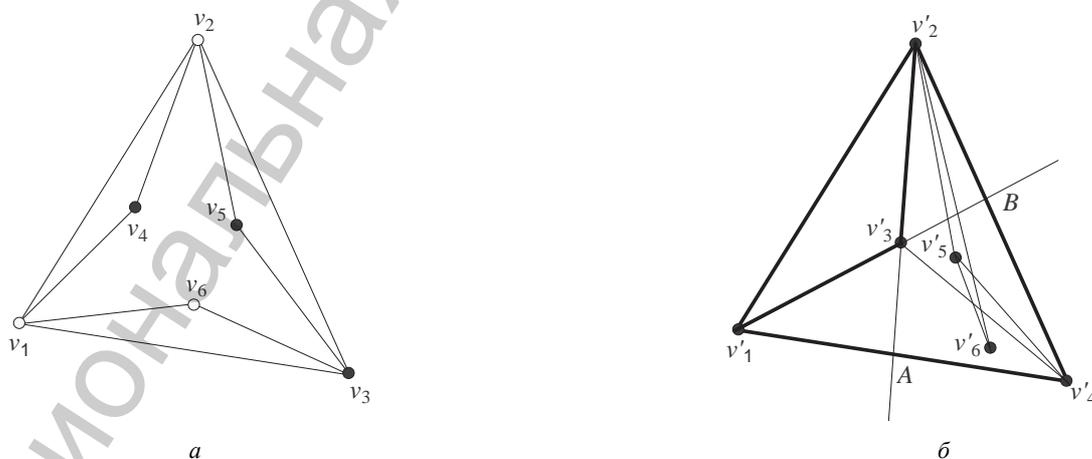


Рис. 1

Предположим, что вершина v_4' лежит во внешнем углу $v_3'^{<}$. Тогда поскольку ребра v_1v_4 , v_2v_4 не имеют пересечений, то множества $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{v_1', v_2', v_4'\}$ совпадают. Следовательно, все остальные образы вершин клики лежат внутри четырехугольника $v_3'Av_4'B$ (рис. 1, б). Так как ребра $v_3'v_4'$ и $v_5'v_6'$ и ребра $v_2'v_6'$ и $v_4'v_5'$ (как образы соответствующих пересекающихся ребер) соответственно пересекаются, то вершина v_5' лежит внутри треугольника $\Delta v_3'Bv_4'$, а вершина v_6' лежит внутри треугольника $\Delta v_3'Av_4'$ (рис. 1, б). С другой стороны, ребра $v_4'v_6'$ и $v_1'v_5'$ (как образы соответствующих пересекающихся ребер) пересекаются, что невозможно, поскольку вершины v_1' и v_5' лежат в полуплоскости, определяемой прямой $(v_4'v_6')$ и не содержащей вершины v_4' . Таким образом, вершина v_4' не может лежать во внешнем углу $v_3'^{<}$.

Предположим теперь, что вершина v_4' лежит во внешнем углу $v_1'^{<}$. Тогда из того, что пересекаются ребра $v_4'v_3'$ и $v_1'v_5'$ (как образы соответствующих пересекающихся ребер) следует, что вершина v_5' может лежать только или во внешнем углу $v_1'^{<}$ или во внешнем углу $v_3'^{<}$.

Если вершина v_5' лежит во внешнем углу $v_3'^{<}$ (рис. 2, а), то из того, что пересекаются ребра $v_2'v_6'$ и $v_4'v_5'$ (как образы соответствующих пересекающихся ребер) следует, что вершина v_6' лежит либо во внешнем углу $v_1'^{<}$, либо во внешнем углу $v_3'^{<}$. В первом случае тогда пересекаются ребра $v_2'v_6'$ и $v_1'v_4'$, что невозможно, так как ребро $v_1'v_4'$ (как образ ребра v_1v_4) не имеет пересечений. Во втором случае тогда пересекаются ребра $v_2'v_6'$ и $v_3'v_5'$, что также невозможно, так как ребро $v_3'v_5'$ (как образ ребра v_3v_5) не имеет пересечений.

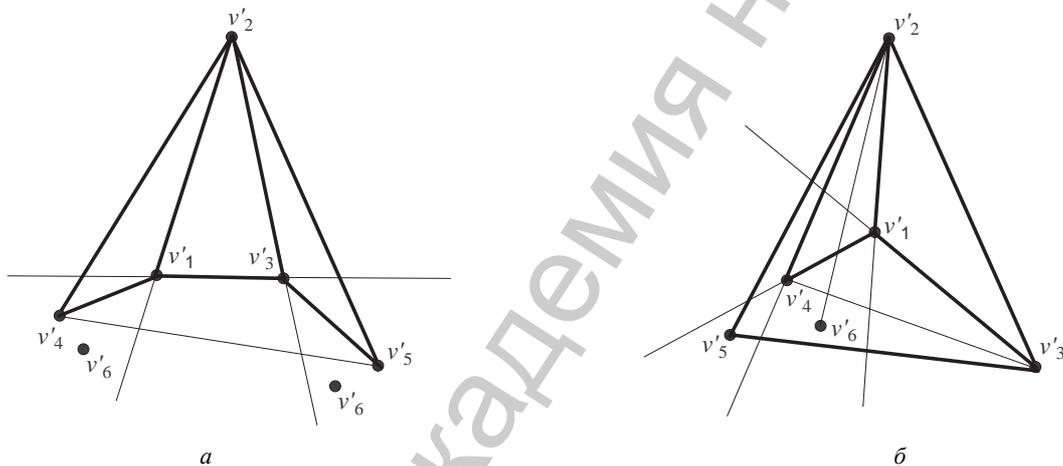


Рис. 2

Предположим теперь, что вершина v_5' лежит во внешнем углу $v_1'^{<}$ (рис. 2, б). Тогда в силу леммы 1 и того, что ребра $v_2'v_5'$ и $v_3'v_5'$ (как образы соответствующих ребер без пересечений) не имеют пересечений, вершина v_5' лежит во внешнем углу $v_4'^{<}$ относительно треугольника $\Delta v_2'v_4'v_1'$. Кроме того, множества $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{v_2', v_3', v_5'\}$ совпадают. А поскольку ребра $v_2'v_6'$ и $v_3'v_4'$ (как образы соответствующих пересекающихся ребер) пересекаются, то пересекаются и ребра $v_2'v_6'$ и $v_1'v_4'$, что невозможно, так как ребро $v_1'v_4'$ (как образ ребра v_1v_4) не имеет пересечений. Таким образом, вершина v_4' не может лежать во внешнем углу $v_1'^{<}$.

Аналогично можно показать, что вершина v_4' не может лежать во внешнем углу $v_2'^{<}$. Таким образом, вершина v_4' лежит только внутри треугольника $\Delta v_1'v_2'v_3'$. А поскольку все ребра треугольника $\Delta v_1'v_2'v_3'$ не имеют пересечений, то и вершины v_5' и v_6' лежат внутри треугольника $\Delta v_1'v_2'v_3'$. Отсюда следует, что множество вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$ инвариантно относительно автоморфизма $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$. Так как множество вершин $\{v_4, v_5, v_6\}$ являются крайними вершинами для соответствующих ребер треугольника $\Delta v_1v_2v_3$, то это множество тоже инвариантно относительно автоморфизма $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$.

Зададим теперь раскраску вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, показанную на рис. 1, а. Здесь черные вершины закрашены в черный цвет, а прозрачные вершины закрашены в белый цвет (при этом остальные вершины закрашиваются в любой из двух цветов). Покажем, что любой автоморфизм

$\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$, сохраняющий эту раскраску, является поточечным стабилизатором выпуклой оболочки $C = \{v_1, v_2, v_3\}$. Действительно, в силу того что $\{v_1, v_2, v_3\}$ инвариантно относительно произвольного автоморфизма априори, единственной нетривиальной возможностью для автоморфизма φ является отображение вершины v_1 при φ в вершину v_2 , а вершины v_3 в себя. Тогда ребро v_1v_3 при этом автоморфизме φ отобразится на ребро v_2v_3 , а значит, и крайняя вершина v_6 для ребра v_1v_3 должна отобразиться на крайнюю вершину v_5 для ребра v_2v_3 . Но это невозможно ввиду различной раскраски вершин v_5 и v_6 . Таким образом, автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$, сохраняющий данную раскраску, является поточечным стабилизатором выпуклой оболочки $C = \{v_1, v_2, v_3\}$. Применяя теперь теорему 1, окончательно получим, что $\text{Dist}(\overline{K}_n) \leq 2$. Теорема доказана.

Отметим, что в случаях, когда у геометрической клики \overline{K}_n с $c = 3$ и $n \geq 7$ существуют только одна или две крайние точки, выпуклая оболочка не всегда инвариантна относительно автоморфизмов $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$. Следующий автоморфизм $\varphi = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ v_5 & v_2 & v_6 & v_4 & v_1 & v_3 & v_7 \end{pmatrix}$ является таким примером для обоих случаев (рис. 3). Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

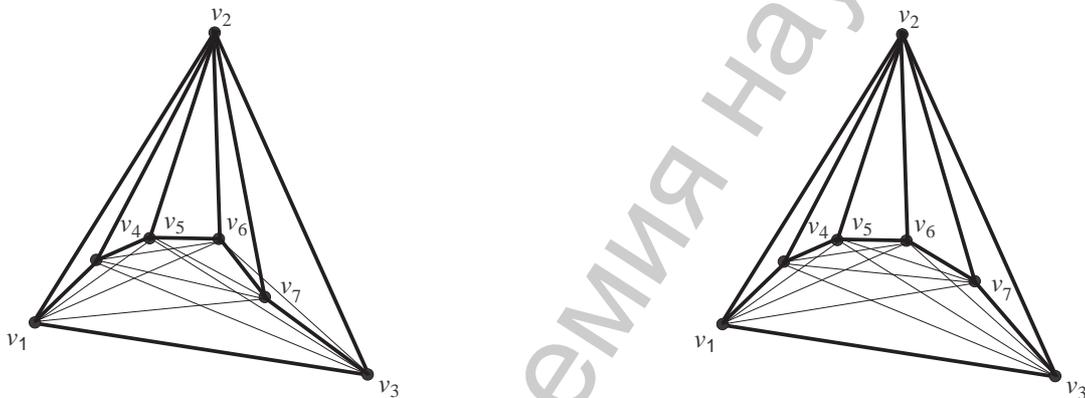


Рис. 3

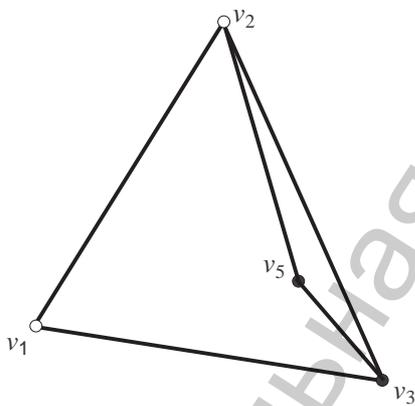


Рис. 4

Т е о р е м а 3. Для геометрической клики \overline{K}_n , $n \geq 7$, у которой мощность выпуклой оболочки $c = 3$ и имеющей только одну крайнюю вершину, отличительное число $\text{Dist}(\overline{K}_n) \leq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вершина v_5 является единственной крайней вершиной для ребра v_2v_3 треугольника $\Delta v_1v_2v_3$. Раскрасим тогда вершины $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ так, как показано на рис. 4, при этом остальные вершины клики \overline{K}_n закрасим в черный цвет.

Выберем произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$, сохраняющий данную раскраску. Вершина v_3 неподвижна относительно этого автоморфизма. Иначе, поскольку вершины v_1, v_2 могут отображаться при этом автоморфизме лишь друг в друга,

и ребра v_1v_3 и v_2v_3 не имеют пересечений, для ребра v_1v_2 также существовала бы крайняя вершина, противоречие.

Кроме того, вершины v_1, v_2 не могут отображаться при этом автоморфизме друг в друга, так как иначе ребро v_1v_3 являлось бы образом ребра v_2v_3 при данном автоморфизме, а значит, для ребра v_1v_3 также существовала бы крайняя вершина (образ вершины v_5), противоречие.

Таким образом, автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(\overline{K}_n)$, сохраняющий данную раскраску, является поточечным стабилизатором выпуклой оболочки $C = \{v_1, v_2, v_3\}$. Применяя теперь теорему 1, окончательно получим, что $\text{Dist}(\overline{K}_n) \leq 2$. Теорема доказана.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели» при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф07-293).

Литература

1. Albertson M. O., Boutin D. L. // J. Graph Theory. 2006. Vol. 53. P. 135–150.
2. Albertson M. O., Boutin D. L. Automorphisms and Distinguishing Numbers of Geometric Cliques // <http://academics.hamilton.edu/mathematics/dboutin/DistDetGeo.pdf>

V. I. BENEDIKTOVITCH

ALBERTSON–BOUTIN CONJECTURE CONCERNING A DISTINGUISHING NUMBER OF A CLIQUE

Summary

In this article we have found the conditions, under which the Albertson–Boutin conjecture concerning a distinguishing number of a geometric clique is valid.

Национальная академия наук Беларуси

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 519.6+681.3.012

Н. А. ЛИХОДЕД

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ АЛГОРИТМОВ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 19.09.2008)

В этой заметке дается краткая информация о разрабатываемой в Институте математики НАН Беларуси системе ParLoc [1] по состоянию на сентябрь 2008 г. Начальная версия системы разработана в рамках задания Государственной комплексной программы научных исследований «Инфотех» на 2006–2010 гг., подраздел «Прикладные исследования».

Система ParLoc – инструментальное средство для распараллеливания и улучшения локальности последовательных программ. В качестве целевого компьютера рассматриваются параллельные компьютеры с распределенной памятью, в частности, белорусско-российские мультипроцессорные вычислительные системы семейства СКИФ. ParLoc реализует оригинальные методы [2–5] и алгоритмы, язык реализации – C++. Ввод необходимой информации и просмотр результатов осуществляется посредством оконного приложения. Предполагается постоянное пополнение системы новыми программными модулями.

Система ParLoc может быть использована для исследования параллельной структуры алгоритмов, представленных многомерными циклами. Она позволяет генерировать таймирующие функции (развертки графа алгоритма в терминологии монографии [6]), являющиеся основным математическим аппаратом для получения параллельных множеств операций (групп операций таких, что операции любой группы не зависят от операций других групп), параллельных форм алгоритма (групп операций, в каждой из которых операции могут быть выполнены независимо друг от друга), параллельных последовательностей вычислений (упорядоченных множеств операций; множества операций могут выполняться параллельно, обмениваясь результатами промежуточных вычислений). Наборы таймирующих функций используются также для преобразования многомерных циклов и для получения зерен вычислений (множеств операций алгоритма, выполняемых атомарно, как одна единица вычислений). Разбиение операций алгоритма на зерна вычислений применяется для уменьшения накладных расходов на обмен данными между процессорами и (или) для лучшего использования иерархической структуры памяти одного процессора.

Входной информацией для системы ParLoc в настоящее время является информационная структура алгоритма, заданная функциями зависимостей (покрывающими функциями графа алгоритма [6]). Генерация таймирующих функций может осуществляться системой с учетом условий, приводящих к локализации данных в памяти с быстрым доступом. При многопроцессорной обработке памятью с быстрым доступом считается локальная память процессора, при однопроцессорной – кэш-память. Поиск таймирующих функций может осуществляться, кроме того, совместно с поиском статического размещения массивов данных в локальной памяти процессоров параллельного компьютера. В этом случае решается задача согласованного распределения операций и данных между процессорами с целью минимизации числа обменов данными. В дальнейшем предполагается дополнение системы программными модулями, реализующими динамическое распределение данных, так как во многих случаях использование только статического размещения не позволяет избежать больших коммуникационных затрат.

Отметим, что известные системы автоматического анализа и преобразования последовательных программ такие, как SUIF, KAP, FORGE, BERT 77, PIPS, недоступны для свободного использования или имеют очень ограниченные возможности [7]. Доступными для использования системами распараллеливания в настоящее время являются только V-Ray система (Москва, Вл. В. Воеводин) и OPC (Открытая распараллеливающая система, Ростов, Б. Я. Штейнберг). Они решают часть задач автоматизированного распараллеливания программной единицы. Программы системы ParLoc дополняют возможности V-Ray и OPC.

В настоящее время систему можно рассматривать как комплекс вспомогательных программ для реализации отдельных этапов отображения многомерных циклов на параллельные компьютеры. Для практического использования системы требуется знание информационной структуры алгоритма и генерация кода на основе полученных таймирующих функций. Обе эти задачи во многих случаях могут оказаться довольно сложными и не решаться с помощью имеющихся систем автоматического анализа и преобразования программ. В дальнейшем предполагается больше внимания уделять получению таймирующих функций, приводящих к упрощенной генерации кода.

В ближайших планах развития системы ParLoc реализация методов автоматизированного отображения многомерных циклов произвольной структуры вложенности на параллельные компьютеры с распределенной памятью. Предполагается выделить случаи автоматического выполнения всех этапов преобразования последовательных программ в параллельные: получение информационной структуры алгоритма, получение параллельной структуры алгоритма, построение параллельного алгоритма, адекватного архитектуре целевого суперкомпьютера. Планируется разработать алгоритмы и программы для адаптации многомерных циклов к параллельной реализации: организация параллельных процессов вычислений, зерен вычислений, обмен данными, структурирование коммуникаций. Для построения и практической реализации таких алгоритмов потребуется разработать методы распараллеливания, не требующие сложного описания зависимостей [8], а также методы формализации коммуникационных операций.

Литература

1. <http://im.bas-net.by/?lang=ru&menu=mStruct&item=dPCP>.
2. Адуцкевич Е. В., Лиходед Н. А., Соболевский П. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 3. С. 105–111.
3. Лиходед Н. А., Баханович С. В., Жерело А. В. // Программирование. 2005. № 5. С. 52–65.
4. Адуцкевич Е. В., Лиходед Н. А. // Программирование. 2006. № 3. С. 54–65.
5. Адуцкевич Е. В., Баханович С. В., Лиходед Н. А. // Тр. Ин-та матем. НАН Беларусі. 2006. Т. 14, № 1. С. 12–22.
6. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб., 2002.
7. Стефанов К. С. // Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. Сб. науч. трудов / Под ред. Вл. В. Воеводина и Е. Е. Тыртышников. М., 2008.
8. Лиходед Н. А., Толстикова А. А. // Информатика. 2008. Т. 15, № 2. С. 129–136.

N. A. LIKHODED

PROGRAM SYSTEM FOR INVESTIGATION OF THE PARALLEL STRUCTURE OF ALGORITHMS

Summary

A brief information about the ParLoc system (the system is developed at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus) is given. The ParLoc system is a tool for parallelization and locality enhancement of loop nests.

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

ПАВЕЛ АНДРЕЕВИЧ АПАНАСЕВИЧ

(К 80-летию со дня рождения)



14 июля 2009 г. исполнилось 80 лет со дня рождения видного белорусского ученого, крупного специалиста в области лазерной физики, нелинейной оптики и спектроскопии, Почетного директора Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, лауреата государственных премий СССР и БССР, заслуженного деятеля науки Республики Беларусь, академика НАН Беларуси, профессора Павла Андреевича Апанасевича.

П. А. Апанасевич родился в деревне Староселье Докшицкого района Витебской области. Сын крестьянина, он упорным трудом и учебой проложил себе путь в науку, ярко демонстрируя общее стремление послевоенного поколения возрождающейся из руин Беларуси к знаниям и культуре. В Белгос-университете он обращает на себя внимание Б. И. Степанова – выдающегося советского физика-оптика и спектроскописта, который приглашает его в 1954 г. в создаваемый Институт физики и математики, с которым будет связана его после-

дующая деятельность. Совместная работа с Б. И. Степановым, одним из первых учеников и ближайших соратников которого являлся П. А. Апанасевич, определила его дальнейшую судьбу.

Когда П. А. Апанасевич начал заниматься наукой, на повестке дня еще не стояли вопросы, связанные с оптическими квантовыми генераторами. Однако в развитии оптической науки наступал революционный момент. Как это часто бывает в такие переходные времена, наука как бы интуитивно привлекает в область своих интересов все самое новое, что ею создано. Проблема, которую решает П. А. Апанасевич совместно с Б. И. Степановым, была сформулирована С. И. Вавиловым и касалась вопросов классификации процессов рассеяния и люминесценции и ее наиболее сложной части – резонансной флуоресценции. Для решения этой проблемы П. А. Апанасевич привлекает недавно разработанные методы квантовой теории излучения. Результатом стал четкий новый критерий для классификации вторичного свечения, который лежит в основе кандидатской диссертации, защищенной в 1958 г., и который вызывает активный интерес оптиков-спектроскопистов.

Вооруженный знаниями квантовой теории излучения, П. А. Апанасевич оказывается на переднем крае научных исследований, когда возникла идея оптических квантовых генераторов. Он активно включается в разработку основ нелинейной оптики и лазерной физики. Осознав важность когерентности в задачах взаимодействия излучения с веществом, П. А. Апанасевич одним из первых стал широко использовать метод матрицы плотности в оптике, обосновав границы применимости так называемых балансных кинетических уравнений, введенных еще Паули и считавшихся чуть ли не единственным способом описания взаимодействия света с веществом. В 1963 г. П. А. Апанасевич публикует работу по спектрам поглощения пробного излучения в присутствии сильного монохроматического, в которой впервые (на шесть лет раньше Маллоу, именем которого называется этот эффект) предсказано расщепление резонансной линии на три компоненты.

П. А. Апанасевич – один из основных организаторов (наряду с Р. В. Хохловым, С. А. Ахмановым и Б. И. Степановым) первой в СССР конференции по нелинейной оптике, проведенной на озере Нарочь в 1965 г., и положившей начало крупной серии (очередная прошла в 2007 г. в Минске) всесоюзных, а затем международных конференций в области лазерной физики и нелинейной оптики.

В последующие годы П. А. Апанасевич расширяет круг исследуемых им проблем: здесь и немарковские эффекты в теории релаксации квантовых систем в поле лазерного излучения, и теория четырехфотонного параметрического рассеяния, теория вынужденного комбинационного рассеяния, теория механизмов нелинейного показателя преломления. Будучи физиком-теоретиком, П. А. Апанасевич, однако, активно развивает в возглавляемой им в 1968–1994 гг. лаборатории нелинейной спектроскопии эксперименты по лазерной физике и нелинейной спектроскопии.

Характерной особенностью стиля научной работы П. А. Апанасевича является высокая требовательность к проведению научных исследований. Возможно поэтому к защите докторской диссертации (1974 г.) он подошел через 16 лет после кандидатской. Его глубокие знания в различных областях физики нашли свое отражение в уникальной монографии «Основы теории взаимодействия света с веществом», изданной в 1977 г. и до сих пор активно используемой в научных лабораториях мира.

Время работы в качестве заведующего лабораторией нелинейной спектроскопии было наиболее продуктивным для П. А. Апанасевича в смысле передачи знаний следующим поколениям белорусских физиков. Им подготовлено 22 кандидата наук, 8 из которых защитили докторские диссертации. Он читал курсы лекций по теории взаимодействия лазерного света с веществом и нелинейной оптике для студентов физического факультета БГУ.

С 1978 г. наступает период государственного и общественного признания результатов работ П. А. Апанасевича. В этом году за крупный цикл исследований по нелинейной спектроскопии он удостоен Государственной премии БССР, а в 1982 г. за работы по теории светоиндуцированной дифракции он становится лауреатом Государственной премии СССР. Член бюро Научного совета АН СССР по проблеме «Когерентная и нелинейная оптика», председатель и член оргкомитетов многих научных, в том числе международных, конференций, входит в состав редколлегии ряда научных журналов. В 1980 г. П. А. Апанасевич избирается членом-корреспондентом, а в 1984 г. – действительным членом Академии наук БССР.

В 1978 г. на него возлагаются новые административные обязанности – заместителя директора по научной работе, которые он успешно выполнял до 1987 г. – года кончины Б. И. Степанова. С 1987 по 1998 г. П. А. Апанасевич – директор Института физики. Приняв на себя все тяготы по руководству институтом в период неопределенных надежд и социальных потрясений, П. А. Апанасевич смог с присущей ему предусмотрительностью и вниманием к нуждам коллег сохранить основной потенциал института. В 1998 г. в знак заслуг перед коллективом института П. А. Апанасевич назначается его Почетным директором. Кроме того, в настоящее время он – председатель Научного совета института по проблеме «Лазерная физика», член научных и экспертных советов государственных научных и научно-технических программ, председатель специализированного совета по защите докторских диссертаций при Институте физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, заместитель председателя Правления ОО «Белорусское физическое общество», Председателем которого он являлся до середины 2005 г.

Сердечно поздравляем Павла Андреевича с юбилеем и желаем ему здоровья и дельнейших успехов в многогранной деятельности на благо белорусской науки.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Белорусское физическое общество*

ЮРИЙ СЕМЕНОВИЧ ХАРИН

(К 60-летию со дня рождения)



17 сентября 2009 г. исполняется 60 лет доктору физико-математических наук, профессору, члену-корреспонденту НАН Беларуси, директору НИИ прикладных проблем математики и информатики БГУ Юрию Семеновичу Харину.

Юрий Семенович родился в 1949 г. в с. Зырянское Томской области. Окончил в 1966 г. среднюю школу в г. Томске с золотой медалью, в 1971 г. – Томский государственный университет с отличием, в 1974 г. – аспирантуру факультета прикладной математики с досрочной защитой кандидатской диссертации. В связи с организацией в БГУ кафедры теории вероятностей и математической статистики в 1976 г. приглашен для работы в должности доцента. Здесь в Белорусском государственном университете Ю. С. Харин состоялся как ученый и педагог, пройдя путь от доцента до заведующего кафедрой и директора НИИ. В 1986 г. он защитил в Институте прикладной математики АН СССР (г. Москва) докторскую диссертацию, в 1988 г. ему присвоено ученое звание профессора, в 2004 г. был избран членом-корреспондентом НАН Беларуси.

По инициативе Ю. С. Харина в 1988 г. организована новая кафедра математического моделирования и анализа данных, которую он возглавляет до сего дня. В 2000 г. он также явился инициатором создания в БГУ Национального научно-исследовательского центра прикладных проблем математики и информатики, преобразованного в 2008 г. в НИИ прикладных проблем математики и информатики.

Ю. С. Харин – известный ученый в области математической и прикладной статистики, защиты информации, математического и программного обеспечения информационных технологий. Тематика его научных интересов связана с актуальным направлением прикладной математики и информатики – разработкой математических моделей, методов, алгоритмов и программных средств робастного (устойчивого) распознавания и анализа стохастических данных для компьютерных систем защиты информации и информационных технологий.

На основе разработанной Ю. С. Хариним теории робастного статистического распознавания образов и анализа данных построены новые минимаксно устойчивые (к искажениям гипотетической модели) алгоритмы распознавания образов, идентификации и прогнозирования, гарантирующие наименьшее уклонение риска на заданных семействах искажений, реализованные в пакетах прикладных программ и позволившие решить важнейшие прикладные задачи внедрения информационных технологий в промышленности, медицине, экономике. Разработаны методы и алгоритмы распознавания и статистического анализа дискретных временных рядов, управляемых скрытыми случайными последовательностями, использованные для оценки надежности криптографических систем защиты информации.

Ю. С. Харин внес значительный вклад в становление и развитие в Республике Беларусь криптологии – науки о математических и компьютерных методах защиты информации. Под его руководством выполнено более 30 НИОКР по ГНТП «Информатика», «Информатизация», «Защита информации», ГПФИ «Алгоритм», «Математические структуры», «Математические модели» и другим программам. Является научным руководителем Государственной Программы, выполняемой по Указу Президента Республики Беларусь. Результаты внедрены при создании эф-

фективных систем криптографической защиты информации. Его результаты широко известны и опубликованы более чем в 350 научных трудах, включая 4 монографии, одна из которых издана за рубежом (издательство Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London), 11 учебных пособий, 8 из которых получили гриф Минобразования. Статьи опубликованы в таких престижных зарубежных журналах, как «Lecture Notes in Computer Science», «Pattern Recognition Letters», «Cybernetics and Control», «Applied Stochastic Models and Data Analysis», «Journal of Classification», «Lecture Notes in Statistics», «Mathematical Methods of Statistics», «Теория вероятностей и ее применения», «Автоматика и телемеханика», «Проблемы передачи информации», «Прикладная эконометрика», «Дискретная математика». Сделаны доклады более чем на 80 Международных научных конференциях. Как приглашенный профессор, Юрий Семенович делал доклады в Калифорнийском университете (Беркли, США), Байрёйтском и Дрезденском университетах (Германия), Манчестерском и Лейстерском университетах (Великобритания), Венском университете (Австрия) и других ведущих научных центрах. В качестве соруководителя участвовал вместе со своими учениками в международных научных проектах по программам INTAS (2 проекта), МНТЦ, SCOPES, REAP. Подготовил 24 кандидата и одного доктора наук. Является основателем белорусской научной школы «Математическое моделирование сложных систем, процессов защиты информации и компьютерного анализа данных».

Будучи заведующим кафедрой, Ю. С. Харин ведет интенсивную научно-педагогическую деятельность. Он является организатором новых для Беларуси специальностей «Компьютерная безопасность», «Экономическая кибернетика» и трех новых специализаций, разработчиком учебных планов, рабочих программ, общих курсов, спецкурсов, спецсеминаров и компьютерных практикумов, организатором аспирантуры и докторантуры по новой для республики специальности «Методы и системы защиты информации, информационная безопасность».

Ю. С. Харин много времени уделяет научно-организационной работе, являясь заместителем председателя Экспертного совета ВАК, председателем Экспертного совета Минобразования по физико-математическим наукам, организатором и заместителем главного редактора периодического научного сборника «Проблемы защиты информации», членом редколлегий двух зарубежных научных журналов, пяти республиканских журналов, организатором Белорусской статистической ассоциации, редактором восьми сборников научных статей, организатором одиннадцати международных научных конференций «Компьютерный анализ данных и моделирование», членом Белорусского математического общества, Белорусской ассоциации распознавания образов, Американского математического общества, Международного института математической статистики, Международной ассоциации вычислительной техники, Европейской ассоциации обработки сигналов, действительным членом Международной Академии наук высшей школы. Вносит вклад в укрепление сотрудничества БГУ и НАН Беларуси.

Юрий Семенович – Лауреат Государственной Премии Республики Беларусь в области науки и техники (2002 г.), Лауреат Премии им. А. Н. Севченко (1997 г.), Отличник образования РБ (1999 г.). Награждался Премией СМ СССР за успешное выполнение НИР (1984 г.), Почетной Грамотой Совета Министров РБ (2001 г.), Почетными Грамотами Минобразования, ВАК Беларуси, БГУ.

Ю. С. Харин является трудолюбивым, отзывчивым, дисциплинированным, требовательным к себе и другим человеком, способным организовать коллектив.

Коллеги, друзья и ученики сердечно поздравляют Юрия Семеновича с юбилеем и желают дальнейших творческих успехов, крепкого здоровья и благополучия.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Белорусский государственный университет*

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.2

Ж у к Е. Е. Статистический анализ случайных процессов броуновского движения, возвращающихся на фиксированный уровень // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 4–9.

Для статистического анализа случайных процессов, возвращающихся на фиксированный уровень, предлагается использовать модели типа броуновского движения. Наряду с известной моделью Орнштейна–Уленбека предлагается модель, сочетающая в себе модели арифметического и геометрического броуновского движения и имеющая более простой вид. Строятся оценки неизвестных параметров, аналитически исследуются их свойства и указывается способ проверки адекватности предлагаемой модели реальным данным.

Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 519.2

М а л о г и н В. И. Асимптотический анализ риска непараметрической классификации в случае существенно зависимых признаков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 10–23.

Рассматривается задача классификации многомерных наблюдений в пространстве существенно зависимых признаков с помощью подстановочных решающих правил, основанных на непараметрических оценках плотности с фиксированным и адаптивным гауссовским ядром. Аналитическое исследование решающих правил проводится для случая, когда существенная зависимость признаков описывается моделью многомерной линейной регрессии с равномерно распределенными экзогенными переменными и гауссовскими ошибками наблюдения. С помощью асимптотических разложений условного риска проводится сравнительный анализ альтернативных решающих правил и показывается преимущество предлагаемого непараметрического классификатора с адаптивным ядром в условиях усиливающейся зависимости признаков и растущего объема обучающей выборки.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 517.968

Р а с о л ь к о Г. А. Применение многочленов Чебышева для решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши со специальной правой частью // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 24–30.

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши со специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 k(x,t)\varphi(t) dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x) + g(x), \quad -1 < x < 1,$$

где $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ – заданные на $[-1, 1]$ функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция, основанная на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева в классе H (по Мусхелишвили).

Библиогр. – 12 назв.

УДК 519.63+519.65

С а м у с е н к о А. В., Ф р о л о в а С. В. Многоточечные схемы продольного варианта метода прямых повышенной точности для решения некоторых задач математической физики // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 31–39.

В настоящей работе построены многоточечные схемы повышенного порядка аппроксимации, а также решена проблема аппроксимации вблизи граничных точек для некоторых задач математической физики с одной пространственной переменной. При этом используется интерполирование Эрмита–Биркгофа, а также интерполирование специального вида в приграничных узлах.

Ил. 1. Табл. 1. Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.911.5+519.216.73

В а с ь к о в с к и й М. М. Теорема существования β -мартингалльных решений стохастических эволюционных уравнений с разрывными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 40–50.

Доказана теорема существования β -мартингалных решений стохастического эволюционного уравнения

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad X \in H, \quad (1)$$

H – сепарабельное гильбертово пространство, $W(t)$ – цилиндрический Q -винеровский процесс со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U , Q – симметрический положительно определенный оператор на U , при условии, что оператор A является генератором C_0 -полугруппы $S(\cdot)$ на H , функции $f: [0, T] \times H \rightarrow H$, $g: [0, T] \times H \rightarrow L_2(U_0, H)$ измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста по $X \in H$, где $L_2(U_0, H)$ – множество операторов Гильберта–Шмидта из U_0 в H , $U_0 = Q^{1/2}U$, а под β -мартингалным решением уравнения (1) понимаем мартингалное решение некоторого стохастического эволюционного включения, построенного по уравнению (1).

Ил. 2. Библиогр. – 7 назв.

УДК 511.36

К у к с о О. С. **О свойствах целочисленных многочленов, принимающих малые значения на множествах положительной меры** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 51–53.

В приведенных в работе теоремах показывается, что только для множества с мерой, не превышающей половины заданного множества, будет выполняться условие малости для некоторого целочисленного многочлена с дополнительными ограничениями на величину выбранных коэффициентов.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 511.36

Ш а м у к о в а Н. В. **Связь резонансных явлений и гиперболических диофантовых приближений** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 54–56.

В классической метрической теории диофантовых приближений правая часть неравенств зависит от высоты многочлена или высоты линейной комбинации невырожденных функций. В статье доказана общая метрическая теорема при правой части, зависящей от произведения модулей ненулевых коэффициентов.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 511.36

Б а б у л ь О. В. **О построении системы линейных уравнений в алгоритме решета числового поля для решения задачи дискретного логарифмирования** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 57–61.

Дано теоретическое обоснование метода построения системы линейных уравнений, предложенного Жу и Лерсьером в [5]

Библиогр. – 5 назв.

УДК 512.548

Г а л ь м а к А. М. **Лемма Фраттини для n -арных групп** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 62–67.

Получены n -арные аналоги леммы Фраттини.

Библиогр. – 14 назв.

517.956.6

К о р з ь ю к В. И., К о н о п е л ь к о О. А. **Обобщенные решения граничных задач в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 68–75.

Доказана однозначная разрешимость граничных задач в цилиндрических областях для уравнения составного типа четвертого порядка.

Библиогр. – 18 назв.

УДК 539.172

А н д р е е в В. В., Ш и ш к и н а Т. В. **О возможности дискриминации расширенных калибровочных моделей в процессах аннигиляции поляризованных лептонов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 76–83.

В рамках расширенных калибровочных моделей были рассчитаны и проанализированы дифференциальные и полные сечения, поляризационные и предложенные дополнительные типы асимметрий процесса аннигиляции поляризованных лептона и антилептона с рождением фермион-антифермионной пары. Исследованы кинематические и энергетические области возможных отклонений от Стандартной модели электрослабого взаимодействия. Возможные методы дифференциации моделей были предложены и подробно обсуждаются.

Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.12

Овсюк Е. М., Токаревская Н. Г., Редьков В. М. **Аналог плоских волн в сферическом пространстве Римана и комплексные орисферические координаты** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 84–89.

В пространстве постоянной положительной кривизны S_3 введен комплексный аналог орисферических координат пространства Лобачевского H_3 . Для обеспечения параметризации вещественного пространства S_3 на две комплексные орисферические координаты (r, z) наложено комплексное уравнение связи. Метрика пространства выражается через пару координат (r, z) с дополнительным условием, либо через пары координат (r, r^*) или (z, z^*) без дополнительных условий; соответственно возникают три различных представления для шредингеровского гамильтониана. Плоские волны определены и исследованы как решения уравнения Шредингера в рамках использования комплексных орисферических координат; построенные решения являются однозначными, конечными и непрерывными функциями точек сферического пространства.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 530.1; 535.3

Гончаренко А. М. **Распространение оптических солитонов в поглощающих средах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 90–92.

Исследованы некоторые особенности распространения солитонов в поглощающих средах. Установлено, что слабое поглощение искривляет фазовую поверхность солитона.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 06;07;12

Гусак Н. А., Петров Н. С. **Кинетика решеток пространственного заряда в фоторефрактивном кристалле при изменении во времени возбуждающего светового поля** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 93–97.

Показано, что при изменении во времени с некоторой частотой падающего на ФР кристалл неоднородного по интенсивности светового поля колебания заряда решетки, создаваемой этим полем, совершаются с той же частотой. Однако несмотря на аналогю процесса колебаний заряда решеток с колебательным процессом механической системы, в этом случае он существенно отличается от последнего тем, что явление резонанса здесь невозможно ни при каком соотношении электрических параметров кристалла.

Библиогр. – 6 назв.

УДК 530.12

Рябушко А. П., Жур Т. А. **Pioneer anomaly как реликтовое ускорение пробного тела в Солнечной системе** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 98–104.

Обосновано утверждение: Pioneer anomaly является реликтовым ускорением пробного тела в Солнечной системе. Ил. 2. Библиогр. – 31 назв.

УДК 619.85

Чебаков С. В. **Алгоритмы организации параллельных вычислений для некоторых комбинаторных задач** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 105–113.

Рассмотрены вопросы организации параллельных вычислений для решения оптимизационных комбинаторных задач, определенных на конечных множествах начальных данных. Предложена общая схема алгоритма параллельных вычислений для решения задач заданного типа. Сформулировано условие применимости предлагаемых алгоритмов. Рассмотрено применение предложенных математических моделей для решения двух классических оптимизационных задач.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.173

Бенедиктович В. И. **К гипотезе Альбертсона–Бутина об отличительном числе клики** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 114–119.

Найдены условия, при которых справедлива гипотеза Альбертсона–Бутина об отличительном числе клики. Ил. 4. Библиогр. – 2 назв.

УДК 519.6+681.3.012

Лиходед Н. А. **Комплекс программ для исследования параллельной структуры алгоритмов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 120–121.

Дается краткая информация о разрабатываемой в Институте математики НАН Беларуси системе ParLoc. Система ParLoc – инструментальное средство, предназначенное для распараллеливания и улучшения локальности последовательных программ.

Библиогр. – 8 назв.