Estudiar matemáticas

El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje

Yves Chevallard
Marianna Bosch
Josep Gascón

SEP MÉXICO

COOPERACIÓN ESPAÑOLA

Biblioteca del Normalista

Estudiar matemáticas

El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje

Yves Chevallard
Marianna Bosch
Josep Gascón

Biblioteca del Normalista

Esta edición de *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* en la Biblioteca del Normalista, estuvo a cargo de las direcciones generales de Materiales y Métodos Educativos y de Normatividad de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

Primera edición elaborada conjuntamente por el Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), de la Universidad de Barcelona y Editorial Horsori, 1997.

Primera edición en la Biblioteca del Normalista de la SEP, 1998.

Coordinación editorial de la
Biblioteca del Normalista
Rosanela Álvarez

Introducción a la edición de la SEP
Hugo Balbuena

Diseño de portada
Claudia Cervantes/Jacquelinne Velázquez

ISBN 970-18-1739-7
Impreso en España

PRESENTACIÓN

Como parte del proceso de transformación y fortalecimiento académicos de las instituciones formadoras de maestros, la Secretaría de Educación Pública edita la Biblioteca del Normalista, cuyo propósito es apoyar a directivos, maestros y alumnos de escuelas normales de todo el país.

Los títulos que la forman han sido cuidadosamente seleccionados, con el objetivo fundamental de apoyar la reforma curricular de la Educación Normal. Algunos de ellos se relacionan directamente con la docencia y aportan herramientas para el desenvolvimiento profesional de los maestros; otros se orientan a la comprensión del desarrollo del niño y el adolescente; otros más buscan ofrecer una visión actualizada sobre la escuela y su papel social. Todos ellos son producto de la investigación educativa en diversos campos.

Los libros de esta Biblioteca se distribuyen gratuitamente a los maestros y directivos de Educación Normal que lo soliciten. Asimismo, estarán a disposición de los estudiantes en el acervo de la biblioteca de cada Escuela Normal.

La Biblioteca del Normalista se suma a otros materiales y actividades de actualización y apoyo didáctico puestos a disposición de maestros y alumnos de las Escuelas Normales, de profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y de equipos técnicos estatales. La Secretaría de Educación Pública confía en que esta tarea resulte útil y espera las sugerencias de los maestros para mejorarla.

La publicación del libro *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, dentro de esta colección, ha sido posible gracias al apoyo del Fondo Mixto de Cooperación Técnica y Científica México-España.

ÍNDICE

UNIDAD 2
EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS
LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA

UNIDAD 3
MATEMÁTICAS, ALUMNOS Y PROFESORES
LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

UNIDAD 4
LA ESTRUCTURA DEL PROCESO DE ESTUDIO
LAS MATEMÁTICAS "EN VIVO"

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos en primer lugar la gran amabilidad de María Núñez, la de la profesora y, especialmente, la del estudiante, sin los cuales evidentemente este libro no habría podido ver la luz. Vayan también nuestros más sinceros agradecimientos a todos aquellos que se han ofrecido generosamente como primeros lectores y cuyas sabias críticas nos han permitido llegar al texto que ahora sometemos al lector: Agustí Reventós, Ànnia Bosch, Carles Perelló, Cèlia Palacín, Elodia Guillamón, Jordi Sabaté, Josep Maria Lamarca, Juan Díaz Godino, Julio de Miguel, Lorena Espinoza, Marta Gascón, Miguel Álvarez, Núria Cámbara, Quim Barbé, Pepa Capell, Ramon Eixarch y Rosa Camps. Merece un lugar aparte el trabajo desinteresado, minucioso y brillante de Diane Ricard, que tanto ha sabido mejorar nuestro manuscrito original. Y no olvidamos, claro está, a todos los que, en nuestro entorno más próximo, han tenido que soportarnos en el trance de la creación, con una mención especial para Marie-Hélène, Maria Rosa y Marcos. Finalmente, queremos dar fe de nuestro reconocimiento a César Coll, a Iñaki Echevarría y a Francesc Segú, que han sabido esperar con una paciencia oportuna, el final de nuestro trabajo.

Dedicamos este libro a nuestros colegas del Instituto Juan de Mairena, a sus alumnos y, por supuesto, a los padres de estos últimos.

Este libro tiene historia

A principios de los años noventa, una periodista independiente, María Núñez, realizó un reportaje sobre el sistema educativo español. Pero su trabajo no consiguió publicarse y las grabaciones, documentos y notas recogidas en aquella ocasión quedaron "aparcados" en el archivador.

Dos años más tarde, María supo por casualidad que el hijo de unos amigos –el estudiante de este libro– buscaba "material" para unas sesiones de trabajo que había programado con una especialista en didáctica de las matemáticas –la profesora–. María le propuso entonces utilizar libremente sus archivos.

Gracias a que las sesiones de trabajo fueron grabadas acertadamente por el estudiante, pudimos transcribirlas literalmente con el consentimiento de los protagonistas, añadiendo tan sólo algunos retoques para facilitar su lectura. Y hemos tenido la debilidad de pensar que merecían ser conocidas por más gente.

INTRODUCCIÓN A LA EDICIÓN DE LA SEP

Durante muchos años se consideró a la enseñanza y al aprendizaje como dos fenómenos que se producen simultáneamente y constituyen un sólo proceso. El aprendizaje, se pensaba, es una consecuencia directa de la enseñanza; no hay aprendizaje sin enseñanza pero tampoco enseñanza sin aprendizaje.

Algunos estudios más recientes cuestionan esta simbiosis y señalan la necesidad de tomar en cuenta el aprendizaje como eje de análisis para entender las condiciones que lo favorecen, cómo se produce y cómo evoluciona. En esta concepción, enseñanza y aprendizaje se caracterizan como dos procesos independientes que no necesariamente son causa-efecto.

En el presente libro se destaca la importancia de un tercer elemento que sirve como puente entre los dos procesos anteriores. Éste es el *proceso de estudio* que se realiza dentro o fuera de la escuela, con o sin la ayuda de un profesor, con la finalidad de aprender un saber determinado.

En el prólogo de este libro se dice que va dirigido a los alumnos, maestros y padres, puesto que no pretende disertar sobre la enseñanza ni sobre el aprendizaje de las matemáticas, sino sobre el estudio de éstas, en el marco de los diversos factores que influyen en los resultados del estudio que se realiza.

Su estructura es muy peculiar. Cada unidad se inicia con una plática (entre una periodista y un profesor) relacionada con los aspectos que se tratarán en las siguientes páginas. Enseguida aparecen varios diálogos entre un estudiante y una profesora, en los que se hacen reflexiones interesantes sobre los aspectos relacionados con el proceso de estudio o *proceso didáctico* de las matemáticas, teniendo como marco de referencia ejemplos concretos de estilos docentes o técnicas didácticas, situaciones problemáticas, caracterizaciones sociales, tipos de actividades, entre otros. La lectura de los diálogos, a la vez que recrea la discusión de la teoría didáctica, cumple con la función de ayudar al estudio de la misma, puesto que las disertaciones que hace la maestra al responder las preguntas planteadas por el estudiante, resultan interesantes e invitan a continuar con la lectura.

Después de los diálogos hay una sección de síntesis en la que se destacan los puntos más relevantes que se abordaron en los diálogos. Para culminar la unidad, hay una sección de comentarios y profundizaciones en la que se le da cuerpo a los conceptos de la teoría didáctica.

En la primera unidad se cuestiona la concepción reduccionista de la matemática, como cuerpo de conocimientos que sólo sirve para aprenderse y enseñarse, y se sugieren varias ideas en torno a lo que es hacer matemáticas, ser matemático o matemática por supuesto, investigador en matemáticas, resolver problemas de matemáticas. De aquí se desprende que el matemático es aquel que resuelve problemas de matemáticas, por analogía con el fontanero que resuelve problemas de fontanería, mientras que el investigador en matemáticas es la persona que estudia matemáticas con la finalidad de descubrir nuevas relaciones y, eventualmente, ampliar el campo de conocimientos matemáticos.

En la segnnda unidad se define el concepto de *obra social*, utilizado para designar las diferentes áreas de conocimiento que la humanidad ha creado a lo largo de la historia, como la matemática, la medicina, así como el de *obra de segundo grado* o saberes, que son los contenidos que se enseñan en los diferentes niveles escolares: biología, física, química, historia, matemáticas. Hay una polémica interesante acerca de las razones por las cuales una obra se incluye o no en el currículo, dejando ver que la razón fundamental es la posibilidad que brinda de entrar en otras obras. Éste es el caso de las matemáticas o el de la lengua oral y escrita, que sirven como herramientas para comunicar e interpretar otros saberes. Por otra parte, también se señalan dos riesgos en el caso concreto de las matemáticas: el hecho de que éstas resulten inaccesibles en sí mismas para muchos jóvenes o de que aparezcan como obras cerradas; es decir, que no permitan a quienes las estudian, actuar de manera más eficaz.

En un plano más específico, se abordan diferentes definiciones de currículo y se reflexiona en torno a los diversos factores que determinan una propuesta curricular. Este aspecto se relaciona con el concepto de *transposición didáctica*, concebida como la transformación de los saberes eruditos en objetos de enseñanza en la escuela.

La tercera unidad centra la discusión en la situación didáctica, considerada como el conjunto de relaciones que se establecen implícita o explícitamente entre un grupo de alumnos, el profesor y un cierto medio (que comprende instrumentos y objetos) con la finalidad de que los alumnos aprendan determinados conocimientos. Se ejemplifican y se analizan con mucha profundidad algunos estilos docentes o técnicas didácticas y se justifica la importancia de contar con situaciones problemáticas adecuadas que ayuden a los alumnos a estudiar eficazmente las matemáticas.

Al final de esta unidad se analiza una parte de la teoría, concebida como disciplina científica, teniendo el lector la posibilidad de reflexionar sobre diversos conceptos que cada vez son más utilizados en el campo educativo, como situación didáctica o a-didáctica, contrato didáctico, variable didáctica, situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

La cuarta unidad se vincula directamente con el tipo de actividades que se realizan en el aula; es decir, con las actividades de estudio, para lo cual se separan en dos grupos: clase de problemas y clase de prácticas, dejando ver, contra lo que muchos pensamos, que en ambos casos hay un trabajo de búsqueda y descubrimiento por parte de los alumnos. En el primer caso se enfrentan a problemas nuevos y descubren procedimientos; en el otro, prueban la robustez de las técnicas, las simplifican y descubren nuevas relaciones. En el primer caso hay evolución de los procedimientos al pasar de un problema a otro, mientras que en el segundo se evoluciona al desarrollar internamente las técnicas. Se hace notar la importancia de "convertir en rutina lo que se ha creado para seguir creando".

Por otra parte, hay una amplia disertación sobre la relación que existe entre las *técnicas*, las *tecnologías* que explican las técnicas, y las *teorías* que explican las tecnologías. Se trata del tránsito entre la ejecución de una técnica, su justificación y la demostración de un caso general.

Sin duda, las personas involucradas en el proceso educativo, particularmente los maestros en servicio, los formadores de maestros y los que estudian para maestros, encontrarán en esta obra una gran diversidad de elementos para analizar la práctica docente, documentarse sobre la teoría y mejorar la calidad de los aprendizajes matemáticos que construyen los niños.

Para esta edición, dirigida a los maestros y normalistas mexicanos, consideramos útil enlistar una serie de equivalencias que facilitarán la comprensión de algunos usos coloquiales de España y que en México tienen otro significado.

Bragas:	pantaletas
Corro:	rueda
Deberes:	tareas
Episodio:	capítulo
Informático:	técnico en computadoras
Librar:	enfrascar
Ordenador:	computadora
Reventón:	fuga de agua
Tira:	muchas
Tiza:	gis

PRÓLOGO

El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje

Este libro va dirigido a alumnos, padres y profesores. A todos *a la vez*. Esta situación tan poco habitual merece una explicación.

Este libro trata del *estudio* de las matemáticas. No se limita al análisis de la *enseñanza* de las matemáticas, que es tan sólo un *medio* para el estudio. Tampoco pretende disertar sabiamente sobre el *aprendizaje,* que aun siendo el *objetivo* del estudio, se puede convertir fácilmente en una entidad abstracta cuando ignoramos aquello que lo hace posible: el proceso de estudio o proceso *didáctico.*

El estudio es hoy el eslabón perdido entre una enseñanza que parece querer controlar todo el proceso didáctico y un aprendizaje cada vez más debilitado por la exigencia de que se produzca como una consecuencia inmediata, casi instantánea, de la enseñanza. Este libro pretende restituir el estudio al lugar que le corresponde: el corazón del proyecto educativo de nuestra sociedad. En lugar de circunscribir la educación a la interacción entre enseñanza y aprendizaje, proponemos considerarla de manera más amplia como un *proyecto de estudio* cuyos principales protagonistas son los alumnos. El profesor dirige el estudio, el alumno estudia, los padres ayudan a sus hijos a estudiar y a dar sentido al esfuerzo que se les exige. Una vez restablecido este eslabón, se puede también restablecer la comunicación entre alumnos, padres y profesores, haciendo que el diálogo entre la sociedad y la escuela recobre su sentido primordial: la escuela lleva a las jóvenes generaciones a estudiar aquellas obras humanas que mejor les servirán para comprender la sociedad en la que se disponen a entrar.

Este libro trata del estudio de las *matemáticas*. La obra matemática tiene más de veinticinco siglos de antigüedad. La respetamos, la tememos y nos resignamos a que nos confronten con ella durante este paréntesis de nuestra vida en el que, por las buenas o por las malas, vamos a la escuela. Pero, desgraciadamente, ya no comprendemos qué sentido tiene estudiarla. Las matemáticas, tan presentes en nuestra vida cotidiana por medio de los objetos técnicos, son empero, para muchos de nosotros, cada vez más invisibles y extrañas. Esta situación es malsana y la escuela, en nombre de la sociedad, debería remediarla. Pero para ello necesitamos comprender por qué hay matemáticas en la sociedad y por qué hay que estudiar matemáticas en la escuela.

Este libro pretende, pues, enseñar a "leer": a leer la sociedad, la escuela, las matemáticas. La clave para esta lectura es, como ya hemos apuntado, la noción de *estudio*; el instrumento para llevarla a cabo nos lo proporciona el *análisis didáctico* en el que querríamos iniciar al lector, sea éste profesor, padre o alumno.

El libro se divide en cuatro partes o *unidades*. Cada unidad consta de un *episodio* seguido de unos *diálogos* entre dos personajes con los que el lector se familiarizará muy pronto: el *Estudiante* y la *Profesora*. El Estudiante consulta a la Profesora para que le ayude a analizar fragmentos de unas transcripciones —los episodios— que le proporcionó María Núñez, una periodista cuya generosidad no podremos nunca dejar de agradecer. Los diálogos entre el Estudiante y la Profesora van seguidos de una breve *síntesis* y, más adelante, de unos *comentarios y profundizaciones* que resumen y completan dichos diálogos, dando a veces lugar a algunos desarrollos más especializados que presentamos en los *anexos*.

Debido a que no se puede comprender una obra oyendo sólo hablar de ella, el lector podrá aventurarse en unos *pequeños estudios matemáticos* (PEM) que hallará al final de cada unidad. De esta manera podrá desarrollar una verdadera actividad matemática, necesaria para completar la lectura lineal, tranquila y reflexiva del texto. Una vez leído o, mejor dicho, *estudiado* el libro, el lector habrá entrado en contacto con las matemáticas y, a través de ellas, con algunas de las razones que fundamentan y organizan nuestra vida en sociedad. Son razones que la cotidianeidad nos lleva demasiado frecuentemente a ignorar y que, por ello mismo, cada uno de nosotros debería volver a considerar con cierta regularidad. Este libro es, pues, un libro "para volver a empezar".

Los autores
Barcelona, abril de 1996

UNIDAD 1

HACER Y ESTUDIAR MATEMÁTICAS

LAS MATEMÁTICAS EN LA SOCIEDAD

EPISODIO 1

La Tienda de Matemáticas

NOTA DE LA PERIODISTA

Empiezo el reportaje visitando el dispositivo que más me llamó la atención al leer el folleto de presentación del instituto de educación secundaria "Juan de Mairena": la Tienda de Matemáticas. Me atiende Eduardo, un profesor.

Periodista.- ¿Desde cuándo existe la Tienda de Matemáticas?

Eduardo.- Pues, creo que desde la creación del Instituto. Aunque no lo sé muy bien, llevo sólo tres años trabajando aquí.

P.- ¿Y para qué sirve?

E.- ¡Ah! Eso sí que lo sé: "La Tienda de Matemáticas pretende responder a las necesidades matemáticas de ..."

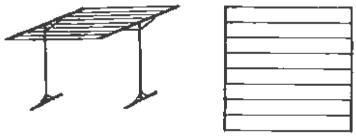
P.- "...del conjunto de miembros del Instituto y de su entorno". Ya lo he leído en el folleto. ¿Pero, cómo funciona en la práctica?

E.- Pues mira, supongamos que tienes que hacer algo y te surge un problema. Si se trata de un problema esencialmente matemático, lo mejor es venir a la Tienda.

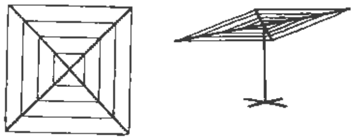
P.- Ya. Y entonces os planteo el problema, ¿no es eso?

E.- Exacto. Si quieres te puedo dar un ejemplo...

P.- Espera. A lo mejor te puedo proponer uno yo. Un ejemplo de verdad. El otro día fui a comprar un tendedero de ropa. Uno de estos pequeños, de apartamento. Había dos modelos. Mira, he traído el catálogo... *(Le enseño los dibujos de los tendederos.)*



Modelo A



Modelo B

E.- ¿Y bien?

P.- Al final me decidí por éste... *(Le enseño el modelo A.)* Me pareció más simple, más clásico. Pero luego me quedé pensando que quizá el otro era mejor, que hubiera cabido más ropa. ¿Es esto una cuestión de matemáticas? Es decir, ¿es esto una cuestión para la Tienda de Matemáticas? ¿Qué te parece?

E.- ¿Qué si es una cuestión de matemáticas? ¿El saber si uno es mejor que el otro? Pues, la verdad... no lo sé... Verás, es que yo no soy profesor de matemáticas.

P.- ¿Ah no?

E.- No. Hoy sustituyo a una colega de matemáticas, Marta, que tenía reunión de seminario. Yo soy profesor de lengua y me ocupo normalmente de la Tienda de Idiomas y Lingüística. Mi especialidad son los problemas de ortografía, tipografía, todo eso.

P.- Ya veo. Entonces no puedo...

E.- ¡Mira! ¡Ahí viene Marta! *(Marta entra precipitadamente.)*

Marta.- ¡Perdona, llego tarde!

E.- No pasa nada. Ha venido la periodista...

M.- ¡Ah sí! Supongo que eres María Núñez, ¿no? Ya me dijeron que vendrías por aquí.

E.- ¡Y nada más llegar, me plantea un problema! Pero bueno, os dejo. *(Sale.)*

M.- Y bien, ¿cuál era el problema?

P.- Pues... Pensé que era una manera de entrar en materia...

M.- Como quieras, ¡la periodista eres tú! A ver, cuéntame... *(Le cuento mi "problema".)*

¿Uno mejor que el otro?... Por ejemplo porque permitiría tender más ropa ¿no?

P.- Sí, algo así.

M.- Ya. En este caso, quizá... Supongo que basta con... Mira, de todas formas... ¡Me sabe tan mal no haber podido llegar antes! Te propongo lo siguiente: pasado mañana, el equipo de la Tienda se reúne para examinar los encargos de la semana. Puedes venir y hacer todas las preguntas que quieras. Seguramente podremos tratar tu encargo. ¿Qué te parece?

P.- Muy bien. Así podré ver mejor cómo funciona todo esto. Vendré encantada.

NOTA DE LA PERIODISTA

Dos días después, el Taller de Matemáticas se reúne en la "trastienda" para examinar los pedidos de la Tienda. Asisten Marta, otros dos profesores del centro, José y Luis, y yo misma. Luis dirige la sesión de trabajo.

Luis.- Vamos a ver, ¿empezamos por José?

José.- Como queráis. Bueno. Yo me he encargado del pedido de una profesora de biología. Lo que te conté ayer, María.

Periodista.- ¿La de la tabla?

J.- La misma. Su problema era muy sencillo: quería saber cuántos elementos diferentes se pueden poner en una tabla simétrica de orden n.

Marta.- ¿En una matriz simétrica?

J.- Sí. Y la respuesta es inmediata...

Periodista.- ¡Para mí no!

J.- Vale, vale... Pero debería serlo para alumnos de Bachillerato. ¡Por lo menos teóricamente! *(Risas.)* La respuesta es: $n\,(n + 1)/2$.

P.- ¿Y eso qué quiere decir?

Luis.- Pues mira, si tienes una tabla de, por ejemplo, cuatro filas y cuatro columnas, como mucho podrás poner 4 por 4 más 1 partido por dos, es decir, 4 por 5, 20, partido por 2, 10. O sea, tendrá como mucho 10 elementos distintos. Así... *(Escribe en la pizarra que tiene detrás.)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 7 \\ & 2 & 9 & 6 \\ & & 0 & 5 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

P.- ¿Y los elementos que faltan? ¿Por ejemplo, debajo del 4?

Marta.- Ya están determinados. Porque la tabla tiene que ser simétrica. Mira. *(Se levanta y va a la pizarra.)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 7 \\ \mathit{1} & 2 & 9 & 6 \\ & \mathit{9} & 0 & 5 \\ & & \mathit{5} & 3 \end{pmatrix}$$

P.- Ya veo! Como si la diagonal de en medio fuera un espejo ¿no?

M.- Sí. Se llama la diagonal principal. *(Risas.)* ¡Ten, complétala tú ahora! *(Me tiende la tiza. Risas.)*

P.- Pero yo no soy matemática... *(Voy a la pizarra y escribo con mucho cuidado.)*

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 9 & 6 \\ 3 & 9 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Todos.- ¡Muy bien! *(Risas.)*

P.- ¿Y le habéis explicado todo esto a vuestra colega de biología?

José.- No, todo esto ya lo sabe... Sólo le di la fórmula general por teléfono, porque era urgente. Para su clase del día siguiente.

Luis.- Muy bien. Cuestión zanjada. Y tú, Marta, ¿tenías algo?

Marta.- Pues sí, tenía el problema de María. Ya os lo conté ayer.

L.- Los tendederos. Vale. ¿Y bien? ¿Qué respuesta le das a nuestra "cliente"?

M.- ¡Ja! ¡Pues simplemente que tenía que haber comprado el otro modelo! *(Risas.)*

Periodista.- ¿O sea que con el otro hay más longitud de tendido?

M.- Exacto. Supongamos que hay un número n de cuadrados para uno y el doble $2n$ de tiras para el otro. Entonces con el modelo B, el de los cuadrados, ganas cien dividido por n-1 por ciento de tendido.

P.- ¿Y eso qué significa?

José.- Si tienes un tendedero con 10 tiras, el otro modelo, el que tiene cinco cuadrados, te da 25% más de longitud.

P.- ¿Así hay siempre un 25% de más?

Luis.- No, depende.

P.- ¿Depende de qué?

José.- Del número de tiras o de cuadrados. De n. Si, por ejemplo, hay 3 cuadrados o 6 tiras, entonces $n = 3$ y ganas 100 dividido por 2, es decir un 50%.

P.- ¡Eso es muchísimo!

Marta.- Sí, pero cuantas más tiras tienes, menos ganas. Mira: con 18 tiras, es decir, con $n = 9$ (cuadrados), tendrías... *(Escribe en la pizarra.)*

$$\frac{100}{9-1} = \frac{100}{8} = 12{,}5$$

Sólo ganarías 12,5%.

José.- Claro que si tuvieras nueve cuadrados, en el noveno cuadrado, el más pequeño, sólo podrías poner prendas pequeñas... ¡calcetines, sostenes y bragas como mucho!

(Marta parece molesta por el comentario de José.)

Luis.- Vaya, vaya. Así que María no ha hecho buena compra. *(Risas.)* Bueno... Pues yo he tenido dos encargos. Por desgracia son un poco más complicados, pero no corren prisa.

Marta.- ¿De qué se trata?

L.- Primero Amalia, la profesora de economía, quería saber si podríamos introducir en el currículo de matemáticas la noción de *elasticidad*. Le interesa porque en economía tiene que tratar el tema de la elasticidad de la demanda y cosas de este estilo.

José.- Sí, lo hablamos anteayer en la reunión de seminario.

L.- Exacto. Bueno, pues habría que estudiar la cuestión. Desde un punto de vista matemático.

Periodista.- ¿Es un encargo que viene del Seminario de Matemáticas? ¿De los mismos profesores?

L.- Exacto. Son nuestros "clientes"... Hay que estudiar el tema. Deberíamos tenerlo listo en mayo, para que en junio el Seminario pueda decidirse de cara al curso que viene. Amalia se ha ofrecido para trabajar con nosotros.

José.- ¿Quién se va a ocupar del pedido?

L.- Francisco. Hoy no podía venir, pero ha aceptado. Así que lo haré yo con él y la ayuda de Amalia. Intentaremos tener un primer informe para dentro de tres semanas, en la reunión mensual del Seminario de Matemáticas. ¡Espero que no nos falte tiempo!

Marta.- ¿Y el segundo encargo?

L.- ¡Ah! Éste parece bastante más difícil. Nos viene de Lucía. Es otra profesora de matemáticas del Instituto.

José.- Está preparando el *Curso Juan de Mairena de trigonometría*.

Periodista.- Son precisamente los libros que hacéis aquí y que cubren todos los cursos del Instituto, ¿no? He visto el de gramática de castellano.

Marta.- Eso mismo. El que teníamos de trigonometría ya estaba un poco anticuado. Y lo estamos retocando. Lucía tiene horas libres para ello. Pero la estamos ayudando entre todos.

Luis.- Vale. Pues, su problema es... Lucía ha consultado a los alumnos, para ver qué tipo de cuestiones proponían. Y le han hecho esta pregunta: con los ángulos más habituales, el seno y el coseno son siempre números enteros, fracciones, o fracciones con radicales. Por ejemplo... *(Va a la pizarra mirándome, como si quisiera hacerse entender. Le sigo la corriente.)* Por ejemplo, tenemos... *(Escribe.)*

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

El alumno le preguntó si esto era siempre cierto. ¿Veis el problema? ¿En qué casos $\cos\frac{p\pi}{q}$ se escribe con fracciones y radicales?

Marta.- Con fracciones y radicales... La pregunta no es muy precisa...

L.- Ahí está el problema. O, por lo menos, una parte del mismo.

Periodista.- ¿Y no sabéis la solución?

L.- Pues no... Por lo menos yo no. ¡Nunca había pensado en ello!

P.- ¿Y vuestra colega lo quiere introducir en el *Curso*?

José.- Sí. ¿Por qué no? Si un alumno se lo ha preguntado... Bueno, dependerá de la solución. Aunque también se puede dejar el problema sin respuesta. En fin, de todas formas, yo por ahora no sé por dónde atacarlo. *(Marta y José se han quedado en silencio. Ellos tampoco lo deben saber.)*

DIÁLOGOS 1

Las matemáticas se aprenden y se enseñan pero también se crean y utilizan

Profesora.- Así que querías hablar del episodio de la Tienda de Matemáticas...

Estudiante.- Sí, eso es.

P.- Me parece un buen tema para empezar.

E.- Usted participó en la creación del Instituto Juan de Mairena, ¿no?

P.- Sí. Además formaba parte de los que apoyaban la idea de poner en marcha las Tiendas en el Instituto. Porque no sólo hay una Tienda de Matemáticas...

E.- Ya. También hay una de Idiomas y Lingüística.

P.- Por ejemplo.

E.- ¿Y a qué respondía la creación de las Tiendas? En principio, si lo he entendido bien, en las Tiendas no hay enseñanza ni aprendizaje...

P.- Parece que lo has entendido bien.

E.- Pero entonces ¿para qué crear este tipo de ... de institución, en un centro docente?

P.- Antes de responder, permíteme una pregunta. Has acabado recientemente la carrera de Matemáticas, ¿verdad?

E.- Sí.

P.- ¿Y me podrías decir por qué has estudiado esta carrera?

E.- Porque me gustan las matemáticas.

P.- ¡Estupendo! ¡No abundan los "amantes" de las matemáticas! Pero, en realidad, cuando dices que te gustan las matemáticas, ¿quieres decir que te gusta *aprender* matemáticas?

E.- Sí, pero no es lo único. También me gusta enseñarlas.

P.- Perfecto. Si lo he entendido bien, lo que has hecho con las matemáticas ha sido aprenderlas para luego enseñarlas. ¿Ya estás trabajando?

E.- No, todavía no. Pero doy clases particulares.

P.- Ah, ya. Muy bien. Así que, según parece, las matemáticas son para ti algo que se aprende y también algo que se enseña.

E.- Sí, claro.

P.- Pues bien, sustituye ahora "matemáticas" por "fontanería". La fontanería es algo que se aprende y se enseña.

E.- Sí.

P.- Pero supongo que te das cuenta de que esta afirmación es incompleta, que le falta algo.

E.- ...

P.- Socialmente. Falta algo.

E.- ...

P.- Si la fontanería sólo fuera algo que se enseña y se aprende, ¿qué te parece que ocurriría?

E.- Lo siento pero me parece que no la sigo... No veo lo que quiere decir.

P.- Te lo voy a decir claramente. Si la fontanería sólo fuera algo que se enseña y que se aprende ... ¡no habría fontaneros!

E.- Quiere usted decir que ... ¡ah, ya lo entiendo! Sólo habría alumnos de fontanería y profesores de fontanería, pero no habría fontaneros. Sería algo así como un circuito cerrado.

P.- Eso es, exactamente. Si tuvieras una avería, no encontrarías a ningún fontanero. Habría gente que aprendería fontanería y gente que la enseñaría, pero no habría nadie para arreglar los grifos de tu cuarto de baño. ¿Entiendes lo que quiero decir?

E.- Creo que sí... Es verdad. Pero en nuestra sociedad no sólo hay profesores y alumnos de matemáticas. También hay matemáticos. Los matemáticos se corresponderían con los fontaneros, ¿no?

P.- Sí. En cierto sentido sí.

E.- Entonces lo que quiere usted decir es que yo no soy matemático.

P.- No, no es exactamente eso. Normalmente sólo se considera matemáticos a los que investigan en matemáticas, a los que crean matemáticas nuevas. Pero no es esa la cuestión. Consideremos las matemáticas que has aprendido. Porque has aprendido muchas matemáticas...

E.- ¿Muchas? No sé, algo...

P.- Lo bastante como para que, con las matemáticas que has aprendido, puedas resolver muchos de los problemas matemáticos que tienen los que no son matemáticos.

E.- ¿Como la profesora de biología, la de la tabla simétrica?

P.- Exactamente. Es un buen ejemplo. Porque seguro que tú puedes resolverle el problema a partir de las matemáticas que has aprendido, ¿no?

E.- Sí, sí, claro.

P.- Bueno, a lo que íbamos... ¿Has tenido alguna vez que resolver un problema de matemáticas para alguien de tu entorno? Me refiero a un problema que no haya propuesto un profesor de matemáticas, ni que haya sido pensado para aprender matemáticas o comprobar que se han aprendido correctamente. Como el caso de la tabla simétrica de la profesora de biología, por ejemplo.

E.- Pero en ese caso, ¡no habría aprendido nada al resolver el problema de la tabla!

P.- ¡Eso es lo que te decía! Sólo se te ocurre hacer matemáticas con el objetivo de aprender matemáticas. Y mañana, cuando seas profesor, sólo se te ocurrirá hacer matemáticas para enseñarlas, para que tus alumnos las aprendan.

E.- ¿Y no le parece suficiente?

P.- Para responderte, volveremos al principio, a lo de la fontanería. Imagina que estamos en una sociedad como la que hemos descrito antes, en la que sólo hay profesores y alumnos de fontanería, pero sin fontaneros. Supón además que alguien necesita un fontanero y recurre a un "estudiante avanzado" de fontanería. ¿Me sigues?

E.- Sí.

P.- Pues bien, supón ahora que este estudiante de fontanería se comportara como tú respecto de las matemáticas: examina el "problema" de fontanería y se percata de que es un problema muy simple, con el que no aprenderá nada que no sepa ya. Entonces, de una manera u otra, se negará a intervenir...

E.- ¡Creo que exagera un poco, Profesora! En el fondo, está usted diciendo que, para mí, las matemáticas sólo existen en la medida en que tengo que aprenderlas o enseñarlas. Y, además, lo que usted se imagina no es verdad. Si alguien me pidiera que le explicara alguna cuestión de matemáticas, no me negaría a hacerlo. ¡Con la condición, claro, de que yo mismo supiera hacerlo!

P.- Lo que acabas de decir muestra que aún no me entiendes bien. No se trata de *explicar*, no se trata de hacer de profesor. Se trata de resolver un problema y de comunicar la solución a la persona que lo necesita. Por ejemplo, no se trata de ayudar a la profesora de biología a encontrar la fórmula $n(n+1)/2$. Se trata sólo de comunicársela y, si es necesario, de decirle cómo utilizarla.

E.- ¿Pero no sería mejor, para ella, que aprendiera a establecer la fórmula por sí misma?

P.- Si estuviera aprendiendo matemáticas, quizá sí, pero aquí lo que ella necesita es una fórmula. Es eso lo que pide. Y tú te comportas como un fontanero que, en lugar de arreglar el grifo de tu casa, se empeña en enseñarte cómo hacerlo tú solo. De hecho, padeces una enfermedad muy común entre la gente que no ha salido de la escuela...

E.- ¡¿Qué enfermedad?!

P.- La enfermedad didáctica. Consiste en reducirlo todo al aprender y al enseñar, olvidando que los conocimientos también sirven para *actuar*. En la sociedad, enseñar y aprender son sólo *medios* para que cierto número de personas adquieran los conocimientos necesarios para realizar ciertas actividades. La enfermedad didáctica consiste en creer que toda la sociedad es una escuela. Lo siento, pero todo el mundo no puede saberlo todo, cada uno de nosotros sólo puede dominar un pequeño número de conocimientos.

E.- Pues si es así, ¿por qué se obliga a los alumnos a aprender matemáticas?

P.- ¡Ah! ¡Esperaba esta pregunta! Aunque seguro que no la acabas de plantear porque te interese la respuesta, sino sólo para tener un argumento a tu favor. Por eso prefiero que volvamos a lo que te preguntaba al principio de todo, y que todavía no has contestado: ¿has tenido ya la ocasión de resolver un problema de matemáticas porque te lo encargaba o pedía alguien?

E.- Ahora mismo no lo recuerdo. Pero, a pesar de lo que usted pretende, si se presentara la ocasión seguro que lo haría gustoso. De todas formas, no creo que nunca nadie me lo haya pedido.

P.- Pues mira, si alguna vez trabajas en el Instituto Juan de Mairena, tendrás la ocasión de hacerlo cuando te toque atender la Tienda de Matemáticas. Pero seguiremos hablando de todo ello el próximo día, porque hoy ya se nos ha hecho tarde.

E.- Muy bien. Muchas gracias, Profesora.

¿Qué significa "ser matemático"?

E.- Buenos días Profesora.

P.- Buenos días. ¿Cómo va todo?

E.- Bien, gracias. Pero...

P.- ¿Sí?

E.- Le he estado dando vueltas a lo de la enfermedad didáctica.

P.- ¿Y bien?

E.- Pues... me ha dejado un poco perplejo. Y, además, ha ocurrido algo... Al volver a casa, el otro día... ¡Es realmente increíble! Me llamó mi prima por teléfono... ¡Y resulta que me quería consultar sobre un problema de matemáticas!

P.- ¿Ah sí? ¿A qué se dedica tu prima?

E.- Es correctora y trabaja para una editorial, pero no está contratada. Le mandan libros y otros textos a casa para que los corrija. Su problema es que tenía que hacer una factura de un trabajo que había realizado y quería cobrar por ello 45.000 ptas.

P.- Y supongo que quería saber qué cantidad poner en la factura para que, al restarle el I.R.P.F., le quedaran 45.000 ptas., ¿no?

E.- No, no exactamente...

P.- ¿Ah no? ¿Entonces qué quería?

E.- Pues verá, alguien le había dicho que bastaba con dividir entre 0,85.

P.- ¿Y bien?

E.- A ella no le convencía demasiado, no entendía por qué. Quería que se lo explicara, que le dijera por qué había que dividir entre 0,85.

P.- Ya. O, mejor dicho, quería que le aseguraras que era eso lo que tenía que hacer. Quería estar segura para no tener sorpresas más tarde, para que no le pagaran menos. ¿Es eso?

E.- Sí, más o menos. De todas formas, se lo he explicado: para tener 45.000, hay que pedir x, tal que x menos el 15% de x dé 45.000. Lo hemos escrito...

P.- ¿Pero no hablabais por teléfono?

E.- Sí, le he dicho que lo escribiera en un papel. Y enseguida ha visto que se trataba de una ecuación de primer grado: $x - 0{,}15\,x = 45.000$. ¡Y la ha resuelto ella sola!

P.- ¡Muy bien! ¿Qué estudios tiene tu prima?

E.- Es licenciada en filología. De letras, vaya.

P.- Luego, como ves, ¡no ha olvidado todo lo que aprendió en secundaria!

E.- Precisamente. ¡Lo hubiera podido comprobar sola! Incluso lo del 0,85...

P.- Hubiera podido, pero no pudo. Necesitaba ayuda. Necesitaba la ayuda de un matemático. Tú también habrás arreglado alguna vez un grifo de tu casa. Pero en algunos casos tienes que recurrir a un fontanero.

E.- ...

P.- Y, al mismo tiempo, para que tengas que recurrir a un fontanero, debe haber un mínimo de dificultad, ¿no? O, por lo menos, tiene que ser importante que el trabajo se realice bien, que no sea una "chapuza". Como en el caso de tu prima: tenía la solución —bastaba con dividir entre 0,85—, ¡pero era importante que no hubiera ningún error!

E.- Sí, ya veo. Para mí no era un problema difícil...

P.- ¡Y, sin embargo, aceptaste resolverlo!

E.- Sí, sí, claro. Para mí no era difícil, pero para ella era muy importante.

P.- Exacto. Hoy has aprendido algo más sobre cómo funciona la sociedad. Te felicito.

E.- Gracias. Pero ese día mi prima necesitaba a un matemático, y usted insinuó la última vez que yo no era un matemático.

P.- ¡No! ¡Yo nunca he dicho eso! Tienes que prestar más atención a lo que decimos. ¡El trabajo que realizamos necesita un poco de rigor!

E.- Lo siento, lo siento... ¿Me podría entonces precisar lo que entiende por matemático? Es lo que no llego a ver con claridad.

P.- Pues mira, hemos hablado de los matemáticos que investigan en matemáticas.

E.- Sí.

P.- Éste es un sentido un tanto restrictivo de la palabra "matemático". Te voy a proponer otra definición. Cuando alguien consulta a otro sobre una cuestión de matemáticas... Digamos, cuando a una persona A, una persona B le consulta sobre algo de matemáticas, cuando B otorga su confianza a A sobre la validez de la respuesta, cuando A acepta el encargo de B y se compromete —no necesariamente de manera explícita— a garantizar la validez de su respuesta, entonces A es un matemático o una matemática. Mejor dicho, A es un matemático *para* B.

E.- O sea que, según su definición, ser matemático no es una propiedad sino una relación entre dos personas, ¿no?

P.- Exacto.

E.- Entonces, por ejemplo, cuando A es uno de los profesores de matemáticas de la Tienda que contesta a la profesora de biología, que es B, este profesor de matemáticas, José, es un matemático para B, la profesora de biología.

P.- Exacto. Y cuando tú, A, contestas a tu prima...

E.- Soy un matemático para ella. Pero un matemático que investiga en matemáticas sabe muchas más matemáticas que yo. E incluso que José. ¡Con su definición todo el mundo puede ser matemático!

P.- Si quieres, sí. Pero una persona dada sólo será matemática para ciertas otras personas. Un investigador en matemáticas quizá no considere que tú eres un matemático.

E.- Quieres decir... ¿La puedo tutear, Profesora?

P.- ¡Por supuesto!

E.- Quiere usted decir... ¡Perdón! Quieres decir que me va a mirar con un poco de desprecio, ¿no?

P.- No. Y si lo hiciera, sería simplemente porque entiende mal cómo funciona la sociedad. Tu prima no tiene por qué consultar a un matemático especialista para resolver su problema. Además de ser socialmente muy caro, sería sacar las cosas de quicio, como esas personas que van a ver a un médico especialista cuando tienen un simple resfriado.

E.- Sí, ya lo veo.

P.- Espera. Aún hay dos cuestiones por clarificar. Para empezar, decías que un investigador en matemáticas sabe más matemáticas que tú y que José. Es sin duda cierto, por lo menos es lo que suponemos. Pero, aunque sepa muchas matemáticas, no lo sabe todo. Ni él, ni el conjunto de los investigadores en matemáticas de todo el mundo. Y si alguien le consultara sobre una cuestión que él no conociera, no habría ninguna diferencia entre consultárselo a él y consultárselo a José o a ti. ¡La persona que consulta se quedaría igualmente sin solución al problema!

E.- Sí. Dicho de otro modo, ser matemático es relativo. Uno podrá ser matemático para ciertas personas y no para otras.

P.- Eso mismo. Y la ley vale también para los matemáticos investigadores. Pero dejemos aquí este tema. Ahora hay otra cuestión que quería examinar: la de cómo se expresaría el hecho de que el investigador en matemáticas del que hablabas no te considerara como un matemático. La respuesta es simple: no se dirigiría a ti para pedirte que le resolvieras una cuestión de matemáticas que él mismo no sabe resolver. En otras palabras, no te haría nunca desempeñar el papel de matemático para él. No se estableceería, entre él y tú, esta interacción social particular de "ser matemático para alguien". Pero no hay razón alguna para que te mire con desprecio.

E.- ¿Entonces por qué has dicho antes "quizá"?

P.- ...

E.- Sí, has dicho: "...quizá no considere que tú eres un matemático". ¿Por qué "quizá"?

P.- Ah, ya veo lo que me preguntas. A lo mejor la frase está mal formulada. Lo que quería decir es que, en algunos casos, sí te podría solicitar como matemático. Si, por ejemplo, te pusieras a investigar en matemáticas y te pusieras a trabajar con él, te convirtieras en su colaborador. En este momento, podría ser que te pidiera hacer algún trabajo matemático...

E.- ¿Que él mismo no supiera hacer?

P.- No, te pediría que lo hicieras en su lugar. Pero no como alumno, sino como una especie de "ayudante de matemáticas". Te pediría que le aseguraras la validez de las respuestas que le dieses, que te responsabilizaras de tus soluciones.

E.- Sería un poco como si, cuando se me estropea un grifo, aunque yo mismo lo sepa arreglar, llamara igualmente al fontanero, por ejemplo porque tendría otras cosas que hacer, porque no tengo tiempo. ¿No es eso?

P.- Sí, algo así. Salvo que en este caso no dirías que el fontanero es tu ayudante.

E.- Vale, vale. Pero tengo otra pregunta. Cuando José responde a la profesora de biología, hace de matemático para ella.

P.- Sí.

E.- Y cuando José está en clase con sus alumnos, ¿también es un matemático?

P.- ¡Buena pregunta! A lo mejor la podrías contestar tú solo. Piénsatelo un poco... ¿En qué circunstancias el profesor aparece claramente como un matemático —en el sentido que hemos dicho antes— para sus alumnos?

E.- No lo sé... ¿Cuando corrige un problema, por ejemplo?

P.- En ese caso, los alumnos esperan que la solución que les da el profesor sea correcta, ¿no?

E.- Sí, claro.

P.- Luego sus alumnos lo consideran como un matemático.

E.- Pero en este caso, ¿podemos decir que los alumnos *necesitan* la solución que el profesor les da y cuya validez les garantiza, del mismo modo que mi prima necesitaba que le garantizara la respuesta a su pregunta?

P.- ¡Veo que empiezas a entenderlo!

E.- Gracias...

P.- Así, en tu opinión, ¿la necesitan o no?

E.- Si el profesor les diera una solución falsa... ¡Ellos necesitan la respuesta correcta para aprender! Si el profesor les diera una solución falsa, molestaría mucho a los alumnos. Algunas veces ocurre.

P.- Es verdad. En cuyo caso el profesor no resultaría ser un buen matemático para sus alumnos. Acabas de dar en el clavo: los alumnos necesitan soluciones correctas porque para ellos son instrumentos para aprender. Tienen una necesidad matemática de origen didáctico...

E.- Perdona que te interrumpa. Pero de ahí deduzco que los profesores de matemáticas son matemáticos para sus alumnos.

P.- Sí, en efecto.

E.- Pues, entonces tengo otra pregunta. Los alumnos de una clase de matemáticas, ¿también son matemáticos en el sentido que hemos dicho?

P.- ¡Muy buena pregunta! Pero también la puedes contestar tú solo.

E.- Sí. Pienso en algo... Si a un alumno, pongamos de 1º de ESO, le pide su hermano pequeño que está en primaria que le compruebe unas operaciones que tenía que hacer, entonces este alumno hace de matemático para su hermano pequeño.

P.- Estamos de acuerdo. ¿Y?

E.- Y ocurrirá lo mismo con otro alumno de su clase. Aunque quizá sea menos frecuente.

P.- Sí. Pero te advierto que la pregunta que planteabas era: ¿puede un alumno de una clase de matemáticas ser un matemático en cuanto alumno de esta clase? Y en los ejemplos que acabas de dar, no lo consideras como alumno de tal o cual clase. ¿Entonces?

E.- Quieres decir si el alumno puede hacer de matemático para sus compañeros o incluso para el profesor. ¿Es eso?

P.- Sí, eso mismo. ¿Y bien?

E.- Pues, para el profesor, supongo que el alumno no es un matemático. Es a lo sumo un aprendiz de matemáticas, pero ni siquiera un ayudante de matemáticas.

P.- ¿Y respecto de sus compañeros?

E.- Esto ya lo hemos visto. Puede ocurrir que tenga que hacer de matemático para alguno de sus compañeros de clase. Pero esta situación no se da todos los días.

P.- Bueno. Pues ahora soy yo la que te voy a hacer una pregunta. Si los alumnos nunca hacen de matemáticos respecto al profesor ni, de manera oficial, respecto de los demás alumnos, ¿qué va a ocurrir? ¿Ves lo que pasa?

E.- ...

P.- Decimos que si A es un matemático para B, A se responsabiliza de la validez de las respuestas que da a las preguntas de matemáticas que le plantea B.

E.- Sí.

P.- ¿Luego...?

E.- ¡Ah ya! Quieres decir que si el alumno nunca hace de matemático para el profesor, entonces nunca se responsabiliza de la validez de las respuestas que da.

P.- ¿Luego...?

E.- Luego, concretamente, el alumno resuelve problemas que le plantea el profesor, pero no se responsabiliza de la validez de su respuesta. Esperará que el profesor le diga si está bien o mal. Es lo normal, dado que el profesor no lo considera como un matemático.

P.- ¡Veo que empiezas a razonar! Y acabas de poner el dedo en uno de los problemas didácticos más difíciles. ¿Qué hacer para que el alumno sea a la vez alumno y matemático? Es decir, para que reconozca al profesor como matemático, pero también asuma hacer él mismo de matemático, y responsabilizarse de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean.

E.- Sí, ya veo. Por ejemplo, el profesor podría pedir a los alumnos que, de vez en cuando, fueran ayudantes de matemáticas, dándoles pequeños trabajos útiles o necesarios para la vida matemática de la clase. Por ejemplo, el profesor podría pedir a equipos de alumnos que redactaran las correcciones de los ejercicios que se hacen en clase, para repartir después estas correcciones entre los demás alumnos.

P.- Lo que dices no es ninguna tontería. Pero el problema didáctico del que te hablaba es mucho más complicado que todo esto. Y prefiero que lo dejemos aquí por hoy...

E.- ¡Espera! Te quería hacer otra pregunta antes de acabar.

P.- Bueno, pero será la última.

E.- Es respecto a la tienda. Has dicho que habías apoyado la idea de la creación de Tiendas en el Instituto Juan de Mairena.

P.- Sí.

E.- He pensado que era porque querías que los profesores de matemáticas se acordaran constantemente de que también son matemáticos —en el sentido que has dado antes—.

P.- Sí.

E.- Pero justamente ahora hemos visto que un profesor de matemáticas es necesariamente un matemático para sus alumnos. Si se le considera profesor de matemáticas, y si acepta serlo, entonces quiere decir que debe garantizar la validez de lo que dice en materia de matemáticas. Por lo tanto, es un matemático. Todo profesor de matemáticas es matemático para aquellos que lo ven como un profesor de matemáticas y frente a quienes él se considera profesor de matemáticas.

P.- Es un buen razonamiento. Sigue.

E.- Sí. Pero entonces, ¿por qué quieres que también sea matemático para otros que no son sus alumnos? Quiero decir en la Tienda de Matemáticas. ¡Ésta es la pregunta!

P.- Muy bien. ¡Es una bonita pregunta! Para contestarla, voy a añadir una observación a tu pequeño razonamiento. Un profesor de matemáticas es un matemático. Pero un matemático no es necesariamente profesor de matemáticas. Por ejemplo, cuando José responde al "pedido" de su colega de biología, hace de matemático para ella, pero no es su profesor de matemáticas.

E.- Sí, de acuerdo.

P.- Y ahí, ves, volvemos a encontrar la enfermedad didáctica. Un profesor de matemáticas es, ciertamente, un matemático. Pero lo puede olvidar fácilmente si sólo hace de matemático para sus alumnos. Si sólo es matemático por razones didácticas. O, por decirlo de manera más técnica, si sólo es matemático para satisfacer necesidades matemáticas de origen didáctico. Porque se olvida entonces que hay necesidades matemáticas que no son de origen didáctico.

E.- Como lo de mi prima, por ejemplo.

P.- Exacto. La Tienda está ahí para recordarles que pueden ser matemáticos para otros, además de para sus alumnos. Para recordarles que hay necesidades matemáticas que no tienen nada que ver con el aprender y el enseñar matemáticas... Y, finalmente, porque estas necesidades matemáticas... ¡bien hay que satisfacerlas! Eso es todo. ¿Te parece suficiente?

E.- Sí.
P.- Pues lo dejaremos aquí por hoy.
E.- Como quieras. Gracias.

¿Por qué hay que estudiar matemáticas?

P.- Y bien, ¿cómo estás esta semana?

E.- Muy bien, gracias. Pero te ruego me disculpes por lo de la última vez. Esperaba a un amigo para que me arreglara el ordenador...

P.- Sí, sí. No te preocupes. Mejor no nos demoremos y retomemos el trabajo.

E.- Sí. Además he escuchado la grabación de nuestra última sesión de trabajo y me han quedado algunas dudas. ¿Qué te parece si empezamos por ellas?

P.- Adelante.

E.- Bueno... Hasta aquí hemos dicho que las matemáticas no existen sólo para que la gente las aprenda y las enseñe. Es algo que sirve para resolver ciertas cuestiones. Cuando uno se plantea un problema de matemáticas, puede ir a consultar a un "matemático" —en el sentido que tú propones—. Estoy de acuerdo. El olvidar que las matemáticas sirven sobre todo para resolver problemas, eso es la enfermedad didáctica. Muy bien.

P.- Sí. Aprender y enseñar son medios al servicio de un fin.

E.- Eso mismo.

P.- Pues, adelante con tu pregunta.

E.- Mira. Si, al encontrarnos con una cuestión de matemáticas, podemos en todo momento hallar en nuestro entorno a un "matemático" para que nos la resuelva, ¿por qué se obliga a todos los alumnos a aprender matemáticas en la escuela? Ésta es mi primera pregunta.

P.- Ya. Déjame decirte que tu pregunta es muy ingenua, aunque no por ello deja de ser una buena pregunta.

E.- ¿Por qué muy ingenua?

P.- Pues, porque olvidas a la mitad del mundo.

E.- No te entiendo...

P.- No me entiendes. Bueno. Pues escúchame bien. Cuando eras pequeño, supongo que algunas veces te caías, te hacías daño o te salía un grano en la nariz. ¿Y qué hacías en estos casos? Ibas a ver a tu padre o a tu madre, o quizá a tu prima, para que te curaran la herida. Y, por ejemplo, tu madre te decía: "No es nada..." Y te ponía un poco de mercromina.

E.- ¡Sí, no me gustaba nada la mercromina!

P.- Bueno, a ver, ¿cómo interpretarías tú la interacción social entre tú y tu madre, en este caso?

E.- Ya veo por donde van los tiros. Quieres decir que en este caso yo era B, mi madre era A y B hacía que A desempeñara el papel de médico para B.

P.- Exacto. Ahora bien, ¿es acaso tu madre un médico en el sentido habitual, legal, de la palabra?

E.- No.

P.- Y sin embargo hacía de médico para ti. En tanto que madre le era muy difícil negarse a cuidarte alegando que no era médico. No le quedaba más remedio. Tú le imponías —sin saberlo— una responsabilidad "médica". De manera limitada, pero real.

E.- Sí, pero también me hubiera podido llevar al médico, a uno de verdad.

P.- Tal vez. Pero en este tipo de casos, de hecho, no lo hacía. Asumía su papel de médico. ¡Imagina además lo que pasaría si acudiéramos al médico cada vez que tenemos una heridita! Por cierto, estoy casi segura de que, en lo que va de mes, habrás hecho de médico para alguien, ¿no es cierto?

E.- No lo sé... ¡Sí, es verdad! La semana pasada uno de mis compañeros se resfrió y, como vi que no se cuidaba, le di una medicina que me quedaba de un resfriado que había tenido dos semanas antes.

P.- Y en este caso, además, no fue él quien te pidió que hicieras de médico para él.

E.- Es verdad, fue espontáneo.

P.- Otra cosa. La semana pasada no nos pudimos encontrar porque tu amigo vino a arreglarte el ordenador a la hora a la que habíamos quedado.

E.- Sí, la verdad es que lo siento mucho, Profesora.

P.- Tranquilo, no pasa nada. ¿Tu amigo es informático?

E.- ¡No, qué va! Es músico.

P.- Y cuando tienes un problema con el ordenador, ¿siempre recurres a él?

E.- Sí, sabe mucho de máquinas...

P.- Así, ¿es tu informático?

E.- Sí. Y es verdad que si él no supiera solucionarme los problemas tendría que recurrir a un informático de verdad.

P.- No estoy muy segura. Porque un informático de verdad, hoy en día, no se sabe muy bien lo que es —en el sentido en el que hablábamos de un médico de verdad, claro—. La situación no es tan clara, los papeles que asume cada uno son mucho más flexibles en este campo. Pero no importa. Lo que también puede ocurrir es que algún día tú tengas que hacer de informático para alguien de tu entorno.

E.- Es verdad, ya me ha ocurrido. Pero si te entiendo bien, lo que quieres decir es lo siguiente: nos puede ocurrir, a cada uno de nosotros, que tengamos que hacer de informático, de médico o de matemático para otra persona. ¿Es eso?

P.- ¡Exactamente! Y ahora podemos volver a tu pregunta. No sólo se aprenden matemáticas para hacer de matemático de uno mismo. Porque es verdad que uno siempre encontrará a alguien más o menos cercano que le pueda resolver sus problemas. A menos, claro, que nos planteemos cuestiones muy difíciles. Pero entonces es como con una enfermedad grave: hay que ir a ver a un especialista. No. En realidad, hay una buena razón para aprender matemáticas porque, en la vida social, uno se puede ver conducido, e incluso obligado, a hacer de matemático para alguien. Lo saben muy bien los padres que no han ido a la escuela y que, cuando sus hijos son pequeños, se ven obligados a hacer de matemáticos, de gramáticos, de historiadores, etc., para ellos. Es a veces doloroso que, por falta de instrucción, no podamos ser lo que los demás —a veces aquellos que nos importan más— esperan que seamos. Porque nos da la impresión de que no tenemos valor social, o familiar. Somos una madre, un padre o un amigo del que casi no se puede esperar nada.

E.- ¡Tengo algo que objetar, Profesora!

P.- Dime...

E.- Pues bien, en primer lugar, este "valor social" del que hablas no se desprende sólo de lo que se aprende en la Escuela. Mi abuela no fue nunca a la escuela y, para mí, sabía muchas cosas en muchos ámbitos...

P.- Sí. Y viceversa. Uno puede estar muy instruido y no tener ningún valor social, por ejemplo porque la instrucción que ha recibido no se deja ver en interacciones sociales, no le permite hacer de matemático, de médico, de consejero fiscal o de lo que sea. Fíjate que es hacia ahí exactamente que nos encaminamos cuando, como parecías considerar, uno aprende matemáticas, biología o lo que sea sólo para uno mismo, creyendo que el estudio se justifica sólo por el hecho de sernos útiles a nosotros en primera persona.

E.- Quieres decir que es una concepción de las cosas muy egoísta.

P.- O, digamos, individualista. Pero dejemos de lado la moral. Es una visión de las cosas que no se corresponde con los hechos, con la manera que tenemos de vivir concretamente en sociedad, con la familia, los vecinos, los amigos, etc.

E.- Sí, es verdad. Pero entonces tengo otra objeción. Has dicho que, en la práctica, nos vemos todos conducidos, un día u otro, a hacer de médicos o de matemáticos para alguien. Y ello porque uno no va a consultar a un médico o a un profesor de matemáticas cada vez que tiene una heridita o que tiene una pequeña dificultad de tipo matemático.

P.- Sí.

E.- Pero podemos llevar este razonamiento al extremo. En algunos casos, no molestaremos a nadie, ni siquiera en nuestro entorno más próximo. Seremos nuestro propio médico o matemático. Así pues, no es sólo para los otros que aprendemos; es primero para uno mismo.

P.- Veo que piensas. Y además piensas bien.

E.- ¡Gracias, Profesora!

P.- Tienes toda la razón. Pero como ves, es siempre la misma razón. No hay un yo, por un lado, y los demás por el otro lado. Hay lo que puedo hacer por mí misma, sin molestar a nadie, y aquello para lo que necesito recurrir a alguien de mi entorno. Y después hay lo que me obliga a buscar la ayuda de alguien más alejado, un médico, un fontanero, un profesor, etc. Además, fíjate que, para poder hacer esto, se tiene que cumplir una condición: que cada uno tenga una instrucción suficiente como para saber en qué ámbito situar las dificultades que le van surgiendo, para saber si puede resolverlas por sí mismo o si es más razonable pedir la ayuda del prójimo, o aun si esta ayuda va a ser suficiente o no. Es necesario un mínimo de instrucción en cada ámbito, una instrucción básica.

E.- ¡Pues, entonces, todavía tengo otra objeción!

P.- Adelante.

E.- Mira, si consideramos todas las dificultades que uno puede encontrar en la vida o sobre las cuales puede ser consultado... por ejemplo, hace unos días un amigo mío tuvo un conflicto con la propietaria de su piso, y me pidió consejo.

P.- Quería que le hicieras de "asesor jurídico".

E.- Eso es. Pero esto, precisamente, no forma parte de lo que se enseña en la Escuela. Para tener un verdadero valor social, como tú decías, también tendríamos que instruirnos en este ámbito. ¡Y en muchos otros!

P.- Sí, sí, es verdad. Y aquí volvemos al caso de tu abuela. Para vivir bien y ayudar a los demás a vivir bien, hay que adquirir todo tipo de competencias. La instrucción "formal", la de la Escuela, nos proporciona un mínimo, o mejor una base, un fundamento. Muchas veces, el resto de competencias que adquirimos es el fruto de una instrucción "informal", dada por diferentes circunstancias de la vida.

E.- ¿Me puedes dar un ejemplo?

P.- Sí. Volvamos a las matemáticas y a la Tienda de matemáticas, porque eso es lo que estudiamos, ¿no?

E.- Sí, sí.

P.- Vale. Los profesores de matemáticas, Marta, José y Luis, han recibido una instrucción "formal" en matemáticas. El episodio al que hacemos referencia ocurrió hace algunos años. Sabes que durante la reunión evocaron una cuestión que les planteó una colega de matemáticas...

E.- Sí, la que quería saber en qué casos cos $(r\pi)$, donde r es un número racional, puede escribirse con una superposición de radicales. He pensado en la cuestión y no veo por dónde cogerla.

P.- Pues, precisamente, a esta hora, supongo que ellos sí deben saber cómo contestar, aunque su respuesta sea incompleta. La respuesta no la han aprendido durante sus estudios de matemáticas, ni en el instituto ni en la universidad, sino a raíz de su trabajo en la Tienda de Matemáticas. ¿Entiendes lo que quiero decir?

E.- Sí. Pero esto representa muy poco en comparación con lo que han aprendido durante sus estudios "formales".

P.- No te engañes. En realidad, cuanto más envejecemos, más conocimientos tenemos como fruto de una instrucción informal, adquiridos en situaciones en las que no había un profesor para enseñarnos. Por ejemplo, lo que sabe un investigador de un área dada es en gran parte el resultado de una instrucción informal adquirida durante las investigaciones en las que ha participado, ya sea como director, como colaborador o como ayudante. Y esto es tanto más verdad cuanto más viejo se es. ¡Dímelo a mí!

E.- Tampoco eres tan vieja...

P.- ¡Míralo él, qué simpático de repente! Gracias, pero ahora tenemos que dejarlo. Nos veremos la semana que viene, tal como habíamos quedado.

E.- Sí, gracias. Hasta la próxima.

La didáctica de las matemáticas, ciencia del estudio

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días. Supongo que debes tener aún alguna pregunta, ¿no?

E.- Sí, claro. La última vez tomaste el ejemplo del coseno...

P.- Sí.

E.- Y he vuelto a pensar en lo de la enfermedad didáctica. Has dicho que la Tienda permitía a los profesores recordar que son matemáticos, y no sólo para sus alumnos.

P.- Sí, les recuerda que las matemáticas no son sólo algo que se aprende y que se enseña.

E.- Eso es. Pero entonces, con lo de los cosenos, los profesores tendrán que aprender cosas nuevas, puesto que en un principio no saben contestar a la pregunta.

P.- Claro.

E.- ¡Y entonces vuelven a caer en la enfermedad didáctica!

P.- ¡Espera, espera! No hay que ir tan rápido. No todo es enfermedad didáctica. Estos profesores tienen que aprender cosas, pero no para enseñarlas más tarde. Lo que quieren es poder resolver una cuestión que alguien les ha planteado. Si te acuerdas, se trataba de colaborar en la actualización del Curso de Trigonometría del Instituto.

E.- Eso es.

P.- Aprender, en este caso, es para estos profesores un medio al servicio de un fin que no es enseñar lo que habrán aprendido sino responder a una cuestión que se les ha planteado. En muchos casos, para responder a las cuestiones planteadas, no tendrán que aprender nada; lo tendrán que hacer, y punto.

E.- Por ejemplo, en el caso de la tabla simétrica de la profesora de biología.

P.- Eso mismo. Pero aquí quisiera introducir otra consideración.

E.- ¿Sí?

P.- Para aprender la información necesaria para contestar a la cuestión del coseno, los profesores no reciben ninguna enseñanza. Creo que eso es lo que pasó. La enfermedad didáctica también consiste en creer que, para que alguien aprenda algo, tiene que seguir un curso, o recibir clases sobre ese algo.

E.- ¿Entonces quieres decir que la enseñanza no es imprescindible?

P.- ¡Claro que no! Volviendo a donde estaba. Estos profesores tienen que estudiar una cuestión. Ésa es la palabra clave: "estudiar". Para aprender lo que quieren saber, van a estudiar. Para estudiar, podrán tomar clases o seguir un curso sobre el tema en cuestión. Pero muchas veces no podrán contar con esta ayuda. Eso es lo que ocurre con lo que he llamado la "instrucción informal". Nos tenemos que instruir, pero sin profesor, sin enseñanza.

E.- Entonces, ¿cuál es el papel de la enseñanza?

P.- Es una ayuda. Es una ayuda útil, potente. Eso es justamente lo que uno descubre cuando tiene que estudiar sin profesor. Es como si ahora tú quisieras instruirte sobre la cuestión del coseno. Eso es lo que quería decir, y nada más.

E.- Si me permites, Profesora, voy a intentar resumir lo dicho hasta aquí...

P.- Muy bien, adelante.

E.- En ciertos casos, para poder actuar, hay que aprender. Para aprender, estudiamos. Un medio para estudiar es seguir un curso o tomar clases. Pero muchas veces, cuando uno ya no está en la escuela, tiene que estudiar de otra forma, porque no encuentra una enseñanza "hecha a medida".

P.- Eso mismo. Y añadiré algo más: incluso cuando existe una enseñanza "hecha a medida", como tú dices, estudiar no se reduce al mero hecho de asistir a clase. Pero supongo que este tema lo volveremos a tratar más adelante.

E.- Sí, de acuerdo. Pero ahora tengo otra pregunta, siempre sobre la enfermedad didáctica.

P.- Te escucho.

E.- Cuando trabajan en la Tienda, José, Luis o Marta hacen de matemáticos, pero no de profesores de matemáticas. Éste era precisamente uno de los objetivos de la creación de una Tienda de Matemáticas en el Instituto.

P.- Sí.

E.- Pues entonces, en algunos casos —no en todos, claro, pero sí en algunos—, tendrán que aprender cosas que no sabían de entrada. No enseñar, pero sí aprender. Y ya volvemos a lo didáctico. Si no es así, ¿a qué llamas tú "didáctico"?

P.- Tienes toda la razón. Pero antes de contestar a tu pregunta, te recordaré brevemente el esquema de organización de la Tienda. En la Tienda propiamente dicha, se toman los "encargos" de los clientes. Digamos que se reciben sus problemas y se discute con ellos para hacerles precisar qué es lo que necesitan. Además, para realizar los pedidos, la Tienda necesita un taller: el Taller de Matemáticas del Instituto. En el Taller, se "fabrican" las respuestas a las cuestiones planteadas. Algunas veces, los miembros del Taller disponen de todo lo necesario —en términos de conocimientos matemáticos— para fabricar la respuesta...

E.- Como en el caso de la tabla simétrica o de los tendederos de María.

P.- Exacto. Éste es un primer caso. También hay un segundo caso, que es el de los cosenos. Aquí, el Taller de Matemáticas no dispone a priori de los elementos necesarios para fabricar una respuesta apropiada.

E.- Hubieran podido rechazar el encargo, ¿no?

P.- Claro, claro. No siempre encuentras en el supermercado lo que quieres o lo que podrías desear. Por ejemplo, si vas al supermercado de tu barrio para comprar una tonelada de arroz, seguro que te dirán que no aceptan el encargo.

E.- ¡Hombre, pues claro!

P.- Bueno. Pues, en el caso de los cosenos, el Taller de Matemáticas, o por lo menos algunos de sus miembros, se van a poner a trabajar para estudiar la cuestión que les ha sido planteada.

E.- Tendrán que estudiar.

P.- Sí, eso mismo. Y ahora contestaré a tu pregunta. El adjetivo "didáctico" se corresponde con el sustantivo "estudio". Un proceso didáctico es un proceso de estudio.

E.- ¿Entonces afecta al alumno?

P.- Sí y no.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues bien, en un proceso didáctico, en un proceso de estudio, la distinción alumno-profesor no aparece necesariamente tan marcada como cuando nos referimos al marco escolar, con un profesor por un lado y los alumnos por el otro. En el caso del Taller de Matemáticas, hay un equipo que va a estudiar la cuestión del coseno. Aparentemente, el equipo se va a organizar en torno a Luis. Podemos suponer que es Luis quien dirige el estudio.

E.- ¿Lo que quiere decir...?

P.- Lo que quiere decir, por ejemplo, que será él el responsable del avance del estudio frente al Taller de Matemáticas. Lo que quiere decir también que, en la práctica, será él el que deberá abrir la ruta, mostrar el camino y guiar todo el proceso.

E.- ¡Será el líder del equipo!

P.- Sí, si lo quieres decir así. En un proceso didáctico, siempre aparece una comunidad cuyos miembros desempeñan papeles más o menos diferenciados. Si nos referimos al marco escolar, el líder, el director de estudio, es generalmente el profesor. Lo que la gente llama el proceso de enseñanza/aprendizaje es, de hecho, una forma particular del proceso didáctico. Por lo tanto, la didáctica de las matemáticas es la ciencia que estudia los procesos didácticos, los procesos de estudio de cuestiones matemáticas.

E.- ¡Entonces el ámbito de esta ciencia es más amplio que el mero estudio de lo que ocurre en una clase!

P.- Sí. Es más amplio porque, como ves, la didáctica de las matemáticas se propone entender o analizar tanto los procesos didácticos relacionados con el Taller de Matemáticas, por ejemplo, como los procesos didácticos que se producen en una clase normal de matemáticas. Y, al mismo tiempo, no hay que olvidar que, para que una clase funcione, tienen que existir también procesos didácticos fuera de la clase. Los alumnos tienen que estudiar por sí mismos, individualmente o en grupo. Estudian a veces con la ayuda de sus padres, o incluso bajo la dirección de sus padres, siempre en relación con la clase pero fuera de ella. O sea: lo que ocurre en clase genera toda una serie de procesos didácticos. Y en estos procesos didácticos, el esquema del alumno y del profesor, el esquema de la enseñanza/aprendizaje, no es, como ves, el mejor. En un grupo de alumnos que trabajan juntos sobre algo que les ha encargado el profesor, podrá haber algunos alumnos que hagan de cabecillas para impulsar el proceso de estudio, sin que ninguno de ellos se tenga por el profesor. Y, evidentemente, sin que haya enseñanza. Además, también podrán pedir ayuda a alguien que no sea del grupo, como un alumno mayor o un adulto, etc. En este caso no habrá clase, ni profesor, pero sí proceso didáctico.

E.- Entonces, estos procesos didácticos particulares en los que participan los alumnos —con sus compañeros de clase, sus padres, etc.— son en realidad "subprocesos" del proceso de enseñanza/aprendizaje que conduce el profesor.

P.- Cierto. Y es conveniente que todos estos subprocesos converjan para hacer avanzar el proceso didáctico que dirige el profesor. Si sólo habláramos del proceso de enseñanza/aprendizaje, sólo pensaríamos en un modelo bastante particular de proceso didáctico. Y esto no es lo mejor para entender, en general, lo que es estudiar. Además hay una tendencia a olvidar que el proceso de enseñanza/aprendizaje sólo puede existir si se dan al mismo tiempo otros procesos didácticos —que podemos llamar periféricos, si quieres—. Y todos estos "olvidos" no ayudan a entender lo que pasa en una clase.

E.- Ya veo...

P.- Espera un momento. Cuando digo "hay una tendencia a olvidar", quiero decir que el profesor tiende a olvidar, y también el alumno.

E.- Sí, vale, vale. Aunque hay un caso que no has citado. Es el del alumno que estudia solo, pero en relación con el trabajo de clase. Solo, sin que nadie le ayude. ¡Es, sin embargo, un caso muy típico!

P.- Sí, totalmente. Y ahí, ves, también hay un proceso didáctico, aunque no haya proceso de enseñanza. La comunidad de estudio se reduce a una sola persona, y esta persona es su propio director de estudio.

E.- Bueno... ¡Pero aún me quedan dos preguntas!

P.- ¿Ah sí?

E.- Hemos dicho que para aprender algo uno estudia. También hemos dicho que podía haber estudio sin enseñanza, aunque una enseñanza resulte casi siempre muy útil. Mi pregunta es: ¿puede haber aprendizaje sin enseñanza e incluso sin estudio?

P.- Claro que sí. Incluso te diré que una parte importante de lo que hemos llamado "instrucción informal" es el resultado de un aprendizaje que no proviene del estudio.

E.- Así, todo proceso de aprendizaje no es un proceso didáctico.

P.- No.

E.- Y la didáctica sólo se interesa por los procesos didácticos. ¿Lo he entendido bien?

P.- Sí. Pero tu descripción es incompleta. En realidad, se pasa siempre muy rápido, y sin casi darse cuenta, de una cuestión informal a un esbozo de estudio: intentamos informarnos sobre algo, preguntamos a los de nuestro alrededor, probamos a ver qué pasa, o incluso nos compramos un libro. Muy a menudo, es verdad, estas tentativas fracasan. Lo que quiero decir es que todas las actividades humanas suscitan procesos didácticos o, si prefieres, que estamos constantemente a punto de pasar de una actividad habitual, no didáctica, a una actividad didáctica.

E.- ¡Es la enfermedad didáctica!

P.- ¡No! Precisamente, la enfermedad didáctica consiste en no saber distinguir entre lo no-didáctico y lo didáctico. No se puede entender qué es lo didáctico si uno no tiene una idea clara sobre lo no-didáctico. ¿Me sigues?

E.- Creo que sí. Por eso dices que, en matemáticas, hay que hacer pequeños trabajos matemáticos que se puedan realizar a partir de lo que uno ya sabe, es decir tener una actividad no-didáctica. Y todo como condición para entender mejor y saber conducir mejor una actividad didáctica.

P.- Sí, eso es. Ahora entiendes mejor lo de la Tienda de Matemáticas.

E.- Sí. Pero aún me queda una pregunta. ¿Puedo?

P.- Sí, claro.

E.- He pensado en tu definición de matemático. En lo que a mí respecta, me parece que he tenido muy pocas ocasiones para hacer de matemático —fuera de las clases particulares, claro—. En el fondo, tengo la impresión de que se me presentan más oportunidades de hacer de médico o de informático que de matemático.

P.- No te equivocas, no. Es verdad que la gente tiene más tendencia a pedir consejos a su alrededor en cuestiones de salud o, más en general, de su vida cotidiana. ¡E incluso de su vida sentimental! Pero no ven qué se puede pedir en matemáticas. Es verdad.

E.- ¡A lo mejor es que no tienen necesidades matemáticas!

P.- A lo mejor. Por qué no. De todas formas, el reconocer que tal o cual necesidad es una necesidad de tal o cual tipo no es una actitud espontánea. Es una actitud que se aprende. Hay grupos sociales, por ejemplo, que no se pueden imaginar que haya maneras de comer o de cuidarse diferentes de las suyas.

E.- Quieres decir que hay gente que no se plantea nunca cuestiones de dietética o de salud. Y que, por tanto, no se cuidan nada.

P.- Eso mismo. Pues, con las matemáticas, sucede lo mismo, no sólo en ciertos grupos sociales, sino en toda la sociedad.

E.- ¡Es un problema cultural!

P.- Sí, eso es.

E.- ¿Y no podrías precisar un poco más tus afirmaciones?

P.- Es un fenómeno general. En la vida de una sociedad y en un momento dado de su historia, la mayoría de las necesidades no son explícitas, no se expresan fácilmente. En términos técnicos, diríamos que son necesidades *latentes*...

E.- ¿En oposición a...?

P.- A lo que se pueden llamar necesidades *patentes*, reconocidas por la gente, de las que se hacen cargo las instituciones de la sociedad.

E.- ¿No me podrías dar algún ejemplo en relación a las matemáticas?

P.- Pues mira, ¿sabes qué? Había antaño una noción que facilitaba el reconocimiento tanto de las necesidades matemáticas como de la capacidad para satisfacerlas —necesidad de entender y necesidad de actuar—. Hasta principios del siglo XIX, se distinguían las matemáticas puras...

E.- ¡De las matemáticas aplicadas!

P.- No, no. No se hablaba de matemáticas aplicadas, aunque sí de aplicaciones de las matemáticas. Se hablaba de "matemáticas mixtas".

E.- ¿Y eso qué quería decir?

P.- La idea es la siguiente... Hay muchas cuestiones relativas a fenómenos naturales o a la vida en sociedad a las que podemos responder con ayuda de las matemáticas y de un pequeño número de conocimientos no matemáticos, por ejemplo, de física, biología, comercio, etc. En otras palabras, basta con saber un poco de física, biología o comercio y, a partir de ahí, dejar que las matemáticas hagan el resto. Como ves, la noción de matemáticas mixtas ponía énfasis en el poder explicativo de las matemáticas.

E.- ¿Y no me podrías dar algún ejemplo?

P.- Sí, claro que sí. Pero sólo te diré la pregunta. ¡Así tendrás un motivo para hacer de matemático!

E.- Muy bien.

P.- Bueno. Supongo que alguna vez te has sumergido en el agua y, habrás notado que, al mirar desde el fondo la superficie del agua, ves el cielo justo encima tuyo, pero por los lados, el agua se comporta como un espejo. ¿Te ha pasado?

E.- Sí. ¡Pero esto es un fenómeno de refracción!

P.- Sí. Las leyes que rigen la refracción, eso es lo máximo que necesitas para explicar el fenómeno. Lo demás son matemáticas. Te hago notar de paso que aquí se trata de algo de lo que ya has oído hablar porque también sabes algo de física, ¿no?

E.- Claro. ¿Pero crees que saber todo esto es realmente una necesidad que yo tengo?

P.- Tu pregunta es legítima, pero la respuesta no es tan simple como parece. Todo depende de lo que quieras hacer. Es tu problema. Te repito que hay gente que vive sin sentir nunca ninguna necesidad, sin plantearse nunca ninguna cuestión.

E.- ¡Gracias por la alusión!

P.- No me lo agradezcas. Te voy a contar una anécdota bastante trágica y que te mostrará, espero, lo ridículo de tu susceptibilidad. Es una historia verdadera. Hace algunos años, en la maternidad de un hospital, una enfermera principiante que se encargaba de preparar los biberones de los recién nacidos se equivocó y les puso sal en lugar de azúcar. Resultado: se murieron más de 10 bebés.

E.- ¡Qué barbaridad! Sal en lugar de azúcar... ¿Cómo puede ser que se murieran por tan poca cosa?

P.- No es tan poca cosa como parece. Fíjate bien. Sabrás que las moléculas de sal son mucho más pequeñas que las de azúcar. Y también debes saber que la presión de una solución es proporcional al número de moléculas que contiene, ¿no?

E.- Sí, más o menos.

P.- Pues bien, con esto y el fenómeno de la osmosis se puede comprender lo catastrófico del error de la enfermera: la sal hace aumentar radicalmente la osmolaridad del plasma sanguíneo. Para equilibrarla, las células se deshidratan acumulando agua en los vasos sanguíneos y se eleva mucho la tensión arterial. Es fácil entonces que se produzcan, en los recién nacidos, hemorragias cerebrales u otros accidentes cardiovasculares. Pero el niño se muere, esencialmente, por deshidratación.

E.- Me asustas, Profesora. Pero todo no es así, ¿verdad?

P.- No, claro que no. Hace algunos días, ves, estuve hablando con unos colegas que organizan un encuentro internacional. Un encuentro muy oficial, con representantes de 6 países europeos. Había un representante por país, es decir, 6 personas. Algunos de los organizadores querían que cada uno pudiera hablar en su propio idioma.

E.- ¡Es normal! No veo por qué un griego no podría hablar en griego y un italiano en italiano.

P.- Sí, sí, claro. ¡No ves por qué! A mí también me gusta mucho más expresarme en mi lengua que tener que hablar en inglés. Es normal. También es el principio del mínimo esfuerzo. Pero mira: para 6 idiomas distintos...

E.- Se necesitan 6 intérpretes. ¡Es mucho!

P.- ¡Qué dices! ¡Se necesitan muchos más!

E.- Uy, sí, perdón. Si para cada par de idiomas se necesita un intérprete, se necesitarán

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} \text{ ... ¡15 intérpretes!}$$

P.- ¡Ah! ¡Lo ves! Y encima no has tenido en cuenta que un intérprete sólo traduce en un sentido: para que los representantes griego e italiano se puedan comunicar, se necesitan 2 intérpretes.

E.- Luego son 30 intérpretes.

P.- Eso mismo. Imagínate la situación: 6 personas alrededor de una mesa y, a su alrededor, en las cabinas de intérpretes, ¡30 personas más! Claro que la situación no es tan dramática como la del azúcar y la sal...

E.- No, pero debe ser muy caro.

P.- Sí. Yo diría desmesuradamente caro. Pero no es más que mi opinión. También se puede opinar lo contrario. De todas formas, lo que sí se necesita es poder decidir con conocimiento de causa. Si restringimos a 3 los idiomas de trabajo —por ejemplo, el castellano, el inglés y el francés—, sólo se necesitarán 6 intérpretes. Tantos intérpretes como representantes. Y si escogemos un único idioma...

E.- ¡El inglés, claro!

P.- Sí. Nosotros decidimos trabajar en inglés. A decir verdad, en el grupo de trabajo había un español, un francés, un italiano, un griego, un portugués y un alemán. No había ningún representante inglés. Escogimos el inglés para estar todos en igualdad de condiciones. Pero bueno, en este caso...

E.- No necesitasteis ningún intérprete.

P.- Exacto. Porque todos habíamos aprendido inglés en la escuela. Y ahora, si me perdonas, me tengo que marchar. Nos veremos dentro de un mes. Tienes tiempo para pensar en todo esto. Ánimo.

E.- Gracias, Profesora.

SÍNTESIS 1

No se puede abordar el tema de la *enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* sin preguntarse al mismo tiempo qué son las matemáticas, en qué consisten y para qué sirve hacer matemáticas. Ahora bien, estas preguntas no pueden referirse únicamente a las matemáticas de la escuela, tienen que abarcar todas las matemáticas que existen en nuestra sociedad.

Podríamos pensar que cada uno de nosotros tomado individualmente puede vivir sin necesidad de matemáticas o, por lo menos, sin muchas de las matemáticas que se estudian en la educación obligatoria. Pero esta creencia sólo se da porque, de hecho, no vivimos solos sino en sociedad: en una sociedad que funciona a base de matemáticas y en la que hay gente capaz de hacer de matemático para cubrir las necesidades de los demás, incluso cuando éstos no reconocen sus propias necesidades matemáticas.

El hecho de que se enseñen matemáticas en la escuela responde a una necesidad a la vez individual y social: cada uno de nosotros debe saber un poco de matemáticas para poder resolver, o cuanto menos reconocer, los problemas con los que se encuentra mientras convive con los demás. Todos juntos hemos de mantener el combustible matemático que hace funcionar nuestra sociedad y debemos ser capaces de recurrir a los matemáticos cuando se presenta la ocasión. La presencia de las matemáticas en la escuela es una consecuencia de su presencia en la sociedad y, por lo tanto, las necesidades matemáticas que surgen en la escuela deberían estar subordinadas a las necesidades matemáticas de la vida en sociedad.

Cuando, por las razones que sea, se invierte esta subordinación, cuando creemos que las únicas necesidades sociales matemáticas son las que se derivan de la escuela, entonces aparece la "enfermedad didáctica". Este reduccionismo lleva a considerar que las matemáticas están hechas para ser enseñadas y aprendidas, que la "enseñanza formal" es imprescindible en todo aprendizaje matemático y que la única razón por la que se aprenden matemáticas es porque se enseñan en la escuela. Se reduce así el "valor social" de las matemáticas (el interés social de que todos tengamos una cultura matemática básica) a un simple "valor escolar", convirtiendo la enseñanza escolar de las matemáticas en un fin en sí mismo.

Este tipo de reducciomsmo[1] puede conducir a "no tomarse en serio" las matemáticas que se hacen en la escuela, considerándolas como un mero "artefacto escolar". Aparece entonces un problema didáctico que puede formularse como sigue: "¿Qué hacer para que los alumnos se sitúen como matemáticos ante las cuestiones matemáticas que se les plantean en la escuela, y para que asuman ellos mismos la responsabilidad de sus respuestas?"

Tenemos aquí un ejemplo de problema relativo a las actividades matemáticas escolares que no es posible entender desde una perspectiva puramente escolar, sin tomar en cuenta lo que ocurre fuera de la escuela, y en particular la poca visibilidad de las matemáticas en el conjunto de la sociedad. De ahí que no podamos separar los procesos de enseñanza y aprendizaje del resto de las actividades matemáticas.

Hemos de tener en cuenta que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son aspectos particulares del *proceso de estudio de las matemáticas*, entendiendo la palabra "estudio" en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también "estudia" problemas de matemáticas.

Lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el *estudio* y con la *ayuda al estudio* de las matemáticas, identificándose entonces los *fenómenos didácticos* con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. La didáctica de las matemáticas se define, por tanto, como la *ciencia del estudio de las matemáticas.*

1. Habría que decir que éste no es el único tipo posible de reduccionismo respecto al origen de las necesidades matemáticas y, en general, respecto a la naturaleza de las matemáticas. Así, cuando se da prioridad de manera absoluta a las *necesidades matemáticas de origen extramatemático*, aparece lo que podríamos denominar "enfermedad utilitarista", mientras que si son las *necesidades de origen intramatemático* las únicas que se consideran, entonces nos encontramos con la "enfermedad purista". No entraremos aquí en las disfunciones que cada una de estas "enfermedades" puede provocar en el seno de la comunidad matemática puesto que éste es un tema que no se trata en los *Diálogos.*

COMENTARIOS Y PROFUNDIZACIONES 1

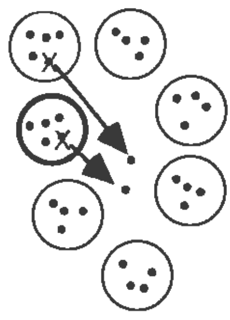
1. ¿Qué significa "hacer matemáticas"?

En principio podría parecer que está claro lo que son las matemáticas o, cuanto menos, que es posible saber si una persona está o no *haciendo matemáticas*. Veremos a continuación que la situación no es siempre tan clara como parece.

1.1. Cómo compartir una bolsa de caramelos

Tenemos una bolsa de caramelos que queremos repartir a partes iguales entre unos amigos. Lo primero que podemos hacer es pedir a los amigos que se sitúen en corro o en fila, dar un caramelo a cada uno haciendo una primera ronda y repetir tantas rondas como sea necesario hasta quedarnos sin caramelos —teniendo en cuenta que, si en la última ronda no conseguimos dar un caramelo a cada uno, entonces habrá que retomar los últimos caramelos distribuidos—. De esta manera podemos realizar el reparto sin necesidad de ninguna noción matemática explícita.

Este primer procedimiento es simple y eficaz, pero de alcance limitado: tenemos que suponer que todos los amigos están presentes y bastante cerca los unos de los otros. Consideremos entonces otra solución. Vamos a representar a los amigos por círculos en el suelo en los que iremos distribuyendo los caramelos. Una vez distribuidos, recogeremos los caramelos de cada círculo y los entregaremos a cada amigo.



Se dibuja un círculo para cada amigo formando un corro y se señala el círculo por el que se empieza. Se hace después el reparto poniendo un caramelo en cada círculo. Si no hemos podido acabar la ronda, retomamos los últimos caramelos distribuidos.

No es necesario saber que la bolsa contiene 30 caramelos y que hay 7 niños, ni que hay que dar 4 caramelos a cada uno y que sobran 2. Basta con hacer el reparto.

Al realizar este procedimiento nos hemos alejado un poco de la realidad inicial del problema, reemplazando a los amigos por un *modelo* de más fácil manipulación: unas figuras que los representan. Esta representación aumenta bastante la eficacia y fiabilidad del procedimiento: no importa si los amigos están quietos o jugando al escondite, ni si están cerca o, al contrario, viven en otra ciudad. Podemos trabajar tranquilamente con los nombres de nuestros amigos, los círculos y los caramelos. Nos estamos acercando a las matemáticas.

Podemos ampliar un poco el modelo anterior asociando una piedrecita a cada caramelo para no tener que manosearlos tanto. Al fiual, bastará con sustituir cada piedrecita del círculo por un caramelo y hacer llegar a cada amigo lo que le corresponde. El procedimiento ha mejorado, pero sigue siendo limitado: ni el número de amigos ni el de caramelos puede ser muy elevado, a menos que dispongamos de una habitación muy grande para que quepan todos los círculos y de mucha paciencia para ir repartiendo las piedrecitas.

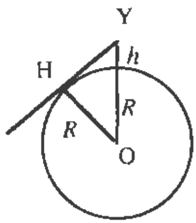
Demos, pues, un paso más. En el caso de tener muchos caramelos y muchos amigos, lo mejor es *dividir* el número de caramelos por el número de amigos para saber de antemano cuántos caramelos le corresponde a cada cual. En este procedimiento se tiene que *contar* y se necesitan *cifras* para designar los números obtenidos y efectuar la división. Una vez realizada la operación, sólo queda interpretar el resultado en términos de "caramelos" y de "amigos" para hacer llegar a cada amigo su paquete de caramelos. Si alguien nos ve recurrir a este procedimiento, no dudará en afirmar que *estamos haciendo matemáticas*.

$$\begin{array}{r|l} 325 & 23 \\ \cline{2-2} 095 & 14 \\ 03 & \end{array}$$

Lo que se ha hecho aquí es construir un *modelo numérico* de la situación del problema, construcción que no requiere tener ni a los amigos ni a las piedras físicamente presentes. Basta con tener cierta información previa, con disponer de un lápiz y un papel... y de un poco de tranquilidad. Lo que se hace entonces es transformar la cuestión inicial —"¿Cómo repartir los caramelos?"— en un problema matemático: "¿Cuánto es 325 (caramelos) dividido entre 23 (amigos)?", y utilizar un modelo escrito —los números y la operación de dividir— para resolver el problema planteado. Una vez resuelto el problema, habrá que volver a la situación inicial para realizar el reparto: dar 14 caramelos a cada uno sabiendo que sobrarán 3.

1.2. Cómo calcular la distancia al horizonte

Supongamos ahora que queremos saber a qué distancia está el horizonte cuando lo contempla desde la orilla del mar en un día claro de primavera. Aquí no disponemos de ningún método material para efectuar concretamente la medición y deberemos recurrir a un *modelo gráfico* de la situación: la Tierra será "un círculo" (considerando un corte transversal), el observador estará en lo alto del círculo y la distancia al horizonte vendrá determinada por la *visual* o línea imaginaria que parte de los ojos del observador y es tangente a la Tierra.



Hagamos una figura en un trozo de papel trazando un triángulo rectángulo OHY donde O es el centro de la Tierra, H un punto del horizonte e Y el punto en el que se encuentran los ojos del observador, que supondremos a una altura a sobre el nivel del mar (es decir, sobre "la superficie de la Tierra"). Tenemos $OY = R + a$, donde R es el radio de la Tierra. Como el triángulo OHY es rectángulo, se tiene (por Pitágoras) $OY^2 = OH^2 + HY^2$, de donde $HY^2 = (R + a)^2 - R^2 = 2Ra + a^2$, y pues: $d = HY = \sqrt{a(2R+a)}$.

De esta manera, si los ojos del observador están a 0,5 m sobre el nivel del mar y tomamos como radio de la Tierra la aproximación $R = 6.750$ km, el horizonte estará a unos 2,6 km de distancia. Si los ojos están a 2 m del suelo, el horizonte ya estará a más de 5 km. El modelo gráfico que hemos construido permite explicar por qué, al contemplar el mar sentados en la orilla, cuando nos levantamos de repente vemos el horizonte desaparecer a lo lejos.

1.3. La Tienda de Matemáticas

En lugar de resolver los problemas anteriores por nosotros mismos, también hubiéramos podido acudir a la Tienda de Matemáticas. De hecho los dos procesos de modelización que acabamos de describir no están muy lejos del principio de funcionamiento de la Tienda. El "cliente" plantea una cuestión que puede involucrar a ciertos objetos no matemáticos: amigos y caramelos, el horizonte o los tendederos. Los empleados de la Tienda toman el encargo y se lo llevan a la trastienda. Allí construyen *modelos matemáticos* de las situaciones propuestas (los amigos y caramelos serán números y divisiones, los tendederos serán cuadrados y expresiones algebraicas, el horizonte y la Tierra un círculo con un triángulo rectángulo), transformando así el encargo del cliente en un problema matemático que deben resolver.

> ***La "Boutique de Mathématiques"***
>
> En el instituto de bachillerato *Jules Michelet* de Marsella (Francia) funciona, desde 1989, una Tienda de Matemáticas llamada la *Boutique de Mathématiques*. Se encargan de ella un pequeño número de profesores de matemáticas del instituto y se está empezando a hablar de la idea de extenderla a otras disciplinas para transformarla en una "Tienda de los Saberes" (*Boutique des Savoirs*).

> **Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con *una actividad de modelización matemática*.**

1.4. Una cuestión intramatemática

¿Significa lo que acabamos de decir que hacer matemáticas sirve únicamente para estudiar sistemas no matemáticos como el constituido por la Tierra y el horizonte, el formado por los niños y los caramelos o el que constituyen los tendederos del *Episodio*?

Naturalmente que no. Desde hace más de 25 siglos la actividad matemática ha servido para estudiar tanto cuestiones no matemáticas como cuestiones que surgen dentro del trabajo del matemático. Existen multitud de problemas matemáticos nacidos de cuestiones puramente matemáticas, lo que podemos llamar problemas *intramatemáticos*. Tomemos un ejemplo.

Existe una manera un tanto extraña de encontrar el cociente entero de un número dividido entre otro. Se trata de un método simple y aparentemente eficaz aunque, a diferencia del algoritmo habitual, no se obtiene el resto de la división. Para describirlo, lo mejor es ver cómo funciona en dos casos concretos. Supongamos que queremos dividir 71 entre 6. Como $6 = 2\times 3$, dividimos primero 71 entre 2 y dividimos el resultado 35 entre 3, hallando 11. Entonces podemos afirmar que el resultado de la división de 71 entre 6 es 11. También hubiéramos podido empezar dividiendo 71 entre 3 para obtener 23 (ignorando el resto) y luego dividir 23 entre 2, llegando de nuevo al cociente 11.

Tomemos otro ejemplo. Supongamos que queremos dividir 527 entre 42. Como $42 = 7\times 6 = 7\times 3\times 2$, dividimos 527 entre 2, obtenemos 263 que dividimos entre 3, lo que da 87; finalmente dividimos 87 entre 7 y obtenemos 12. Por lo tanto, 527 dividido entre 42 es 12. ¿Funcionará siempre esta técnica? ¿Por qué? ¿Es posible justificarla? Si, en vez de considerar que $42 = 7\times 3\times 2$ tomamos $42 = 2\times 21$, ¿también funcionará la técnica? ¿Por qué? (Ver PEM 6.)

1.5. Un modelo matemático del número $\sqrt{3}$

Como acabamos de ver, hacer matemáticas también sirve para estudiar *sistemas* en los que los objetos involucrados son objetos matemáticos (números y operaciones, figuras, expresiones algebraicas, etc.). Para ello, lo que tendremos que hacer es construir *modelos* de estos sistemas, es decir, modelos matemáticos de sistemas formados a su vez por objetos matemáticos.

Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular un valor aproximado de $\sqrt{3}$ y nos hemos dejado la calculadora en casa. $\sqrt{3}$ es aquí el objeto que queremos estudiar, como antes lo era el reparto de caramelos o la distancia al horizonte. Necesitamos, pues, un *modelo matemático* de este objeto. Vamos a utilizar como modelo la *ecuación* $a^2 = 3$

Una manera habitual de manipular este modelo consiste en aislar la a de la ecuación para obtener $a = \sqrt{3}$. Pero haciendo esto no avanzamos nada, puesto que no obtenemos ninguna información sobre el valor numérico de $\sqrt{3}$. Veamos otra manera de trabajar con el modelo construido. Escribimos en primer lugar la serie de igualdades equivalentes:

$$a^2 = 3 \iff a^2 - 1 = 2 \iff (a+1)(a-1) = 2$$
$$\iff a - 1 = \frac{2}{a+1} \iff a = \frac{2}{a+1} + 1.$$

Llegamos así a un *nuevo modelo* de $\sqrt{3}$: la ecuación

$$a = \frac{2}{a+1} + 1 \quad (\text{o sea } \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} + 1).$$

¿Cómo explotar este modelo? Sabemos que $a = \sqrt{3}$ está comprendido entre 1 y 2, puesto que 1^2 es menor que 3 y 2^2 es mayor que 3. Tenemos entonces las siguientes desigualdades:

$$1 < a < 2 \Rightarrow 2 < a+1 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{a+1} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{a+1} < \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{5}{3} < \frac{2}{a+1} + 1 < 2.$$

Ahora, como $a = \frac{2}{a+1} + 1$, sustituimos $\frac{2}{a+1} + 1$ por a en la última desigualdad y llegamos a la conclusión de que a, es decir $\sqrt{3}$, está comprendido entre 5/3 y 2.

Lo importante entonces es ver que podemos afinar más el cálculo repitiendo el proceso a partir de los datos obtenidos:

$$\frac{5}{3} < a < 2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{2}{a+1} < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5}{3} < \frac{2}{a+1} + 1 < \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{5}{3} < \sqrt{3} < \frac{7}{3}.$$

Luego a está comprendido entre 1,66... y 1,75.

> ***El modelo $a = \sqrt{3}$***
>
> La manera de utilizar este modelo se inspira en una técnica más general basada en la construcción de un *método iterativo* del tipo
> $x = f(x)$ (con f función racional)
> a partir del polinomio mínimo sobre Q[x] del número algebraico a.
> Aquí tenemos que el polinomio mínimo de a es $x^2 - 3$, de donde deducimos que a es solución de:
> $$x = f(x) = \frac{2}{x+1} + 1.$$

Siguiendo el proceso, obtendremos sucesivamente:

$$\frac{5}{3} < a < \frac{7}{4} \Rightarrow 1{,}66 < a < 1{,}75$$

$$\frac{19}{11} < a < \frac{7}{4} \Rightarrow 1{,}72 < a < 1{,}75$$

$$\frac{19}{11} < a < \frac{26}{15} \Rightarrow 1{,}72 < a < 1{,}73$$

$$\frac{71}{41} < a < \frac{26}{15} \Rightarrow 1{,}73\ 170 < a < 1{,}73\ 737.$$

La última desigualdad determina un valor aproximado de $\sqrt{3}$ con 2 cifras decimales exactas: $\sqrt{3} = 1{,}73...$, resolviendo así el problema planteado inicialmente.

Un "modelo general" de la geometría euclídea

En la geometría cartesiana (o geometría con coordenadas), los pares de números y las ecuaciones algebraicas sirven de *modelo* de las configuraciones geométricas del plano: en lugar de un punto *P* escribimos sus coordenadas (x,y), en lugar de trazar una recta *r* escribimos su ecuación $ax+by+c=0$, en lugar de realizar construcciones con regla y compás, realizamos cálculos algebraicos. La geometría cartesiana (iniciada por Descartes en 1637) es así un "modelo regional" de la geometría euclídea que ha permitido resolver un gran número de problemas que habían sido planteados por los geómetras griegos muchos siglos antes.

Al identificar la actividad matemática con el trabajo de construir modelos matemáticos para estudiar sistemas (matemáticos o extramatemáticos), queda pendiente una cuestión: ¿cómo saber si un modelo es matemático o no lo es? El segundo modelo que hemos utilizado para repartir caramelos, un círculo para cada amigo y piedrecitas en lugar de caramelos, ¿es o no es un modelo matemático? ¿A partir de qué momento se puede decir que alguien hace matemáticas en el sentido de que trabaja con modelos matemáticos?

2. Tres aspectos de la actividad matemática

No es posible trazar una frontera clara y precisa que separe de una vez por todas las actividades matemáticas de las no matemáticas. Lo que sí podemos hacer es intentar describir los "gestos" que alguien realiza cuando se dice de él que "está haciendo matemáticas". La tarea no es sencilla y sólo la abordaremos aquí parcialmente. Partiendo de la actividad matemática como trabajo de modelización encaminado a resolver problemas, vamos a describir tres grandes tipos de actividades que se suelen considerar como genuinamente matemáticas.

¿Curvas matemáticas o curvas mecánicas?

Los griegos de la época de Euclides (hacia 300 a. J. C.) sólo consideraban como curvas matemáticas a las que se pueden dibujar con una regla y un compás: rectas, círculos, polígonos. También las cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) acabaron perteneciendo al reino de las matemáticas, al ser curvas definidas como secciones de un cono partido por un plano, siendo el cono una construcción realizable a partir de la línea recta y el círculo. Pero curvas como la *cicloide* —descrita por un punto de un círculo que gira sobre una recta (fig.1)— o la *espiral de Arquímedes* —definida como el conjunto de puntos cuya distancia al punto O es igual al ángulo que forman con la recta Ox (fig. 2)— debieron contentarse con ser consideradas como curvas *mecánicas*, útiles para estudiar determinados fenómenos físicos, pero relegadas a un puesto marginal en el universo de objetos matemáticos.

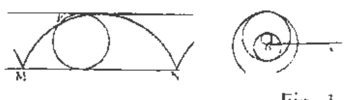


Fig. 1

2.1. Utilizar matemáticas conocidas

El primer gran tipo de actividad matemática consiste en resolver problemas a partir de las herramientas matemáticas que uno ya conoce y sabe cómo utilizar. Es el caso del matemático que, al igual que el fontanero, utiliza sus conocimientos para resolver problemas que le aparecen como "rutinarios", ya sean pequeños problemas parciales que surgen de sus investigaciones, ya sean cuestiones que le plantean otros (como el caso del problema del número de elementos de una tabla simétrica, propuesto por la profesora de biología a la Tienda de Matemáticas).

También se encuentran en esta situación el Estudiante de los *Diálogos* cuando resuelve el problema que le plantea su prima, el profesor de matemáticas que resuelve un ejercicio para sus alumnos o el alumno de secundaria cuando, en medio de un problema, tiene que realizar una multiplicación de dos números de dos cifras y se ha dejado la calculadora en casa. Y también suele ser el caso del ingeniero, biólogo o economista que utiliza sus conocimientos matemáticos para modelizar situaciones muy "típicas" que aparecen en su trabajo.

2.2. Aprender (y enseñar) matemáticas

Al igual que el fontanero, después de examinar un reventón de una cocina, tiene a veces que ir al taller por otras herramientas, también puede ocurrir que nos encontremos ante un problema de matemáticas que no podemos resolver por falta de instrumentos apropiados. En ese caso, la mejor solución es hacerse con estos instrumentos, ya sea por nosotros mismos, ya sea recurriendo a algún matemático para que nos facilite la tarea.

Este segundo aspecto del trabajo matemático es muy conocido por los propios matemáticos, así como por los "usuarios" habituales de matemáticas (el físico, el biólogo o el economista), cuando se encuentran con un problema matemático nuevo para ellos y que no saben cómo abordar. Una posible actuación consiste en consultar a algún matemático para ver si aquel problema es "conocido" y si se puede obtener fácilmente la solución. Existe también otra posibilidad: la de consultar artículos y libros en busca de lo que uno necesita para abordar el problema en cuestión.

En todos estos casos, el estudio de un sistema matemático o extramatemático genera cuestiones que pueden ser abordadas mediante instrumentos matemáticos que ya existen, pero que son desconocidos para el que desarrolla la actividad. Surge así la necesidad de *aprender matemáticas* para poder responder a las cuestiones propuestas. Y aparece en consecuencia la actividad de *enseñar matemáti-*

cas: el profesor de matemáticas ayuda a sus alumnos —matemáticos en apuros— a buscar y poner a punto los instrumentos matemáticos que éstos necesitan para modelizar y resolver ciertas cuestiones desconocidas para ellos aunque clásicas para un matemático profesional.

2.3. Crear matemáticas nuevas

En un sentido estricto, el tercer tipo de trabajo matemático se presenta como una actividad reservada a los investigadores en matemáticas. Son muy numerosos los nuevos tipos de situaciones matemáticas y extramatemáticas que van surgiendo y para las que hay que crear nuevos modelos para estudiarlas o bien imaginar nuevas utilizaciones de antiguos modelos. Y es este aspecto del trabajo matemático el que explica que, hoy en día, dispongamos de las matemáticas de que disponemos. Por ejemplo, los números racionales y los decimales, o los números enteros (positivos y negativos) fueron creados por matemáticos que tenían problemas pendientes de resolución y para los que no existían instrumentos adecuados. Igual que se inventó la rueda, la imprenta y la máquina de vapor, hubo que crear estos números, así como las ecuaciones algebraicas, la geometría cartesiana y las funciones trigonométricas.

Ahora bien, en un sentido más amplio, puede decirse que todo aquel que hace matemáticas participa *de alguna manera* en un trabajo "creador". En efecto, *el que utiliza matemáticas* conocidas para resolver un problema matemático clásico, muy a menudo tendrá que *modificar ligeramente* el modelo matemático que maneja para adaptarlo a las peculiaridades de su problema, lo cual comporta además la posibilidad de enunciar y abordar problemas nuevos.

Análogamente, *el que enseña matemáticas* se ve llevado a reformular los conocimientos matemáticos que enseña en función de los tipos de problemas que sus alumnos deben aprender a resolver.

> ***Teorema:** la suma de dos impares consecutivos es un múltiplo de 4.*
>
> ¿Seguro que es verdad? Probemos algunos casos:
>
> 1+3=4 ; 3+5=8 ; 5+7=12 ;
>
> 19+21=40 ; 157+159=316 ; ...
>
> ¿Cómo demostrarlo con dos impares consecutivos *cualesquiera*?
>
> Los números pares son múltiplos de dos; son de la forma $2n$.
>
> Cada número impar es el siguiente de un número par: es de la forma $2n+1$.
>
> El siguiente del número impar $2n+1$ es el número par $2n+2$, cuyo siguiente es el número impar $(2n+2)+1 = 2n+3$.
>
> La suma de dos impares consecutivos es: $(2n+1)+(2n+3) = 2n+1+2n+3 = 4n+4$.
>
> Esta suma es un múltiplo de 4 puesto que $4n+4 = 4(n+1)$.

Por último, y aunque parezca sorprendente, también podemos decir que *el que aprende matemáticas* "crea" matemáticas nuevas. Basta en efecto con relativizar el adjetivo "nuevas": los alumnos no crearán conocimientos nuevos para la humanidad, pero sí podrán crear matemáticas *nuevas para ellos* en cuanto grupo de alumnos. Cuando un alumno demuestra que la suma de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 4, acaba de establecer un pequeño teorema nuevo —para él—.

Una vez descritos estos tres aspectos del trabajo matemático, se entiende mejor la cuestión de la "enfermedad didáctica" que introduce la Profesora en los *Diálogos*. Podemos decir ahora que esta "enfermedad" consiste en *reducir la actividad matemática* a una parte del segundo aspecto considerado: el enseñar y aprender matemáticas previamente construidas. Esta reducción comporta además que el aprendizaje y la enseñanza pasen a ser un fin en sí mismos, en lugar de ser consideradas como un *medio* para responder a ciertas cuestiones.

Hemos caracterizado el *hacer matemáticas* como un *trabajo de modelización*. Este trabajo convierte el estudio de un sistema no matemático o un sistema previamente matematizado en el estudio de problemas matemáticos que se resuelven utilizando adecuadamente ciertos modelos. Se pueden destacar tres aspectos en este trabajo: la *utilización* rutinaria de modelos matemáticos ya conocidos; el *aprendizaje* (y la eventual *enseñanza*) de modelos y de la manera de utilizarlos; y la *creación* de conocimientos matemáticos, es decir de nuevas maneras de modelizar los sistemas estudiados.

3. La didáctica trata del estudio de las matemáticas

3.1. El proceso de estudio o "proceso didáctico"

Como dice la Profesora en los *Diálogos*, lo didáctico es todo lo referente al *estudio* y, en cuanto a lo que nos interesa aquí, al *estudio de las matemáticas*. El adjetivo "didáctico/a" proviene del griego tardío "didaktikós", derivado de "didásko" que significa enseñar. Nosotros, al igual que la Profesora, no lo restringiremos a la enseñanza sino que lo tomaremos como el adjetivo correspondiente a "estudio". Diremos entonces que hay un *proceso didáctico (relativo a las matemáticas)* cada vez que alguien se ve llevado a *estudiar matemáticas* o cada vez que alguien *ayuda a otro u otros a estudiar matemáticas*.

Al hablar aquí de "estudio" no nos referimos únicamente a esa actividad que uno realiza en solitario fuera de clase y que utilizamos en expresiones como: "Si estudias mucho aprobarás" o "Tengo que estudiar geometría para el examen de mañana". Nosotros utilizaremos la palabra "estudio" en un sentido más amplio, como cuando decimos de alguien que "estudia derecho" o que "quiere estudiar electrónica cuando vaya a la universidad". En toda escuela, instituto o facultad, se suelen formar grupos de alumnos para que, durante todo el curso escolar, puedan *estudiar* matemáticas, historia, educación física, etc., con la ayuda de uno o varios profesores.

Es importante señalar que, en este contexto, la *enseñanza* aparece como *un medio para el estudio*. La situación parece más clara si, en lugar de las matemáticas, pensamos en otro objeto de estudio como, por ejemplo, la música. Una persona que estudia un instrumento (el piano, la guitarra o el saxo) suele ir a clase cada semana con un profesor, pero la mayor parte del tiempo practica sola con su instrumento, además de escuchar discos, tocar con más gente e ir a conciertos. Todas estas acciones son *medios para el estudio*, aunque sólo en el primer caso podemos hablar, propiamente, de enseñanza.

En el caso de las asignaturas escolares, existe una tendencia a confundir la actividad de estudio con la enseñanza o, por lo menos, a considerar únicamente como importantes aquellos momentos del estudio en los que el alumno está en clase con un profesor. Se olvida entonces que el *aprendizaje*, entendido como el *efecto perseguido* por el estudio, no se produce sólo cuando hay enseñanza, ni se produce únicamente *durante* la enseñanza. El estudio —o *proceso didáctico*— es un proceso más amplio que no se restringe, sino que engloba, al "proceso de enseñanza y aprendizaje".

El estudio no vive encerrado en el aula

Todo aquel que ha ido a la escuela sabe que los procesos didácticos escolares no empiezan ni acaban en la clase. El estudio que uno ha emprendido con un grupo de compañeros y un profesor dentro de un aula sigue viviendo al salir de clase y volver a casa. Habrá que hacer los deberes, prepararse para un examen, o aclarar alguna duda con la ayuda de un familiar o compañero. Al salir de clase, las matemáticas que hay que estudiar siguen siendo las mismas y el que estudia también sigue siendo la misma persona. Lo único que ha cambiado es que el profesor, que dirige nuestro estudio, no está físicamente presente.

Al hablar de *procesos didácticos* uno piensa inmediatamente en la escuela, el instituto o la facultad, dado que la función principal de estas instituciones es reunir los medios necesarios para que ciertos procesos didácticos se puedan llevar a cabo. Las llamamos por ello *instituciones didácticas*. Son instituciones en las que se imparten clases y cursos de diferentes tipos, en las que hay bibliotecas (y, a veces, laboratorios), aulas, salas de estudio y salas de recreo, y en las que trabajan profesores para impartir enseñanzas y realizar otras tareas de organización del estudio (tutorías, evaluación, etc.).

Ahora bien, debemos tener muy presentes dos aspectos importantes de las instituciones didácticas. El primero es que estas instituciones *no son el único lugar* en el que se estudian matemáticas: también hay gente que estudia matemáticas en empresas, departamentos universitarios, gabinetes de profesionales, laboratorios de investigación o de innovación tecnológica, etc. El segundo aspecto es que los procesos de estudio que se realizan dentro de una institución didáctica siguen viviendo *fuera de ella*: la escuela debe crear medios para que los alumnos estudien y aprendan (mediante la enseñanza y otro tipo de actividades), pero también debe proporcionarles instrumentos para que puedan seguir estudiando al salir de la escuela, una vez acabadas las clases.

> ***Lo didáctico*** **es todo lo referente al** ***estudio.*** **Hablaremos de** ***procesos didácticos*** **cada vez que alguien se vea llevado a estudiar algo —en nuestro caso serán matemáticas— solo o con la ayuda de otra(s) persona(s). El** ***aprendizaje*** **es el efecto perseguido por el estudio. La** ***enseñanza*** **es un** ***medio para el estudio*****, pero no el único.**

3.2. La didáctica de las matemáticas

La investigación en didáctica de las matemáticas se propone, como primer gran foco de interés, el llegar a *entender mejor* los procesos didácticos y los fenómenos que éstos originan, tanto los que tienen lugar en clase como fuera de ella. Se parte del principio de que únicamente a partir de una mejor comprensión de estos procesos se podrán proponer actuaciones y medios concretos para *mejorar el estudio de las matemáticas*. Del mismo modo que hay que entender mejor el funcionamiento del cuerpo humano para progresar en medicina, también hay que entender mejor lo que es un proceso de estudio para poder dar respuestas sólidas a las dificultades didácticas con que se encuentran, día tras día, todos aquellos que estudian matemáticas o que ayudan a otros a estudiar —ya sean alumnos, profesores, padres de alumnos o profesionales de otros ámbitos.

Para evitar confusiones, debemos señalar aquí que la expresión "didáctica de las matemáticas" también se usa en otros contextos con un sentido más próximo al etimológico para referirse simplemente a la *enseñanza* de las matemáticas, y se habla entonces de "la didáctica de la geometría" o de "la didáctica de la probabilidad". De hecho, hasta hace poco, no se concebía que pudiera existir una ciencia cuyo objetivo fuera estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y aún menos los procesos de

> ***La expresión "didáctica de las matemáticas"***
>
> Designa a la vez una ciencia o disciplina y, en el lenguaje habitual, la enseñanza de las matemáticas, es decir, una parte del objeto de estudio de dicha ciencia. Esta situación es muy habitual: también hablamos de "economía" para referirnos a una ciencia y a uno de sus objetos de estudio: la administración de bienes, ganancias y gastos de un país, una empresa o una familia.

estudio de dicha ciencia. Los únicos conocimientos que se tenían estaban basados en la experiencia de profesores y maestros (y de alumnos, claro) que se iban completando con aportaciones de distintas disciplinas, como la psicología, la sociología o la epistemología. Proponemos en el **Anexo A** una breve descripción del camino que va de esta etapa inicial al proyecto de elaboración de una ciencia de los *fenómenos didácticos*.

La *didáctica de las matemáticas* es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio —o *procesos didácticos*— de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas.

4. Un ejemplo de fenómeno didáctico

En los *Diálogos*, la Profesora menciona un problema didáctico importante: la dificultad de hallar o construir una situación en la que el alumno actúe, además de como alumno, como un verdadero *matemático*, responsabilizándose de las respuestas que da a las cuestiones que se le plantean. La formulación de este problema didáctico parte de la constatación de un hecho que se repite en todos los niveles educativos: los alumnos tienden a delegar al profesor la responsabilidad de la validez de sus respuestas, como si no les importara el que éstas sean verdaderas o falsas; como si el único objetivo de su actuación fuera contestar a las preguntas del profesor y en nada les comprometiera la coherencia o validez de su respuesta.

Para describir de forma sintética este hecho, podría hablarse de cierta "irresponsabilidad matemática de los alumnos". ¿Puede la didáctica dar cuenta de este tipo de hechos? Detengámonos sobre un ejemplo. Consideremos a un alumno de bachillerato ante la tarea de resolver la ecuación

$$3 + \sqrt{x} = x - 9$$

y supongamos que el alumno recurre a la técnica habitual de eliminar la raíz cuadrada, elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación. Obtendrá entonces la serie de ecuaciones:

$$\sqrt{x} = x - 9 - 3$$
$$\sqrt{x} = x - 12$$
$$x = (x - 12)^2 = x^2 - 24x + 144$$

que le conducen a la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 25x + 144 = 0.$$

Al resolver esta ecuación, encontrará dos soluciones distintas: $x_1 = 16$ y $x_2 = 9$.

Llegado a este punto, es muy probable que nuestro alumno considere estos dos valores como soluciones de la ecuación inicial, dando así por finalizado su trabajo. La ecuación ya está resuelta; él ha hecho lo que le pedían; ahora le "toca" al profesor decir si la resolución es correcta. No hay nada más en juego.

Pero supongamos por un momento que al alumno "le va la vida en ello", como si hubiera alguien apuntándole con una pistola o, más verídicamente, y al igual que la prima del Estudiante, que de ello depende la cantidad de dinero que cobrará por un determinado trabajo. ¿Cuál sería entonces la actuación de un alumno que se sintiera realmente responsable de su solución? ¿Qué haría si hubiera algo importante en juego? La respuesta es sencilla. Cualquier alumno de bachillerato dispone de elementos suficientes para asegurar al cien por cien la validez de la solución: basta con que sustituya la x por 16 y por 9 en la ecuación

$$3 + \sqrt{x} = x - 9$$

para ver que, cuando la x vale 9 la igualdad es falsa, mientras que el valor $x = 16$ sí corresponde a una solución.

La edad del capitán

Alrededor de los años ochenta, un grupo de investigadores franceses en didáctica de las matemáticas planteó el siguiente problema a varias clases de alumnos de 7 a 10 años:

En un barco hay 7 cabras y 5 ovejas. ¿Qué edad tiene el capitán?

La mayoría de alumnos daban sin titubear una respuesta del tipo:

"7x5 = 35. El capitán tiene 35 años."

(Prueba el experimento con algún niño de esa edad, verás que no falla...)

¿Qué pasa? ¿Por qué la mayoría de alumnos responden sin inmutarse a una pregunta absurda? ¿Será que la escuela los atonta en lugar de espabilarlos? ¿Será que se convierten en puros autómatas que sólo sirven para contestar al profesor? ¿Será que sus profesores no les han ayudado a desarrollar el "sentido crítico"? ¿Se trata de una muestra del fracaso de todo el sistema escolar de enseñanza de las matemáticas?

El contrato didáctico

Tradicionalmente se han intentado interpretar los hechos didácticos a partir de las peculiaridades de los métodos de enseñanza y, en última instancia, apelando a las características individuales de los alumnos y del profesor. En nuestro ejemplo, se diría que el alumno *no entiende* bien lo que significa que un número sea o no sea solución de una ecuación, que *no comprende* el alcance y el mecanismo de la técnica matemática que utiliza o que el profesor quizá no insistió suficientemente en la necesidad de comprobar las posibles soluciones de una ecuación irracional. También se diría que el alumno no tiene una *buena actitud* respecto a las matemáticas ni respecto a su propio aprendizaje, que no está suficientemente *motivado* por el tipo de problemas que se le proponen y que, en definitiva, no tiene ningún *interés* por saber si sus soluciones son correctas o erróneas.

Actualmente, la didáctica de las matemáticas, sin negar la importancia de los factores psicológicos y motivacionales, ya no presupone que las explicaciones últimas de los fenómenos didácticos deban buscarse en dichos factores —que pasan así a ser considerados como consecuencias de determinados fenómenos, y no como sus causas. Si, por ejemplo, los alumnos se comportan con cierta "irresponsabilidad matemática" de una manera abrumadoramente mayoritaria, no parece razonable suponer que ninguno de ellos llegue nunca a entender la actividad matemática que realiza o que todos tengan (y mantengan) una mala actitud y un bajo nivel de motivación. La didáctica de las matemáticas postula que tanto una mala actitud como una falta de motivación —y hasta lo que muchas veces se considera como falta de "comprensión"— son hechos que se pueden explicar mediante las leyes que rigen el proceso didáctico.

Así, en el ámbito escolar, son muy importantes las normas que tácitamente, sin un acuerdo expreso, rigen en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor respecto al proyecto de estudio que tienen en común. Se trata de un conjunto de cláusulas que evolucionan a medida que el proceso didáctico avanza y que constituyen una especie de "contrato" denominado el *contrato didáctico*. Como acabamos de decir, el contrato didáctico no es estático: así, un profesor no puede exigir de sus alumnos que, al principio del proceso de estudio, sean capaces de resolver los problemas que deben

Respuesta a "La edad del capitán"

No seamos catastrofistas. Existe, entre profesores y alumnos, una serie de acuerdos implícitos sobre la tarea que les une —el estudio de las matemáticas— que conforman el *contrato didáctico*. Tradicionalmente, el contrato didáctico escolar contiene una cláusula que asegura que, cuando un profesor plantea un problema a sus alumnos, el problema está bien planteado y, en principio, el alumno dispone de los elementos necesarios para resolverlo. Por esta razón el alumno no debe "opinar" ni "criticar" los enunciados del profesor si no quiere romper su confianza en él como guía y director del proceso de estudio.

En el caso del problema de "la edad del capitán", los alumnos, al asumir el contrato didáctico escolar, suponen que, como siempre, la solución del problema resultará de algunas operaciones aritméticas simples a partir de los datos del enunciado. Por lo tanto, intentarán sumarlos o multiplicarlos hasta obtener una respuesta verosímil, una edad "posible" para el capitán.

estudiar, cosa que sí les exigirá cuando se dé por finalizado el estudio; del mismo modo, los estudiantes podrán pedir al profesor que les ayude o dé indicaciones sobre temas o problemas nuevos, pero no sobre aquello que se supone que deben conocer. El estudio de la génesis y evolución de las cláusulas del contrato didáctico permite dar cuenta de muchos hechos didácticos interpretándolos en relación directa con el conocimiento matemático involucrado.

En el caso de lo que hemos llamado la "irresponsabilidad matemática" de los alumnos, la didáctica de las matemáticas no se pregunta, en primer lugar, por la falta de motivación o por las dificultades de los alumnos para "entender" o para "dar sentido" a la actividad matemática que realizan. Empieza planteando cuestiones del tipo: ¿por qué el contrato didáctico asigna al profesor, en exclusiva, la responsabilidad de la validez matemática de las respuestas que se dan en clase? ¿Bajo qué condiciones puede evolucionar el contrato didáctico en el sentido de traspasar una parte de esta responsabilidad a los propios alumnos? ¿Qué otros fenómenos didácticos están relacionados con la rigidez de esa cláusula del contrato didáctico? En el **Anexo B** presentamos algunas respuestas al respecto y proponemos una primera interpretación de la "irresponsabilidad matemática" de los alumnos.

Uno de los principios de la didáctica de las matemáticas consiste en postular que la explicación de un fenómeno didáctico —como, por ejemplo, la "irresponsabilidad matemática de los alumnos"— no puede reducirse a factores psicológicos, actitudinales o motivacionales de alumnos y profesores, ni a las peculiaridades específicas de los métodos pedagógicos utilizados. Las explicaciones didácticas deben, por el contrario, partir de la descripción de la actividad matemática que realizan conjuntamente profesor y alumnos en el aula y fuera de ella, así como de las cláusulas del contrato didáctico que rigen esta actividad.

PEQUEÑOS ESTUDIOS MATEMÁTICOS

INDICACIONES:

La numeración de los PEM es independiente de las unidades. Cada PEM se compone de una cuestión inicial seguida de uno o varios problemas matemáticos por resolver. Algunas veces la formulación de estos problemas se deja para el lector.

Proponemos para cada problema una o varias VÍAS DE ESTUDIO por las que conducimos al lector a través de una serie de AYUDAS. Las vías de estudio de cada problema vienen marcadas por su nivel de dificultad según el siguiente criterio:

Nivel 1: si los objetos matemáticos del problema forman parte de la secundaria obligatoria.

Nivel 2: si los objetos matemáticos forman parte del bachillerato.

Nivel 3: si forman parte del primer ciclo de una carrera universitaria de ciencias.

Nivel 4: si el problema es de nivel de licenciatura de matemáticas o más allá.

El lector encontrará todas las ayudas en una sección especial al final del libro. A ellas se remite con un número entre corchetes, sin que esta numeración corresponda al orden de aparición de las ayudas en los PEM.

PEM 1. Un torneo de ping-pong

La cuestión inicial

El Instituto organiza un torneo de ping-pong en forma de liga. La comisión organizadora debe decidir cuántos días durará el torneo, los horarios de los partidos, el número de mesas que necesitarán, el tipo de premios, etc. Dado que se dispone de un presupuesto limitado, hay que hacer un estudio previo de lo que costará la organización del evento.

Las decisiones que hay que tomar dependen evidentemente del número de partidos que se jugarán en la liga, en la que todos los jugadores juegan contra todos los demás. Los organizadores dudan entre poner o no un límite al número de inscripciones, por miedo a que una avalancha de jugadores haga totalmente inviable la realización del torneo. Para ello, necesitan prever cuál será el número total de partidos que se jugarán a partir del número de jugadores inscritos.

Problema

Si en una liga de ping-pong juegan n jugadores, ¿cuál es el número total T de partidos que se realizarán?

Vías de estudio: tres, de niveles 1, 2 y 3.
Ayudas: vía 1: [1] -> [30] -> [102] -> [56]
vía 2: [1] -> [110] -> [80] -> [56]
vía 3: [1] -> [47] -> [93] -> [22] -> [56]

PEM 2. ¿Qué tendedero es mejor?[2]

La cuestión inicial

Las figuras 1 y 2 presentan dos modelos de tendedero de ropa para apartamento. Los dos valen lo mismo, son igual de resistentes, ocupan el mismo espacio y sólo difieren por la disposición de los hilos de tendido.

2. Hemos tomado el problema del artículo de J. Kilpatrick: "Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From?" *in* Alan H. Schoenfeld (1987), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Erlbaum, London. El problema original que plantea Kilpatrick es el de determinar qué longitud de hilo se necesita para construir los tendederos –longitud que depende, en particular, de la manera como se decida realizar la construcción–.

La parte superior de los tendederos es, en ambos casos, un cuadrado de 1 metro de lado. El tendedero A tiene el hilo dispuesto en 9 tiras paralelas y equidistantes (figura 1), mientras que el tendedero B (figura 2) tiene el hilo dispuesto en 4 cuadrados concéntricos a igual distancia entre ellos que los hilos paralelos del tendedero A.

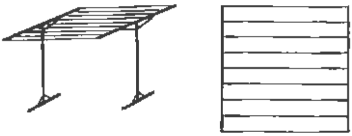


Fig. 1. Tendedero A

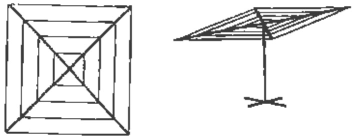


Fig. 2. Tendedero B

Lo que nos interesa saber es cuál de los dos modelos es más eficaz o útil, en el sentido de que tiene más longitud de hilo de tendido y, por lo tanto, permite tender más ropa.

En la tienda también venden tendederos de otros tamaños: los más grandes son cuadrados de 1,25 metros de lado (con 11 tiras los del tipo A y 5 cuadrados los del tipo B) y los más pequeños de 75 cm de lado (con 7 tiras o 3 cuadrados). El hecho que el tendedero A sea más o menos útil que el B, ¿depende del tamaño del tendedero?

Problema 1

Sabiendo que los dos tendederos tienen 1 metro de lado, ¿qué longitud es mayor: la suma de la longitud de los 9 segmentos paralelos del tendedero A o la de los perímetros de los 4 cuadrados concéntricos del tendedero B? ¿Qué ocurre si los cuadrados exteriores de los tendederos miden 1,25 m? ¿Y si miden 0,75 m?

Vías de estudio: una, de nivel 1.
Ayudas: [25] -> [3] -> [77]

Problema 2

Supongamos que los tendederos son cuadrados de lado a, que en el tendedero A hay n segmentos paralelos equidistantes y que en el tendedero B hay $\frac{n}{2}$ cuadrados concéntricos si n es par y $\frac{n-1}{2}$ cuadrados si n es impar. ¿Qué es mayor: la suma de la longitud de los segmentos paralelos del tendedero A o la de los perímetros de los cuadrados concéntricos del tendedero B?

Vías de estudio: dos, de nivel 2.
Ayudas: vía 1: [41] -> [100] -> [43] -> [96] -> [37] -> [89] -> [135] -> [77]
vía 2: [41] -> [122] -> [17] -> [9] -> [51] -> [135] -> [77]

PEM 3. Cosenos expresables con radicales reales

La cuestión inicial

Uno de los primeros temas que se aprenden al estudiar trigonometría es el valor numérico del seno y coseno de algunos ángulos particulares:

$$\cos 0 = 1 \; ; \cos\frac{\pi}{2} = 0 \; ; \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \; ; \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \cos\pi = -1 \; ;$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \; ; \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \; ; \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \; ; \operatorname{sen}\pi = 0.$$

Con ello se ve inmediatamente que hay ángulos (como $\pi/2$, $\pi/3$ y π) cuyo coseno es un número racional, y ángulos (como $\pi/4$ y $\pi/6$) cuyo coseno no lo es, pero se puede expresar partiendo de los números racionales mediante alguna combinación de sumas, productos y extracción de raíces reales. Sea como fuere, hay muchos ángulos de la forma $\frac{2\pi k}{n}$ para los que no conocemos el valor del seno o del coseno. ¿Existe alguna expresión racional para el coseno o el seno de $\pi/5$ o de $\pi/7$? ¿Se puede hallar una fórmula que sólo haga intervenir sumas, restas, productos, cocientes y radicales reales de números racionales, para el seno o coseno de cualquier ángulo de la forma $\frac{2\pi k}{n}$?

Problema

Dado un ángulo α *de la forma* $\alpha = \frac{2\pi k}{n}$ *con* $k, n \in N$, $n \neq 0$ *y* $(k,n) = 1$, *¿en qué casos puede darse una expresión de cos* α *y de sen* α *que sólo haga intervenir números racionales y radicales?*

Vías de estudio: dos, la primera de nivel 2 y la segunda de nivel 4.
Ayudas: vía 1: [26] -> [85] -> [33] -> [55] -> [141] -> [76] -> [48] -> [109] -> [18] -> [82] -> [53] -> [113] -> [70]
vía 2: [97] -> [127] -> [55] -> [84] -> [63] -> [130] -> [95] -> [44] -> [133] -> [125] -> [36] -> [68]
Referencias bibliográficas: [68]

PEM 4. Mirando al cielo desde dentro del agua

La cuestión inicial

Si, en una apacible mañana de verano, nos sumergimos en el agua del mar o de una piscina y miramos un punto de la superficie, seguramente veremos la luz azul del cielo en lo alto. Pero si nos acercamos a la superficie, veremos que el agua deja de ser translúcida en ese punto y parece un espejo. ¿Qué ha pasado? ¿Por qué antes el agua se comportaba como un cristal y ahora como un espejo? ¿Hacia dónde tengo que dirigir la mirada para poder ver el cielo? ¿Desde dónde no podré verlo?

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [24] –> [129] –> [86] –> [35]

PEM 5. Eurodiputados e intérpretes

La cuestión inicial

Cuando, en 1957, Alemania, Francia, Italia y el Benelux crearon el Mercado Común Europeo, se necesitaban en las reuniones intérpretes de 4 lenguas diferentes: el francés, el alemán, el holandés y el italiano. Posteriormente, en 1973, se incorporaron Dinamarca, Irlanda y el Reino Unido, lo que suponía añadir el inglés y el danés a la lista de idiomas de intercambio. Con la llegada de Grecia en 1981 y la de España y Portugal en 1986, la Europa de los 12 tuvo que incluir el español, el griego y el portugués. En 1995, los 12 se convierten en 15 con la adhesión de Austria, Suecia y Finlandia, haciendo que el número de idiomas ascienda a 11.

Suponiendo que un intérprete sólo traduce en un sentido (del alemán al italiano o del italiano al alemán), ¿teóricamente cuántos intérpretes se necesitarían en cada momento? ¿Cómo aumenta el número de intérpretes en función del número de nuevos idiomas que se vayan agregando?

Problema matemático

¿Cuántos intérpretes se necesitan en una reunión de eurodiputados en la que se hablan n idiomas oficiales distintos? ¿De cuánto aumenta este número si se añaden k nuevos idiomas?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [115] -> [73]

PEM 6. Una extraña manera de dividir

La cuestión inicial

Queremos dividir un número entre otro: por ejemplo 97 entre 18. Resulta además que:

(1) nos hemos dejado la calculadora en casa;
(2) no tenemos papel y lápiz a mano;
(3) nos corre cierta prisa conocer el cociente, pero no nos importa nada el resto;
(4) el número por el que queremos dividir es el producto de dos o más números "pequeños" (como en nuestro caso $18 = 2 \times 9 = 6 \times 3 = 2 \times 3 \times 3$).

En estas condiciones, existe una manera rápida y eficaz de efectuar la división. Lo mostraremos con el ejemplo anterior. Para dividir 97 entre 18, dado que $18 = 2 \times 9$, empezamos dividiendo 97 entre 2. Lo podemos hacer mentalmente y encontraremos 48 como cociente. Seguidamente dividimos 48 por el otro factor, 9, y hallamos 5. Luego 5 es el resultado de dividir 97 entre 18.

También hubiéramos podido utilizar que $18 = 3 \times 6$ y empezar dividiendo 97 entre 3, obteniendo 32, y luego 32 entre 6, obteniendo nuevamente 5 como cociente.

En general, supongamos que queremos dividir un entero positivo a por otro entero positivo b y que b nos aparece como el producto de dos enteros: $b = b' \cdot b''$. El procedimiento indicado consiste en lo siguiente. Dividimos a entre b' y hallamos como cociente q'. Dividimos luego q' entre b'' y hallamos q'' como cociente. Entonces q'' es el cociente de dividir a entre b.

Curiosamente, el hecho de ignorar el resto de la división en cada uno de los pasos efectuados no afecta al resultado final.

Problema 1

Sean $a, b', b'' \in \mathbb{N}$ y $b = b' \cdot b''$. Sea q el cociente de a entre b, q' el cociente de a entre b' y q'' el cociente de q' entre b''. Demostrar que $q'' = q$.
Generalizar al caso $b = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n$.

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [142] -> [108] -> [74] -> [136] -> [52] -> [126] -> [81] -> [116]

Problema 2

La demostración de la técnica no permite ver claramente por qué se pueden dejar de lado los restos en cada división sucesiva de a entre los factores de b sin que al final el resto "acumulado" sea mayor que b. ¿Se puede explicar este fenómeno de una manera diferente de la demostración anterior?

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [134] –> [58]

ANEXO A

Evolución de la problemática didáctica

Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje de los alumnos dependía sólo del grado en que el profesor dominase dicho arte y, en cierto sentido, de la voluntad y la capacidad de los propios alumnos para dejarse moldear por el artista.

Esta forma un tanto "mágica" de considerar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha ido evolucionando a medida que crecía el interés por la investigación de los hechos didácticos. Así, desde los inicios de la didáctica de las matemáticas como disciplina, ha ido consolidándose un punto de vista —que denominaremos *clásico*— que, rompiendo con esta visión mágica, propugna la necesidad de analizar los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas para poder incidir sobre el rendimiento de los alumnos.

En este paradigma, el aprendizaje es considerado como un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales y actitudinales del alumno-aprendiz. Se postula, además, que para modificar el rendimiento de los alumnos el factor decisivo es la conducta docente y que ésta puede explicarse, a su vez, en función del pensamiento del profesor —en el "pensamiento del profesor" se incluyen sus expectativas, su manera de concebir la enseñanza de las matemáticas y su forma más o menos espontánea de interpretar el saber matemático.

A fin de clarificar el énfasis que ha puesto tradicionalmente la didáctica de las matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje, vamos a dar una descripción general (y forzosamente simplista) del punto de vista clásico en didáctica de las matemáticas. Empezaremos caracterizando dicho punto de vista mediante las dos notas siguientes:

(a) El punto de vista clásico toma como problemática didáctica una ampliación de la problemática espontánea del profesor.

Con ello queremos decir que la investigación clásica en didáctica ha hecho suyos la mayoría de problemas con los que se encuentra el profesor, recogiendo, reformulando, ampliando y sistematizando las cuestiones que éste se plantea. Así, encontramos cuestiones relacionadas con la adquisición de conocimientos por parte de los alumnos ("¿Cómo hacer para que los alumnos adquieran nuevos conocimientos?"), con la persistencia de errores en el trabajo de los alumnos ("¿Qué hacer para que dejen de hacerlos?"), con la diversidad de alumnos en el aula ("¿Cómo tratarla?"), con la evaluación ("¿Cuál es la mejor manera de evaluar?"), entre otros.

(b) El punto de vista clásico presenta el saber didáctico como un saber técnico (en el sentido de aplicación de otros saberes más fundamentales importados de otras disciplinas). Por tanto, la didáctica de las matemáticas ha sido considerada tradicionalmente como una disciplina más normativa que explicativa.

El punto de vista clásico supone, en efecto, que la didáctica de las matemáticas tiene como objetivo inmediato el proporcionar al profesor los recursos técnicos que éste necesita para llevar a cabo su labor de la manera más satisfactoria posible.

Podemos distinguir dos enfoques sucesivos dentro de este paradigma clásico:

1. Un primer enfoque centrado en el *pensamiento del alumno*, cuya problemática gira alrededor de la noción de "aprendizaje significativo" (en el sentido de Ausubel, 1968) y donde el objeto básico de estudio es el conocimiento matemático del alumno y su evolución. Esta elección del objeto de estudio comporta que se delegue explícitamente a la psicología la fundamentación científica de las técnicas que la didáctica proporciona.

2. Un segundo enfoque, centrado en el *profesor*, que comparte el interés básico por la instrucción del alumno, pero amplía la problemática didáctica introduciendo las cuestiones relativas al profesor y a su formación profesional docente. En este enfoque se considera que la formación del profesor debe empezar por la transformación del "pensamiento docente" espontáneo en un sentido análogo a la nece-

sidad de transformar el pensamiento espontáneo del alumno, sus *preconceptos* o *errores conceptuales*, para posibilitar su aprendizaje. Se sigue considerando la didáctica de las matemáticas como un saber técnico, pero ahora con una base fundamentadora más amplia que abarca junto a la psicología educativa, la sociología, la historia de las matemáticas, la pedagogía y la epistemología de las matemáticas.

> *Lo que caracteriza esencialmente esta forma clásica de entender la didáctica de las matemáticas no es la mayor o menor importancia asignada a su fundamentación psicológica ni el hecho de que se centre en uno de los protagonistas de la relación didáctica —ya sea el alumno o el profesor en referencia al alumno—. Lo que la caracteriza es que asume acríticamente que, o bien los saberes que utiliza no son problemáticos en sí mismos (como los saberes matemáticos), o bien no forman parte de la problemática didáctica (como los psicológicos o los sociológicos). Se supone que dichos saberes pueden ser utilizados para explicar los hechos didácticos, pero no se acepta ningún tipo de cuestionamiento de estos saberes con base en los hechos didácticos.*

Veremos que esta forma de entender la didáctica de las matemáticas comporta algunas limitaciones importantes entre las que pueden citarse a título de ejemplo las dos siguientes:

(a) Paradójicamente, y a pesar de propugnar que la didáctica debe centrarse en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, la forma clásica de entender la didáctica no incluye entre sus objetos de estudio las nociones de "enseñar matemáticas" ni "aprender matemáticas". Sólo las utiliza como nociones transparentes (no cuestionables) o bien como nociones construidas en otras disciplinas.

(b) En coherencia con la interpretación del saber didáctico como un saber técnico (en el sentido de que la teoría justificativa hay que buscarla fuera de la didáctica), se renuncia a la ambición de constituir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

A fin de superar estas y otras limitaciones, la didáctica de las matemáticas se ha visto obligada a ampliar su problemática incluyendo el conocimiento matemático entre sus objetos de estudio. Esta ampliación ha provocado cambios importantes entre los que hay que citar una visión más amplia y más rica de *lo didáctico*, así como la emergencia del *proceso de estudio* como objeto primario de la investigación didáctica, pasando a ser la enseñanza y el aprendizaje objetos secundarios (aunque no por ello menos importantes).

El mecanismo mediante el cual la didáctica de las matemáticas amplió radicalmente su problemática no es específico de esta disciplina. Se trata de un mecanismo general que tiene relación con la necesidad que se produce periódicamente en toda disciplina de introducir como objetos de estudio propios, nociones que hasta el momento habían sido utilizadas únicamente como herramientas transparentes, no cuestionadas o incluso incuestionables, y que aparecían en el discurso científico sólo como útiles para describir otros objetos.

Si llamamos "paracientíficas" a dichas nociones, el fenómeno general podría ser descrito como la transformación en objetos científicos de objetos que hasta ese momento habían funcionado como paracientíficos en el discurso científico normal.

En el caso de las matemáticas tenemos ejemplos muy conocidos de este fenómeno: las nociones de "número real", "función" y "conjunto", entre otras muchas, fueron *paramatemáticas* (esto es, herramientas transparentes útiles para describir y estudiar otros objetos matemáticos) mucho antes de devenir históricamente *nociones matemáticas* (es decir, objetos de estudio en sí mismos, además de herramientas útiles para estudiar otros objetos matemáticos).[3]

La necesidad histórica de cambiar el estatuto de objetos paramatemáticos que tenían las nociones de "número real", "función" y "conjunto", para convertirse en objetos matemáticos de pleno derecho, vino determinada por la presión de una multitud de fenómenos matemáticos inexplicados y problemas no resueltos. Esta ampliación de la problemática matemática provocó transformaciones importantes en la naturaleza de las matemáticas como ciencia.

Análogamente, en el caso de la didáctica de las matemáticas, aparecen multitud de hechos didácticos inexplicados que comportarán la necesidad de cambiar el estatuto de ciertos objetos paradidácticos para constituirlos en objetos didácticos de pleno derecho, objetos de estudio en sí mismos para la didáctica.

Entre los hechos inexplicables —e incluso difícilmente enunciables desde una perspectiva tradicional— citaremos algunos a título de ejemplos:

3. El término de *noción paramatemática* se debe a Chevallard (1985) y es una noción relativa a la institución que se considera. Así, podemos decir que "demostración", "parámetro" y "ecuación" son nociones paramatemáticas dentro de la matemática enseñada actual (a nivel secundario) donde dichas nociones se utilizan como herramientas transparentes, no cuestionables. No es posible, por ejemplo, que en un examen en secundaria aparezca una pregunta del tipo: "¿Qué es una demostración?" o "¿Cuál es la diferencia entre una variable y un parámetro?". En la enseñanza secundaria de las matemáticas, estas nociones no se toman como objeto de estudio. Pero la noción de "demostración", por ejemplo, puede funcionar como una noción matemática en un curso de lógica matemática a nivel universitario.

¿En qué consiste resolver un problema de matemáticas? ¿Es posible enseñar a resolver problemas? ¿Cuál es el alcance de la transferencia de los métodos de resolución de unos problemas a otros? ¿Qué relación hay entre la actividad de resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas?

¿Cuál es el papel del dominio de las rutinas en la actividad matemática? ¿Y en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué rutinas es necesario enseñar? ¿Cómo diferenciar las rutinas de las actividades consideradas como "no rutinarias" o "creativas"?

¿Cuál es la relación entre el aprendizaje del álgebra elemental, la aritmética y la geometría? ¿Cuáles son los criterios que permiten distinguir entre "álgebra", "aritmética" y "geometría"? Suponiendo que podamos discernir entre ellas, ¿hay que enseñar el álgebra elemental como una generalización de la aritmética, poniendo letras variables allí donde la aritmética ponía números concretos?

¿Qué significa "adquirir el concepto de proporcionalidad"? (o el concepto de "función" o de "número decimal", etc.). ¿Cuáles son las actividades matemáticas que ponen de manifiesto que se ha "adquirido" un concepto o que se ha "entendido" un teorema?

¿Qué papel juegan los instrumentos materiales (símbolos, figuras, discursos, etc.) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

Todas estas cuestiones y otras muchas sólo pueden ser tratadas científicamente si ciertas nociones (tales como las de "problema de matemáticas", "enseñar matemáticas", "aprender matemáticas", "concepto matemático", "rutina", "actividad matemática creativa", "álgebra elemental", "aritmética", "geometría", entre otras) que funcionaban tradicionalmente como nociones transparentes, paradidácticas, pasan a ser objeto de estudio en sí mismas, esto es, se convierten en nociones didácticas, integrantes de pleno derecho de la problemática didáctica.

El desarrollo reciente de la didáctica de las matemáticas ha puesto de manifiesto que lo anterior sólo es posible en el marco de un *modelo general de la actividad matemática*. Esto significa que la didáctica de las matemáticas se ha visto forzada a cuestionar la transparencia del conocimiento matemático, a problematizarlo y, en definitiva, a integrar entre sus objetos de estudio nociones matemáticas como, por ejemplo, "proporcionalidad", "número decimal", "función", etcétera.

De hecho, el nuevo paradigma de la didáctica de las matemáticas, la *didáctica fundamental*, nació precisamente cuando el investigador francés Guy Brousseau vislumbró por primera vez (a principio de los años 70) la necesidad para la didáctica de utilizar un modelo propio de la actividad matemática, dado que los modelos epistemológicos usuales no se habían construido para responder a los mismos problemas que se plantea la didáctica. Históricamente se corresponde con las primeras formulaciones de la Teoría de las Situaciones.[4]

4. La teoría de las situaciones didácticas debida a Guy Brousseau es el primer ejemplo de una teoría didáctica en el marco de la didáctica fundamental. En la Unidad 3 (**Anexo D**) presentaremos y ilustraremos las nociones básicas de esta teoría.

La inclusión como objetos propiamente didácticos de muchos objetos que funcionaban en el discurso didáctico tradicional como objetos paradidácticos (entre los que se encontraban, en particular, los objetos matemáticos) provocó una ampliación inesperada de la problemática didáctica. No sólo fue posible empezar a abordar cuestiones que antes no se podía ni siquiera plantear sino que, lo que es más importante, se puso de manifiesto que *todo fenómeno didáctico* (en el sentido tradicional de fenómeno relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas) *tiene un componente matemático esencial*, inaugurándose una nueva vía de acceso al análisis de los fenómenos didácticos: el propio conocimiento matemático.

Esta ampliación esencial de la problemática didáctica se materializó inicialmente en la teoría de las situaciones didácticas (ver nota 4) y provocó una transformación importante en la naturaleza de la didáctica como disciplina. Gracias a ella fue posible recorrer posteriormente el camino inverso: partir del hombre haciendo matemáticas para constatar que lo didáctico es denso en lo matemático y que *todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial.* Este es el punto de vista antropológico inaugurado por Yves Chevallard. Al mostrarse lo matemático y lo didáctico empíricamente inseparables, la noción misma de *fenómeno didáctico* se generaliza para hacer referencia a una dimensión esencial de toda actividad matemática. Lo didáctico deja de ser exclnsivo del proceso de enseñanza-aprendizaje para referirse a cualquiera de los aspectos del proceso de estudio. La didáctica de las matemáticas se convierte, en definitiva, en la *ciencia del estudio y de la ayuda al estudio* de las matemáticas.

Referencias

AUSUBEL, D. P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.

BROUSSEAU, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *in* BRUN, J. (1996). *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, pp. 45-143.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage, Grenoble, 2ª edición 1991.

ANEXO B

La "irresponsabilidad matemática" de los alumnos

Hemos dicho que la interpretación de la "irresponsabilidad matemática" de los alumnos requiere, por una parte, relacionar este fenómeno con otros que aparecen asociados a él dentro del sistema escolar y, por otra, tomar en consideración aquellos elementos del *contrato didáctico*[5] relacionados con la asignación de la responsabilidad matemática. A lo largo de nuestro análisis intentaremos explicar por qué el contrato didáctico vigente en los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas mantiene estable la asignación exclusiva al profesor de toda la responsabilidad matemática, en lugar de evolucionar en el sentido de traspasar a los alumnos progresivamente una parte de dicha responsabilidad. Para ello empezaremos planteando cuestiones de carácter un poco más general que acabarán confluyendo en una primera interpretación de nuestro fenómeno. Abordaremos, en concreto, las siguientes preguntas: ¿cómo se considera el trabajo matemático personal del alumno en el marco del proceso de enseñanza-aprendizaje?; ¿qué papel se adjudica al profesor de matemáticas en las instituciones didácticas actuales?

5. El *contrato didáctico* es una de las nociones fundadoras de la didáctica fundamental. Puede considerarse formado por el conjunto de cláusulas que, de una manera más o menos implícita, rigen, en cada momento, las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que concierne al conocimiento matemático enseñado. Pero, en realidad, el contrato didáctico como noción teórica sólo toma un sentido preciso en el marco de la teoría de situaciones de Guy Brousseau (ver Brousseau, 1986). En el Anexo D de la Unidad 3 volveremos sobre esta noción.

Empezaremos enunciando un hecho bastante elemental relativo al trabajo personal del alumno:

> *Tradicionalmente no se ha tomado muy en serio el trabajo matemático concreto de los alumnos: de hecho nunca se le consideró como un "verdadero" trabajo matemático.*

Incluso en los documentos oficiales (que todavía podemos considerar como una representación bastante fiel del punto de vista tradicional en didáctica), se guarda un discreto silencio respecto al mismo. Cuando se evoca la necesidad de que el alumno realice cierta actividad para poder seguir con normalidad la marcha del curso, nunca se supone que esta actividad del alumno en cuanto *estudiante de matemáticas* tenga una estructura compleja ni, mucho menos, constituya un objetivo en sí misma.

Así, por ejemplo, puede mostrarse que las instituciones didácticas actuales no otorgan demasiada importancia a las *producciones matemáticas escritas* que realiza el alumno en su cuaderno, por lo que es muy difícil que el propio alumno las tome en serio. Se acepta entonces como "normal" la existencia de errores graves en dicho cuaderno y que no se pretenda enseñar a los alumnos a escribir matemáticas (redacción de definiciones sencillas, utilización correcta de los símbolos matemáticos, redacción detallada de la solución de un problema, etc.).

En el *discurso psicopedagógico* que domina nuestra cultura escolar, se considera el *aprendizaje escolar* como objetivo último de la acción educativa. El análisis se centra en lo que el profesor debe hacer para favorecer el aprendizaje de los alumnos, un aprendizaje que se traduzca en adquisiciones significativas y en interés por la materia. En cambio, nunca se considera necesario un análisis detallado del proceso de estudio del alumno, es decir, del trabajo matemático que éste realiza, considerado como un objetivo en sí mismo.

En coherencia con la *opacidad del trabajo matemático del alumno* que este punto de vista comporta, la actividad de estudio del alumno se concibe siempre de forma bastante uniforme y relativamente independiente de las materias a estudiar. Se tiende a considerar a la enseñanza como un instrumento para potenciar el *desarrollo de las estructuras cognitivas* de los alumnos y, en este sentido, el estudio que éstos deben realizar (entendido como un medio auxiliar de la enseñanza) no depende demasiado de la materia particular estudiada.

Podríamos resumir la forma de cómo se interpreta el estudio en nuestra cultura escolar en tres puntos:

(i) Se ignora *la estructura y las funciones del trabajo matemático del alumno.* El *proceso de estudio* se considera más como una actividad privada y subjetiva del alumno que como un trabajo objetivable y analizable.
(ii) La actividad de estudio tiende a ser considerada *relativamente independiente de la materia a estudiar.*
(iii) Se interpreta *el estudio del alumno* como *un medio auxiliar de la enseñanza escolar.* Nunca se concibe la actividad matemática del alumno como el objetivo principal del proceso didáctico en función del cual se instaurarían diferentes medios y dispositivos didácticos —entre los que figurarían los dispositivos escolares junto a otros—.

Esta forma de interpretar el *estudio* está relacionada con la "enfermedad didáctica" de la que se hablaba en los diálogos, y acarrea importantes consecuencias sobre el funcionamiento de las actuales instituciones escolares. La primera de estas consecuencias, y quizá la más llamativa, puede ser descrita como:

La concentración en el aula de las actividades matemáticas del alumno y la mutua dependencia alumno-profesor.

La primera manifestación de este fenómeno es el hecho siguiente: en todos los niveles educativos *la utilización de un libro de texto* en el sentido de punto de referencia "externo" (tanto para los alumnos como para el profesor) que marque el contenido matemático del curso, es prácticamente inexistente. El alumno sólo dispone de lo que se hace en clase, de los apuntes que logra tomar y de los materiales que le entrega incidentalmente el profesor. El libro de texto (si existe) y, en su caso, los libros de consulta tienen una función claramente auxiliar del trabajo escolar propiamente dicho. Lo anterior comporta que el alumno dependa absolutamente del profesor y, recíprocamente, que sobre el profesor recaiga toda la responsabilidad del aprendizaje matemático del alumno.

Actualmente, esta situación puede verse avalada e incluso reforzada por ciertas interpretaciones de lo que es el "curriculum abierto": la insistencia en la autonomía de los centros para elaborar su propio Proyecto Educativo podría provocar un refuerzo de la dependencia cada vez más exclusiva del trabajo del alumno respecto de la institución escolar y, en particular, de cada profesor concreto. En efecto, si se hace creer al profesor que él es el responsable último de las adaptaciones curriculares elaboradas para sus alumnos y que es él quien decide los contenidos matemáticos a enseñar y, además, se hace recaer exclusivamente sobre sus espaldas la responsabilidad de la evaluación de los alumnos (con la eliminación progresiva de las evaluaciones externas) entonces se estaría aumentando la dependencia mutua profesor-alumno. Una consecuencia inmediata de esta situación es la siguiente:

> *En las instituciones docentes actuales se adjudica al profesor un papel desmesurado en el proceso didáctico.*

Se ha hecho creer al profesor que él es la pieza fundamental del sistema educativo y que de su voluntad y su formación depende el funcionamiento del sistema y el éxito de cualquier reforma educativa. Él es el encargado de conseguir que el alumno tenga una *actitud positiva* y la *motivación* necesaria para aprender matemáticas, al tiempo que éstas (actitud y motivación) son consideradas las condiciones básicas de todo aprendizaje.

En resumen, se acepta que el resultado del aprendizaje del alumno depende esencialmente de la instrucción que imparte el profesor. Correlativamente, y dada la opacidad del proceso de estudio del alumno, el profesor sólo puede pretender modificar la enseñanza que él imparte para intentar mejorar el aprendizaje. El profesor no puede ni siquiera plantearse la posibilidad de incidir sobre el proceso de estudio del alumno, porque es un proceso al que no tiene acceso en absoluto. Esta situación refuerza la ilusión de que la enseñanza formal abarca todo el proceso didáctico.

Paralelamente, y en concordancia con esa omnipotencia adjudicada al profesor, existe una creciente demanda social, culturalmente muy enraizada, que pide que los profesores pasen de enseñantes del saber matemático a educadores o formadores de los alumnos. Esta demanda puede llevar incluso a una situación en la que se mira al profesor no sólo como educador sino incluso como reeducador de los alumnos con "necesidades educativas especiales".

Relacionada con la creciente dependencia mutua alumno-profesor aparece la cerrazón de ambos en el aula. El profesor no puede responder a las enormes demandas sociales que pesan sobre él, y el alumno, por su parte, sólo encuentra sentido a su actividad matemática dentro del aula porque ésta se le presenta como una actividad exclusivamente escolar.

Por otra parte, es muy significativo el hecho de que entre las demandas a las que están sometidos profesor y alumno, muy pocas les requieren como matemáticos; las únicas necesidades matemáticas que profesor y alumno deben satisfacer son *necesidades de origen didáctico.* Así, tanto el alumno como el profesor se ven llevados a ignorar la existencia de necesidades matemáticas de índole no didáctica, con el consiguiente riesgo de caer en lo que la Profesora llama la *enfermedad didáctica.*

En síntesis, el alumno realiza un trabajo que nadie considera ni exige que sea un verdadero trabajo matemático; se trata de un trabajo tomado como un auxiliar del aprendizaje escolar, concentrado en el aula y absolutamente dependiente de un profesor al que se le pide que actúe como matemático sólo para satisfacer necesidades de origen didáctico.

En esta situación es muy difícil que el contrato didáctico evolucione en la dirección de traspasar a los alumnos una parte de la responsabilidad matemática asignada en exclusiva al profesor. Por el lado del alumno, esta asunción de responsabilidad viene dificultada por la forma en que el sistema considera y lleva al alumno a considerar el trabajo matemático de éste, así como por la centración en el aula del mismo y su dependencia absoluta del profesor. Por el lado del profesor, es muy difícil que el contrato didáctico evolucione en la dirección de usurparle al profesor la *única* responsabilidad matemática que actualmente le asigna.

Referencias

BROUSSEAU, G. (1986). "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *in* BRUN, J. (1996). *Didactique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, pp. 45-143.

UNIDAD 2

EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA

EPISODIO 2

Cambios en el currículo

NOTA DE LA PERIODISTA

En el Taller de Matemáticas, tres semanas después. Entrevisto a Francisco que ya presentó al Seminario de Matemáticas el resultado de su estudio sobre un posible cambio curricular con la introducción de la noción de elasticidad.

Periodista.- Y bien ¿cómo ha ido?

Francisco.- Pues mira... Verás, yo sólo tenía que hacer un informe sobre los aspectos matemáticos de la cuestión.

P.- ¿Y qué te han preguntado?

F.- Para empezar, querían saber lo que es la elasticidad.

P.- ¿No lo sabían?

F.- Pues no. Yo tampoco lo sabía antes de ocuparme de todo esto...

P.- ¿Ah no? Me extraña mucho, la verdad.

F.- ¿Por qué?

P.- No sé. Creía que un profesor de matemáticas... no es que tenga que conocer todas las matemáticas, claro, pero sí por lo menos las que se enseñan en Secundaria.

F.- Ya. Eso también lo piensan los alumnos. Claro que, a partir de lo que ya sabe, un profesor de matemáticas se puede hacer muy pronto una idea básica de lo que es la elasticidad.

P.- Así que habéis decidido introducir el tema de la elasticidad en el currículo... Si se aprende rápido, entonces no será un cambio curricular muy importante.

F.- ¡Uy, uy, vas muy rápido! Todavía no sé si se introducirá o no. Yo, como te decía, sólo he hecho un informe matemático. No pienso tomar partido en el asunto, sólo contesto a las preguntas de mis colegas... ¡cuando puedo! Así es como quedamos.

P.- Hay algo que me sigue extrañando.

F.- ¿El qué?

P.- Pues mira: la elasticidad es un tema que ni tú ni los demás profesores conocíais hace algunas semanas, y eso que sois profesores de matemáticas... En cambio, si decidís introducirlo en el currículo, el curso que viene todos los alumnos se verán con la obligación de estudiarlo, ¡y de sabérselo! Si no, los suspenderéis. ¡Y eso que hace unas semanas vosotros habríais suspendido todos!

F.- Sí, es posible.

P.- De hecho, hace un año, ¡ni siquiera habíais oído hablar del tema!

F.- Sí, claro... Y tal vez dentro de un año algunos de mis colegas se escandalizarán porque tal o cual alumno no tendrá ni idea de lo que es la elasticidad. Se lamentarán, dirán que esto no puede ser, que dónde se ha visto.

P.- Entonces no me negarás que es algo... cuanto menos chocante. Si no me equivoco, el cambio en el currículo que planteáis realizar es relativamente limitado, ¿no?

F.- Sí. Más o menos.

P.- Por lo tanto, no lo tendréis que hacer aprobar por el Consejo Escolar.

F.- No, en este caso no será necesario.

P.- Lo cual quiere decir que, a fin de cuentas, vosotros vais a decidir lo que los alumnos tendrán que estudiar obligatoriamente.

F.- ¡Eso es el currículum abierto!

P.- Vale. Pero no me negarás que esto se parece mucho a la "democracia de los expertos", a la tecnocracia.

F.- No sé. Quizá sí...

P.- ¿No será que, en el fondo, los profesores de matemáticas os consideráis amos y señores de la enseñanza de las matemáticas?

F.- No. ¡Como tampoco creemos que los militares sean los dueños del ejército! Aunque, de todas formas, aquí es mucho mejor que en el ejército. ¡Y ahora mejor aun que antes!

P.- ¿Por qué es mejor ahora?

F.- Pues, mira, porque antes no sólo había unos cuantos expertos que decidían lo que había que enseñar, sino que además no se sabía quiénes eran. Eran expertos anónimos. Hoy es un poco distinto. Si, por ejemplo, fueras la madre de un alumno del Instituto, y si no te gustara ver a tu hijo estudiar la elasticidad...

P.- Si no se va a debatir en el Consejo Escolar, los padres no pueden opinar sobre la pertinencia de vuestra decisión.

F.- En el Instituto Juan de Mairena se consulta a los padres de los alumnos sobre todos los cambios curriculares que proponen los seminarios. Basta con que una cuarta parte de los padres lo pida para que se tenga que debatir en el Consejo Escolar.

P.- ¿Y cómo se les tiene informados?

F.- Cada año el Instituto publica un documento con las propuestas de cambio respecto al Proyecto Curricular de Centro vigente. Además, si una mayoría de padres está en contra de tal o cual punto del Proyecto Curricular, entonces se lleva automáticamente la cuestión ante el Consejo Escolar.

P.- Ya veo. ¿Te importa que haga un momento de madre de alumno? Así me tendrás que dar explicaciones sobre la inclusión de la elasticidad en el currículo.

F.- Como quieras. Pero yo, como te he dicho, sólo he examinado la cuestión desde un punto de vista matemático.

P.- Vale, vale. A ver, ¿qué has puesto en el *dossier* que has preparado? ¿Qué preguntas te has hecho?

F.- Es bastante complicado... En primer lugar, he realizado lo que llamo una "primera exploración". Aquí, por ejemplo, he consultado algunos libros de economía. Ése es el primer punto.

P.- ¿Y qué dicen?

F.- Es difícil de resumir... En pocas palabras...

P.- Venga, inténtalo.

F.- Supón que tienes un negocio y que decides bajar los precios para que las ventas de un determinado artículo aumenten. Pongamos que haces una rebaja del 10%. Y ahora quieres saber cuánto aumentarán las ventas.

P.- Pues un 10%. ¿No?

F.- ¡No, no es tan fácil! En principio puede pasar cualquier cosa. A lo mejor las ventas no varían, o aumentan muy poco, un 1% o un 2% por ejemplo. O, al contrario, pueden aumentar más de un 10%. Porque al bajar el precio en un 10%, el artículo puede interesar a un tipo de clientela muy amplia que hasta entonces no pensaba en comprar ese artículo —por ser demasiado caro—.

P.- Ya veo. Pero esto ya no es un problema de matemáticas.

F.- No es *únicamente* un problema de matemáticas, claro. Pero para poder plantear bien el problema, se necesita un poco de matemáticas. Y es este poco de matemáticas el que Amalia, la profesora de economía, pide que introduzcamos en el currículo.

P.- ¿Eso no es lo que se llama la "interdisciplinariedad"?

F.- Más o menos. Aunque nosotros hablamos más bien de *co*disciplinariedad.

P.- ¿Y eso qué quiere decir?

F.- Es un poco largo de explicar. Digamos que la economía sigue siendo economía, aunque necesite matemáticas, y que las matemáticas siguen siendo matemáticas, aunque algunos de los problemas de que se ocupan los matemáticos nazcan de la economía, como podrían nacer de la física, la biología, etc. Sencillamente, la economía no ignora que necesita matemáticas y las matemáticas no ignoran que se nutren de problemas extramatemáticos. Las dos disciplinas no se dan la espalda. Eso es la codisciplinariedad. ¿Lo entiendes?

P.- Creo que sí. Pero ¿dónde están las matemáticas en el caso de la elasticidad?

F.- Primero hay que sacar el tipo de problemas del ámbito en el que lo han encontrado los economistas. Hay que generalizarlo.

P.- ¿No me puedes dar un ejemplo? *(Risas.)*

F.- Pues mira, en el *Menón* de Platón...

P.- ¡Oye, eso no son matemáticas!

F.- Espera, espera. Hay un momento del diálogo en el que Sócrates hace observar al esclavo Menón que si se dobla el lado de un cuadrado, entonces su superficie es 4 veces mayor.

P.- Ya.

F.- Pues, ahora supón que sólo aumentamos el lado del cuadrado un 10%. El problema que se plantea es: ¿en qué porcentaje aumenta el área? ¡No me digas que un 10%!

P.- ¿Cuánto aumenta, entonces?

F.- En este caso, un 21%. Y ahora lo podemos generalizar. Si tenemos dos cantidades x e y, con y función de x...

P.- y igual a $f(x)$.

F.- ¡Muy bien! *(Risas.)* Eso es, $y = f(x)$. El problema es: si x aumenta cierto tanto por cien, ¿cuál es el aumento de $f(x)$, es decir de y? Si conocemos la función f, entonces sólo se trata de un problema de matemáticas. En el caso del precio de un artículo y de sus ventas, no se conoce en principio la función f. Por eso no se trata *sólo* de un problema de matemáticas. ¿Ves lo que quiero decir?

P.- Dejémoslo en que sí. *(Risas.)* Pero una vez realizado este trabajo exploratorio, ¿qué otras cuestiones te has planteado?

F.- Hacer este trabajo ya es mucho. Porque te muestra que la cuestión es muy general y tiene muchas aplicaciones.

P.- Gracias a la noción de función, ¿no?

F.- Exactamente. Y debido a su generalidad, tiene sentido que se estudie esta cuestión en la escuela, en la educación obligatoria. Vaya, eso es lo que yo creo.

P.- No te acabo de entender. ¿Me puedes dar un ejemplo?

F.- Mira, supongamos que el precio del petróleo bruto aumenta un 10%. No hay ningún motivo para que el precio de venta al público de la gasolina también aumente un 10%. Porque el precio de venta, no sólo incluye el precio del petróleo bruto.

P.- También hay impuestos.

F.- Por ejemplo. Y ese tipo de situación...

P.- Ya veo. Nos afecta a todos en la vida de cada día. Pero aparte de esto, ¿qué más has examinado?

F.- A partir de ahí la cuestión se vuelve más técnica. Digamos que... Supongamos que se quiere introducir la noción de elasticidad como un elemento de nuestra cultura matemática "común". Entonces es importante que no aparezca como un elemento aislado en el currículo.

P.- ¿Por qué no?

F.- Pues, porque... ¡Es una ley curricular! Los temas aislados tienden a desaparecer.

P.- ¿Qué quieres decir?

F.- Los profesores se olvidan, lo dejan para el final, y al final nunca hay tiempo, no lo dan. Sobre todo en este caso, en el que se trata de un tema que en principio no conocen, que no forma parte de su cultura.

P.- Ya veo. ¿Y a partir de ahí?

F.- Otro aspecto son los temas relacionados con la elasticidad. En este caso, como ves, se requiere la noción de porcentaje, de tanto por cien. Eso por un lado. Por otro lado, se necesita la noción de función. Así que la elasticidad se sitúa en el cruce de dos grandes temas matemáticos. Y además, da la casualidad que estos dos temas, en el DCB...

P.- El Diseño Curricular Base.

F.- ...están, en principio, en un mismo "bloque", el de la *Interpretación, representación y tratamiento de la información.* Se trata, pues, de algo que se tendría que poder integrar en el currículo de manera bastante natural.

P.- O sea que en este aspecto, todo va bien.

F.- Eso parece. Aunque, como te he dicho, lo que yo he hecho es un mero estudio preliminar. Un estudio de "factibilidad", como dicen los economistas.

P.- Sí. ¿Y qué más? Quiero decir, ¿qué más has examinado?

F.- ¡Ah! La gran cuestión, claro, es la del lugar que puede ocupar el alumno respecto de este tema.

P.- ¿Qué quieres decir?

F.- Mira, todo lo que te he explicado sobre la elasticidad o, mejor dicho, *en torno* a la elasticidad, no han sido más que descripciones un tanto ambiguas. Es un "cuento cultural". Te he contado que hay gente que utiliza la noción de elasticidad...

P.- Sí, los economistas.

F.- Eso es. También te he contado que es una noción que va más allá de lo puramente económico. Y te he descrito brevemente el tipo de cuestiones que podían haber conducido a esta noción. ¡Vaya, eso creo!

P.- Sí...

F.- Pero con eso aún no puedes hacer nada. O casi nada. Salvo quizá escribir un artículo en el periódico.

P.- ¡Lo cual no es poco! *(Risas.)*

F.- No, claro. Pero si fueras una alumna, tendrías que poder hacer cosas muy concretas con ello. Limitadas, claro, pero concretas. Si no, el alumno se convierte en un espectador y el profesor en el narrador. El narrador de un cuento... o de un sueño.

P.- Ya veo. Es muy interesante.

DIÁLOGOS 2

El currículo como "obra abierta"

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días. Hoy pareces un poco alterado. ¿Qué ocurre?

E.- Pensaba en el episodio que hemos escogido.

P.- ¿El que trata sobre la introducción del tema de la elasticidad en el currículo?

E.- Sí. Me ha hecho revivir una impresión que tenía cuando era alumno.

P.- ¿Sí? ¿Cuál?

E.- La impresión de que uno tiene que aprender cosas sin saber por qué. No se sabe quién lo ha decidido, ni por qué razón. Vaya, que es algo totalmente arbitrario.

P.- Sí. ¿Y bien?

E.- Pues, que de repente, con la historia de la elasticidad, creo que he empezado a entender algo. Por una parte, que cuando eres alumno tienes la impresión de que todo lo que tienes que estudiar...

P.- La gramática, la historia, la biología...

E.- Sí. Crees que todo eso forma parte de la naturaleza. ¿Entiendes?

P.- No mucho, la verdad.

E.- Cuando eres pequeño, en la naturaleza hay árboles, coches, están los vecinos, el perro del vecino, todo eso. Y también está la escuela. Y en la escuela hay el complemento directo, el teorema de Pitágoras, el Mio Cid, la fotosíntesis.

P.- Sí.

E.- ¿Lo ves? Todo ello forma parte de "la naturaleza", del mundo que te rodea, como si siempre hubiera estado ahí.

P.- Ya veo. ¿Y por otra parte?

E.- Pues, por otra parte... No lo tengo tan claro. Pero a veces, de niño, me daba la impresión de que todo era una ilusión. Que... Que habían decidido hacernos aprender el teorema de Pitágoras o la batalla de Lepanto, o no sé qué, pero que también hubieran podido no poner estos temas y poner otros. Como con la elasticidad.

P.- Ya. Sospechabas que todo eso era el fruto de decisiones. De decisiones arbitrarias tomadas por gente...

E.- ¡Que nadie conocía!

P.- Por una serie de personas —unos desconocidos— que habían decidido que tú estudiarías el teorema de Tales o la respiración. ¿No es así?

E.- Sí, que lo habían decidido "por la cara".

P.- Y dime, ¿tenías también la impresión de que gente desconocida había decidido que hubiesen coches, vecinos, el perro del vecino, bosques, etc.? ¿O incluso que hubiera España, o tu comunidad autónoma, o tu ciudad?

E.- ¡No, sería ridículo!

P.- ¿Por qué?

E.- Hombre, tomemos los bosques. ¡Es ridículo! Nadie ha decidido que haya bosques. ¡Hay bosques, y punto!

P.- Bueno. Recapitulemos. Para ti, hay muchas cosas en el mundo que parecen naturales, que se dan por sentado. Son lo que son. En la escuela, algunas veces te parece que es lo mismo, que hay el teorema de Pitágoras del mismo modo que hay árboles en el bosque y otras veces no puedes evitar pensar: ¡todo esto es arbitrario! Lo han decidido sin que se sepa por qué, ni quién, ni cuándo. ¿Es eso?

E.- ¡Sí, eso mismo!

P.- ¿Y eso es lo que te ha alterado tanto?

E.- Sí. Parece divertirte.

P.- No. De ningún modo. Sólo que ya sería hora de que empezaras a progresar en estos asuntos. Si no, nunca avanzaremos.

E.- ...

P.- Vamos a ver. Escúchame bien. ¿Has cogido alguna vez un avión?

E.- Sí.

P.- ¿Y miraste por la ventanilla? ¿Qué se ve?

E.- Pues...

P.- Te voy a decir lo que se ve. Se ven campos, la tierra arada, estructurada, modelada. Se ven carreteras que unen pueblos. Y autopistas. ¿De acuerdo?

E.- Sí.

P.- Vale. Se ve un paisaje. Un paisaje no es algo dado por la naturaleza. Es fruto de la acción del hombre sobre la naturaleza. De la acción antrópica. ¿Sabes lo que es la acción antrópica?

E.- ...

P.- Si hubieras estudiado geografía más en serio lo sabrías. La acción antrópica es una manera técnica de hablar de la acción del hombre sobre un medio dado. Hace tiempo que se sabe que la naturaleza no es fruto de la naturaleza. Que es una obra humana. El resultado de un acto deliberado. ¿Entiendes?

E.- Sí... ¿Pero, y los bosques?

P.- Pues lo mismo. Sabes muy bien que ahí donde hay bosques podría muy bien no haberlos. ¿No has oído hablar de ecología?

E.- Sí, claro...

P.- Y ahí donde no hay bosques podría muy bien haberlos. El bosque, al igual que la ausencia de bosque, no es sólo un hecho natural. Es el fruto de la actitud de los hombres. Es el resultado de decisiones, o de la ausencia de decisiones.

E.- Pero Profesora, yo hablaba de la escuela. Del currículo, del teorema de Tales, no sé, de la ortografía.

P.- No hay ninguna diferencia. La ortografía, es una obra humana. Y la tipografía otra. La escuela también es una obra. Y el hecho que se enseñe ortografía y no tipografía es el fruto de una decisión. O de una falta de decisión, como prefieras.

E.- Profesora...

P.- Déjame acabar. Respecto a estas decisiones, o estas no-decisiones, uno no sabe generalmente quién las ha tomado ni quién las hubiera podido tomar.

E.- Ya.

P.- Bueno. Pero sobre todo, lo que tienes que tener muy presente es que los que tomaron estas decisiones ya están muertos. El mundo en el que vives lo gobiernan los que descansan para siempre en los cementerios. Naces y vives en un mundo lleno de obras que son esencialmente el fruto de decisiones tomadas mucho antes de que tú mismo te las puedas cuestionar. ¿Lo entiendes?

E.- Creo que sí.

P.- Y el episodio que tanto parece haberte irritado, el de la elasticidad, es una de esas pocas excepciones que experimentarás en el transcurso de tu vida: ves tomarse una decisión que hubiera podido darse antes, antes de que nacieras, pero que no se había tomado hasta ahora.

E.- La decisión ha sido de no enseñarlo.

P.- ¿El qué?

E.- Lo de la elasticidad. Al final, el Seminario de Matemáticas ha decidido no introducir la elasticidad en el currículo —aunque no sé muy bien por qué—.

P.- Bueno.

E.- Pero prefiero que volvamos a lo que decías antes, Profesora. Me interesa mucho.

P.- Bueno, bueno.

E.- Si me dejas, voy a intentar retomar lo dicho hasta aquí. La sociedad en la que vivimos es una obra, y además está repleta de obras. La escuela, por ejemplo, es una obra, el fruto de la acción de los hombres. De decisiones que se tomaron en su momento.

P.- Eso es.

E.- Lo que quiere decir que tú, yo, Amalia o Francisco no podemos hacer ya casi nada para cambiarlo, ¿no? No podemos cambiar lo que se decidió hace mucho tiempo.

P.- ¿Eso crees? ¡No me extrañaría que ahora me dijeras que te sabe mal que el Seminario haya decidido no introducir la noción de elasticidad en el currículo!

E.- Sí... En cierto sentido sí.

P.- Bueno. Mejor que sigamos. En la historia de una sociedad, hay obras que mueren, obras sin vida para nosotros y de las que sólo oímos hablar por los trabajos de los historiadores. Y después hay obras vivas que nos permiten vivir y que, al mismo tiempo, nos obligan a vivir de una manera determinada. Son obras no acabadas, *obras abiertas*.[6] Nos toca a nosotros continuarlas, "obrarlas". Le corresponde a cada generación seguir haciéndolas. Si no, mueren.

E.- Así que cuando se propone introducir la noción de elasticidad en el currículo, se está continuando la obra que es la escuela.

P.- Exacto. La escuela como obra de la sociedad, no tal escuela o instituto de tal o cual barrio.

E.- Sí. Ahora creo que ya lo entiendo. Pero hay algo que me gustaría aclarar.

P.- Dime.

E.- Es sobre el uso de la palabra "obra". Si te entiendo bien, la escuela es una obra. Los paisajes que se ven por la ventanilla del avión son una obra. España es una obra.

P.- Sí.

E.- Y Europa también es una obra. Una obra inacabada.

P.- Eso es. Aunque España, la escuela, los paisajes tampoco son obras acabadas. Pero sigue.

E.- Cuando hablamos de una obra musical, o de una obra literaria...

P.- O de una obra científica...

E.- Sí, también. ¿Lo decimos en el mismo sentido?

P.- Sí.

E.- ¿Son obras en el mismo sentido de la palabra?

6. Seguramente la Profesora toma la expresión "obra abierta" del ensayo de Umberto Eco sobre la obra de arte contemporánea que lleva el mismo título: U. Eco, *Opera aperta*, Bompiani, Roma 1967 (*Obra abierta*, Ariel, Barcelona 1985). *[Nota de los autores.]*

P.- Sí, sí, en el mismo sentido.

E.- Pero en el caso de la geometría euclídea, la que se estudia en la escuela, hay un autor, Euclides. Y en el caso de España o de Europa no hay ningún autor, ¿no?

P.- No, no del todo. En primer lugar, aunque admitamos que Euclides sea el autor de los *Elementos*, Euclides no es el creador de la geometría euclídea. Es el autor de un texto llamado los *Elementos* que presenta y fija un estado de una obra humana que llamamos la geometría euclídea. Pero muchas otras personas —según dicen los historiadores— estudiaron y trabajaron antes que él para elaborar esa obra. Es una obra humana que no tiene un único autor. Además, y sobre todo, lo que esta obra representa para nosotros no es fruto de la mano de Euclides. Porque muchos otros también "obraron" después de él para continuarla.

E.- Vale, de acuerdo.

P.- En cuanto a la geometría que se estudia en la escuela, es ciertamente una obra, una obra científica, pero no se puede afirmar que se trate aún de la geometría de Euclides. Y si incluyes en la geometría que se enseña en la escuela a la geometría con coordenadas, entonces habrá que evocar otras obras, con otros "obreros", otros autores —por ejemplo Descartes—. Pero no olvides que la mayoría de autores de obras son anónimos y que sólo se recuerda el nombre de unos pocos —ya se trate de obras como España o como la geometría "euclídea"—. Si olvidas este punto, haces como los que sólo recuerdan, en un partido de fútbol, el nombre de los que han marcado un gol.

E.- Sería injusto...

P.- Más bien inexacto. Es una manera de distorsionar la realidad.

E.- Ya veo, ya veo. Por cierto, se me está ocurriendo algo... No sé si estará bien, pero...

P.- Dime, dime, no tengas miedo.

E.- Es sobre todo esto de la obra abierta.

P.- ¿La palabra o la cosa?

E.- La palabra. O, mejor dicho, la idea de obra abierta, no acabada... Cuando hablamos, por ejemplo, de una "casa en obras", creo que se ve bien lo que decías.

P.- Es verdad.

E.- La casa es una obra. Pero nunca está acabada del todo: siempre podemos hacer retoques para mejorarla. A menos que sea una ruina total, una obra muerta.

P.- Exacto. La imagen es muy buena. Aunque quizá resultaría todavía mejor si, en lugar de una casa, te hubieras atrevido a hablar de una "ciudad en obras".

E.- Sí, claro, porque una ciudad, y sobre todo una gran ciudad, es casi siempre una "ciudad en obras". Siempre están arreglando una fachada, una calle, etc.

P.- Eso es.

E.- Pues, entonces, se me acaba de ocurrir otra pregunta, Profesora. Bueno... A lo mejor es un poco ingenua...

P.- ¿De qué se trata?

E.- La pregunta es: ¿por qué hay obras? ¿Entiendes lo que quiero decir?

P.- A ver. Por qué hay obras quiere decir por qué hay ciudades, por qué hay jardines, por qué hay España, el teorema de Tales, la ortografía...

E.- Sí, sí, eso mismo.

P.- ¡Parece que descubres el mundo!

E.- Quizá sí...

P.- Bueno. Tomemos un ejemplo. Un ejemplo matemático.

E.- Vale.

P.- Supongamos que alguien te para por la calle y te pregunta dónde está Correos. Si resulta que Correos está en la misma calle en la que estáis vosotros —suponiendo que es una avenida recta, regular—, a lo mejor le contestas, señalándole un edificio grande que hay al final de la calle: "Está más abajo, unos 200 metros antes de aquel edificio tan alto". ¿De acuerdo?

E.- Sí.

P.- Muy bien. Ahora hagamos un poco de matemáticas. Pongamos que A es el punto en el que os encontráis en la calle, B el punto donde está el "edificio tan alto" y C el punto donde está Correos.

E.- C está entre A y B.

P.- Sí. Y tú, en el fondo, lo que indicas a la persona que te pregunta es: el punto C está entre A y B a unos 200 metros de B.

E.- Sí.

P.- Bueno. Pero si fueras un matemático con cierta deformación profesional, hubieras podido contestar: "El punto C está (por ejemplo) a unos 2/5 de AB a partir de B".

E.- ¡Sería ridículo!

P.- Totalmente ridículo. El problema es que, en la escuela, los alumnos tienen que aprender a situar el punto C entre dos puntos A y B, no sólo a partir de su distancia respecto a A o B, sino también a partir del hecho que C divide el segmento AB en una razón dada.

E.- Es verdad.

P.- Los matemáticos han creado una pequeña obra matemática, una "obrita" matemática: la "teoría" de la división de un segmento en una razón dada. Entonces, tu pregunta, en este caso, sería: ¿por qué los matemáticos han creado esta pequeña obra matemática?

E.- Sí, algo así.

P.- ¿Y qué contestas, en este caso?

E.- ...

P.- ¿No sabes qué contestar?

E.- Bueno, no sé... Quizá...

P.- ¿No lo sabes? Tú querías ser profesor, ¿no?

E.- Sí...

P.- ¡Quieres ser profesor de matemáticas, y ni siquiera sabes por qué los matemáticos han creado una obra que, quizá, tendrás que enseñar a tus alumnos!

E.- Pues no, no lo sé.

P.- No lo sabes... Veamos. Si haces un mapa de la ciudad, a una escala determinada, entonces el punto C del mapa no estará a unos 200 metros del punto B.

E.- Claro que no.

P.- Estará, según la escala, a 1 cm, a 2,4 cm o a 0,8 cm.

E.- Vale.

P.- Pues mira. Lo interesante de poder definir la posición del punto C sobre AB a partir de la razón con la que C divide el segmento es que esta razón es siempre la misma. Si Correos está a unos 2/5 de AB a partir de B, entonces, en cualquier mapa de la ciudad, el punto C también estará a unos 2/5 de AB a partir de B.

E.- Es un invariante.

P.- Exactamente. Y este tipo de invariantes son esenciales en geometría euclídea. Porque, como debes saber, en la geometría euclídea, si algo es cierto a pequeña escala también debe ser cierto a gran escala, y viceversa. Gracias a esto se puede hacer toda la geometría euclídea sobre una hoja de papel.

E.- Ya entiendo... Pero Profesora, lo sorprendente es que tengo la sensación de que nadie me había contado antes lo que me estás contando ahora. Y estoy seguro de que muchos profesores de secundaria no lo deben saber.

P.- Permíteme observar que, de todas formas, tenías todos los elementos necesarios para contestar a mi pregunta. Pero no quiero entrar en polémica. Tomémoslo como ejemplo de un fenómeno importante. La sociedad está repleta de obras, la gente conoce estas obras, incluso las estudia, pero muchas veces no entiende por qué han habido personas que crearon estas obras. Es lo que decías sobre la escuela. Lo ven todo como natural, y no entienden por qué está ahí, para qué sirve.

E.- Y, Profesora, ¿tú crees que toda obra humana se puede concebir como acabas de hacerlo con lo de la división de un segmento?

P.- Yo creo que sí. Sólo que, para ello, necesitaríamos mucho más tiempo del que disponemos.

E.- Vale. ¿Y entonces?

P.- Mira, te propongo el siguiente esquema. En la vida, en la vida en sociedad, la gente se topa con dificultades y, por lo tanto, surgen cuestiones. Por ejemplo, ¿cómo vivir juntos? La pregunta tiene varias respuestas posibles: la ciudad, el pueblo, etc. ¿Cómo podemos mantenernos a suficiente distancia de la naturaleza para poder vivir entre humanos, sin por ello excluirla del todo? Respuesta: el jardín, el parque, etc. ¿Me sigues?

E.- Creo que sí. Estás diciendo que una obra es una respuesta a una pregunta.

P.- O a un conjunto de preguntas, de cuestiones. Y lo que decíamos antes, ahora se puede formular así: cuando vinimos al mundo, nos encontramos con que está lleno de obras. Tenemos las respuestas, aprendemos a conocerlas —en cierto sentido—, ¡pero entretanto hemos perdido las preguntas!

E.- Y eso implica... que muchas veces no sacamos todo el provecho posible de las obras con las que vivimos.

P.- Sí. Y tampoco pensamos en modificarlas para hacerlas más adecuadas. Sin saberlo, las vemos como obras cerradas. De esta manera, algunas obras humanas acaban muriéndose, porque dejamos de entender las preguntas que les dieron su razón de ser.

E.- Ya. Pero también puede pasar que algunas obras sean respuestas a preguntas que ya no se plantean realmente. Es motivo suficiente para que mueran, ¿no?

P.- Claro. Pero también podemos conservar y modificar una obra para que pueda servir de respuesta a preguntas distintas de las que le dieron origen.

E.- No te sabía tan conservadora, Profesora.

P.- Hay un conservadurismo lúcido y un conservadurismo descabellado —el de aquellos que rechazan el cambio, no por impotencia, sino por su incapacidad de entender las cosas—. Yo en cambio tiendo a pensar que, antes de abandonar una obra para el olvido, no está de más hacer un examen atento, por si aún pudiera servir para algo. ¡Si a esto le quieres llamar conservadurismo, allá tú!

E.- Bueno, bueno, Profesora. Pero, ¿y la escuela?

P.- ¿Sí?

E.- Es una obra, ¿no? ¿A qué preguntas responde? ¿O podría responder?

P.- Eso sí que es una pregunta que no podemos ignorar. Pero no tenemos bastante tiempo ahora para abordarla. Si te parece, la dejaremos para la próxima vez. Tendrás tiempo para pensar en ello de aquí a la semana que viene.

E.- Me parece muy bien. Hasta entonces y muchas gracias.

La elección de los elementos del currículo

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días. ¿Cómo estamos?

E.- Bien. Supongo que hoy seguiremos con lo del otro día, ¿no?

P.- ¿Dónde lo dejamos?

E.- Me hablaste de las obras y del hecho de que son respuestas a cuestiones. Entonces te pregunté sobre la escuela como obra: su razón de ser, las cuestiones a las que responde, todo eso.

P.- Sí, lo recuerdo muy bien... Vamos a ver... Si quieres, podemos partir de la siguiente constatación: la escuela es una institución social en la que se pone a los jóvenes en contacto con obras, con obras de la sociedad.

E.- Por ejemplo, las matemáticas...

P.- Sí. O la música, la filosofía, la gimnasia, etc. Vale. Para ello, se hace una selección entre las infinitas obras que componen nuestra sociedad.

E.- ¡Ah! ¡Éste es el problema que te planteaba el otro día! La selección de la que hablas es en parte arbitraria, ¿no?

P.- Espera. Dejemos esto de momento, por favor.

E.- Vale.

P.- Consideremos sólo el hecho siguiente. En la escuela, se pone a los jóvenes en contacto con cierto número de obras.

E.- Sí. Y hay que mostrarles las razones de ser de estas obras, las preguntas a las que se supone que responden.

P.- Dejemos también esto de lado. La cuestión es: ¿por qué se da ese contacto? No se trata ahora de la razón de ser de las obras seleccionadas en el currículo, sino de la razón de ser del poner en contacto a los jóvenes con estas obras. ¿Por qué se decidió que tenía que ser así?

E.- Es la cuestión de la razón de ser de la escuela.

P.- Sí. O de *las* razones de ser. Creo que ya hemos hablado de educación formal y educación informal, ¿no?

E.- Sí.

P.- A fin de cuentas, la educación es un proceso que debería facilitar la entrada en la sociedad. Es decir, conocer sus obras, saberlas aprovechar y, si es necesario, ayudar a cambiarlas.

E.- Ya...

P.- La escuela debería asegurar parte de este trabajo.

E.- Pero Profesora, precisamente, cuando hablas de "parte de este trabajo", quieres decir que en la escuela te ponen en contacto con una parte "determinada" de las obras de nuestra sociedad.

P.- Eso es.

E.- Vale. Entonces volvemos a encontrar el problema de antes:

¿cómo se hace la selección de las obras? O, más bien, ¿cómo se puede justificar tal o cual selección? ¿Por qué, por ejemplo, se seleccionan las matemáticas? ¿Y, dentro de las matemáticas, tal o cual obra particular? ¿Tal o cual "obrita"?

P.- ¡O tal "obritita", como la elasticidad!

E.- ¡Claro!

P.- Es una buena pregunta. Y de hecho ya hablamos hace unos días sobre el interés social de tener todos una cultura matemática básica —para poder "hacer de matemáticos" cuando los demás nos necesiten, y todo eso—. ¿Te acuerdas?

E.- Sí. Pero lo mismo se podría decir de otros conocimientos que no se enseñan.

P.- En efecto. De todas formas, supongo que crees que desde siempre las matemáticas han formado parte del currículo, y me refiero a lo que sería el equivalente de nuestro currículo de secundaria, ¿no?

E.- Por lo menos desde la antigua Grecia...

P.- ¡Ja! Justo lo que me temía. ¡Te equivocas de medio a medio!

E.- ¿Me equivoco?

P.- Claro. Hubo un tiempo —antes del siglo XVI, más o menos— en el que casi no habían matemáticas en el currículo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, que las matemáticas no lograron ocupar un puesto importante en el currículo hasta muy tarde en la historia de nuestras sociedades. Hubo grandes luchas para introducirlas y se tuvieron que tomar decisiones importantes. Y los cursos de matemáticas propiamente dichos aparecieron muy lenta y progresivamente, a lo largo de no menos de uno o dos siglos.

E.- Y por si fuera poco, supongo que sólo afectaría a una población de alumnos reducidísima.

P.- Claro. Pero para eso no creas que hay que ir muy atrás en el tiempo. Hace tan sólo algunas décadas, la enseñanza secundaria de nuestro país sólo educaba a un número ínfimo de jóvenes. ¡Tu pregunta era pertinente!

E.- Sí, sí.

P.- Incluso más pertinente de lo que crees. Porque, del mismo modo que no siempre hubo matemáticas en el currículo, también podrían desaparecer en un futuro más o menos próximo —o acabar por reducirse a casi nada—.

E.- Profesora, crees de verdad...

P.- ¡Y tanto! Lo creo sinceramente. Incluso me parece que ya empieza a haber una evolución en este sentido. No es que sea ilegítima. De ahí se partió históricamente. Las pocas matemáticas que se estudiaban en la enseñanza medieval resultaban de la clasificación aristotélica: la lógica, la física, la metafísica y la ética, etc. ¿Lo ves? Del mismo modo que fueron en aumento en aquel entonces, podrían ahora disminuir.

E.- ¡Me empiezas a asustar!

P.- ¿De verdad? Pues has sido tú el que ha abierto la caja de Pandora. ¡Y ahora te asustas de lo que ésta esconde!

E.- Un poco, la verdad...

P.- Recuerda lo que decíamos. La sociedad es una obra abierta. Nadie te asegura que mañana sea igual que hoy. Claro que, si no quieres tener una actitud pasiva ante los cambios que la afectan, ante las decisiones que se toman y las que no se toman, hay que plantear la cuestión que has propuesto y ser capaz de mirarla de frente.

E.- Ya te entiendo, ya... Entonces podemos volver a la cuestión general que te planteaba al principio. ¿Cómo se escogen las obras que conforman el currículo? ¿Por qué la escuela pone a los jóvenes en contacto con unas obras y no con otras? Y añadiré, si me dejas, ¿tienen las matemáticas alguna oportunidad de resultar elegidas en el futuro?

P.- Sí, está bien. Creo que ahora ya tenemos algún elemento para empezar a examinar esta pregunta. ¿Cómo sugerirías empezar?

E.- A ver... Pues a lo mejor la elección consiste en quedarse con lo que parece, en cierto sentido, como lo más fundamental. Las obras más fundamentales y que no se encuentran fácilmente fuera de la escuela. ¿Es eso?

P.- Es una manera de empezar.

E.- Pero lo que me molesta es que, de todos modos, en la escuela sólo podemos encontrar un número muy reducido de obras —aunque sean fundamentales—. ¿A ti qué te parece?

P.- Bueno. Creo que hay que detenerse un poco sobre lo que acabas de decir. Hablas de obras fundamentales que no se encuentran, o que se encuentran poco, fuera de la escuela, en la vida de cada día. Supongo que pensabas en las matemáticas.

E.- Sí, claro.

P.- ¿Y has pensado también en el hecho que, en casi todas las escuelas de casi todos los países del mundo, los jóvenes estudian su lengua materna? O sea algo que, más que cualquier otra cosa, utilizan y ven utilizar cada día fuera de la escuela.

E.- Es verdad. No había caído...

P.- ¿Entonces?

E.- No sé... De todos modos, sigo pensando lo mismo que antes.

P.- ¿A pesar de este contraejemplo?

E.- Sí, a pesar de todo. Aunque no sé muy bien por qué.

P.- Pues, tienes razón. Y te diré por qué. Nuestra propia lengua, nuestra lengua materna o, en un sentido más general, la lengua con la que vivimos el mundo, la encontramos constantemente fuera de la escuela. Pero como algo transparente, natural.

E.- ¡No la vemos como una obra!

P.- Exacto. Nuestra lengua fuera de la escuela es como los árboles de un bosque. No los vemos como una obra, sólo vemos su apariencia de naturalidad. Y en la escuela uno aprende a ver su propia lengua como una construcción de muchos siglos, una construcción extremadamente compleja y siempre abierta. Una lengua que, tú lo sabes muy bien, no será la misma dentro de un siglo.

E.- La última vez quedamos en que la escuela ponía a los jóvenes en contacto con obras. Ahora habrá que precisar más esta idea, puesto que la vida cotidiana también nos pone en contacto con obras.

P.- Sí. Pero nos pone en contacto con obras que no siempre consideramos como tales. Tienes razón, la relación que la escuela nos lleva a establecer con ciertas obras, aunque no siempre sepamos que son obras, es muy particular. Cuando un niño de 6 años llega a la escuela, ya hace tiempo que sabe hablar su lengua materna. Y sin embargo, en la escuela, se va a poner a *estudiar* su lengua.

E.- Así pues, en la escuela, las obras se estudian. El hecho de estudiar ya es una manera particular de entrar en contacto con una obra, ¿no?

P.- Sí, sí. Eso es. Recuerda lo de tu prima. Puede ser que, fuera de la escuela o de la Universidad, te veas llevado a hacer matemáticas casi como quien habla su lengua materna. En cambio, en la escuela *estudiaste* matemáticas —aunque éste no sea evidentemente el único lugar donde se estudie—.

E.- Estoy de acuerdo. ¿Pero no podríamos pasar ahora al hecho de que las obras que componen el currículo son las que nos parecen más fundamentales?

P.- Lo podemos intentar... Hay dos cosas en lo que dices. Hablas de obras que nos parecen fundamentales. Hay "fundamental" y también "parecer". Si comparamos dos currículos —los de dos sociedades o los de una misma sociedad en dos momentos de su historia— y si seguimos tu esquema, nos vemos llevados a decir que dos currículos difieren porque lo que es fundamental en la primera sociedad —por ejemplo la España del siglo XIX— no es lo fundamental en la segunda —por ejemplo la España de hoy—. Es, en cierto sentido, un factor objetivo de diferencia entre dos currículos. Podríamos sin duda abrir un debate hoy mismo para saber si las matemáticas se pueden considerar como fundamentales o no, pero en cualquier caso no cabe duda de que *no lo eran* para la mayoría de sociedades antes del siglo XIX.

E.- Ya veo... Pero, como pareces insinuar, decidir que tal o cual obra debe considerarse como fundamental también tiene algo de subjetivo, ¿no? Una obra puede parecernos fundamental o no parecérnoslo, independientemente de que lo sea en realidad.

P.- Eso es. En este punto interviene la imagen que tiene una sociedad de sí misma. Es un aspecto que no podemos pasar por alto. Vaya, eso creo. Hubo por ejemplo sociedades en las que se consideró que la literatura era una obra fundamental, la más importante. Así fue en la China confucionista hasta entrado el siglo XX: los jóvenes que querían acceder a carreras importantes debían pasar unas oposiciones de literatura clásica extremadamente duras, en las que los exámenes de disertación solían durar tres días y dos noches seguidos. El aprendizaje —en su mayoría memorístico— de los clásicos les parecía absolutamente fundamental.[7] Y a lo mejor lo era, ¿quién sabe?

E.- Pero también podemos imaginar que hay obras verdaderamente fundamentales que no se consideran como tales. Y ello puede ocasionar consecuencias negativas, nefastas. Porque el desconocimiento de obras fundamentales impide que se puedan satisfacer ciertas necesidades.

P.- Es verdad. Pueden ocurrir todo tipo de fenómenos. Por ejemplo, y casi a la inversa de lo que dices, puede que una obra que fue fundamental en su tiempo, y que por lo tanto forma parte del currículo desde hace un siglo, se siga estudiando en la escuela aunque haya dejado de ser fundamental.

E.- Profesora, ¿no estarás pensando en las matemáticas?

P.- Tanto como tú hace un momento. ¿Pensabas en las matemáticas, no?

E.- Un poco...

P.- Creo que estás buscando desesperadamente argumentos a favor de la enseñanza de las matemáticas en secundaria. Y eso es enternecedor, pero no necesariamente eficaz...

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- ¡Quiero decir que no estoy aquí contigo para enseñarte a hacer trampas!

E.- Profesora, tendrías que explicarte un poco mejor...

P.- Voy a ser muy clara. En primer lugar, hay una distinción que no hemos respetado demasiado hasta aquí. Aunque no sepamos muy bien lo que quiere decir fundamental, no hay que confundir las obras fundamentales para la sociedad en general con las obras fundamentales para la educación en la escuela de la gente de esa misma sociedad. Parece razonable pensar que existen muchísimas obras fundamentales para la sociedad que no lo son necesariamente para la educación escolar.

7. J.C. Martzloff hace referencia a estas oposiciones literarias al contar la vida del matemático chino autodidacta Li Shanlan. (Ver el número especial "Les mathématiciens" de la revista *Pour la science*, enero 1994, pp. 96-105.)

E.- ¿Me puedes dar un ejemplo?

P.- Como quieras. Tomemos la medicina.

E.- No forma parte del currículo de secundaria.

P.- Exacto. Pero, aun y así, encontrarás a mucha gente —supongo que la mayoría— que considera la medicina como una obra fundamental para el funcionamiento de la sociedad, pero no para la educación secundaria. Si no fuera así, algunos militarían para que se introdujera en el currículo, como pasa con la religión católica.

E.- Estamos de acuerdo.

P.- Bueno. Pues podría ocurrir lo mismo con las matemáticas. Podríamos imaginar —fíjate que he dicho imaginar— una sociedad en la que las matemáticas, como ocurre con nuestra medicina, se consideraran fundamentales para la sociedad, pero no para tener que formar parte de la enseñanza secundaria. Los que se orientaran hacia una carrera científica empezarían a estudiar matemáticas en la universidad, del mismo modo que, hoy día, los que quieren hacer medicina empiezan a estudiarla en la universidad. Y también podríamos imaginar que, del mismo modo que tenemos hoy buenos médicos, tendríamos buenos ingenieros, buenos físicos, buenos matemáticos. ¿Ves lo que quiero decir?

E.- Sí. Pero precisamente...

P.- ¿Sí?

E.- Pues mira, también podríamos imaginar que, justamente porque la medicina es algo fundamental en nuestra sociedad, su estudio en secundaria sería bueno para todos. No para formar a futuros médicos, claro, como tampoco se enseñan matemáticas en secundaria para formar a futuros matemáticos. Vaya, yo creo que el estudio de la medicina, bajo ciertas formas apropiadas, tendría efectos positivos sobre la salud pública, su economía, en fin, sobre muchísimas cosas.

P.- Tu razonamiento es excelente. Y ahora parece como si quisieras intervenir en el diseño del currículo, ¡y de una manera mucho más ambiciosa que Francisco y Amalia!

E.- Sí, aunque...

P.- Bueno. Pero dime una cosa: lo que acabas de decir a favor de la medicina en secundaria, ¿lo podrías decir también a favor de las matemáticas?

E.- ¿Cómo?

P.- Decías antes que el estudio de la medicina seguramente permitiría mejorar la salud pública. ¿Y con las matemáticas? ¿Qué dirías?

E.- Diría que si las matemáticas desaparecen del currículo, o fueran algo puramente residual, se produciría el mismo fenómeno, pero a la inversa. Tendría consecuencias nefastas sobre el sistema de las ciencias y las técnicas —que constituyen ciertamente una obra fundamental de nuestra sociedad—. Aquellos que quisieran aprender física, tecnología, química, etc., deberían estudiar al mismo tiempo todas las matemáticas que se necesitan en estos ámbitos.

P.- Sería algo como lo que ocurre con la medicina, se tendría que estudiar todo en la universidad.

E.- Algo así.

P.- Sólo que no estás comparando lo mismo. En el caso de la medicina, decías que estudiarla en secundaria podría ser interesante incluso para aquellos que no se plantean ser médicos. Del mismo modo, aquí tendrías que poder convencer a la gente de que todos aquellos que no serán "obreros científicos" también deberían estudiar matemáticas en secundaria.

E.- Sí, es verdad. Lo cual demuestra que no he razonado bien. Pero de todas formas, me parece que las matemáticas son necesarias en muchos más ámbitos que la medicina. Quizá resulten fundamentales en este sentido y por ello deban ser estudiadas en secundaria...

P.- A ver, déjame intervenir. Te voy a proponer un esquema más general. La escuela nos permite acceder a determinadas obras haciéndonoslas estudiar. Pero ello no quita que una obra dada pueda facilitar el acceso a otras obras, aun cuando estas obras no se estudien en la escuela.

E.- ¿Por ejemplo?

P.- Recuerda lo que decía Francisco a la periodista. Los profesores de matemáticas no conocen esa "obrita" que es la teoría de la elasticidad; ni siquiera saben que existe. Pero pueden acceder a ella muy fácilmente a partir de las obras matemáticas que ya conocen. Si no sabes nada de matemáticas, el camino es mucho más largo. Pero a partir del momento en que conoces las matemáticas que sabe un profesor de matemáticas de secundaria, la distancia se vuelve ínfima.

E.- Vale, claro.

P.- De esta manera, podemos decir que toda obra no abre igual, ni tan fácilmente, el acceso a otras obras. Algunas obras son fundamentales en el sentido que nos acercan, sin que nos demos necesariamente cuenta, sin que ni siquiera nos lo digan, a una multitud de obras —que, de otra forma, sólo conoceríamos a través de las casualidades de la educación informal—. Creo que está claro, por lo menos para ti y para mí, que en nuestra sociedad el hecho de saber leer y escribir con soltura nos acerca muchísimo a un montón de obras. No a todas, claro; pero sí a muchas.

E.- Ya veo...

P.- Pues sigamos. Entre las obras que nos abren más puertas, hay algunas que resultan especiales, que poseen una naturaleza particular. Son los saberes. Un saber es un sistema de conocimientos que nos permite, en principio, fabricar respuestas frente a cuestiones relativas a cierto ámbito de la realidad.

E.- Saberes... ¿Te refieres a las ciencias?

P.- No sólo a ellas. También hay por ejemplo un saber musical, deportivo o literario. La literatura transmite todo un saber sobre el mundo que nos rodea, plantea determinadas cuestiones a las que intenta a la vez aportar respuestas, a su manera.

E.- Ya entiendo.

P.- Los saberes son obras, pero son algo así como obras de segundo grado: son obras sobre otras obras, para producir otras obras. Por eso nos acercan tanto a muchas otras obras. ¿Lo entiendes?

E.- Sí, creo que sí.

P.- Y seguramente por eso la mayoría de obras que se estudian en secundaria son saberes: matemáticas, biología, gramática, historia, etc.

E.- Creo, Profesora, que lo que dices es bastante convincente. Pero hay un riesgo.

P.- ¿Ah sí?

E.- Sí... Dices que las obras que se estudian en la escuela son vías de acceso a otras obras de la sociedad.

P.- Eso es. Aunque su estudio también tiene un interés en sí mismo.

E.- Ya, ya. ¡Pero puede ser que estas vías de acceso sean ellas mismas inaccesibles para muchos jóvenes!

P.- Es verdad. Y aún hay otro riesgo, que ya hemos mencionado. Es que las obras que tendrían que ser una vía de acceso a otras obras no conduzcan a nada. Que se pierda incluso la idea de que su creación constituía una respuesta a una serie de preguntas que se plantearon en un momento dado.

E.- Eso ya lo hemos dicho.

P.- Sí, ya hemos hablado del tema. En cuanto al riesgo que tú mencionabas, lo trataremos el próximo día con un poco más de calma.

E.- De acuerdo. Muchas gracias de nuevo y hasta entonces.

La resistencia a "entrar" en la disciplina matemática

E.- Buenos días, Profesora. ¿Todo bien?

P.- Sí gracias. ¿Y tú?

E.- Bien, bien. Por cierto, me gustaría que hoy examináramos mi pregunta.

P.- ¿Tu pregunta?

E.- Sí. El otro día dijiste que, en la escuela, se pone a los jóvenes en contacto con ciertas obras, que se les hace "entrar" en ellas. Y también que estas obras, que son en su mayoría "saberes", abren generalmente la vía a otras obras.

P.- Sí, eso es.

E.- Y yo aludí al hecho de que hay alumnos que se niegan a entrar en las obras con las que la escuela los pone en contacto. ¿Qué pasa entonces? Por ejemplo, aunque pensemos que estudiar matemáticas, o tal o cual obra matemática, es algo bueno para todos, hay alumnos que no se "enganchan". Con ellos, no hay manera.

P.- Sigue, sigue.

E.- A partir de aquí ya no sé por donde ir.

P.- Vamos a ver. Lo que quieres decir es que algunas obras que se estudian en la escuela son poco atractivas para los alumnos.

E.- Sí. E incluso repulsivas. ¡Y para una mayoría de alumnos!

P.- Bueno, eso habría que verlo. Pero estarás de acuerdo conmigo que, aunque las obras estudiadas en la escuela no sean muy atractivas para muchos alumnos, sí que existen obras que atraen fuertemente a una mayoría de jóvenes, ¿no?

E.- ¡No creo que haya muchos jóvenes a los que les chiflen las matemáticas, la biología o la gramática!

P.- ¡Cuidado, cuidado! Te olvidas de lo que es una obra. Me estás hablando de saberes: las matemáticas, la biología. Pero la música rock también es una obra en el sentido que le dimos el otro día a la palabra. Y el fútbol otra. No me dirás que la música rock o el fútbol no son atractivos para la mayoría de jóvenes...

E.- De acuerdo.

P.- Además, es fundamental que existan obras atractivas para los jóvenes.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, que cuando a una persona, tenga 15 años o 70, ya no le atrae ninguna obra de la sociedad, cuando deja de ser actor de las obras que existen, la persona en cuestión muere.

E.- ¿Me lo puedes explicitar un poco más?

P.- ¿No has visto nunca a una persona mayor morirse poco a poco porque, progresivamente, las obras de la sociedad han dejado de existir para ella? Durante un tiempo, sigue yendo al bar...

E.- ¡O a misa!

P.- Si quieres... Sigue hablando con la gente, los amigos, y llega un momento en que hasta eso desaparece. Y cuando ya ni siquiera hay convivencia, cuando los otros dejan de existir, la vida se va... Las obras de la sociedad son puntos de luz que se fueron alumbrando con los años y que se van apagando uno por uno, hasta que reina la más completa oscuridad...

E.- Por lo tanto, vivir es tratar con obras.

P.- Eso es.

E.- Vale. Pero muchos jóvenes no consideran vitales las obras que encuentran en la escuela. Las que les parecen vitales, ya sabemos cuáles son, ¡y no creo que tengan demasiado que ver con las matemáticas ni la literatura!

P.- ¡Eso también habría que verlo! Pero, aunque no las consideren vitales en ese instante de su vida...

E.- ¿Y hasta qué punto podríamos decir que lo son?

P.- Hombre, esto, de alguna manera, ya lo hemos visto. Claro que los que deciden que los alumnos estudiarán tal o cual cosa en la escuela se pueden equivocar. Pero el principio podría ser el siguiente: una obra es vital si resulta indispensable para entrar en las obras en las que debemos vivir.

E.- Me da la impresión de que nos movemos en un circuito cerrado: vivir es tratar con obras, las obras son vitales si nos permiten entrar en las obras en las que debemos vivir...

P.- Te lo aclararé con un ejemplo. Hoy en día es vital saber leer, y bastante indispensable saber escribir. Cuando uno no sabe leer, la vida resulta mucho más cruda, más difícil de vivir. Puede incluso llegar a ser invivible.

E.- Sí, de acuerdo. Pero esto no era así, digamos, en el siglo XIX. La mayoría de la gente no sabía leer ni escribir.

P.- Sin duda.

E.- Por lo tanto, es la sociedad la que hace que la vida sea invivible para los que no saben leer.

P.- Sí. Y también les hace la vida difícil a los que no saben usar un teléfono, y menos fácil a los que no saben conducir un coche. Sin duda. Pero la sociedad, la de ayer como la de hoy, es también una obra. Y es dentro de esta obra donde tenemos que conseguir vivir.

E.- Bueno. Pero suponiendo que una obra de las que se estudian en la escuela sea vital, en el sentido que tú dices...

P.- Sí.

E.- ¡Entonces también es vital que a los alumnos les parezca vital!

P.- Sí, tienes toda la razón. Claro que, afortunadamente, hay muchas maneras de vivir la vida. Es muy raro que una obra sea, en sí misma, absolutamente vital. Lo vital es el complejo de obras en el que se vive.

E.- Y además en la sociedad hay una pluralidad de complejos de obras para vivir.

P.- Sí, ciertamente.

E.- Por lo tanto, un joven puede muy bien decirse: esta obra —por ejemplo las matemáticas— no es vital para mí; o, por lo menos, quiero vivir en un complejo de obras en el que ésta precisamente no sea un elemento esencial.

P.- Sí. Es algo así como una apuesta.

E.- ¿Una apuesta?

P.- Sí. Los que deciden que en la escuela se estudiará tal o cual obra, apuestan sobre el hecho de que estas obras permitirán entrar más fácilmente en los principales complejos de obras de nuestra sociedad. O, mejor dicho, de la sociedad de aquí a 20 años o 40 años.

E.- Sí.

P.- Y lo mismo pasa con los alumnos. Se les propone que estudien ciertas obras. Pueden apostar a que lograrán vivir sin ellas o sin tal o cual de ellas. Corren sus riesgos. Es responsabilidad suya.

E.- ¿Y tú crees que se puede, a los 15 años, o incluso a los 20, decidir cómo se vivirá a los 30 o 40?

P.- Aquí hay un problema, en efecto. Por eso la escuela propone...

E.- ¡Impone!

P.- No. He dicho *propone*. Basta con mirar lo que hacen los alumnos en la escuela para convencerse. Si no quieren estudiar algo, no lo hacen... ¡y listos!

E.- Pero al mirar lo que hacen, Profesora, se ve también lo que te decía al principio: muchas de las obras que propone la escuela —como tú dices— no son atractivas. ¡Son incluso repulsivas!

P.- No es totalmente falso.

E.- ¿Y qué hacer entonces?

P.- ¡Bonita pregunta!

E.- Sin ironías, Profesora. Creo que es una pregunta a la que debemos contestar. Por ejemplo, muchos alumnos no se interesan por tal o cual asignatura porque, para ellos, esa obra, no forma parte de su mundo.

P.- Precisamente. La escuela está ahí para ampliarles ese mundo.

E.- Pero ellos creen que la obra en cuestión no está hecha para ellos.

P.- O que ellos no están hechos para esa obra.

E.- Las dos cosas. Creen, por ejemplo, que no es para gente de su edad...

P.- O de su clase social o de su sexo.

E.- ¿De su clase social o de su sexo? ¿Qué quieres decir?

P.- Pues mira, tomemos el fútbol, el hecho de jugar a fútbol. Un chico pensará que está hecho para él, pero no así una chica. Por lo menos en España.

E.- Y en todas partes.

P.- No, no, de ningún modo. En Estados Unidos, por ejemplo, el fútbol, el *soccer* como dicen allí, es más bien un deporte de chicas. Los chicos juegan más al fútbol americano. Un chica se sentirá más espontáneamente atraída por el *soccer* si es estadounidense que si es española.

E.- Vale, ya lo entiendo. ¿Pero lo de la clase social?

P.- Es como el sexo. En toda sociedad, en un momento dado, se considera que algunas obras son más apropiadas para los hombres que para las mujeres o viceversa; que son para adultos y no para niños o a la inversa; o que son para gente acomodada y no para gente modesta. O al contrario, claro.

E.- ¿Pero en el caso de las matemáticas? Es verdad que durante mucho tiempo se pensó que era cosa de hombres, no de mujeres.

P.- Sí. Y también que era cosa de hombres adultos y no de niños o adolescentes. Las ciencias en general eran cosa de adultos. A pesar de que, como bien sabes, se ha conseguido —gracias a la escuela— que sean también cosa de jóvenes.

E.- Hombre, yo no iría tan lejos. ¡Ése es precisamente el problema!

P.- ¿Tú crees? Yo creo que hasta podemos decir que, en ese terreno, se ha conseguido demasiado.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues mira, la gente acaba mirando muchas de las obras que se encuentran en la escuela como si estuvieran hechas *para* la escuela. Como si sólo existieran y tuvieran sentido ahí, en la escuela. Y ésta es sin duda una de las razones por las cuales los jóvenes las consideran poco atractivas. Como si bastara con acabar los estudios para no tener que tratar más con ellas.

E.- Creo que un ejemplo no estaría de más...

P.- Tienes razón. Detengámonos un poco sobre este punto. Admitamos, aunque no sea del todo cierto, que cuando los jóvenes ven que cierta obra es también cosa de adultos, si ven que, más tarde, la mayoría de ellos tendrá que tratar con ella, entonces esta obra adquiere cierto atractivo para ellos.

E.- Porque quieren parecerse a los adultos, volverse adultos.

P.- Eso es. ¡Aunque sólo cuando les conviene! Porque también pueden negarse, hasta extremos patológicos, a ser adultos.

E.- ¿Entonces?

P.- Pues, si creemos que se trata de un factor atractivo, entonces debemos constatar que dicho factor existe muy poco en el caso de las matemáticas.

E.- Porque nunca vemos a los adultos hacer matemáticas.

P.- Exacto. Un niño puede ver a los mayores ejerciendo de médicos o cuidando el jardín.

E.- O tocando un instrumento o construyendo una casa.

P.- Exacto. Pero no los verá casi nunca hacer matemáticas. Hay en nuestra sociedad un problema de "visibilidad" de las actividades matemáticas.

E.- Sí, es verdad. Pero tomemos otro ejemplo: los idiomas. Pongamos el inglés. En este caso los jóvenes sí que ven a los adultos de su entorno utilizar este idioma, entenderlo, hablarlo.

P.- ¿Tú crees? Depende de su grupo social. Hay entornos en los que no se da, en los que estudiar inglés es como estudiar una obra no hecha para ti, que es sólo para los demás —unos demás que no sabes muy bien quiénes son.

E.- ¡Ése es el problema de la clase social!

P.- Efectivamente. Tengo la impresión de que, a veces, basta con muy poco para que, en una sociedad dada, la gente se ponga a pensar que tal obra está "reservada" para tal o cual tipo de personas.

E.- Lo cual resulta totalmente arbitrario.

P.- En cierto modo sí. Pero es difícil cambiarlo. Seguro que todavía hay mucha gente que cree que las matemáticas son algo para señores serios que no se interesan por nada más y que serían, por ejemplo, incapaces de ir a bailar a una discoteca.

E.- O, al contrario, para jóvenes genios de actitud totalmente imprevisible.

P.- También. Incluso, si nos referimos ahora a lo que se ve en la universidad, la gente piensa que las matemáticas son cosa, en primer lugar, de hombres, y de hombres que visten de cualquier manera, con unos vaqueros gastados, con la camisa fuera del pantalón, etc. Como si el hecho de llevar unos vaqueros, un traje o una túnica tuviera algo que ver...

E.- Claro. Los griegos han hecho grandes aportaciones a las matemáticas y no se vestían como nosotros... O sea que, según tú, las matemáticas están hechas para todos.

P.- Potencialmente sí. Aunque no se puede negar que la gente tiene opiniones, a veces muy contundentes, sobre el hecho que tal obra está hecha para tal o cual tipo de personas, la escuela debería servir para recordar que estas discriminaciones no se pueden dar por sentado, que las podemos superar y que a veces es vital superarlas.

E.- Vale... Ya veo lo que quieres decir... Pero hay otro problema.

P.- ¡A ver, suelta!

E.- Pues, a veces, tengo la impresión de que, aunque una obra también exista fuera de la escuela, en el universo de los adultos, los alumnos no se lo creen...

P.- ¿No se creen el qué?

E.- No creen que se trate de la misma obra.

P.- Ahora te toca a ti dar un ejemplo.

E.- Volvamos al caso del inglés. Estoy seguro que hay jóvenes que no creen que el inglés que estudian en la escuela sea lo mismo que el inglés que hablan los actores de cine o sus cantantes preferidos. De hecho, no es que no se lo crean, es que para ellos son dos mundos distintos.

P.- Lo que quieres decir es que la escuela no es creíble. Que cuando pretende hacernos estudiar inglés, éste resulta "falso". Le falta credibilidad.

E.- Sí, algo así. También creo que si mañana se enseñara fútbol en la escuela, esta obra resultaría mucho menos atractiva para los jóvenes. De hecho tengo una hipótesis sobre el tema.

P.- ¡Pues dímela!

E.- Sí. A ver... En la escuela se entra en las obras por medio del estudio. Es lo que dijimos, ¿no?

P.- Sí.

E.- Me pregunto si no es por el hecho de tener que estudiarlas, en lugar de convertir a los alumnos en sus actores, por lo que la escuela hace tan repulsivas las obras que propone estudiar. ¿Qué te parece?

P.- Pues mira, no estoy muy de acuerdo contigo...

E.- ¿Pero entonces cómo explicas que los jóvenes se resistan tanto a lo que les propone la escuela?

P.- En primer lugar, te repito que no todos se resisten tanto, ni lo hacen de manera uniforme. Pero no importa. Para explicar lo que quiero decir, tengo que utilizar otra noción...

E.- Sí.

P.- Lo que llamaré la "disciplina" de una obra. Entrar en una obra es someterse a su disciplina. Cuando hacemos matemáticas o música rock o cuando jugamos a fútbol, la obra en la que entramos se manifiesta al imponernos una serie de exigencias disciplinarias. Si no aceptamos esta disciplina, por poco que sea, entonces nos quedaremos en la superficie de la obra. Por ejemplo, nos limitaremos a escuchar pasivamente la clase de matemáticas o a oír (ni siquiera a escuchar) la música rock, o a mirar a los futbolistas.

E.- Sin ser el actor de la obra.

P.- Eso es.

E.- ¿Luego me dirás que la entrada en una obra requiere, de una manera u otra, el estudio de esa obra?

P.- Sí. Porque el estudio incluye el hecho de reconocer la disciplina de la obra estudiada y de someterse a ella. De todos modos, ese estudio no tiene por qué parecerse al estudio escolar. Para jugar a fútbol en serio, aunque sea con los amigos, hay que aprender a jugar bien, a someterse a la disciplina del juego, del equipo. De lo contrario, el fútbol se convierte en algo terriblemente aburrido.

E.- O sea, si sigo tu razonamiento Profesora, el hecho de que haya estudio no distingue a la escuela de las otras...

P.- De las otras instituciones.

E.- Eso, de las otras instituciones en las que también se encuentra una obra dada.

P.- En efecto.

E.- ¿Entonces cómo se explica el poco atractivo aparente de las obras escolares?

P.- La pregunta no es fácil... Para empezar, cuando alguien se encuentra con una obra, en la escuela o fuera de ella, puede empezar por sentirse atraído —como un adolescente se siente atraído por la música rock—. Pero a partir del momento en que decide entrar en esa obra, entonces notará que ésta conlleva una disciplina. Y esto hace que muchos de ellos se sientan menos atraídos. Encuentran muy pronto que la obra, ya sean las matemáticas o la música rock, no está hecha para ellos. Y esto, como ves, puede ocurrir tanto en la escuela como fuera de ella.

E.- En la vida nos topamos con muchas obras, pero sólo podemos penetrar en algunas de ellas.

P.- Eso es. Depende de la gente, claro.

E.- Ya. Pero de todas formas... Me parece que cuando encontramos una obra en la escuela, se nos muestra de entrada lo más duro de su disciplina. Porque la disciplina de una obra, como decías, puede ser más o menos dura. Es evidente que para ser un gran músico hay que someterse a una disciplina terrible. Pero también se puede tocar la guitarra por puro placer, para acompañarse cantando a partir de algunos acordes, sin necesidad de aprender solfeo, ¿no?

P.- Seguro. No es frecuente que nos sometamos a la disciplina integral de una obra, en eso tienes toda la razón.

E.- ¿Y eso no sería una posible explicación?

P.- A lo mejor. Pero no sé si encontramos siempre, en la escuela, toda la disciplina de una obra. Incluso hay gente, como tú bien sabes, que habla del "laxismo" de la escuela.

E.- Exageran un poco. La vida en la escuela no es siempre fácil.

P.- Puede ser pesada, pero también puede ser muy leve. Los dos extremos son posibles. Aunque, es cierto que, en general, uno no va a la escuela a divertirse...

E.- ...sino a estudiar. Entonces, ¿dónde está la solución?

P.- Todo lo dicho hasta aquí constituye varios elementos de explicación. Y todavía hay algunos más.

E.- ¿Cuáles?

P.- ¡Sería muy largo discutirlo! Por ejemplo, considera las matemáticas. Primero podemos decir, claro está, que *la* disciplina matemática no existe *per se*. Lo que sí hay son diferentes aspectos, distintos componentes de la disciplina matemática.

E.- Lo mismo ocurre con las demás obras.

P.- Cierto. Y podemos pensar del mismo modo que tampoco es posible, ni bueno, imponer de entrada a los alumnos todo lo que representa la disciplina matemática en su integralidad.

E.- Uno se disciplina poco a poco, progresivamente.

P.- Sí, eso mismo. Dominar una obra —las matemáticas, el fútbol o el rock— nos permite actuar, nos hace más fuertes. Podemos aprender a tocar la guitarra sin saber solfeo, pero con el solfeo podremos tocar más cosas y cantar mejor. La disciplina se acepta porque aporta a cambio una ganancia, una mayor capacidad de acción. Pero el intercambio sólo puede parecer equilibrado y deseable si se efectúa poco a poco. Es verdad.

E.- ¡Profesora! ¿Tú crees que las matemáticas nos dan más capacidad de acción? ¿Podemos querer estudiar matemáticas para volvernos más capaces a la hora de actuar?

P.- ¡Espera, espera! Creo que es el momento de añadir lo siguiente: en la disciplina a la que la escuela somete a los alumnos hay elementos que no forman parte de la disciplina matemática, ni de la literaria, etc. Hay, si quieres, una disciplina *sui generis*.

E.- Que no tiene por qué ser mala *a priori*, ¿no?

P.- ¡Allá tú con tus impulsos sádicos! Y ahora en serio. La cuestión no es ésa. O por lo menos no del todo. Lo que puede producirse, y que de hecho ocurre con bastante frecuencia, es que lo que enseñamos a los alumnos como disciplina matemática no lo sea al cien por cien.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Por ejemplo, que a los alumnos jóvenes se les exija que hagan figuras geométricas bonitas, muy cuidadas. Figuras con, pongamos, trazos perfectamente rectos, paralelas "muy" paralelas, sin emborranaduras ni tachones, etc.

E.- Es bastante lógico.

P.- Quizá sí. Pero entonces se los está educando a la limpieza, la pulcritud y meticulosidad. Porque este tipo de exigencias no tiene nada que ver con la disciplina matemática.

E.- Ya veo.

P.- Y algunas veces esta exigencia puede obstaculizar el descubrimiento de lo que es la verdadera disciplina matemática. En algunos casos puede haber —eso es por lo menos lo que yo he observado— una deformación de la obra matemática tras recubrirla de elementos que le son ajenos. Y siguiendo este mismo principio, incluso el fútbol puede volverse poco atractivo.

E.- De hecho, esta sobrecarga de exigencias que no tienen nada que ver con la obra en sí no existe únicamente en la escuela. También se produce en otras instituciones.

P.- Es verdad. Pero esto no quita que, en la escuela, pueda llegar a ser un factor de repulsión añadido.

E.- Ya veo. Bien. ¿Podríamos ahora volver al problema de la acción, de la capacidad de acción que nos da el estudio de ciertas obras?

P.- Sí, como quieras.

E.- Porque me parece que la última vez dijimos que las obras que se estudian en la escuela se escogían precisamente porque su estudio permitía acceder a otras obras, quizá menos fundamentales, pero quizá también más presentes en nuestra vida.

P.- Eso es.

E.- Pues, precisamente me parece que, en el caso particular de las matemáticas, nos encontramos ante una obra cerrada sobre sí misma. Quiero decir en la escuela: hablo de las matemáticas que se enseñan en la escuela.

P.- Sí.

E.- ¿Acaso no ves la incoherencia? Se escogen las matemáticas porque permiten acceder a muchas otras obras, mientras que, por otro lado, la escuela no enseña cómo las matemáticas permiten de hecho acceder a ellas.

P.- ¡Razonas bastante bien! No tengo gran cosa que añadir. Supongo que el problema que mencionas parte de una debilidad... Una gran debilidad. Seguramente olvidamos demasiado rápido que las matemáticas son una obra abierta en el sentido de que abren puertas sobre otras obras, sobre muchas otras obras. Éste es, me parece, un aspecto esencial de la disciplina matemática.

E.- ¡Es la idea de las matemáticas mixtas!

P.- Sí, ya hablamos de ello el otro día.[8] Y se trata de una dimensión vital de toda disciplina matemática auténtica. Lo hemos olvidado un poco bajo los efectos de un purismo matemático...

E. Que, a mi entender, no se corresponde con el verdadero espíritu de las matemáticas.

P.- Eso creo yo también.

E.- Bien. Pero tengo otra pregunta.

P.- Adelante, pero que sea la última.

E.- Sí. Es sobre los currículos. Has dicho antes que había distintas maneras de vivir una vida...

P.- Me parece obvio.

E.- Sí, uno puede vivir su vida con distintos "complejos de obras".

P.- Eso es.

E.- ¿Entonces por qué no hay currículos distintos, para que cada uno pueda elegir las obras que quiera?

P.- ¡Uf! Eso es una gran pregunta. Pero permíteme que te haga observar primero que sí hay currículos diferentes.

E.- Ya, pero no me refiero a eso.

P.- Lo que preguntas es por qué hay un conjunto de obras que todos debemos estudiar en la escuela.

E.- Eso es, estamos obligados a estudiar matemáticas, historia, todo eso.

P.- De acuerdo. Pero olvidas algo. Hay, sin duda, muchas maneras de vivir. Pero también hay que conseguir vivir en sociedad. Y pa-

8. Ver el último diálogo de la unidad 1. *[Nota de los autores.]*

ra vivir los unos con los otros, es bueno que todos conozcamos las mismas obras, quiero decir algunas obras fundamentales. Forma parte de la disciplina de la vida en común.

E.- ¡Sí, pero también hay muchas maneras de vivir en sociedad!

P.- Tienes razón. Pero no todas las maneras son válidas. Por eso la escuela intenta, aunque sea difícil y contestado, que todos compartamos ciertas experiencias en relación a unas mismas obras. ¿Qué obras? Ya hemos hablado de ello. Pero, a fin de cuentas, la elección final es una apuesta que hacemos todos, que hace la sociedad, sobre la manera en que vivimos cada uno de nosotros individualmente y sobre la manera de vivir todos juntos.

E.- Sí.

P.- Bueno. Se nos ha hecho muy tarde. Lo tendremos que dejar aquí. Pero no dejes de pensar en ello.

E.- Muy bien. Adiós, Profesora. Y muchas gracias.

SÍNTESIS 2

La Profesora describe la sociedad en la que vivimos como una "obra" o construcción humana que, a su vez, está repleta de "obras". La escuela, por ejemplo, es una obra, fruto de la acción de los hombres, en la que se pone a los alumnos en contacto con otras obras. El que una obra se enseñe o no se enseñe en la escuela es el resultado de *decisiones* (o de *ausencia de decisiones*) tomadas por los hombres a lo largo de la historia.

Las obras humanas evolucionan y nunca acaban siendo exactamente como sus autores las planearon: se puede decidir construir un puente o fundar una iglesia, pero con el paso del tiempo el puente se deteriora y la iglesia tal vez se aparte de los objetivos iniciales por los que fue erigida. Como muchas otras construcciones, el puente y la iglesia son "obras abiertas" en permanente reconstrucción. El hombre no crea obras de forma gratuita: *las obras humanas responden siempre a un conjunto de cuestiones*, de necesidades, aunque éstas pueden haberse perdido u olvidado con los años.

Tanto la escuela como lo que en ella se enseña (el currículo) son obras abiertas, siempre inacabadas, que evolucionan con la sociedad. Ahora bien, aunque el hecho de que en la escuela se enseñe el Teorema de Pitágoras y no la elasticidad es el resultado de decisiones humanas; la forma concreta como aparece el Teorema de Pitágoras en el currículo actual es, a su vez, una consecuencia de las *leyes que rigen el desarrollo interno del currículo de matemáticas.*

Resulta así que el currículo de matemáticas *no es arbitrario*, como tampoco lo es la manera en que se transforma la matemática en el seno de una institución escolar. Del mismo modo, los elementos que constituyen actualmente el currículo de matemáticas (como el Teorema de

Pitágoras o la noción de función) no son incuestionables: *la naturalidad del currículo de matemáticas es una ilusión*. Desde una perspectiva histórica parece razonable suponer que los objetos matemáticos que hoy forman parte del currículo puedan desaparecer en un futuro más o menos próximo; incluso el hecho de que las matemáticas se mantengan siempre dentro del currículo obligatorio resulta cuestionable.

Una de las características principales que debe poseer una "obra" para formar parte del currículo obligatorio es, además de que la sociedad considere su estudio interesante por sí mismo, la de *ayudar a acceder a muchas otras obras de la sociedad*. En el caso de las matemáticas, existen dos peligros evidentes:

(a) Que las matemáticas enseñadas, en tanto que presuntas vías de acceso a otras obras, sean en sí mismas *inaccesibles para muchos jóvenes*;

(b) Que las matemáticas enseñadas *no conduzcan a ninguna parte*; es decir, que se pierdan las cuestiones a las que dichas matemáticas responden y que, por tanto, aparezcan como una *obra cerrada, muerta.*

Acceder a una obra significa "entrar" en ella. En la escuela, esta entrada se realiza a través del estudio. "Estudiar una obra" supone *reconocer la disciplina propia de la obra y someterse a ella*. En este sentido, se observa actualmente una fuerte resistencia de muchos jóvenes a entrar en la mayoría de obras propuestas por la escuela. La vida escolar, a partir de cierto nivel educativo, se caracteriza por una marcada tendencia de los alumnos a ser sólo *espectadores* de dichas obras y a no llegar nunca a ser *actores* de las mismas.

Una primera explicación de este fenómeno podría basarse en la hipótesis de que en la escuela los jóvenes se encuentran, de pronto, con lo más duro de *la disciplina de una obra* y que es esta dureza la que les impide "entrar" en la obra. Pero, tal y como sugiere la Profesora, es más verosímil la hipótesis contraria: la resistencia de los jóvenes podría ser consecuencia del *laxismo* de la escuela que, al intentar mitigar por todos los medios posibles la dureza de las diversas disciplinas, impediría que los alumnos pudiesen conocer dichas disciplinas y someterse a ellas.

En el caso particular de las matemáticas no es posible, ni sería razonable, imponer de entrada a los alumnos la *disciplina integral de las matemáticas*, y la escuela no lo pretende en ningún momento. Pero, por otro lado, la escuela impone cierto tipo de exigencias totalmente externas a las matemáticas, recubriéndolas de elementos que les son ajenos y que pueden *obstaculizar el descubrimiento de la verdadera disciplina matemática*.

COMENTARIOS Y PROFUNDIZACIONES 2

1. ¿Qué matemáticas estudiar en la escuela?

Hoy en día nadie discute que todos los jóvenes deban estudiar ciertas cuestiones matemáticas. Esta obligación puede parecernos muy natural y razonable, pero la verdad es que no ha sido siempre así y, como dice la Profesora en los *Diálogos*, nadie puede asegurar que seguirá siéndolo en el futuro. Sólo podemos decir que, por el momento, las matemáticas forman parte del *proyecto educativo* de nuestra sociedad, del conjunto de obras que *todos* debemos estudiar: hoy en día, para ser una persona "educada", es necesario saber *algo de matemáticas*.

La cuestión que surge entonces es: ¿qué matemáticas deben estudiarse hoy para adquirir la cultura básica que nos reclama el interés social y, pues, nuestro propio interés? ¿En qué consiste ese "algo de matemáticas" que todos debemos saber? Éste es, en síntesis, el problema que aparece como central cuando se pretende diseñar un currículo *obligatorio* de matemáticas. Lo llamaremos el *problema de la elaboración del currículo escolar de matemáticas.*

1.1. El problema del currículo desde el punto de vista del profesor

Los contenidos del currículo obligatorio que propone nuestra sociedad se presentan en la actualidad como una lista voluntariamente poco estructurada y dividida en tres grandes secciones: los contenidos *conceptuales*, los contenidos *procedimentales* y los *actitudinales.* De cara a la definición de lo que debe ser la instrucción obligatoria de

La relativa arbitrariedad del currículo de secundaria

Si tienes entre 12 y 16 años y vives en España, es muy posible que tengas que estudiar cómo hallar la fracción generatriz de un número decimal periódico, cosa que ignoran la gran mayoría de alumnos franceses que cursan la Educación Secundaria Obligatoria. Claro que, mientras tú trabajas con decimales periódicos, ellos tienen que aprender a manejar los vectores del plano, puesto que el currículo de secundaria francés otorga mucha más importancia al tema de la geometría vectorial que los currículos de las distintas comunidades autónomas españolas.

Las disparidades no sólo existen entre Francia y España. Si te encontraras con un inglés de tu misma edad y le pidieras que calculara la suma $\frac{3}{4} + \frac{6}{7}$, lo más probable es que te diera la solución: $1\frac{17}{28}$ en lugar de $\frac{45}{28}$. ¿Será que las fracciones no son iguales en Inglaterra que en España? ¿O que para los ingleses no quiere decir lo mismo "calcular una suma de fracciones" que para nosotros? Lo que ocurre es que, en la educación secundaria inglesa, los alumnos tienen que estudiar con mucho más detalle cómo se transforman las fracciones mayores que la unidad en "fracciones mixtas" (como $\frac{45}{28} = 1 + \frac{17}{28} = 1\frac{17}{28}$) para poder dar los resultados en esta forma. Además, también deben aprender a manipular estas fracciones con soltura para poderlas sumar, restar, multiplicar y dividir. ¿Cómo lo harías tú para calcular $1\frac{17}{28} \times 2\frac{2}{7}$?

todo ciudadano, el mensaje que se desprende de esta lista de contenidos está claro. Los *contenidos conceptuales* designan, mediante etiquetas del tipo "números racionales", "transformaciones del plano" o "ecuaciones e inecuaciones de primer grado", las obras matemáticas que se deben conocer. ¿Pero hasta qué punto hay que "entrar" en estas obras? ¿Qué es lo que se debe ser capaz de hacer con ellas? Los *contenidos procedimentales* intentan responder a estas preguntas aportando una serie de precisiones sobre el tipo de tareas que los alumnos deben aprender a realizar con los elementos anteriores. Finalmente, los *contenidos actitudinales* indican, de una manera más global, cómo se tienen que considerar las matemáticas dentro del conjunto de obras de la sociedad así como aquellos aspectos de la actividad matemática que no pueden describirse en términos de tareas o procedimientos.

Aunque el currículo apunta que todas estas obras forman parte de una organización mucho mayor, el "saber matemático", no indica de qué modo deben ser organizadas para proceder a su estudio en las mejores condiciones posibles. Todos los contenidos, procedimientos y actitudes aparecen a un mismo nivel, como elementos de una lista, en una serie prácticamente lineal. El joven ciudadano dispuesto a adquirir la instrucción obligatoria que le exige la sociedad no sabe, pues, qué relaciones existen entre las distintas "obritas" cuyos nombres aparecen en el texto del currículo, ni entre las distintas tareas que deberá aprender a realizar. Tampoco sabe cómo se pueden estructurar las tareas entre sí haciéndolas aparecer como elementos de una misma obra, ni cuál es la organización didáctica de las mismas que mejor le permitirá proceder a su estudio.

La tarea de la escuela y, en particular, de los profesores es la de crear las mejores condiciones posibles para que los alumnos puedan estudiar —y por lo tanto aprender— los contenidos presentados en el currículo. Para ello, los centros docentes disponen de un rico conjunto de *dispositivos* (bibliotecas, aulas, tutorías, evaluación académica, actividades extraescolares, etc.) sin los cuales los profesores no podrían organizar ni guiar el trabajo de los alumnos. Pero queda, sin embargo, la cuestión de la *estructuración del contenido del estudio*, es decir, del diseño, a partir de la lista de contenidos curriculares que les encomienda la sociedad, de un verdadero *programa de estudios* para sus alumnos.

No es extraño entonces que el problema de la elaboración del currículo se tienda a enfocar, casi exclusivamente, desde el punto de vista de la *enseñanza*. Se presenta en primer lugar como un problema de *selección de contenidos:* ¿es necesario enseñar la "semejanza de figuras", la "probabilidad", la "resolución de ecuaciones con logaritmos"? Posteriormente, y en estrecha relación con el problema de la selección, se plantea el problema de *secuenciar* estos contenidos (¿hay que enseñar primero la función exponencial o la logarítmica?), así como el problema de la *temporalización* o distribución de dichos contenidos a lo largo del tiempo (¿en qué momento iniciar el estudio de los números decimales? ¿cuánto tiempo dedicarle?). También se plantea, simultáneamente, el problema de la *metodología de la enseñanza*, es decir de las acciones o "gestos" profesionales que debe realizar el profesor para guiar el proceso de estudio de sus alumnos.

Un fragmento del currículo de la ESO

CONTENIDOS

Hechos, conceptos y sistemas conceptuales

— Figuras y cuerpos geométricos
— Semejanza de figuras
— Traslaciones, giros, simetrías

Procedimientos

— Construcción y utilización de modelos geométricos, esquemas, mapas y planos
— Identificación de la semejanza entre figuras [...] y obtención del factor de escala
— Utilización de la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de figuras [...]

Actitudes, valores y normas

— Curiosidad e interés por investigar sobre formas y características geométricas
— Sensibilidad ante las cualidades estéticas de las configuraciones
— Interés y gusto por la descripción verbal precisa de formas y características geométricas

Desde el punto de vista de la enseñanza, y una vez seleccionados los contenidos de la educación obligatoria, se tiende a considerar el "problema del currículo" únicamente como una cuestión de *secuenciación* y *temporalización* de los mismos, que desemboca en el problema de la *metodología de la enseñanza.*

1.2. Reconstrucción de las obras para ser estudiadas

Se parte del supuesto que el profesor ya sabe de qué contenidos se trata, es decir, de qué se componen las obras matemáticas seleccionadas, con lo cual la única cuestión problemática serían las variables asociadas al acto de *enseñar*: secuenciación de contenidos, temporalización, metodología pedagógica y evaluación.

Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, esta formulación del problema resulta insuficiente por dos razones.

(1) En primer lugar, porque la *enseñanza* es sólo un medio para el *estudio* y, por tanto, el problema del currículo debería poderse plantear en términos del *proceso de estudio de las matemáticas* y no sólo del proceso de enseñanza. El currículo debe entenderse primero como un *programa de estudios* que define la instrucción mínima obligatoria de cada ciudadano y del que se desprende, posteriormente, lo que debe hacer la escuela y el profesor para dirigir y ayudar a los alumnos en su estudio.

(2) En segundo lugar, porque la didáctica de las matemáticas *problematiza el conocimiento matemático* en lugar de tomarlo como transparente y establecido de una vez por todas. En otras palabras, no da por sentado que los "números racionales" o el "Teorema de Pitágoras" sean obras eternas, intocables e inmutables. Por esta razón, el *problema de la elaboración del currículo* no puede plantearse como un mero problema de selección y secuenciación de obras matemáticas presuntamente no problemáticas.

El problema que habría que plantear es el de la *reconstrucción* de las obras matemáticas seleccionadas en el currículo *en cuanto obras que deben ser estudiadas* y no sólo enseñadas. Esta reconstrucción debe partir de un cuestionamiento previo sobre las obras designadas, sus elementos (tanto conceptuales como procedimentales o actitudinales) y las posibles maneras en que éstos se pueden estructurar.

Para empezar a abordar este problema, necesitamos algunas nociones que todavía no ha mencionado la Profesora y que nos permitirán adentrarnos en el análisis de la "anatomía" de las obras matemáticas que se tienen que estudiar. Nos limitaremos aquí a introducir brevemente el esquema formal en el que se integran dichas nociones y dejaremos a la Profesora la tarea de presentarlas más adelante, en la *Unidad 3*, con todo el detalle que requieren. Pedimos, pues, al lector que acepte utilizar —o, por lo menos, ver cómo se utilizan— algunos términos nuevos de un modo relativamente formal, con la promesa de que verá concretarse su significado y alcance en las unidades siguientes.

2. ¿De qué está hecha una obra matemática?

Toda obra, y toda obra matemática en particular, surge como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas. Ya hemos visto que estas cuestiones pueden no ser matemáticas: ¿cómo repartir los caramelos entre mis amigos?, ¿cómo calcular la distancia al horizonte?, etc. Y también hemos observado que muchas cuestiones pueden surgir dentro de las mismas matemáticas: ¿la suma de dos números impares consecutivos es siempre un múltiplo de 4?; ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3 + 3x - 4 = 0$?; ¿cómo se calcula el área de una elipse?; etc.

Supongamos que la tarea de proporcionar respuestas a cada una de estas cuestiones nos resulta *problemática*, es decir, que no la podemos realizar inmediatamente. Y supongamos además que lo que queremos no es contestar puntualmente a una cuestión particular, sino a *todas las cuestiones del mismo tipo*: no sólo cómo calcular la distancia al horizonte, sino cómo calcular la distancia entre tres puntos dados o, dicho de otro modo, cómo determinar los lados de un triángulo (por grandes o pequeños que estos sean). Nuestro objetivo es, pues, convertir un *tipo de tareas* inicialmente *problemáticas* en *tareas rutinarias*, esto es, en tareas realizables regularmente con éxito.

Para ello tendremos que disponer de una "manera de hacer" determinada que nos permita realizar las tareas en cuestión de una forma relativamente sistemática y segura. Llamaremos *técnica matemática* o, simplemente, *técnica*, a cada una de estas maneras de hacer.

Aunque los *algoritmos* constituyen un tipo muy particular de *técnicas*, es importante no confundir ambas nocio-

Cuestiones y tareas problemáticas

¿Es posible reconstruir un triángulo del que conocemos la medida de los tres lados? ¿Y si sólo conocemos los tres ángulos? ¿Es suficiente esta información? ¿En caso de serlo, cómo realizar efectivamente la construcción?

¿Qué elementos de un triángulo determinan su forma? ¿Y su tamaño?

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir si sólo determinamos dos elementos: dos lados, dos ángulos, un lado y un ángulo, un lado y una altura, etc.?

nes. Sólo en ocasiones excepcionales una técnica matemática puede llegar a sistematizarse hasta tal punto que su aplicación esté totalmente determinada y pueda, por tanto, ser considerada como un algoritmo. En general, la aplicación de una técnica matemática siempre mantiene cierto grado de indeterminación, aun y cuando su definición sea precisa y por grande que sea el dominio que el estudiante tenga de ella.

La explicitación y utilización sistemática de una técnica provoca que las cuestiones iniciales relativamente poco precisas puedan formularse como verdaderos *problemas matemáticos*. Además, al resolver nuevos problemas imprevisibles inicialmente, las técnicas permiten agrupar los problemas en lo que llamaremos un *tipo de problemas*.

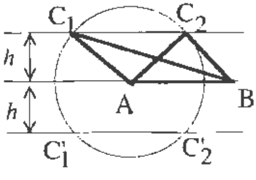
Germen de un tipo de problemas

— Reconstruir un triángulo dado un lado, un ángulo y una altura.
— Reconstruir un triángulo dada la medida de los tres lados.
— Reconstruir un triángulo dada la amplitud de los ángulos; dados dos lados y un ángulo; dados dos lados y una altura; dados un lado, una altura y una mediana; etc.

Para comprobar que estos problemas constituyen efectivamente el germen de un tipo de problemas no basta con observar que tienen enunciados parecidos, es preciso elaborar una técnica matemática capaz de abordarlos y de generar muchos más problemas del mismo tipo.

Técnica asociada: *técnica de los dos lugares geométricos*

Consiste en reducir el problema a la construcción de un punto y estudiar a continuación si las condiciones geométricas que debe cumplir este punto determinan completamente la posición del triángulo o le dejan cierto grado de libertad. Así, por ejemplo, dados los lados $AB = c$, $AC = b$, y la altura h relativa al lado c, se procede de la manera siguiente:



(1) Se parte del segmento AB de longitud c dada y se reduce el problema a la determinación del tercer vértice C.
(2) Se traza la circunferencia de centro A y radio b, primer lugar geométrico al que debe pertenecer C puesto que $AC = b$.
(3) Se trazan las dos paralelas a la recta (AB) situadas a distancia h, segundo lugar geométrico al que debe pertenecer C ya que $d(C,AB) = h$.
(4) Los puntos comunes a ambos lugares geométricos son las posibles posiciones de C.

Para que una técnica pueda ser utilizada de manera normalizada, debe aparecer como algo a la vez correcto, comprensible y justificado. La existencia de una técnica supone que también exista en su entorno un *discurso interpretativo y justificativo de la técnica y de su ámbito de aplicabilidad o validez*. Llamaremos a este discurso sobre la técnica una *tecnología* (de *tékhne*, técnica, y *logos*, discurso). Además de justificarla y hacerla inteligible, la tecnología también tiene la importante función de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y permitiendo en algunos casos la *producción de una nueva técnica*.

La tecnología de una técnica relativa a cierto tipo de cuestiones y tareas problemáticas es, en general, un discurso matemático que, como tal, requiere una interpretación y justificación. Llamaremos *teoría asociada a una técnica* a la tecnología de su tecnología, esto es, a un discurso matemático suficientemente amplio como para interpretar y justificar la tecnología. Es, en cierto modo, el fundamento último de la actividad, más allá del cual todo parece obvio y natural, sin necesidad de justificación alguna.

Algunos ingredientes de la tecnología de los lugares geométricos

— El conjunto de puntos del plano a igual distancia *d* de un punto A es la *circunferencia* de centro A y radio *d*.
— El conjunto de puntos del plano a distancia *h* de una recta *r* es un par de *rectas paralelas* que tienen a *r* como paralela media.
— El conjunto de puntos del plano a igual distancia de dos puntos A y B es la *mediatriz* de [AB]: recta perpendicular a (AB) que pasa por el medio de [AB].
— El conjunto de los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de un círculo es un diámetro del círculo.

Hemos apuntado anteriormente que toda obra se construye como respuesta a un tipo de cuestiones o, lo que es equivalente, de tareas problemáticas. Ahora podemos precisar que esta respuesta se constituye a partir de cuatro elementos esenciales: los *tipos de problemas* que surgen de las cuestiones; las *técnicas* que permiten resolver estos problemas; las *tecnologías* que justifican y hacen comprensibles las técnicas; y las *teorías* que sirven de fundamento a las tecnologías. Estos son los componentes principales de toda *obra matemática*.

Elementos de la teoría asociada

— El plano está formado por puntos.
— Dos puntos determinan una recta y un segmento.
— Tres puntos no alineados determinan un triángulo.
— Dado un segmento, se puede construir otro segmento de igual medida.
— Dado un punto A y una distancia *d* se puede construir el círculo de centro A y radio *d*.
— Por un punto P exterior a una recta *r* se puede construir la paralela a la recta *r* que pasa por el punto P.

Una *obra matemática* nace como respuesta a un tipo de *cuestiones* o *tareas problemáticas* y está formada por elementos *técnicos*, *tecnológicos* y *teóricos*. La podemos concebir como una *organización estática* y determinada de antemano, y tendremos así una visión de las matemáticas como un conjunto de obras cerradas. Pero es preferible interpretarla de forma *dinámica*: las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones.

3. Nueva formulación del problema del currículo

Para estudiar o ayudar a estudiar una obra matemática, hay que empezar identificando un tipo de cuestiones en respuesta a las cuales la obra fue creada o podría ser recreada. A partir de esta consideración, se trata de reconstruir la *organización matemática* en la que la obra se encarna: los campos de problemas en que se traducen las cuestiones, las técnicas con las que se pueden resolver estos problemas, los elementos tecnológicos y teóricos que permiten explicar y justificar las técnicas.

Así, ante la descripción curricular de una obra matemática determinada, hay que plantearse preguntas como las siguientes. ¿Cuáles son las tareas problemáticas en las que se debe basar el estudio? ¿Qué tipos de problemas matemáticos aparecerán? ¿Qué técnicas son inicialmente útiles para abordar estos problemas? ¿Cómo evolucionan dichas técnicas a lo largo del proceso de estudio? ¿Qué elementos tecnológicos se utilizarán para interpretar y justificar esta actividad? ¿En qué teoría se fundamentará el trabajo realizado?

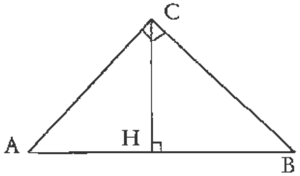
Consideremos, por ejemplo, el caso de la obra matemática que designamos habitualmente como el *teorema de Pitágoras*. El problema de su inclusión en el currículo de la educación secundaria obligatoria debe tomar en cuenta las cuestiones problemáticas que esta obra permite abordar, aquellas que permitirían reconstruir la obra bajo determinadas condiciones, así como la pertinencia de plantear estas problemáticas a nivel de secundaria. Habría que preguntarse por ejemplo si se debe elegir como eje principal la cuestión de la resolución de triángulos, la de la determinación del área de figuras semejantes o la de la ortogonalidad, entre otras. Y habrá que tener en cuenta además las dificultades que aparecen cuando se intenta reconstruir la obra a partir de la cuestión elegida. La dificultad no radica en la naturaleza (matemática o extramatemática) de la cuestión, sino en el tipo de restricciones que ésta impone de cara a la construcción total y al tipo de tareas que la obra permite realizar —y que determinan, evidentemente, el hecho que las matemáticas sean o no capaces de aumentar nuestra capacidad de acción—.

Dos demostraciones posibles del *teorema de Pitágoras*

(1) Dentro del estudio de las *figuras semejantes*, el teorema de Pitágoras puede aparecer como una consecuencia de la relación entre las áreas de triángulos semejantes, una vez se ha establecido que la razón entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}\,(ACH) + \text{Área}\,(BCH)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{Área}\,(BCH)}{\text{Área}\,(ABC)} &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 \\ \frac{\text{Área}\,(ACH)}{\text{Área}\,(ABC)} &= \left(\frac{b}{c}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

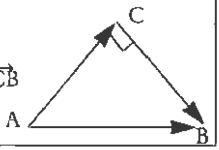


(2) Desde la problemática de la geometría métrica, el teorema de Pitágoras se construye a partir de la "perpendicularidad" y el producto escalar asociado:

$$\vec{AC} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow \vec{AC}\cdot\vec{CB} = 0$$

$$\|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB}^2 = (\vec{AC} + \vec{CB})^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2 + 2\vec{AC}\cdot\vec{CB}$$

Luego: $\vec{AC} \perp \vec{CB} \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{CB}\|^2$.



A modo de resumen, diremos que, al abordar el problema del currículo, debemos ser capaces de discernir los diferentes tipos de problemas que surgen al plantearse cierto tipo de cuestiones problemáticas y relacionar entre sí los diferentes procesos de estudio que pueden surgir de las distintas cuestiones planteadas inicialmente. Es preciso, por tanto, comparar las diversas organizaciones matemáticas que podrían formar parte de la obra designada en el currículo, es decir, las diferentes actividades matemáticas concretas que pueden esconderse tras designaciones como "Teorema de Pitágoras", "números racionales", "representación gráfica de funciones" o "simetría de figuras planas".

El punto de vista de la didáctica propone que el *problema de la elaboración del currículo*, que tradicionalmente había sido considerado como un problema esencialmente psicopedagógico, tiene un *componente matemático esencial*. No se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra en base a las cuestiones a las que ésta responde. Se trata, en definitiva, de una verdadera *reconstrucción creativa* de las obras que forman el currículo.

4. Las "ganas de estudiar" matemáticas en la escuela

Muchas veces, si no se consigue "entrar" realmente en una obra, sea ésta matemática o no, es porque no se logran *identificar* los principales tipos de cuestiones que le otorgan su *razón de ser*, limitándose entonces el estudio a adquirir un *dominio formal* de las técnicas y elementos tecnológicos que componen dicha obra.

Hemos de reconocer que ésta es la situación en la que se encuentran a menudo los alumnos de secundaria e incluso no pocos estudiantes de la Universidad. En muchas instituciones docentes la *obligación de estudiar matemáticas* no suele estar ligada a una verdadera necesidad sentida por los propios alumnos de utilizar las matemáticas para responder a cuestiones que se les plantean o para llevar a cabo una tarea problemática que no saben cómo realizar. Así, no cabe duda de que la enseñanza de las matemáticas que se imparte en las actuales instituciones escolares responde a un *proyecto social* que los estudiantes consideran relativamente ajeno a sus propios intereses. La enseñanza de las matemáticas les es, en gran medida, *impuesta*.

En realidad es muy difícil que los alumnos sientan, *a nivel individual*, la necesidad de estudiar matemáticas. Podríamos incluso decir que, hoy en día, es perfectamente posible tolerar la ignorancia matemática. Incluso entre personas consideradas socialmente "cultas" se agotan muy rápidamente las matemáticas consideradas como "suficientes" para vivir, para desarrollar una profesión, para tener un nivel de cultura mínimo, etc.

Aunque la "falta de ganas" de estudiar pueda ser considerada como uu fenómeno escolar general, cabría preguntarse hasta qué punto algún aspecto de este fenómeno podría ser explicado a partir de la especificidad del saber matemático y de las características propias de las matemáticas escolares. En otras palabras, cabría preguntarse si la falta de ganas de estudiar matemáticas podría ser considerada también como un fenómeno didáctico.

La ignorancia tolerada y la ignorancia tolerable

"La falta de ganas de estudiar normalmente no es una patología ni un enfrentamiento especial y personal con los padres, los profesores y la escuela como institución. Se trata sólo de una enésima manifestación natural de estos pacíficos compromisos con la ignorancia que, en diferentes grados, todos acabamos por firmar, y de los que apenas hemos desenmascarado algunos síntomas reveladores. Nos guste o no nos guste, también nosotros nos instalamos muchas veces en "lo que es suficiente", y de allí no nos movemos."

Massimo Piattelli Palmarini
Las ganas de estudiar
Ed. Crítica, Barcelona 1992.

Hemos dicho que la didáctica pretende describir los fenómenos que aparecen cada vez que alguien *se ve llevado a estudiar matemáticas*. Esta formulación podría dar la impresión de que la didáctica sólo se ocupa de los fenómenos que surgen cuando alguien está efectivamente *estudiando matemáticas*: sin embargo, todos sabemos que muchos alumnos se resisten de diferentes maneras y en diferente grado a *empezar a estudiar matemáticas*. Éste es un hecho crucial que la didáctica no puede ni debe ignorar.

En los *Diálogos* se trata esta cuestión y la Profesora apela a varios factores para explicar las "pocas ganas de estudiar matemáticas" que muestran los alumnos. Curiosamente, no menciona ni la "falta de motivación", ni el "poco interés", ni la presunta "mala actitud" de los alumnos hacia las matemáticas. Volveremos sobre este punto, aunque a estas alturas el enfoque de la Profesora no debería ya extrañarnos.

El primero de los factores que comenta la Profesora es la *falta de visibilidad social de las actividades matemáticas*: la gente tiende a considerar las matemáticas como si estuvieran hechas *para* la escuela, como si no existieran fuera de ella. Este hecho, junto con la falta de *credibilidad* de la escuela, es sin duda una de las razones por las que los jóvenes ven las matemáticas, de entrada, tan poco atractivas. Se trata de un factor disuasorio inicial que, sin embargo, no puede explicar del todo la persistencia de las enormes dificultades relativas al estudio de las matemáticas, la resistencia de los alumnos para "entrar" en la obra matemática. Aquí nos centraremos en otra de las principales causas por las que muchos alumnos pasan por la escuela sin llegar a "entrar" jamás en las matemáticas y que también menciona la Profesora: el hecho de que las matemáticas que se presentan en la escuela estén sobrecargadas de exigencias ajenas a la disciplina matemática.

Una primera explicación de las enormes dificultades que muestran los alumnos para empezar a estudiar matemáticas en la escuela la proporcionaría la naturaleza de la propia matemática escolar que escondería, en cierto sentido, la verdadera disciplina matemática. Pero, ¿en qué consiste la "verdadera disciplina matemática"?

5. Disciplina matemática y motivación

5.1. No olvidar las cuestiones a las que responde una obra

Por lo que respecta a la *disciplina matemática*, lo único que dice la Profesora es que una de las dimensiones esenciales de dicha disciplina está relacionada con el hecho de que las matemáticas son una *obra abierta*. Y debemos entender aquí el adjetivo "abierta" en el sentido de una obra que se abre hacia muchas otras obras, permitiendo por ello mismo que se pueda acceder a ellas.

Esta apertura nace de que muchas de las cuestiones originarias de las obras matemáticas surgen de *obras no matemáticas*, mientras que muchos de sus ingredientes técnicos y tecnológicos adquieren una parte importante de su productividad *fuera de las matemáticas*. Pero para que esta apertura sea fecunda, no hay que desvincular la construcción o reconstrucción de la obra del tipo de cuestiones o tareas problemáticas que le han dado origen, y hay que asociar la "entrada" en la obra con el *estudio* de dichas cuestiones —cuya respuesta no es más que la obra en cuestión—.

Hay que reconocer que, tal y como dice la Profesora, este primer aspecto de la disciplina matemática no está muy presente en la matemática escolar. Muy raramente se propone a los alumnos, como tarea matemática escolar, las cuestiones iniciales "en bruto", ya sean éstas matemáticas o extramatemáticas, que, una vez "refinadas", darán origen a los enunciados de los problemas escolares.

> *Cuestiones ausentes*
>
> *Existen cuestiones "en bruto", fundamentales para el estudio de ciertas obras matemáticas, que no encuentran un lugar en la enseñanza:*
>
> ¿Cómo saber si dos figuras son iguales?
> Dadas dos figuras, ¿cómo decidir si tienen la misma forma? ¿El mismo tamaño?

Los problemas escolares tienden a presentarse en efecto como enunciados perfectamente elaborados, cuyos textos suelen esconder la problematicidad que les dio origen. Hasta tal punto esto es así, que podría hablarse de una auténtica "desaparición" de las cuestiones o tareas reales que originaron las obras matemáticas estudiadas en la escuela. Así, la problematicidad de una tarea empieza siempre en el momento de resolver un problema escolar, y nunca antes, con lo cual la actividad de resolución de problemas no se presenta como un *medio* para responder a cuestiones relativas a cierta problemática real que se pretende estudiar, sino como un *fin* en sí misma —lo que no hace más que contribuir al "encierro" de las matemáticas en la escuela—.

5.2. Importancia del "razonamiento conjetural"

¿Cuáles son las otras dimensiones de la *disciplina matemática*? Una vez que hemos tomado posesión de la tarea problemática que tenemos que llevar a cabo o de la cuestión que nos proponemos estudiar, el estudio de la cuestión entra en una *fase exploratoria*. Se trata de una fase en la que no se dispone de una formulación suficientemente precisa del problema dado y que vuelve a aparecer cuando, aun disponiendo de

> **Matemáticas y razonamiento *plausible***
> Georg Polya. Editorial Tecnos, Madrid 1966.
> (El original en inglés es de 1954)
>
> La palabra *plausible* es en realidad una palabra inglesa que significa "posible, verosímil, convincente". No hay que confundirla con el adjetivo castellano "plausible" (derivado de "aplauso") y que significa "digno o merecedor de aplausos", o bien "atendible, admisible, recomendable".

un enunciado matemático preciso, no se sabe cuáles serán las herramientas matemáticas más adecuadas para abordarlo.

En la fase exploratoria juega un papel importante lo que el matemático Georg Polya llamó el *pensamiento matemático "plausible" o conjetural*, es decir, el "arte" de formular hipótesis y conjeturas que nos parecen acertadas, de examinar su validez y contrastarlas, de reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba, etc.

Dicho de otro modo, nos referimos aquí a aquel momento del trabajo matemático en el que uno debe saber alejarse de lo que se acostumbra a considerar como la "certeza matemática", para ponerse a razonar con lo "probable o verosímil".

La tesis principal de la obra de Polya puede resumirse diciendo que existen "leyes" o, como él dice, "patrones" que rigen el pensa-

**Ejemplo de patrón del pensamiento conjetural:
la "verificación de consecuencias diferentes entre sí"**

Hoy en clase de 3º de ESO el profesor nos ha dado una fórmula que expresa el área de la superficie lateral de un *tronco de cono* (ver figura (1)) cuya altura es h, el radio de la base es R y el del círculo superior r:

$$A = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

Esta fórmula me parece muy complicada y no estoy muy segura de haberla copiado bien. En otras palabras, no me la acabo de creer. La tomaré entonces como un modelo *hipotético* (y posiblemente falso) del área del tronco de cono y la someteré a algunas pruebas basándome en resultados que ya conozco:

(a) Si hago $R = r$, el tronco de cono se convierte en un *cilindro* y

$$A = \pi(2R) \sqrt{0^2+h^2} = 2\pi R\, h,$$

que es efectivamente el área de un cilindro de altura h y radio R.

(b) Haciendo $r = 0$, el tronco de cono se convierte en un *cono* y

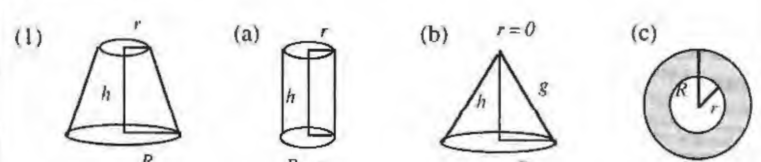
$$A = \pi R \sqrt{R^2+h^2} = \pi R\, g$$

donde g es la longitud de la generatriz del cono.

(c) Si $h = 0$, obtengo un *anillo circular* entre dos círculos concéntricos de radios R y r, cuya área debería ser: $A = \pi(R^2 - r^2)$ y la fórmula me da una expresión equivalente $A = \pi (R + r)(R - r)$.

(d) Si $r = h = 0$, el tronco de cono se convierte en un *disco* de radio R y de área $A = \pi R^2$.

Todos estos casos particulares no demuestran que la fórmula sea correcta, pero sí aumentan mi confianza en ella. La fórmula es tal vez un poco compleja, pero casi seguro que es válida.



miento *plausible*. Naturalmente, no son leyes de la misma naturaleza que las leyes lógicas utilizadas para demostrar resultados matemáticos "bien formulados" (lo que se suele llamar "razonamiento deductivo"), aunque ambas se complementan y son del todo imprescindibles en la actividad matemática. Así pues, podemos añadir un segundo aspecto de la disciplina matemática afirmando que *en las fases exploratorias del proceso de estudio es necesario someterse a los patrones que rigen el razonamiento matemático plausible o conjetural.*

5.3. Las matemáticas nos dictan sus leyes

Siguiendo el proceso de estudio, una vez se dispone de una formulación precisa de algunos problemas relativos a la cuestión inicial y de una técnica matemática determinada para abordarlos, aparece una nueva dimensión de la disciplina matemática sobre la que volveremos más detalladamente en la *Unidad 4.* La podemos enunciar como sigue: *en la fase de trabajo técnico hay que someterse a las leyes que rigen el desarrollo interno de las técnicas matemáticas. Es como si las matemáticas nos dictaran sus propias leyes.*

Este aspecto de la disciplina matemática conlleva, en particular, que existan unas *relaciones no arbitrarias* entre los diversos problemas que aparecen a medida que se lleva a cabo el proceso de estudio, como si un mecanismo interno del trabajo matemático generara los diversos campos de problemas. El matemático no elige en cada momento los problemas que abordará sino que, una vez inmerso en el proceso de estudio, puede verse llevado a tratar con problemas que él no podía siquiera imaginar de antemano que le surgirían.

Si dejamos aparte los *problemas aislados* que pueden aparecer en un momento determinado, pero que desaparecen a la larga, se observa que, normalmente, los problemas escolares suelen presentarse formando clases muy cerradas, casi algorítmicas. ¿Cómo explicar este hecho?

En la organización escolar

Atomización de un tipo de problemas

En la práctica escolar habitual se construyen triángulos a partir de ciertas condiciones: dados tres lados o dos lados y un ángulo, etc. También es habitual construir la circunferencia inscrita y la circunscrita a un triángulo, pero dicha construcción se presenta de manera desconectada de las anteriores.

Ahora bien, la construcción del incentro y del circuncentro de un triángulo son *problemas del mismo tipo* que la construcción de un triángulo dadas las longitudes de sus lados, o dados dos lados y un ángulo, o un lado y dos ángulos. Todos ellos son abordables mediante la *técnica de los dos lugares geométricos* antes descrita. En el caso del incentro, los lugares geométricos son las bisectrices del triángulo y, en el del circuncentro, las mediatrices.

de las matemáticas se tiende a clasificar los problemas *a priori*, esto es, antes de llevar a cabo ningún tipo de proceso de estudio. Resulta entonces una clasificación "temática" muy pormenorizada pero independiente del desarrollo de las técnicas matemáticas y de sus interconexiones, lo cual crea microuniversos matemáticos aparentemente aislados. Se produce así en la matemática escolar cierta *atomización de los tipos de problemas* estudiados, acompañada de cierta *rigidez de las técnicas* que se utilizan para abordar dichos problemas.

5.4. Necesidad de integrar la tecnología y el trabajo técnico

Hemos dicho que el proceso de estudio no concluye una vez resueltos los problemas enunciados gracias a la técnica elaborada: es preciso un discurso interpretativo y justificativo de las técnicas. *A lo largo del proceso de estudio aparecen fases en las que el discurso tecnológico debe integrarse en el trabajo técnico para hacer que éste sea más comprensible y eficaz.*

Este aspecto de la disciplina matemática requiere una interrelación muy estrecha entre la utilización de *técnicas* y la *tecnología* que permite justificar la actividad matemática y presentarla como algo comprensible. Ahora bien, en la organización usual de la enseñanza escolar de las matemáticas, y de acuerdo con la citada atomización de los campos de problemas, el discurso tecnológico y teórico tiende a presentarse como relativamente autónomo respecto de la actividad matemática a la que sirve de fundamento.

Disociación entre técnica y tecnología

¿Por qué los problemas de construir la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita a un triángulo tienden a presentarse en la escuela como problemas aislados, en lugar de como representantes de un amplio campo de problemas?

Hay que buscar la respuesta en la ausencia de un discurso tecnológico que explicite y analice la técnica utilizada (técnica de los dos lugares geométricos) y ponga de manifiesto su campo de aplicación, sus limitaciones y sus posibles variaciones para abordar nuevos tipos de problemas.

Tenemos, al menos, cuatro aspectos de la disciplina matemática que se traducen en condiciones necesarias para entrar en una obra matemática: no olvidar las cuestiones a las que la obra responde; combinar el "razonamiento deductivo" con el "pensamiento conjetural"; identificar y respetar las leyes que rigen el desarrollo de las técnicas, y producir una tecnología adecuada para aumentar la eficacia e inteligibilidad de las técnicas.

5.5. *"Motivación" y dificultades en el estudio*

Teniendo en cuenta la ausencia de una verdadera disciplina matemática en la organización escolar de las matemáticas, ¿qué relación podemos establecer entre, por un lado, lo que normalmente se denomina "motivación" y "buena actitud" de los alumnos hacia las matemáticas y, por otro lado, las dificultades que éstos tienen para empezar a estudiar matemáticas en la escuela?

Como dijimos en la *Unidad 1*, la didáctica de las matemáticas no presupone que las explicaciones últimas de los fenómenos didácticos deban buscarse en factores cognitivos o motivacionales relativos a las particularidades de cada alumno o profesor. En el caso que nos ocupa, hemos visto que el análisis de la naturaleza de las obras matemáticas pone de manifiesto muchos aspectos de la disciplina matemática que resultan difíciles de experimentar en el aula. Esta ausencia escolar no debe olvidarse en el momento de explicar las dificultades que muestran los alumnos para involucrarse en el estudio de las obras propuestas por la escuela.

Muchos de los comportamientos habituales del alumno de matemáticas (desinterés, falta de iniciativa propia, aburrimiento, rechazo) que suelen describirse como "mala actitud" o "falta de motivación" deberían considerarse a la luz de lo anterior como una *consecuencia*, más que como la *causa* de no haber "entrado" en la disciplina matemática.

La afirmación anterior no niega que estos comportamientos "negativos" aumenten a su vez las dificultades para entrar en la disciplina matemática, estableciéndose entonces un círculo vicioso muy difícil de romper. Lo que queremos resaltar a este respecto es que, hoy en día, las dificultades para entrar en la disciplina matemática escolar pueden llegar a ser muy importantes, independientemente de las características personales de los alumnos.

La originalidad de la didáctica de las matemáticas consiste en postular que el círculo vicioso no puede ser roto por el eslabón de la "motivación", es decir, de manera independiente de los elementos que componen y estructuran las distintas obras matemáticas del currículo. Para incidir de manera significativa y universal sobre las dificultades matemáticas de los alumnos es necesario (aunque, con toda seguridad, no suficiente) modificar aquellos aspectos de las matemáticas escolares que "esconden" a los alumnos la verdadera disciplina matemática.

6. Reconstruir las matemáticas en la escuela

Hemos visto que las matemáticas escolares se presentan con unas características propias que la diferencian en muchos aspectos de las obras matemáticas originales. Estas características específicas provienen del hecho que las obras del currículo tienen que ser *reconstruidas* para poder ser enseñadas en la escuela, es decir, "recreadas" bajo ciertas condiciones que no coinciden ni pueden coincidir con las condiciones que hicieron posible su construcción inicial.

Algunos rasgos de *la organización matemática escolar* son tan universales y parecen tan arraigados que permiten afirmar sin ningún género de dudas que las transformaciones de las obras matemáticas que las han producido no son accidentales ni incluso particulares a la institución didáctica concreta en la que nos situemos.

El primer punto a señalar es que la *reconstrucción escolar de las matemáticas* responde a leyes independientes de las decisiones y de la voluntad de los actores de dicha institución. No tiene ningún sentido responsabilizar al profesor de matemáticas de proponer a sus alumnos únicamente problemas perfectamente enunciados, de no enseñar las reglas del pensamiento conjetural o de atomizar los tipos de problemas, si estos hechos son universales y se dan en todos los países, casi sin excepción.

En segundo lugar, hay que remarcar que esta *reconstrucción escolar de las matemáticas* es absolutamente *imprescindible*. De hecho, para que una obra matemática pueda ser estudiada en el seno de una institución didáctica, ésta deberá necesariamente sufrir transformaciones que la volverán apta para ser estudiada por los sujetos de dicha institución. Una de las razones de esta transformación estriba en que, en general, el tipo de cuestiones que están históricamente en el origen

Geometría afín, geometría métrica y su transposición didáctica

Consideremos el antiguo currículo de bachillerato (BUP) vigente desde principios de los setenta hasta finales de los noventa. En segundo curso, aparecían los contenidos "El plano afín. Introducción al espacio afín. Geometría afín plana" referentes al estudio de las relaciones entre puntos, rectas y planos, como por ejemplo el paralelismo entre dos rectas o planos, la intersección de dos rectas o de un plano y una recta, etc. Se dejaba para el siguiente curso (3º de BUP) todas las nociones de *geometría métrica,* es decir, aquellas que resultan de la introducción de la perpendicularidad entre rectas o vectores, la noción de producto escalar y la de distancia entre dos puntos.

Esta separación entre las nociones afines y métricas y, sobre todo, la prioridad otorgada a lo afín proviene de una organización matemática que responde a la problemática de la *clasificación de las geometrías con base en los invariantes por un grupo de transformaciones*, organización culminada por el matemático Felix Klein en su discurso de admisión en la universidad de Erlangen en 1872, conocido como "el programa de Erlangen".

Dado que esta organización *no responde a ninguna cuestión planteable en la matemática escolar*, se fue rechazando paulatinamente, en la enseñanza, la separación entre nociones afines y métricas, hasta desembocar en la desaparición de la geometría de segundo curso para concentrarse toda en tercero.

de la obra matemática no son siempre las más adecuadas para reconstruirla en el contexto escolar moderno. El conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada se denomina *transposición didáctica* de la obra en cuestión.

Tomada en un sentido más amplio, la *transposición didáctica* de una obra incluye tanto un eslabón anterior como otro posterior a las transformaciones adaptativas citadas. La primera etapa de la transposición tiene lugar en la propia comunidad matemática: la organización de los elementos que constituyen una obra matemática depende, ya desde su origen, de las exigencias impuestas por la comunidad matemática para que dicha obra sea comunicable. Viene a continuación la etapa de la transposición que ya hemos comentado, en la que la obra matemática se transforma para adaptarse a una institución didáctica concreta. Pero la transposición didáctica no concluye aquí: existe todavía una tercera etapa que se desarrolla dentro del proceso didáctico mismo y que, con el tiempo, puede originar transformaciones importantes en la obra matemática en cuestión.

Los fenómenos de transposición didáctica se hacen más visibles precisamente cuando, por las razones que sean, se produce una transgresión de las leyes que los rigen. Un caso bastante frecuente se da cuando se pretende diseñar una parte del currículo escolar copiando, sin más, la organización matemática original o, lo que es más habitual, la última organización producida en el seno de la comunidad matemática. En el **Anexo C** se analiza algunas aportaciones de la teoría de la transposición didáctica a la clarificación del problema del currículo.

En el diseño del currículo es necesario tener en cuenta las leyes que rigen las transformaciones que sufren las obras matemáticas para ser enseñadas. El estudio de estas leyes constituye uno de los objetivos principales de la investigación en didáctica de las matemáticas. De hecho, ningún fenómeno didáctico relativo a una obra matemática concreta puede ser analizado si se ignoran las transformaciones que ha sufrido dicha obra desde su nacimiento hasta el momento en el que se le considera como "estudiable" en la escuela.

PEQUEÑOS ESTUDIOS MATEMÁTICOS

PEM 7. Variación relativa y variación absoluta

La cuestión inicial

Si un artículo de 2.000 ptas pasa a valer 2.350 ptas, diremos que su precio ha aumentado 350 ptas. Si un artículo de 200 ptas pasa a valer 550 ptas, también podremos decir que su precio ha aumentado 350 ptas. ¿Son estos aumentos equivalentes? En principio parece que no: el segundo artículo ha aumentado más del doble, mientras que el primero no ha aumentado ni la mitad. El precio de ambos artículos ha tenido un *crecimiento absoluto* idéntico de 350 ptas, pero su *crecimiento relativo* es distinto. ¿Qué quiere decir esto?

Problema 1

¿Cuánto aumenta el precio de un artículo de 2.000 ptas si sube un 13%? ¿Y un artículo de 200 ptas? ¿Cuál es el crecimiento absoluto de cada uno?
Si un artículo de 2.000 ptas pasa a valer 2.350 ptas, ¿qué tanto por ciento ha aumentado (cuál ha sido el crecimiento relativo de su precio)? ¿Y en el caso de un artículo de 200 ptas que pasa a valer 550 ptas?
¿Cuánto disminuimos el precio de un artículo de 2.000 ptas si lo rebajamos un 5%? ¿Cuáles son, en este caso, las variaciones absolu-

tas y relativas de su precio? ¿Y en el caso de un artículo de 200 ptas?

Vías de estudio: una, de nivel 1.
Ayudas: [20] -> [83] -> [64]

Problema 2

Si el precio p de un artículo pasa a ser p', establecer la fórmula que da su variación absoluta Δp (que medimos en ptas) y la que da su variación relativa r% (indicada generalmente como un tanto por ciento).

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [98] -> [149]

PEM 8. ¿Cómo aumenta un precio, un beneficio, una superficie?

La cuestión inicial

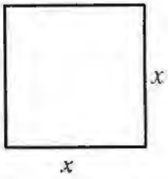
Partiremos de una situación muy generalizada en la que aparecen dos magnitudes X e Y relacionadas entre sí. Podemos pensar, por ejemplo, que X es el lado de un cuadrado e Y su superficie, que X es el precio de venta de un artículo e Y el beneficio que obtiene el vendedor por cada artículo vendido o que X es el precio de venta de un artículo e Y el número de artículos que se venden.

Fijémonos que, en el primer caso, cuando X aumenta, Y también aumenta: cuanto mayor es el lado de un cuadrado, mayor es su superficie. En el segundo caso, puede ser que el beneficio sobre un artículo crezca con el precio de éste (es lo más habitual), pero también puede ser que sea constante (que el comerciante gane una cantidad fija por artículo independientemente de su precio). En cambio, en el tercer caso, lo más probable es que, al subir el precio de venta de un artículo, el número de ventas disminuya, o sea, que a un aumento de X le corresponda una disminución de Y.

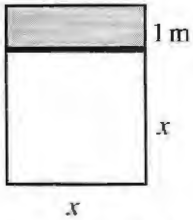
Al hablar de aumento o disminución, podemos referirnos (ver PEM7) ya sea a una *variación absoluta* —¿qué pasa cuando X aumenta 3 metros o 30 ptas? ¿Cuánto aumenta o disminuye Y?— o bien a una *variación relativa* de las variables: ¿qué pasa cuando X aumenta un 10%? ¿Qué tanto por ciento aumenta o disminuye Y?

Problema 1

Consideremos un cuadrado de lado x (en metros). ¿Si x aumenta un r%, ¿cuál será la variación relativa de su superficie? ¿Depende esta variación del valor inicial de x?



$S_{\text{cuadrado}} = x^2$



$S_{\text{rectángulo}} = x^2 + 1 \cdot x$

Hemos alargado el cuadrado anterior con un rectángulo de base x igual al lado del cuadrado y de altura 1 m. ¿Si la base x varía un r%, cuál será la variación relativa de la superficie? ¿Depende esta variación del valor inicial de x?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [62] -> [6] -> [118] -> [123] -> [14]

Problema 2

Un estudio de mercado ha establecido que, para cierto artículo de precio p (en ptas), la demanda, o número de artículos q que el consumidor está dispuesto a comprar, viene dada por la relación:

$$q = f(p) = \frac{100}{p-5} \text{ para } p > 5.$$

Calcular la variación relativa de la demanda cuando se aumenta en un 1% un precio de 6 ptas, 10 ptas y 45 ptas. ¿Para qué precio el aumento de un 1% producirá una disminución de la demanda de un 1,5%?
Se considera a veces que, para "pequeñas" variaciones del precio ($\Delta p/p \leqslant 1\%$), se obtiene un valor aproximado de la variación relativa de la demanda q con la fórmula:

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)} \times \frac{\Delta p}{p}$$

¿Qué se puede decir de la validez de esta fórmula para los casos calculados anteriormente?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [99] -> [145] -> [38] -> [32]

PEM 9. ¿Qué es la elasticidad?

La cuestión inicial

En los episodios de las unidades 1 y 2, vemos a profesores de matemáticas hablar de la noción de "elasticidad" y de su posible inclusión en el currículo de instrumentos matemáticos para abordarla. ¿De qué se trata? ¿Qué es la elasticidad? ¿Con qué nociones matemáticas está relacionada? ¿Qué tipos de problemas permite abordar?

Problema 1

¿Qué es la elasticidad y cómo se define en términos matemáticos?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [120] -> [72] -> [144] -> [101] -> [88]

Problema 2

Sea I un intervalo de R^{+*} y f una función de I en R^{+*} de clase C^2. Dada una variación relativa $r = \frac{x'-x}{x} > 0$ de x (con $x, x' \in I$) y la variación relativa $s = \frac{f(x')-f(x)}{f(x)}$ de $f(x)$ correspondiente, ¿qué relación hay entre $E = r/s$ y la derivada de f cuando r es "pequeña"?

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [105] -> [128] -> [107]

Problema 3

¿Para qué funciones la variación relativa s de f no depende del punto x elegido sino sólo de la variación relativa r de x?

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [11] -> [112] -> [124]

ANEXO C

Las fuentes del currículo y la transposición didáctica

En la teoría clásica del currículo los saberes matemáticos no son problemáticos. Al abordar el problema del currículo escolar de matemáticas desde la problemática del profesor como *enseñante* antes que como *matemático*, no se plantea la necesidad de cuestionar los contenidos que se deben enseñar, preguntándose por ejemplo cuáles son las posibles organizaciones de sus elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que los convierten en contenidos aptos para ser *estudiados en la escuela*. En la problemática curricular únicamente se cuestiona, por ejemplo, si las funciones exponenciales han de ser estudiadas o no en la E.S.O., pero no se plantea qué elementos componen —o podrían componer— esta obrita matemática. La tendencia habitual es considerar que las adaptaciones escolares de una obra matemática son *imitaciones* más o menos fieles de ésta y, por lo tanto, no se toman en consideración los complejos procesos de *transposición didáctica*.

Al dejar de lado la problemática específicamente matemática, la teoría del currículo se centra principalmente en los problemas referentes a la *secuenciación, temporalización y presentación de* unos contenidos matemáticos *supuestamente transparentes y predeterminados*. Dado que estas cuestiones no pueden separarse de las *características psíquicas y socioculturales de los alumnos* ni del *contexto social, cultural y político* del país, resulta muy difícil establecer una frontera clara entre la teoría del currículo y otros ámbitos del saber como la psicología o la sociología de la educación (Gimeno y Pérez 1983, p. 190).

Desde esta perspectiva no es de extrañar que hayan surgido multitud de definiciones distintas del concepto de *currículo* que van desde el currículo como un *programa estructurado de contenidos concretos* de una disciplina, hasta el currículo como el ambiguo "conjunto de toda la experiencia que tiene el niño bajo la tutela de la escuela" (*op. cit.*, p. 191). Tampoco es extraño que todas estas formas de entender el currículo sean relativamente ajenas al *proceso de estudio* de cada una de las disciplinas escolares y, en particular, al *proceso de estudio de las matemáticas*. Por su parte, los autores de la propuesta curricular que fundamenta la Reforma Educativa en España entienden el currículo como un proyecto que proporciona informaciones concretas sobre *qué enseñar, cuándo enseñar, cómo enseñar y qué, cómo y cuándo evaluar* (Coll, 1986, pp. 14-15).

Así, en el marco de la citada reforma, el primero de los problemas que habría que afrontar en el proceso de elaboración de un Proyecto Curricular tiene que ver con lo que se denominan sus "fuentes". ¿De dónde —de qué fuentes— extraer los criterios para decidir los objetivos y los contenidos de la educación escolar? ¿Con qué criterios decidir cuál es la mejor manera —la secuencia y el ritmo más adecuados— para presentar a los alumnos unos contenidos determinados? ¿De dónde obtener los criterios de evaluación y los dispositivos más adecuados para realizarla?

En este punto se propugna la necesidad de *integrar* las aportaciones del *análisis psicológico*, del *análisis disciplinar*, del *análisis sociológico* y del *análisis pedagógico*, enfatizando el papel de la fuente psicológica y, en relación con ésta, el de la fuente pedagógica. Se dejan en un segundo término la *fuente epistemológica* propia del análisis disciplinar y la *fuente sociológica* (*op. cit.*, pp. 16-21).

Pero, ¿qué significa esta *integración* de las aportaciones de las diferentes fuentes del currículo? ¿Cómo yuxtaponer criterios de diferente naturaleza, provenientes de diferentes disciplinas? ¿Cuál de dichas disciplinas tomará a su cargo la explicación del funcionamiento de la parte irreductiblemente matemática de la enseñanza de las matemáticas? Y, en consecuencia, ¿a cuál de las fuentes citadas habrá que recurrir para abordar la componente matemática del problema de la elaboración del currículo? Son éstas algunas de las preguntas que, por el momento, quedan sin ninguna respuesta convincente.

En el contexto de las cuatro fuentes citadas, las últimas preguntas apuntan forzosamente a la denominada "fuente epistemológica". Pero, de nuevo, surge otra pregunta: ¿cómo hay que entender en este contexto el "análisis disciplinar" del que emana la fuente epistemológica del currículo?

La cuestión ha sido formulada por Moreira y Novak en los siguientes términos: "¿Cómo puede organizarse mejor la materia de enseñanza a fin de facilitar el aprendizaje significativo de los alumnos?" Su respuesta pone de manifiesto que para dichos autores el análisis disciplinar consiste únicamente en investigar "secuencias y estructuras jerárquicas alternativas" de la materia de enseñanza, la cual se concibe como el "conjunto de conceptos que son construidos por especialistas creativos" (Moreira y Novak, 1988, p. 10). No caben pues otras reconstrucciones o reorganizaciones que las que vienen dadas por las diferentes *secuencias alternativas* de los elementos que constituyen la obra matemática original. No se concibe que, en la adaptación escolar de una obra matemática, se produzca una auténtica reconstrucción de la misma que pueda afectar no sólo a la secuenciación y temporalización de sus componentes (tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías), sino también a la naturaleza misma de dichas componentes, a su estructura interna y a sus interrelaciones.

Esta postura, propia de lo que hemos denominado el "punto de vista clásico" en didáctica de las matemáticas (ver **Anexo A**) ignora la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación a las instituciones didácticas, suponiendo implícitamente que dicha adaptación sólo puede consistir en una *imitación* más o menos fiel de las obras matemáticas tal y como fueron producidas. Las variaciones posibles se refieren, de nuevo, a las diferentes maneras de *seleccionar, organizar* y *presentar* unos elementos de la obra matemática original previamente definidos y, por tanto, tienen un carácter más psicopedagógico que genuinamente matemático.

Se observa así cómo se reproduce en ciertos discursos curriculares un fenómeno que puede ser considerado "normal" dentro del sistema de enseñanza de las matemáticas en el que, como ha mostrado la teoría de la transposición didáctica, no sólo no es posible reconocer la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación escolar, sino que ni siquiera puede plantearse la cuestión. De hecho, la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación didáctica —distancia que, por cierto, no es constante porque, como hemos dicho, la transposición didáctica continúa en el seno de las instituciones didácticas— es el terrible secreto que la difusión de la teoría de la transposición didáctica pone en peligro. En efecto, dentro del sistema de enseñanza de las matemáticas es necesario que esta separación sea negada, puesto que para que la enseñanza impartida parezca legítima hay que afirmar con fuerza su adecuación con el proyecto social que la justifica. Las obras matemáticas enseñadas deben aparecer conforme a las propias obras matemáticas o, mejor, *la cuestión de la conformidad no debe plantearse dentro del sistema de enseñanza*. Se trata de una ficción de identidad o, cuando menos, de conformidad incuestionable. El profesor y la enseñanza misma deben su existencia a esta ficción y no pueden responder *a priori* más que resistiéndose a aceptar el proceso de transposición didáctica (Chevallard, 1991, pp. 15-16).

La constatación de dicha distancia entre las obras matemáticas y su adaptación didáctica destruye la ilusión de transparencia de la *organización matemática escolar* y permite su cuestionamiento. Es, de hecho, una de las puertas de entrada del *saber matemático* como objeto de estudio propio de la didáctica. Recordemos que fue precisamente esta inclusión del saber matemático entre los objetos de estudio de la didáctica uno de los factores que provocaron la ampliación radical de la problemática didáctica y la consiguiente emergencia de la didáctica fundamental. (Ver Anexo A.)

La cuestión que plantearemos aquí es la siguiente: ¿qué puede aportar a la clarificación del problema del currículo de matemáticas la constatación de los fenómenos de transposición didáctica? Y, más en general, ¿cómo se transforma el problema de la elaboración del currículo cuando se aborda desde el interior de la didáctica de las matemáticas?

Ante todo, hay que decir que, una vez constatados los complejos fenómenos de transposición didáctica, el intento de resolver el problema del currículo mediante la "integración" de las aportaciones de las diferentes fuentes (psicológica, epistemológica o disciplinar, sociológica y pedagógica) aparece como un enfoque ingenuo y, en todo caso, externo a la propia didáctica.

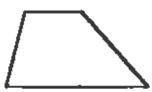
Hemos visto que la elaboración del currículo de matemáticas requiere *reconstruir las obras matemáticas* que fueron creadas para dar respuesta a las cuestiones que el proyecto social propone para ser estudiadas y que dicha reconstrucción es un trabajo de naturaleza esencialmente matemática. La didácrica permite completar esta tesis en los siguientes puntos:

(a) Dado que existe una *reconstrucción escolar de las obras matemáticas* cuyas características hemos descrito anteriormente, no parece razonable plantearse la elaboración del currículo de matemáticas sin tener en cuenta la naturaleza de dicha reconstrucción y los fenómenos didácticos asociados. No se trata de "respetar" la reconstrucción escolar como si fuera inamovible, pero es preciso conocer los mecanismos que rigen dicha reconstrucción para controlar los efectos que ésta tendrá sobre el desarrollo o aplicación del currículo. Sólo así podremos evitar que el proyecto curricular sufra deformaciones que lo hagan irreconocible en la práctica docente.

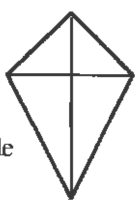
Así, por ejemplo, supongamos que se diseña un currículo de matemáticas que contenga entre sus objetivos al siguiente: "Utilizar correctamente aparatos de dibujo y medida (regla, transportador, escuadra, compás, ...) para hacer construcciones planas". En este caso, si los autores del proyecto curricular no han tenido en cuenta la tendencia de la organización matemática escolar a atomizar los campos de problemas, es muy probable que dicho objetivo degenere, en la práctica docente, en la enseñanza de técnicas de construcción no integradas en el estudio de ningún tipo de problemas. Así, por ejemplo, es fácil encontrar libros de texto en los que cada una de las construcciones básicas con regla y compás (mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, recta paralela a una recta dada por un punto dado, etc.) se presenta como un objetivo último e independiente de los demás.

(b) Correlativamente a los fenómenos generales emergentes de la citada reconstrucción escolar, y en estrecha relación con ellos, se observa que en toda institución docente existen "modelos implícitos" de los diferentes ámbitos del saber matemático enseñado, es decir, maneras implícitas de considerar qué son y de qué se componen las distintas obras matemáticas del currículo. Así, por ejemplo, puede hablarse de la *reconstrucción escolar* de la *clasificación de los cuadriláteros*, de los *problemas de combinatoria* y hasta del *álgebra elemental*, entre otras muchas. Se trata de modelos implícitos, casi invisibles y, por tanto, incuestionados e incuestionables, cuya influencia en la elaboración y puesta en práctica de cualquier diseño curricular de matemáticas es innegable.

Consideremos por ejemplo el caso de la clasificación de los cuadriláteros que se basa hoy día en el *paralelismo de los lados* y en la igualdad o desigualdad de lados y ángulos. Estos criterios de caracterización conllevan a menudo que, para los alumnos, los cuadrados no sean considerados como rectángulos ni éstos como paralelogramos. Cualquier otra propuesta curricular relativa a la clasificación de los cuadriláteros como, por ejemplo, la que se fundamenta en el *tipo de simetría de las figuras*, debería diseñarse teniendo muy en cuenta los aspectos en los que estaría conforme y aquellos otros en los que contradiría a la reconstrucción escolar habitual. Así, en un proyecto curricular en el que los cuadriláteros se clasificaran según su tipo de simetría, habría que enfatizar de una manera muy especial las justificaciones por las cuales los "trapecios no isósceles" desaparecerían de la clasificación mientras que, por contra, aparecería una nueva clase de cuadriláteros que ni siquiera tienen nombre en la actual clasificación escolar: los "romboides" (según la terminología, hoy en desuso, de Rey Pastor) en forma de cometas con simetría bilateral.



Trapecio no isósceles



Romboide

Resulta, en resumen, que *la necesaria reconstrucción de las obras matemáticas para elaborar el currículo no se hace sobre una tabla rasa:* existe siempre una reconstrucción escolar de las obras matemáticas previa a cualquier nueva reconstrucción, salvo en los casos históricamente puntuales en que una obra entra en la escuela por primera vez.

Todo lo dicho hasta aquí hace referencia al proceso que empieza en el momento que existe un proyecto social de enseñanza de las matemáticas según el cual se tienen que estudiar ciertas *cuestiones* y abordar ciertas *tareas problemáticas*. A partir de aquí hay que elegir las obras matemáticas que respondan más adecuadamente a dichas cuestiones, reconstruir dichas obras para adaptarlas a las instituciones docentes y todo lo demás. Pero la constitución misma del citado proyecto social no ha sido abordada: ¿cómo se eligen y cómo podrían elegirse, en cada sociedad y en cada periodo histórico, las cuestiones que deben ser estudiadas por todos los ciudadanos? En particular, ¿cómo se eligen las cuestiones matemáticas que prefiguran en cierta manera el currículo de matemáticas?

Se trata de preguntas muy difíciles que, en cierta forma, sobrepasan el ámbito en el que nos situamos: el de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. ¿Significa esto que la didáctica no tiene nada que decir respecto a si es o no pertinente que el currículo obligatorio aborde determinadas cuestiones como la conmensurabilidad de magnitudes, el cambio de posición y tamaño de las figuras o la constructibilidad con regla y compás? ¿Querrá esto decir que la didáctica de las matemáticas no tiene ningún papel en la constitución misma del proyecto social de enseñanza de las matemáticas?

Dado que es imposible separar la formulación inicial de las cuestiones que la escuela propone para ser estudiadas del desarrollo detallado del currículo y que dicha formulación debe hacerse en los términos y con las nociones que la didáctica ha construido, queda claro que la didáctica de las matemáticas debe jugar un papel importante también en la constitución inicial del proyecto social de enseñanza.

Ahora bien, dicho lo anterior, no olvidemos que se trata de definir la instrucción mínima obligatoria que la sociedad impone, a la vez que imparte, a cada ciudadano. Sobre este punto, las decisiones últimas que se tomen son siempre, por definición, decisiones políticas, fruto de un acuerdo social, y no competen directamente a ninguna disciplina científica como tal. De la misma manera que ni la física, ni la sociología, ni la biología, ni la informática como disciplinas científicas no pueden cargar con la responsabilidad última de decidir respecto a la utilización social de los objetos que ellas construyen.

En este sentido es muy importante no ceder a la tentación "cientifista" en virtud de la cual el debate social sería innecesario desde el momento en que determinadas ciencias tomarían a su cargo la responsabilidad de la constitución del proyecto social de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias

CHEVALLARD, Y. (1991): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2ª edición.

COLL, C. (1986): *Marc curricular per a l'ensenyament obligatori*, Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, Barcelona.

GIMENO, J. y PÉREZ, A. (1983): *La enseñanza: su teoría y su práctica*, Akal, Madrid.

MOREIRA, M. A. y NOVAK, J. D. (1988): "Investigación en enseñanza de las ciencias en la Universidad de Cornell: esquemas teóricos, cuestiones centrales y abordes metodológicos", *Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), 3-18.

UNIDAD 3

MATEMÁTICAS, ALUMNOS Y PROFESORES

LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

EPISODIO 3

En clase de matemáticas

Asisto a una clase de Marta con sus alumnos de 2º de ESO.

Los alumnos se acaban de sentar. Marta pide que se haga silencio.

Marta.- Federico, ¿qué te ocurre?

Federico.- Me he dejado la calculadora en casa...

M.- Bueno, no pasa nada. Ahora, por favor, siéntate y escucha. Bien. Hoy vamos a abordar un tipo de problemas totalmente nuevo... Nuevo y muy importante. Pero veréis que no es nada difícil.

Los alumnos se agitan y murmuran... Marta sigue:

M.- Partiremos de un tipo de problemas que ya hemos estudiado: los impuestos sobre ventas.

Un alumno.- ¡El IVA!

M.- Eso mismo, el IVA. Os recuerdo que un ejemplo típico sería el de un comerciante que vende un artículo cuyo precio neto es, pongamos, 500 ptas. Su precio de venta...

Otro alumno (en voz baja).- El precio bruto...

M.- ¿Qué has dicho?

El alumno.- El precio bruto.

M.- Eso es. Lo que ya sabéis es que hay que añadir el IVA al precio neto. Supongamos que el IVA es un 6%. ¿El precio bruto será entonces...?

Un alumno.- 500 más el 6% de 500.
M.- Muy bien. 500 más el 6% de 500. ¿Cuánto es eso?
Varios alumnos.- 530...
M.- Eso es. Hasta aquí todo está claro. Consideremos ahora otro problema.
Un alumno.- Marta, ¿habrá que estudiarlo?

Risas burlonas de algunos alumnos.

M.- Sí. Lo tendréis que estudiar y guardar en un rincón de la memoria. ¡Pero dejadme que lo plantee primero!

Los alumnos prestan atención.

M.- Imaginad un comerciante que cuenta sus ingresos brutos al final de la semana y ve que ascienden a 507.263 ptas.

Marta escribe en la pizarra

Ingresos brutos: 507.263 ptas.

M.- A la hora de hacer la contabilidad, necesitará determinar los ingresos netos y especificar los impuestos que tiene que pagar a Hacienda.

Marta escribe en la pizarra

Impuestos: ?
Ingresos netos: ?

Un alumno.- Tiene que pagar el 6% de 507.263 ptas.
M.- ¡Ah! ¿Estáis todos de acuerdo?

Los alumnos no contestan. Parecen dudar. Marta insiste.

M.- Si queréis, volvamos al caso del artículo que vale 530 ptas. Sabemos que el precio neto es 500 ptas y que el comerciante debe pagar 30 ptas de impuestos.

Los alumnos asienten.

M.- Bueno. Si, como ha dicho vuestro compañero, el comerciante determinase el IVA de este artículo calculando el 6% de 530, ¿cuánto sería? ¡Cristina, míralo con la calculadora! ¿Cuánto es el 6% de 530?
Cristina.- Sale... 31,8.
M.- De acuerdo. O sea que el comerciante...

Algunos alumnos.- ¡Pagaría de más de la cuenta!
Otro alumno.- Pero no mucho más. Sólo 1,8 ptas.
M.- Sí, en este caso no es mucho porque el artículo sólo cuesta 530 ptas. Pero si empiezas a contar todos los artículos que vende durante la semana... A ver, cojamos lo que he dicho antes... *(Se gira y mira la pizarra.)* El 6% de 507.263, ¿cuánto es?... ¿Eduardo?
Eduardo.- Un momento, un momento. Es... 30.435,68.
M.- Bueno, digamos que 30.436. *(Lo escribe en la pizarra.)*
Un alumno.- ¡Pero no podemos calcular el IVA, porque no tenemos los ingresos netos!
M.- Ése es el problema...

Silencio en el aula. Marta espera algunos segundos.

M.- Bueno, volvamos al principio. En realidad, yo he calculado el número de partida, los ingresos brutos, igual que hicimos antes con las 530 ptas. He partido de...

Escribe en la pizarra

478.550 ptas.

M.- Y he añadido el 6%. ¡Vamos a comprobarlo! ¡Federico! No, tú no, que dejaste la calculadora en casa. *(Risas de los alumnos.)* Bueno, pues... ¡Manuel, hazlo tú!

Manuel se activa con la calculadora. Los demás alumnos lo miran y esperan su respuesta.

Manuel.- ¡Es verdad, da exactamente el número de antes!
M.- Muy bien. Pues ahora vamos a calcular los impuestos que tiene que pagar el comerciante. Basta con restar los ingresos netos de los brutos. ¿Cuánto sale?

Varios alumnos contestan a la vez: 28.713 ptas. Marta lo escribe en la pizarra.

M.- Y si hubiéramos tomado el 6% de los ingresos brutos, al comerciante le hubiera tocado pagar... *(Mira la pizarra.)* 30.436 ptas. Esto nos da una diferencia de... ¿Quién me lo puede decir?
Un alumno.- 1.743 ptas.
M.- Muy bien. Nuestro comerciante hubiera pagado, pues, 1.743 pesetas de más a Hacienda. ¿Conclusión?
Un alumno.- ¡Es tonto!

Risas de los alumnos. Marta lo ignora y se dirige a Cristina.

M.- ¿A ti qué te parece?

Cristina.- Que ha pagado más de lo que le correspondía.

M.- Sí, pero, ¿qué pasa con nuestro problema? No olvidéis que queríamos saber cómo calcular los impuestos a partir de los ingresos brutos.

Cristina.- Pues, entonces, está claro que no hay que tomar el 6% de los ingresos brutos para hallar el IVA.

M.- Exactamente. Porque nos da un número más grande que lo que hay que pagar.

Un alumno levanta la mano.

M.- José, ¿quieres decir algo?

José.- Sí. El comerciante puede, cada vez que calcula el precio de venta de un artículo, escribir aparte el IVA que ha añadido. Así, después sólo tiene que sumar todos los IVA y ya está. Si cuando vende un artículo se apunta el IVA, al final sabrá cuánto tiene que pagar a Hacienda sin tener que romperse la cabeza.

M.- ¡Hombre! ¡Pero este método sería muy pesado! ¿Te imaginas el tiempo que perdería? ¡Estaría más rato anotando y calculando que atendiendo a sus clientes! *(Risas de algunos alumnos.)* Bueno, resumamos. A fin de cuentas, el problema que nos interesa no estaba ahí... Voy a tomar otro ejemplo. Un comerciante ha ganado en total... *(mira sus apuntes)*... 8.745 ptas. Ése es el precio del artículo que ha vendido. Y ahora quiere saber cuál era el precio neto al que le añadió el 6% de IVA, y cuánto es este 6%, es decir cuánto debe a Hacienda.

Un alumno.- ¡Será menos que el 6% de 8.745!

M.- Eso es lo que acabamos de ver... ¿Pero cuánto menos? Lo escribiré en la pizarra para que lo tengáis a la vista. Lo que queremos es hallar el precio neto, ¿no? Como no lo conocemos, lo llamaremos p. Lo que voy a escribir es que si se añade a p el 6% de p, se obtiene 8.745.

Escribe y encuadra:

$$\boxed{p + 6\%p = 8.745}$$

M.- El problema es hallar el valor de p para el que se da esta igualdad. ¿Cómo lo podríamos hacer?

Un alumno.- Marta, lo que nosotros sabemos hacer es calcular P cuando nos dan p.

M.- Sí. Sabemos calcular el precio bruto P a partir del precio neto p. Os recordaré la fórmula. *(Escribe en la pizarra)*:

$$P = p + 6\%p = p + 0{,}06\,p.$$

La novedad es que ahora no conocemos p y lo queremos calcular para un P dado. Por ejemplo, cuando P vale 8.745 ptas.

El mismo alumno.- Lo podemos hacer por tanteo.

M.- ¿Qué quieres decir?

El alumno.- Sabemos que p es menor que 8.745. Y ahora probamos.

Otro alumno.- ¡Pero tendrás que hacer la tira de pruebas!

El alumno.- Si tomo p = 8.000, me da... *(coge la calculadora)* 8.480, que es mayor que 8.000.

El otro alumno.- ¿Y qué? ¡Ésa no es la solución!

M.- Bueno, hagámoslo todos como dice Juan.

A algunos alumnos no parece entusiasmarles la idea.

M.- Venga, acabamos de ver que 8.000 es demasiado pequeño. Vale. ¿Qué más podemos probar?

Juan.- 8.400.

M.- ¿8.400 qué da para P ?

Cristina.- Da 8.904.

M.- O sea que...

Jorge.- ¡Es demasiado grande!

M.- Muy bien. Por lo tanto p es mayor que 8.000 y menor que 8.400. ¿Qué más podemos probar?

Cristina.- 8.200.

M.- ¿Lo has hecho?

Cristina.- No.

Una alumna.- Sale 8.692. Demasiado pequeño.

M.- Bueno. Pues está entre 8.200 y 8.400.

Juan.- Tomemos 8.300.

M.- Como queráis, 8.300. ¿Cuánto da para p?

Cristina.- 8.798.

M.- Más que 8.745.

Cristina.- Pues será entre 8.200 y 8.300.

Juan.- ¡Es 8.250!

Cristina.- 8.250... ¡Sí, funciona! Sale 8.745.

Juan.- ¡Bingo!

M.- Vamos a ver. Decís que p vale 8.250. O sea, que 8.250 más el 6% de 8.250 es igual a 8.745. Ahora lo comprobáis todos...

Espera unos instantes. Algunos alumnos: ¡Es verdad! *Marta sigue.*

M.- Por lo tanto el método de Juan funciona...
Una alumna.- ¡Marta, Marta, se puede hacer de otra manera!
M.- A ver, Ana, ¿qué nos propones?
Ana.- Pues... También habíamos visto la fórmula $P = 1{,}06p$.
M.- Sí, es verdad. Habíamos visto que... *(Escribe)*

$$P = p + 0{,}06p = 1{,}06p$$

¿Y bien?
Ana.- Pues aquí tenemos que $1{,}06p = 8.745$.
M.- Espera. Lo voy a escribir. *(Escribe.)*

$$1{,}06p = 8.745.$$

M.- ¿Entonces?
Ana.- Ahora podemos dividir. Tenemos p igual a 8.745 dividido entre 1,06.
M.- ¿Lo has hecho?
Ana.- Sí, me sale 8.250. Y también funciona con los 507.263 de antes. Sale lo que decías: 478.550.
M.- Muy bien. ¿Habéis entendido lo que dice Ana? Dice que $p + 0{,}06p$ es igual a $1{,}06p$. *(Señala la igualdad escrita en la pizarra.)* Esto ya lo vimos y utilizamos varias veces. ¿Os acordáis? Por lo tanto, el número p que buscamos es tal que $1{,}06p = 8.745$. En el caso general tendríamos $1{,}06p = P$. Si ahora dividimos por 1,06, entonces

$$p = \frac{P}{1{,}06}.$$

Un alumno.- ¡Qué fácil!
Cristina.- Ya tenemos otra fórmula.
M.- Sí, es otra fórmula. Al principio sólo sabíamos calcular P a partir de p. Ahora también sabemos calcular p a partir de P. Tenemos $p = \frac{P}{1{,}06}$. ¿Todo el mundo está de acuerdo?

Los alumnos asienten con la cabeza.

M.- Bueno. Ahora vamos a utilizar la fórmula. Juan, elige un número p, no nos lo digas y calcula P con tu calculadora. Luego nos dices qué resultado te sale, y con ese P nosotros buscaremos el valor de p. ¿De acuerdo?

Juan asiente pero no parece muy contento. Teclea su calculadora.

M.- ¿Y bien? ¿Qué nos propones?
Juan.- Pues... 166.738.

Marta escribe en la pizarra:

$$P = 166.738.$$

M.- Adelante. Ahora os toca a vosotros hallar *p*.

Marta espera unos minutos y retoma el hilo.

M.- Vamos a ver... Pedro, ¿qué has hallado?
P.- 157.300.

Algunos alumnos asienten con la cabeza.

M.- ¿Todo el mundo está de acuerdo?

Aprobación general.

Juan.- Pero falta calcular los impuestos.
Jorge.- ¡Pues calculas la resta!
M.- Un momento, un momento... Juan tiene razón. Recordemos que al principio queríamos saber cuánto se tenía que pagar a Hacienda.
Cristina.- Basta con calcular el 6% de *p*.
Ana.- Pues entonces tendremos otra fórmula más: multiplicar $\frac{P}{1{,}06}$ por 0,6.
M.- Por 0,06.
Ana.- Uy sí... Por 0,06.
M.- Vale. ¿Y cómo podemos escribir esta nueva fórmula?

Escribe en la pizarra:

$$\mathrm{I} =$$

Unos alumnos.- 0,06 por $\frac{P}{1{,}06}$.
M.- Bien.

Sigue escribiendo:

$$\boxed{\mathrm{I} = 0{,}06 \times \frac{P}{1{,}06}}$$

M.- Bueno. Pues con todo esto tendríamos que poder contestar al problema del comerciante cuyos ingresos brutos eran de 507.263 ptas. ¿Cuántos impuestos tendrá que pagar?

Un alumno.- ¡Pero si ya lo sabemos!

M.- Sí, es verdad. Pero ahora quiero que lo calculéis utilizando esta fórmula.

Los alumnos empiezan a teclear sus calculadoras. Hay cierto ajetreo en el aula.

M.- ¿Y bien?

Unos alumnos.- Sale lo mismo.

M.- ¿Es decir?

Los alumnos.- 28.713 ptas.

M.- Eso es. Muy bien. *(Mira su reloj.)* Vamos a ver... ¿quién quiere redactar esto para el próximo día? ¿Tú, Federico? Como no tenías la calculadora...

Federico (un tanto molesto).- Esta tarde tengo reunión con el tutor. O sea que no puedo hacerlo hoy...

M.- Bueno. ¿Pues, quién se encarga de ello?

Ana, Cristina y José levantan la mano.

M.- Venga, ¡tú mismo José! Me lo entregas esta tarde a última hora. Y ahora hay que terminar... El próximo día será...

Algunos alumnos.- El jueves.

M.- Muy bien. Pasado mañana. Pues para entonces os pongo el siguiente problema. Un poco de atención, por favor, ¡aún no hemos acabado! Escuchad atentamente. En los Estados Unidos, cuando se va al restaurante, hay que dejar un 16% de propina para el servicio. Pero cuidado: no se trata del 16% del precio bruto, o sea del total de la cuenta, sino del precio neto. *(Escribe en la pizarra.)*

P : total de la cuenta (con IVA)
p : total neto (sin IVA)
Propina: 16% de p

Por lo tanto, para saber cuánto hay que pagar incluyendo la propina, hay que añadir a P el 16% de p. Para el próximo día, quiero que escribáis una fórmula para calcular la propina en función del total de la cuenta P. A la propina no la podemos llamar p... Así que la llamaremos b, b de bote.. ¿Vale? ¿Me habéis entendido? *(Escribe en la pizarra.)*

$$b = ?$$

Los alumnos acaban de escribir el enunciado. Marta se pasea por las filas para comprobar lo que los alumnos anotan en sus cuadernos.

M.- Bueno. Los que no lo hayan entendido ya preguntarán a los demás. Eso es todo...

La clase ha terminado.

DIÁLOGOS 3

Técnicas de estudio y contrato didáctico

P.- Hola Estudiante, ¿cómo va todo?

E.- Bien, gracias. Por cierto, ¿has recibido el episodio que te envié?

P.- Sí, lo recibí hace poco. Me trajo muchos recuerdos.

E.- ¿Conoces a Marta?

P.- Claro que sí. Marta llegó al Instituto un año después de que se inaugurara. Así que elegiste este trozo... Me parece bien... Supongo que será por algún motivo, ¿no?

E.- No creas. En realidad me cuesta hacerme una idea clara del episodio. Cada vez que lo vuelvo a leer, me queda una impresión agradable, pero...

P.- ¿Qué sensación te produce?

E.- ¿La clase de Marta? No sé... Lo que hace me gusta mucho. ¡Me gustaría ser capaz de enseñar tan bien como ella!

P.- Ya veo. Te parece que enseña bien. ¿Podrías especificar en qué consiste para ti "enseñar bien"?

E.- No sé. Marta consigue que la clase sea muy dinámica, que los alumnos estén activos y participen mucho. Además sabe dirigirlos con mucha seguridad... No sé... Me gusta su estilo docente.

P.- Ya. Pero diciendo eso no estás siendo demasiado preciso. Habría que intentar ser un poco más riguroso y ver qué es eso que llamas "estilo docente". Y también me gustaría saber qué te gusta de ese estilo docente.

E.- Bueno... Por ejemplo, me parece evidente que los alumnos de Marta participan en la construcción del saber. Piensan los problemas por sí mismos...

P.- Bajo la dirección de la profesora.

E.- Sí, claro, bajo la dirección de Marta, y con su ayuda. Pero nunca les da la respuesta de entrada. Plantea una cuestión y guía el trabajo de los alumnos para que éstos puedan llegar a formular una respuesta válida.

P.- O sea, los alumnos intentan resolver los problemas con la ayuda de Marta. ¿Ése es el "estilo docente" que te gusta?

E.- Sí. ¡Pero presiento que no estás del todo de acuerdo conmigo! ¡Para variar! ¿No es verdad?

P.- ¡Empezamos a conocernos bien! Tienes razón. Aunque apuesto a que sabes en qué puntos tengo más reticencias.

E.- ¿No crees que Marta sea una buena profesora?

P.- Claro que sí, ahí no está la cuestión. Escúchame un momento y verás...

E.- Adelante.

P.- Supón que Marta no está ante alumnos de 2º de ESO sino ante estudiantes de, digamos, 2º de universidad. Y supón que, como en el episodio, los quiere introducir al estudio de un nuevo tipo de problemas.

E.- ¿Un nuevo tipo de problemas?

P.- La verdad es que aún no hemos explicado lo que Marta está intentando hacer realmente. En el episodio que has escogido, pretende empezar el estudio de las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Y su idea es partir de una situación matemática en la que se busca un número que cumpla ciertas condiciones.

E.- De eso ya me había dado cuenta.

P.- Muy bien. Pero ahí no acaba la cosa. En el caso estudiado en clase, el de la ecuación $p + 0{,}06p = 8.745$, los alumnos se encuentran frente a un problema totalmente nuevo para ellos.

E.- Ya veo, ya veo. Aunque tengan los medios para resolverlo, es la primera vez que se encuentran con ese tipo de situación.

P.- Exacto. Pues ahora supón que Marta está en la universidad frente a 80 alumnos de segundo de carrera, y que también pretende introducirlos al estudio de un nuevo tipo de problemas.

E.- ¿Y bien?

P.- Fíjate. Imagina por un momento que Marta plantea el estudio del problema con el mismo "estilo docente" que le atribuyes. En seguida tendríamos que ver a los estudiantes universitarios proponer maneras de abordar el problema, sugerir posibles vías de resolución...

E.- Sí, como en la clase de 2º de ESO.

P.- Pues volvamos ahora al "estilo docente". ¿No te cuesta imaginar a Marta trabajando con estudiantes de 2º de carrera igual que con los alumnos del instituto?

E.- Sí, sí que me cuesta. Porque los estudiantes de universidad no se comportan igual que los alumnos más jóvenes, no intervienen espontáneamente para hacer propuestas. ¡Y mucho menos si se trata de proponer soluciones posiblemente erróneas!

P.- Eso es. Lo que hemos visto en la clase de Marta no se da en la universidad. ¿Estás de acuerdo?

E.- Sí, totalmente. Claro que hay que considerar la diferencia de edad.

P.- ¿Tú crees que es eso? ¿Crees que los estudiantes de 18 ó 20 años no pueden estudiar juntos bajo la dirección de un profesor porque son "demasiado mayores"? ¡Bien que lo hacen los investigadores!

E.- No sólo es la edad... La universidad no es lo mismo que el instituto. En la universidad los grupos de alumnos son mucho más numerosos y se espera que sea el profesor el que presente las soluciones de los problemas. En el instituto se trata de empezar desde cero, que no es lo mismo.

P.- Lo que quieres decir es que en la universidad un estudiante se sorprendería si el profesor lo solicitara para resolver un problema nuevo que acaba de presentar y viera que otro estudiante interviene para proponer una vía de ataque, etc.

E.- Sí. Creo que esto de pensar todos juntos un problema en clase y en voz alta no se acostumbra a hacer.

P.- Muy bien. Entonces podemos suponer que si Marta se encontrara ante alumnos de 2º de carrera, seguramente dejaría de hacer lo que hace en el instituto. No porque su estilo docente haya cambiado, sino porque el que hemos visto aplicado a los alumnos de ESO no se puede —o no se *suele*— utilizar en la universidad.

E.- A lo mejor lo podría probar... ¡Pero casi seguro que los estudiantes no le seguirían el juego!

P.- Yo iría incluso más allá. Creo que se encontraría con una franca incomprensión por su parte. Los estudiantes no entenderían a qué juego se les hace jugar, qué se espera de ellos, qué pueden hacer y qué no, etc.

E.- Sin duda. Pero si, cuando un profesor imparte una clase en la universidad, un estudiante interviniera de repente para decir que no está de acuerdo o para proponer otra manera de resolver el problema, el profesor también se extrañaría mucho. Si además todos se ponen a hacer propuestas, no podría dar la clase.

P.- Estoy totalmente de acuerdo. ¡Y no creas que critico a los estudiantes! Ellos no hacen más que seguir ciertas reglas de juego, lo que llamamos el "contrato didáctico". Estas reglas delimitan qué cosas se pueden hacer y cuáles están prohibidas. Si en la clase de Marta todos los alumnos se quedaran callados, no porque no saben contestar sino porque creen que no tienen que intervenir, entonces el juego didáctico no podría realizarse. Y lo mismo ocurre en la universidad, aunque ahí las reglas son distintas.

E.- En la universidad, los estudiantes vienen a... ¿Cómo se podría decir? Vienen a tomar lo que les trae el profesor y se lo llevan a casa para estudiarlo después. No se supone que tengan que estudiar con el profesor, como hacen los alumnos de Marta en clase.

P.- Eso mismo. E incluso podríamos refinar un poco tu análisis. Pero lo que te quería decir antes es que no existe el estilo docente *de* Marta. Hay *un* estilo docente que ella utiliza con sus alumnos de 2° de ESO, y que utiliza porque el contrato didáctico de dicha clase lo permite. En la universidad, con el contrato didáctico vigente hoy en día, no podría recurrir a este estilo docente.

E.- Vale. Pero también podríamos darle la vuelta a la situación y decir que Marta podría utilizar en su clase un estilo docente más tradicional, como el de la universidad.

P.- No estoy muy segura de que pudiera, auuque se lo propusiera firmemente.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues que, del mismo modo que no es posible que un profesor de universidad actúe como Marta en su clase, tampoco es posible, trabajar con alumnos de 2° de ESO del mismo modo que en la universidad. Se produciría lo que llamamos una "ruptura de contrato".

E.- Bueno, bueno. Pero, de todas formas, sí podemos decir que Marta domina el estilo docente con que trabaja. Podría hacer lo mismo mucho peor...

P.- Sí, eso sí. Marta tiene un claro dominio de ese estilo docente. Pero te voy a proponer un pequeño cambio de vocabulario. La palabra "estilo" parece gustarte. Es como si nos refiriéramos al estilo de un pintor. Yo te propongo una palabra más dura: preferiría que habláramos de "técnica", de *técnica docente* o de *técnica didáctica*

E.- Bueno, como quieras. ¡Pero esta técnica es mejor, para mí, que la de limitarse a dictar la lección a los estudiantes!

P.- ¡Un momento! ¡ Eso habría que demostrarlo! Porque pareces olvidar un aspecto muy importante: que el *rendimiento* de una técnica docente también depende de lo que los estudiantes sean capaces de hacer por sí mismos para estudiar. Y como su actuación también depende del contrato didáctico —que les lleva a hacer tal o cual cosa que ven como legítima, o incluso necesaria, y que, a su vez, les impide hacer tal otra cosa ya que ni siquiera pueden imaginarla—, pues bien, el rendimiento de una técnica docente dependerá también del contrato didáctico en el que se actúe.

E.- Ya veo... Pero, incluso así, creo que dominar la técnica de Marta sigue siendo más difícil que dominar la técnica de la clase magistral.

P.- Yo creo que hay que ser mucho más prudente con nuestras afirmaciones. A lo mejor dices esto porque crees saber impartir una clase magistral, y temes no saber conducir una clase como hace Marta...

E.- Quizá.

P.- Pues yo conozco algunos profesores de secundaria que confiesan no ser capaces de enseñar como lo hacían al principio de su carrera, hace 20 ó 25 años.

E.- ¿Y por qué?

P.- Pues seguramente porque, de hecho, la manera de actuar de hace 20 años se ha vuelto incompatible con los contratos didácticos actuales. Aunque también existen efectos inhibidores. Por ejemplo, cuando enseñas como Marta, te llega constantemente información acerca de los alumnos, lo que entienden y lo que no, lo que piensan, etc. En cambio, en la enseñanza que llamamos tradicional, el profesor dispone de mucha menos información. Y para aquél que ya no está acostumbrado a trabajar con un nivel bajo de información, psicológicamente puede ser muy duro volver a ello.

E.- Entiendo. De todas formas, estarás de acuerdo que, sea cual sea la técnica docente empleada, uno puede dominarla más o menos, ¿no te parece?

P.- Claro, claro. Esto pasa con todas las técnicas. Hemos dicho que Marta domina lo que hace. Pero no quiero que te dejes fascinar por ello hasta el punto de no ver los problemas didácticos que es necesario haber identificado y resuelto antes siquiera de poder utilizar la técnica.

E.- No veo lo que quieres decir...

P.- Me temo que debes estar pensando todavía en términos de "estilos de enseñanza". Lo que hay que entender es que la técnica que utiliza Marta funciona con cierto contenido matemático. Y lo que podemos afirmar es que su técnica funciona bien precisamente con ese contenido matemático.

E.- En realidad, tengo que confesarte que hay algo que me molesta un poco. ¿Por qué crees que eligió esta historia de precios netos y precios brutos?

P.- Ajá, te gusta la forma pero no el contenido. ¿Por eso decías que tenías una sensación ambivalente?

E.- Sí, algo así.

P.- ¡Veo que sigues con tus prejuicios!

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- No quería hablar de esto ahora, pero quizá sea mejor aclararlo enseguida. Supongo que hubieras preferido una actividad matemática alrededor de un "verdadero" problema de matemáticas, ¿no? ¡El precio neto y el precio bruto, por no hablar del IVA, enturbian el universo puro de los objetos matemáticos! ¿Me equivoco?

E.- No del todo, pero lo presentas de una manera tan exagerada...

P.- Bueno, bueno. No quiero volver sobre este tema. Vamos a ver, ¿cuál es el objetivo de la clase de Marta?

E.- Tú misma lo dijiste: iniciar a los alumnos a los problemas de ecuaciones de primer grado.

P.- Muy bien. Pero lo podemos precisar un poco más: se trata de introducir a los alumnos en un tipo muy amplio de problemas matemáticos en los que hay que hallar un número, la incógnita, a partir de una información dada sobre ese número. Si me quedo con esta definición, también incluiremos a los cálculos aritméticos de la escuela primaria. Por ejemplo, hallar el perímetro de un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 metros. O hallar el precio de un caramelo sabiendo que 8 caramelos valen 56 ptas. En estos problemas, o bien se parte de una fórmula explícita para hallar el número desconocido (como en el caso del perímetro: $p = 2(3 + 4)$), o bien se dispone de una técnica para determinarlo (como en el caso de los caramelos: $p = 56 : 8$).

E.- ¡Lo cual ya es, en cierto sentido, una ecuación!

P.- Sí, no cabe duda. Pero lo más importante de la teoría matemática de las ecuaciones, incluso en su versión más elemental, es que permite enfrentarse a situaciones en las que la incógnita viene definida de manera implícita.

E.- Ya veo. Y resolver la ecuación es explicitar su valor, como en el caso que estudian los alumnos de Marta.

P.- Eso mismo. Existe, por decirlo de alguna manera, una frontera entre la cultura de nuestra vida cotidiana y el saber hacer de los matemáticos. Permíteme que te dé un ejemplo muy parecido al de Marta.

E.- Venga.

P.- Supón que eres un comerciante y compras a tu proveedor un artículo que cuesta 2.800 ptas. Más tarde venderás este artículo a un precio P que te dejará cierto margen de beneficio: $P - 2.800$. Supón ahora que quieres que este margen represente un 80% del precio de venta. Con lo cual P debe ser tal que $P = 2.800 + 80\% P$. Si calcularas el margen sobre el precio inicial no habría ningún problema: a 2.800 le añadirías el 80% de 2.800, y P valdría ...

E.- 2.800 + 0,8 x 2.800 = 5.040.

P.- Sí. Pero la mayoría de la gente no concibe cómo se puede añadir a 2.800 el 80% de un precio P que aún no conoce. Te recuerdo que esto es precisamente lo que tu prima no sabía hacer (ver *Diálogos* 1) Y tuvo que consultárselo a un matemático —a ti—.

E.- Vale. Pero tengo algo que añadir.

P.- A ver.

E.- En el fondo, el objetivo de Marta es ayudar a sus alumnos a entrar en una obra matemática que podría denominarse la teoría de las ecuaciones, o algo así.

P.- En efecto.

E.- ¿Entonces, por qué no ir directamente al grano? ¿Por qué pasar por algo que, al fin y al cabo, no es más que una aplicación elemental de la teoría de las ecuaciones?

P.- Tu pregunta es pertinente. ¡Y absolutamente legítima! Es más, no pretendo que la elección de Marta sea la mejor. Para plantear correctamente el problema didáctico que debe resolver, Marta tiene que elegir un problema particular que cumpla cierto número de condiciones. Y lo único que podemos concluir es que su elección es más o menos óptima respecto a este conjunto de restricciones.

E.- La restricción principal debe ser que el problema elegido permita a los alumnos entrar en esa obra matemática que hemos llamado la teoría de las ecuaciones, ¿no?

P.- Sí. Claro que cuando utilizas la palabra "obra", debes recordar lo que dijimos el otro día: que uno no entra del todo en una obra hasta que ésta no aparece como una respuesta a ciertas cuestiones.

E.- ¡Pero entonces basta con explicar a los alumnos lo que decíamos antes! La teoría de las ecuaciones permite hallar, o por lo menos buscar, un número que no se conoce, pero sobre el que se tiene cierta información.

P.- Pero bueno, ¿te imaginas a ti mismo dando esta definición a alumnos de 2º de ESO? Lo que acabas de decir tan sucintamente podría ser la síntesis de un trabajo de iniciación al estudio de las ecuaciones. Pero dudo que pueda servir como punto de partida. Además hay otra dificultad...

E.- ¡Me lo suponía!

P.- No te preocupes, es muy simple. Podría darse el caso de que, al final de proceso, consiguiéramos tener alumnos capaces de resolver ecuaciones de primer grado, pero que no reconociesen que el cálculo del precio neto a partir del precio bruto consiste, desde un punto de vista matemático, en resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

E.- O sea, alumnos que no serían capaces de plantear ecuaciones.

P.- Y no sólo eso. También podemos pensar que una parte de la dificultad que supone el plantear una ecuación proviene del hecho de que el alumno no se imagina que la situación en la que se encuentra se pueda pensar matemáticamente en términos de ecuaciones. ¿Ves lo que quiero decir?

E.- Creo que sí... ¿Pero no temes que los alumnos de Marta, cuando empiecen a estudiar ecuaciones en un contexto puramente matemático, se olviden del punto de partida? Quiero decir que si más tarde tienen que calcular el precio de venta con un margen de beneficio dado, a lo mejor ya no se dan cuenta de que se trata de resolver un problema con una ecuación de primer grado.

P.- No es imposible que eso ocurra. Sobre todo si se considera que hay muchos otros factores didácticos en juego...

E.- ¿Como cuáles?

P.- Pues mira, puede ser que no se hable más en clase de precios netos y precios brutos. En este caso, el problema elegido por Marta como punto de partida no habrá funcionado más que como un andamio para la construcción de una obra matemática "pura", como tú dices. También se puede dar la situación inversa, como fue el caso en el Instituto Juan de Mairena. La enseñanza puede insistir mucho en una visión de las matemáticas como obra que permite entrar en muchas otras obras, de tal manera que el contrato didáctico diga a los alumnos: no conocéis las ecuaciones de primer grado si no sabéis pensar con esta herramienta matemática ciertos tipos de situaciones sociales —comerciales u otras—.

E.- Ya, pero esto es un problema curricular.

P.- Exactamente. Y también es verdad que el hacer hincapié sobre el acceso a obras ajenas a partir de las matemáticas y, a la inversa, el estudio de obras matemáticas a partir de cuestiones que surgen en otros ámbitos puede ser más o menos fuerte según el centro docente, el país, la época, etc.

E.- Vale, vale. Pero tengo una pregunta. Hay algo que me sigue molestando...

P.- Dime.

E.- ¡Es esa historia de lo "concreto"!

P.- Ya.

E.- Cuando veo a Marta plantear a sus alumnos los casos del precio neto y bruto, me pregunto si no estará cediendo al eslogan pedagógico según el cual hay que hacer trabajar a los alumnos con problemas concretos. Y me parece que la gente repite este eslogan sin saber muy bien qué quiere decir, como un ritual al que uno se somete sin buscarle el porqué.

P.- Entiendo.

E.- Además, no puedo evitar exclamar para mis adentros: ¡como si las ecuaciones de primer grado no fueran ya algo suficientemente complicado! ¡Como si hubiera que añadirles otras sofisticaciones sobre comerciantes, precios, edades, y no sé qué más!

P.- O sea que estás en contra del eslogan de lo concreto.

E.- Eso mismo. ¿Tú que dices al respecto, Profesora?

P.- ¿Sobre lo concreto?... Pues mira, como no nos queda mucho tiempo, te hablaré de ello rápidamente para que lo medites luego por tu cuenta. Lo primero que hay que saber es que en tu vida de profesor —si es que acabas siendo profesor— verás desfilar muchas modas pedagógicas, cada una con su propio eslogan. Lo que quiero mostrarte ahora es cómo surge una moda pedagógica. En general, la gestión de un proceso didáctico —de un proceso de estudio— supone que se tome en cuenta un gran número de variables. Una moda pedagógica se encarga de elegir una de esas variables y afirmar que se trata de algo esencial. O incluso, en el caso de un "delirio pedagógico", que se trata de lo único realmente importante.

E.- ¿Me puedes dar un ejemplo?

P.- ¡Los que quieras! Tomaré estos tres: el tratamiento diferencial, el trabajo autónomo y la evaluación formativa.

E.- ¿En qué consisten?

P.- Pues mira, la primera dice que lo esencial es diferenciar la enseñanza o sea adaptarla a las particularidades de cada alumno en cuanto individuo singular. La segunda considera primordial el hecho de que los alumnos trabajen de manera autónoma, que aprendan a organizar y controlar su trabajo sin estar constantemente bajo la supervisión del profesor. Y la tercera propone que se incorpore a la evaluación un objetivo de formación, dado que limitarse a medir las actuaciones del alumno puede incluso resultar contraproducente.

E.- Ya había oído hablar de todo esto, sí...

P.- Perfecto. Porque resulta que, cuando observas una clase real, incluso una clase de lo más tradicional, verás que, además de aquellos momentos en los que el profesor trata a todos los alumnos del mismo modo, hay momentos en los que interviene de manera más personalizada, en función de las necesidades de cada uno —y dentro de ciertos límites, claro—. Asimismo, verás momentos en los que los alumnos trabajan por su cuenta, de manera autónoma, fuera del control del profesor, para elaborar sus propios procedimientos, aunque sean erróneos. Y además, si te pones a analizar los procesos de evaluación, encontrarás necesariamente que todos poseen una dimensión formativa, aunque ésta pueda estar infravalorada. ¿Ves lo que quiero decir?

E.- Sí. ¿Pero qué conclusión sacas de todo ello?

P.- Es muy simple: las modas pedagógicas no son un bien absoluto, ni un mal absoluto. El mérito que tienen es llamar la atención sobre una variable didáctica que hasta el momento se había dejado un poco de lado y que, a raíz de cierta evolución del sistema de enseñanza, se convierte en una variable "sensible". De todas formas, sería poco realista, y hasta cierto punto ridículo, pretender que un sistema tan complejo como es una clase se pueda manejar con una sola variable.

E.- Es el punto flaco de las modas pedagógicas...

P.- Exactamente.

E.- ¿Y respecto a lo "concreto"? ¿Qué interés tiene el insistir tanto en ello? No comprendo de qué variable didáctica se podría tratar en este caso. Porque... El problema es que... ¿Qué quiere decir que algo sea "concreto"?

P.- ¡Buena pregunta! A la que se puede dar una respuesta muy simple... Según dijo, creo, un matemático francés, lo concreto es simplemente lo abstracto que se nos ha vuelto familiar. Piénsatelo bien para la próxima vez y retomaremos la discusión a partir de este punto.

E.- Muy bien. Pensaré en ello... Lo abstracto cuando se vuelve familiar... Hasta la próxima, Profesora... ¡Y gracias!

De lo que se sabe a lo que se puede aprender

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días.

E.- ¿Te parece que empecemos donde lo dejamos el otro día? ¿Con el eslogan de lo concreto y todo aquello?

P.- Me parece muy bien. ¿Has pensado en ello?

E.- Sí, por supuesto. Incluso he preparado un par de ejemplos.

P.- ¿Ejemplos de qué?

E.- Pues de lo concreto. Si uno quiere partir de un problema concreto, no está obligado a escoger un problema como el de Marta.

P.- Claro que no.

E.- Bueno. Pues imagina que un profesor parte del siguiente problema. Lo he encontrado en un libro de álgebra de cuando mi padre iba a la escuela. Estaba en el capítulo titulado *Problemas de primer grado con una incógnita.* Te leo el enunciado: *Cuando el reloj marca las 12, las dos agujas coinciden. ¿A qué hora volverán a coincidir?*

P.- ¡Quieres traerme viejos recuerdos! Bueno... ¿Y qué te inspira este ejercicio?

E.- Pues, es una buena ilustración de problema "concreto", en el sentido que se le da habitualmente y también con tu definición de "lo abstracto que se ha vuelto familiar". En aquella época no habían relojes digitales. Un reloj con agujas era un objeto familiar para los alumnos de 12 años. ¿Estás de acuerdo?

P.- Sigue...

E.- Bueno. Lo que yo creo es que los alumnos de Marta no habrían podido resolver este problema, por muy concreto que sea. ¡Ni siquiera con la ayuda de Marta hubieran sabido plantear la ecuación!

P.- ¿Y qué conclusión sacas de todo ello?

E.- Que lo de lo concreto es una trampa... Un problema concreto no tiene por qué ser más fácil, por el mero hecho de ser concreto. Eso es todo lo que pretendo demostrar.

P.- ¿No vas a añadir nada más?

E.- ¿Algo más? Sí, que tampoco tiene por qué ser más interesante. ¡Ya me dirás qué interés puede tener el problema de las agujas del reloj!

P.- ¿No crees que nos ayude a entrar en la obra relojera?

E.- ¡No te rías, Profesora! ¿Qué comentario harías tú?

P.- Vamos a ver... Creo que será mejor volver a la definición de lo concreto como lo abstracto que se ha vuelto familiar. Has dicho que un reloj con agujas debía ser algo familiar para los alumnos de hace 30 ó 50 años.

E.- Sí, aunque quizá un poco menos para alumnos de familias más modestas, pero vaya, no creo que...

P.- Quizá no te has detenido lo suficiente a pensar lo que significa, en este contexto, la familiaridad con un objeto. Porque cuando hablo de un objeto matemático que se vuelve familiar, me refiero a su *familiaridad matemática.* Y cuando dices que los alumnos de Marta no llegarían siquiera a plantear la ecuación del problema, es porque no tienen ninguna familiaridad matemática con la esfera de un reloj y sus agujas. El reloj es, sin duda alguna, un objeto concreto para ellos en la vida de cada día, pero no lo es en cuanto objeto matematizable.

E.- ¿Y qué me dices de los precios brutos y netos? ¿Crees que son objetos familiares para los alumnos? ¿Matemáticamente familiares?

P.- Sí, sí, precisamente. Por lo poco que sabemos de la clase de Marta, es obvio que se ha realizado un trabajo importante (quizá al abordar el tema de los porcentajes, no sé) del que resulta que las nociones de precio bruto y precio neto, así como añadir y sacar el IVA, etc., se han convertido en objetos matemáticamente familiares para los alumnos. Y, además, son familiares en un sentido muy preciso...

E.- ¿Por ejemplo?

P.- Pues en el sentido de que el precio bruto P es igual a $p + 6\%p$, y también a $p + 0{,}06p$, o incluso a $1{,}06p$. Recuerda que ésta es la expresión que utilizan los alumnos para llegar a la solución.

E.- De acuerdo. Pero entonces tú no hablas de lo concreto del modo en que lo hace todo el mundo. ¡Lo tuyo no tiene nada que ver con lo concreto del eslogan pedagógico!

P.- Puede ser. Pero tampoco está muy alejado. Claro que según la definición que te propongo habrán cosas concretas para alguien que, culturalmente, pueden parecer de lo más abstracto. Considera, por ejemplo, la función de dos variables $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$ y supón que quieres saber si tiene un máximo o un mínimo cuando x e y varían entre 0 y 1. En una primera aproximación, esta función te puede parecer un objeto muy abstracto. Pero si la escribes como $(-3x)y^2 + x^2y$, y si supones que x tiene un valor fijo > 0, entonces te encuentras ante un objeto matemático mucho más familiar: la ecuación de una parábola, o sea un objeto que puedes manipular muy fácilmente. Por ejemplo, como x es positivo...

E.- Has dicho que variaba entre 0 y 1.

P.- Sí. Por lo tanto la parábola tiene el vértice en lo alto. Además sabes que la abscisa del vértice es $\frac{-x^2}{2(-3x)}$, o sea $\frac{x}{6}$. Así puedes imaginar todas la familia de parábolas que se generan al variar la x entre 0 y 1, para luego considerar la que está más arriba...

E.- Sí, sí, ya veo.

P.- Lo importante es que, cuando trabajas como acabamos de hacer con la parábola, manipulas objetos que te parecen muy seguros. No dudas, por ejemplo, que si el coeficiente de y^2 es negativo, entonces la parábola tiene forma de U invertida, etc. Todos estos objetos que manipulas —aunque sea mentalmente— pertenecen a lo que los didácticos llaman el *milieu*, el medio.

E.- ¿El medio? ¿Como cuando se habla del medio ambiente?

P.- Sí, o del medio social en el que vive una familia.

E.- Entonces todos estos objetos matemáticos que se suponen tan concretos, familiares... ¿Formarían parte del medio matemático en el que viven los alumnos?

P.- Eso mismo. Muy bien. Lo que cuenta realmente es que los objetos que forman parte de este medio han adquirido cierta familiaridad matemática para los alumnos, de tal modo que su "comportamiento" y sus propiedades parecerán seguros, incuestionables, fuera de toda duda.

E.- De acuerdo. Pero ¿podemos volver a la clase de Marta?

P.- Como quieras.

E.- Hay un momento en que pide a sus alumnos lo que habría que pagar si se calculara el IVA a partir del precio de venta del artículo (que son 530 ptas) en vez del precio neto.

P.- Sí, ya recuerdo.

E.- Y entonces lo que se ve es que, para los alumnos, calcular el 6% de 530 ptas es una operación totalmente segura, que no da lugar a dudas. Hallan que los impuestos ascienden a 31,8 ptas, aunque saben que el comerciante sólo paga 30 ptas. Pero no ponen en duda el cálculo; cuestionan la manera de calcular el IVA. Por lo tanto, podemos deducir que calcular un tanto por ciento forma parte de su "medio ambiente" matemático, ¿no es eso?

P.- Eso mismo. No dudan en ningún momento de su cálculo del 6% de 530 ptas. Pero fíjate que, aunque estén operando en el "medio", el cálculo puede ser erróneo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Puede que te parezca demasiado sutil, pero en realidad es muy sencillo. Los alumnos no dudan de cómo se comportan los objetos que forman parte del medio. Pero puede ser que, al manipular estos objetos, cometan algún error. Por falta de atención, por ejemplo. Del mismo modo que yo no dudo que, si hago tal y cual gesto, abriré aquella ventana de detrás tuyo, aunque puede ser que la ventana esté atascada, o yo haga mal el gesto.

E.- Vale, vale. Ya veo. Pero estaba pensando en algo distinto.

P.- ¿En qué?

E.- En teoría, lo del precio neto y bruto, lo del IVA y todo lo demás forma parte del medio de los alumnos. Pero, de repente, la profesora introduce cierta incertidumbre en este medio. Dicho de otro modo: a pesar de que al principio todo resultaba muy claro, de pronto aparece una cuestión totalmente nueva: ¿cómo calcular el IVA a partir del precio de venta?

P.- Lo acabas de describir muy bien. ¿Y a qué conclusión llegas?

E.- Pues que, para controlar eficazmente el estudio de esta nueva cuestión, los alumnos tienen que poder basarse en lo que está claro para ellos, en el medio.

P.- Muy bien, es exactamente eso. Bravo.

E.- Claro que, por lo que te conozco, aún debo estar lejos del final, ¿no?

P.- No, no, en absoluto. Además, yo también te conozco, y supongo que aún quedan cosas en el aire, ¿no?

E.- Sí, muchas. Por eso he preparado un segundo ejemplo.

P.- Pues, adelante con él.

E.- Mira. He intentado cambiar el problema que utiliza Marta para presentar la idea de ecuación de primer grado a sus alumnos. Y en lugar de una cuestión comercial, he considerado un problema de geometría muy simple. Partimos de un triángulo...

P.- O sea, en lugar de una cuestión extramatemática, has escogido una cuestión intramatemática.

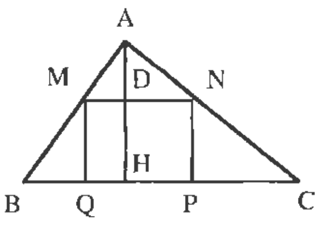
E.- Eso es. Considero un triángulo ABC, su altura AH y supongo que BC = AH = 8 cm.

P.- O sea, partimos de un triángulo que no está totalmente definido.

E.- No. Falta precisar la posición de H en el segmento BC. Pero no importa.

P.- Muy bien.

E.- Ahora tomo un punto D sobre AH y considero el rectángulo MNPQ de tal manera que MN pase por D. *(Dibuja en la pizarra.)*



BC = AH = 8 cm

P.- Por lo tanto, MN es paralela a BC y MQ, NP perpendiculares a BC...

E.- Sí. Si ahora impongo que D sea el punto medio de AH, entonces por un lado MN será la mitad de BC y por otro DH será la mitad de AH así como de BC. Como MQ y NP son iguales a DH, tenemos MN = MQ = NP. Resulta, pues, que MNPQ es un cuadrado.

P.- Muy bien. Pero ¿dónde está el problema que quieres plantear a los alumnos?

E.- Supón que tomo D de tal forma que AD sea una fracción de AH: AD = r·AH. Se trata entonces de calcular los lados del rectángulo en función de r. Todo esto suponiendo, claro está, que los alumnos están acostumbrados a manipular triángulos semejantes.

P.- Bueno, no sé si sería mucho pedir para alumnos de 2º de ESO, pero lo podemos admitir.

E.- Sí, sólo es un ejemplo. Tenemos pues MN = r·BC = $8r$ y MQ = AH – AD = 8 – $8r$.

P.- Por lo tanto, también presupones que los alumnos saben escribir estas fórmulas.

E.- Claro. Y también supongo que las saben utilizar para hallar las distintas formas que puede tener un rectángulo. Por ejemplo, si $r = \frac{1}{2}$, tenemos un cuadrado; si $r = \frac{3}{4}$, tenemos MN = $\frac{3}{4} \cdot 8 = 6$ y MQ = $8 - \frac{3}{4} \cdot 8 = 8 - 6 = 2$, luego MN = 3MQ. El rectángulo es pues tres veces más largo que alto.

P.- De acuerdo.

E.- La cuestión es la siguiente: si queremos tener un rectángulo cuyos lados estén en una razón dada R, es decir, que sea R veces más largo que alto, ¿dónde hay que situar al punto D? O, dicho de otro modo, ¿qué valor de r hay que tomar?

P.- Lo que les llevaría a la ecuación $8r = R\,(8 - 8r)$.

E.- Sí... Por ejemplo, cómo elegir r para que la base sea el doble de la altura, etc. ¿Qué te parece?

P.- Sinceramente, creo que tu idea no es tan buena como la de Marta.

E.- Vale. Pero quiero saber por qué.

P.- Te lo diré. En primer lugar, date cuenta de todo el tiempo que has necesitado para explicarme el problema. Imagínate esto en una clase. Estarías más tiempo presentado los elementos geométricos, aritméticos y algebraicos necesarios para poder formular la cuestión, que estudiándola. Esto es un problema que Marta ha sabido resolver muy bien.

E.- Ya, porque ella se basa en elementos que ya se han estudiado antes.

P.- Que forman parte del medio.

E.- Sí, pero en este caso también podríamos suponer lo mismo e imaginar que los alumnos han trabajado anteriormente con rectángulos inscritos en triángulos, con el tema de la semejanza de figuras. Con lo cual el profesor podría llegar y decir: os acordáis del problema del triángulo ABC con un rectángulo MNPQ inscrito, etc. Y los alumnos contestarían: sí, teníamos $MN = 8r$ y $MQ = 8 - 8r = 8(1 - r)$.

P.- Aun suponiendo que así sucediera, tu ejemplo sigue planteando una dificultad mayor.

E.- ¿Cuál?

P.- Podemos en efecto suponer que los alumnos han trabajado mucho la noción de triángulos semejantes. E incluso podemos suponer que, en la figura que has dibujado, la igualdad $\frac{AD}{AH} = \frac{MN}{BC}$ pertenece al medio matemático de la clase.

E.- Sí, del mismo modo que el cálculo de un porcentaje en la clase de Marta.

P.- Bueno. Pero lo que resulta mucho más difícil de imaginar es que ocurra lo mismo con la cuestión del rectángulo y de la razón entre sus lados. Yo no veo cómo se podría justificar que los alumnos hayan adquirido tanta familiaridad con este tema...

E.- ¡Pues, yo no veo tanta diferencia, Profesora!

P.- ¿Cómo que no? Se trata de un problema curricular. Depende del estatuto que se da a los objetos del currículo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues mira, en teoría es posible pedir que, en tal o cual curso, todos los alumnos conozcan el problema de hallar el lado de un triángulo rectángulo a partir de los otros dos.

E.- Con el teorema de Pitágoras.

P.- Eso es. También se les puede pedir que estén muy familiarizados con el tema de los precios netos y brutos. Se trata, en ambos casos, de temas claramente identificados en la cultura matemática elemental. ¡Pero no veo a raíz de qué tu problema podría ocupar una posición semejante!

E.- ¡Pero Profesora, el currículo no es intocable! ¿Por qué se les exige a los alumnos que conozcan el teorema de Pitágoras o cómo hallar un precio neto a partir de un precio bruto, en vez de resolver un problema como el mío. Hace unos días insististe en que el currículo era una obra abierta, en cuya producción podíamos y debíamos participar todos. ¿No?

P.- Hombre, tienes todo el derecho del mundo a querer cambiar el currículo, pero ten presente —ya lo hemos discutido— que nunca es tan sencillo como parece. Además, no has justificado en ningún momento hasta qué punto tu problema sería lo suficientemente interesante como para atribuirle un lugar preponderante en el currículo. Por último, estás cambiando nuestro tema de reflexión. El tema que nos ocupa ahora no es cambiar el currículo, sino iniciar a los alumnos a la teoría elemental de ecuaciones de primer grado. Para resolver una dificultad local, pretendes modificar todo el conjunto, y sólo para hacer viable tu solución. ¡Olvidas que hay leyes didácticas y, en particular, leyes curriculares que no se pueden infringir tan fácilmente!

E.- ¡Qué tajante te has puesto, Profesora!

P.- ¡Mucho más dura puede llegar a ser la realidad didáctica!

E.- Bueno, pero yo sólo intentaba satisfacer una "restricción" (como tú las llamas) y para ello he intentado modificar otra restricción.

P.- Pero a otro nivel: no el de la clase sino el del currículo. Pero no te alarmes, tampoco hay que ponerse trágicos. Has hecho una propuesta para iniciar al estudio de las ecuaciones. Yo digo que tu propuesta choca con ciertas dificultades objetivas. Una de ellas es la que te he explicado antes, pero hay muchas otras restricciones. Y uno no puede dejar de tomarlas en cuenta estas dificultades.

E.- ¿Cuáles son las demás?

P.- Pues mira, quedamos en que Marta propone a sus alumnos un problema nuevo que pueden resolver con las herramientas de que disponen. Desde un punto de vista técnico, la ecuación a la que llegan es del tipo $x + ax = b$, que se puede escribir también como $(1 + a)x = b$, y pues hallar directamente $x = \frac{b}{1 + a}$.

E.- Hasta aquí estoy de acuerdo.

P.- En cambio, con tu problema los alumnos tendrían que resolver una ecuación mucho más complicada, del tipo $ax = b - cx$, o algo así. Desde un punto de vista didáctico, no les bastará con un poco de ayuda para resolver por sí mismos la ecuación. Es mucho más probable que el profesor acabe haciéndolo él en la pizarra, consiguiendo, a lo sumo, captar su atención.

E.- Ya veo... El profesor haría matemáticas *delante* de los alumnos, mientras que Marta hace matemáticas *con* sus alumnos. Quizá se podría relacionar con la noción de "zona de desarrollo próximo" que algunos psicólogos emplean a veces.

P.- ¡Vuelvo a constatar que estás muy instruido! Sí, creo que se trata de puntos de vista relativamente próximos. Pero te indicaré una pequeña diferencia. Muchas veces, los autores que hablan de zona de desarrollo próximo utilizan esta noción refiriéndose a un solo individuo: el que le ayuda a desarrollarse debe intervenir en esta zona que se supone distinta de un individuo a otro. En cambio, aquí se tendría que hablar de la zona de desarrollo próximo de la clase —de la clase como comunidad de estudio—. Debemos pues suponer que esta noción sigue teniendo sentido para un grupo de personas, aunque dichas personas no estén en el mismo "nivel de desarrollo". En los análisis que realizamos, nos referimos a una entidad, la clase como comunidad de estudio, y suponemos que esta entidad existe y posee unas propiedades específicas.

E.- Ya, pero...

P.- Espera, espera. Aún me queda algo por decir. En lo que se refiere a la ayuda al estudio, existe una diferencia entre el hecho de que el profesor ayude a sus alumnos a resolver un problema y el hecho de resolverlo él mismo delante de ellos.

E.- ¡Pues claro!

P.- Lo cual no deslegitima los momentos en que el profesor se ve llevado a hacer matemáticas delante de sus alumnos. Se trata de actuaciones distintas, pero una no es forzosamente mala y la otra siempre buena. No estamos aquí para construir una nueva religión...

E.- No sigas, te entiendo perfectamente. Pero querría hacer una observación.

P.- Adelante.

E.- Has dicho que mi problema de geometría conducía a una ecuación demasiado complicada...

P.- Sí, respecto a la técnica que se necesita para resolver la ecuación. Si es del tipo $ax = b - cx$, de entrada habrá que "transponer" el término cx del miembro de la derecha al de la izquierda. Se llega entonces a $ax + cx = b$. Los algebristas árabes llamaban a esta operación *al-jabr*, que significa "restauración": se restaura el equilibrio en la igualdad (de ahí viene la palabra álgebra). Después, hay que pasar de $ax + cx = b$ a $(a+c)\,x = b$: es una operación de simplificación que se llamaba *al'muqâbala*. Y, finalmente, había que hacer la división: $x = \dfrac{b}{a+c}$.

E.- ¡Pero todo esto no es tan complicado!

P.- ¡Qué ingenuo eres! Cuando los algebristas descubrieron estos gestos técnicos, supieron que se hallaban ante algo importante, que se había realizado un progreso. Hasta tal punto fue importante que pusieron nombres a sus descubrimientos. Pero, consideraciones históricas aparte, recuerda lo que ocurre en la clase de Marta cuando a un alumno se le ocurre sustituir la expresión $p + 0{,}06p$ por $1{,}06p$, es decir, cuando descubre la utilidad de hacer el *al-muqâbala*: ¡cree que se trata de algo digno de presentar a los demás!

E.- Es verdad... Pero ahora me estoy dando cuenta de otra dificultad...

P.- Dime.

E.- Lo que hace Marta, aunque sea importante... Vaya, que después habrá que progresar. Los alumnos han descubierto la "simplificación", pero después tendrán que descubrir la "restauración".

P.- Eso es.

E.- ¿Y cómo se las arreglará para seguir con el estudio de las ecuaciones y tratar todos los casos?

P.- Tu pregunta es un verdadero problema de didáctica. Claro está que, si quiere avanzar un poco más con sus alumnos, puede plantearles un problema como el que mencionábamos antes: el de un artículo que cuesta 2.800 ptas y de un comerciante que quiere hacer un 80% de beneficio sobre el precio de venta P, con lo cual se tiene que resolver la ecuación $2.800 + 0{,}8P = P$. Y para resolverla, hay que pasar el término $0{,}8P$ al otro miembro de la igualdad. La operación de "restauración" es necesaria para reducirse al caso anterior que ya saben resolver.

E.- Es verdad... No está mal... Pero tengo algo que objetar. Supón que un alumno haga el siguiente razonamiento: si tenemos $2.800 + 80\%P = P$, es que 2.800 representa el 20% de P, es decir, una quinta parte de P, luego P es 5 veces 2.800. ¿Qué haría el profesor? ¡Se le iría todo al traste!

P.- Sí, podría ser un verdadero problema. Si quiere que los alumnos aprendan la técnica algebraica de resolución de ecuación, con el *al-jabr* y el *al'muqâbala*, entonces debe procurar que, a partir de cierto momento, cualquier técnica alternativa quede totalmente descalificada. De todas formas, habría que ver si algún alumno de 2º de ESO es capaz de utilizar la técnicas que has indicado. Esta técnica se enseñaba antaño en los cursos de aritmética, y requería un trabajo de construcción sin duda igual al de la técnica algebraica. Pero no creo que hoy día mucha gente la utilice espontáneamente.

E.- Bueno, dejémoslo de lado. Porque hay otra cosa que no me acaba de convencer.

P.- ¿Sí?

E.- Con la estrategia que expones, es necesario presentar cada vez un problema nuevo que se resuelva con una ecuación un poco más compleja que la anterior, a fin de enriquecer la técnica de partida. Sólo así se puede progresar en el estudio de las ecuaciones.

P.- En efecto.

E.- ¡Pues, entonces, la tarea del profesor resulta extremadamente difícil! Cada vez hay que buscar nuevos problemas. Ni siquiera creo que podamos mantenernos en el ámbito de los precios de venta... ¿Tú qué opinas, Profesora?

P.- Que tienes toda la razón. No sólo puede llegar a ser muy complicada, sino incluso imposible.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Se trata del problema de lo que podríamos llamar la "estudiabilidad" de una cuestión. Y, por lo menos en una primera aproximación, importa poco si el alumno estudia solo o con la ayuda del profesor.

E.- No te entiendo...

P.- Debes olvidarte un poco de la figura del profesor. Imagina simplemente que alguien quiere estudiar el tipo de cuestiones que habitualmente designamos con la palabra "ecuación": en determinadas situaciones, tenemos que hallar un número, la incógnita, que viene definido implícitamente mediante cierta información.

E.- Vale.

P.- Para lanzarse al estudio que nos ocupa, nuestro estudiante debe buscar situaciones en las que un número esté definido implícitamente, como el caso de los precios y el IVA. ¿De acuerdo?

E.- Sí.

P.- Ves, por tanto, que el problema es el mismo para el estudiante que no tiene ayuda exterior que para el que debe ayudar al estudiante.

E.- Ya. Por eso decías que me olvidara del profesor.

P.- Eso es. Hemos visto antes que no es fácil conseguir un "material" adaptado. Supón por ejemplo que el estudiante se plantea tu problema del rectángulo inscrito en un triángulo: tendrá que dejarlo estar a medio camino porque conduce a una ecuación que él no podrá resolver en esta primera etapa del proceso de estudio.

E.- Profesora, ¿has visto alguna vez a alguien plantearse este tipo de cuestiones, a alguien que buscara una situación con un número desconocido definido implícitamente? ¿No eres un poco utópica?

P.- ¡Seguramente te sorprenderá saber que sí he visto algunos alumnos librarse a una actividad de este tipo! Pero lo que quieres decir es que, en el marco escolar, esta clase de preguntas las plantea siempre el profesor. Él es el responsable de buscar o construir situaciones adecuadas para el estudio. De hecho, el saber hacer didáctico de los alumnos tal y como se fomenta en la escuela presenta una carencia fundamental. Muy a menudo, demasiado a menudo, los alumnos son incapaces de organizar el estudio de una cuestión cualquiera sin la ayuda del profesor. Carecen totalmente de autonomía didáctica.

E.- ¿O sea que para ti el hecho de buscar situaciones adecuadas forma parte del proceso de estudio, del proceso didáctico?

P.- ¡Pues claro! Si no, no hay posibilidad de estudio.

E.- Pero reconocerás que, en la escuela, este tipo de trabajo se deja siempre en manos del profesor.

P.- No estés tan seguro. Aparentemente sí. Pero en realidad no basta con que el profesor presente a los alumnos situaciones adecuadas y listas para resolver. Falta aún que el alumno las reconozca como tales, que las sepa ubicar dentro del proceso didáctico.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, por ejemplo, si el alumno no entiende (o no quiere entender) por qué el profesor propone tal o cual problema, lo encontrará falto de interés y, por lo tanto, no entrará en el proceso de estudio. Pero, si me dejas, quisiera avanzar un poquito.

E.- Sí, claro.

P.- Volvamos a lo del estudio escolar de una cuestión e imaginemos que el estudiante del que hablamos no sea un alumno sino un investigador de matemáticas que estudia un problema nuevo.

E.- No serán las ecuaciones de primer grado, claro.

P.- No, por supuesto. Pero podrían ser las ecuaciones diferenciales estocásticas, por ejemplo. Imaginemos que nuestro investigador se encuentra ante una dificultad inmensa que no sabe cómo abordar. Una parte esencial de su trabajo como investigador consiste precisamente en buscar vías de ataque al problema en cuestión. Y para ello tendrá que buscar situaciones en las que no sólo pueda hacer algo, sino también controlar aquello que hace.

E.- ¿Y?

P.- ¡Pues podría no encontrar ninguna vía de ataque!

E.- Y abandonar allí su investigación...

P.- E incluso podría ocurrir a nivel de toda la comunidad de investigadores, atrasando el estudio de la cuestión por mucho tiempo. A veces se habla de cuestiones "intratables".

E.- Ya, pero esto no ocurre con alumnos y cuestiones como las ecuaciones de primer grado.

P.- No vayas tan rápido. Algunas cuestiones intratables para los matemáticos del siglo XVIII se resolvieron un siglo más tarde.

E.- Ya, ya. Como la cuadratura del círculo. ¡Pero, por favor, volvamos a los alumnos de 2º de ESO!

P.- Tienes razón. La estudiabilidad de una cuestión es relativa. Para los matemáticos, resulta históricamente relativa. Por cierto, sería interesante ver de qué manera la cuestión de lo que se llama el teorema de Fermat, que no era prácticamente estudiable cuando Fermat la formuló en el siglo XVII, se ha vuelto cada vez más estudiable hasta que se ha podido "zanjar" durante estos últimos años. ¡Pero volvamos a los alumnos!

E.- Muy bien.

P.- Podemos formular nuestro problema didáctico de la siguiente manera. Dada una cuestión de matemáticas y dados ciertos alumnos con ciertas competencias matemáticas, que viven en cierto medio matemático, ¿es posible encontrar o inventar situaciones cuyo estudio permita a estos alumnos avanzar de manera eficaz y segura en el estudio de la cuestión propuesta?

E.- ¡Qué complicado!

P.- ¿Pero lo entiendes?

E.- ¡Sí, sí, creo que sí!

P.- Muy bien. ¡Pues sigamos! Lo que me parece importante, a partir de aquí, es aceptar la idea de que, en determinados casos, no se pueden encontrar situaciones que cumplan tales requisitos. No digo que sea imposible en general, digo que el profesor no dispone —y menos aún el alumno— de ninguna situación de ese tipo. En algunos casos puede ser fácil inventarla, pero también puede estar fuera de nuestro alcance durante un período de tiempo más o menos largo.

E.- ¿Y entonces qué debe hacer el profesor?

P.- En estos casos, la respuesta está clara... en teoría. Lo dijo muy bien una vez un colega británico: *The good schoolmaster is known by the number of valuable subjects that he declines to teach.*

E.- O sea, que un buen profesor sería aquél que se niega a enseñar un tema porque no cree tener medios suficientes para conducir su estudio. Estoy de acuerdo... ¡Pero creo que la realidad está bien lejos de estas consideraciones!

P.- Desgraciadamente, tienes toda la razón del mundo. Los profesores se han acostumbrado a protestar a muchos niveles, pero parece que, cuando hay que pelearse por lo más fundamental, no queda casi nadie.

E.- ¡Te estás poniendo nerviosa, Profesora!

P.- Es que me gustaría que el profesorado no estuviera siempre a la defensiva y fuera capaz de atacar allí donde realmente vale la pena. Pero sigamos...

E.- Sí, vale más.

P.- Cuando uno quiere estudiar una cuestión, o ayudar a alguien a estudiar una cuestión, es indispensable que se procure medios de estudio específicos para esa cuestión. Lo hemos visto con las ecuaciones.

E.- ¿Y cómo precisarías, en este caso, esta necesidad didáctica?

P.- Ya lo hemos visto. Hay que poder disponer de ecuaciones bastante diversas y variadas entre sí, que no sean todas o muy simples o muy complejas. También sería bueno que el planteamiento de la ecuación no representara un obstáculo importante, es decir, no absorbiera todo el tiempo y esfuerzo del que se dispone (lo que ocurriría, creo, con tu problema de geometría). Asimismo, no habría que caer en el error de dar todas las ecuaciones de golpe, porque se perdería una idea esencial para el principiante: a saber, que la resolución de una ecuación permite encontrar un número definido implícitamente y cuya determinación parecía imposible a partir de los cálculos aritméticos de primaria.

E.- Ya veo...

P.- Por lo tanto, lo que necesitamos es un pequeño laboratorio matemático específico para la cuestión que queremos estudiar. Un laboratorio en el que podamos hacer preguntas, plantear cuestiones de manera insistente, y obtener respuestas, si uno sabe escuchar como es debido, claro. En didáctica, a este "laboratorio" también se le llama *un milieu*, un medio. No digo *el* medio, como antes, sino *un* medio, un sistema que nos permite estudiar la cuestión que nos planteamos.

E.- El medio... Y un medio... Pero, Profesora, lo que llamas *un* medio, ¿también forma parte del medio, no? Porque tiene que aportar respuestas al que estudia, como si se tratase de los experimentos de un laboratorio de química. Para el estudiante, el comportamiento de los objetos de este medio debe ser algo natural y seguro, ¿no?

P.- Sí, es cierto. Y es importante saber que los objetos del medio que servirá de laboratorio requieren cierto trabajo previo para llegar a formar parte del medio ambiente matemático del estudiante.

E.- Pero entonces, Profesora, ¿el medio necesario para el estudio de una cuestión, no es algo así como el material experimental que necesita todo químico o biólogo? Estoy pensando en los genetistas que trabajan con esas moscas... Creo que se llaman drosófilas. ¿Ves lo que quiero decir?

P.- ¡Perfectamente! Si un biólogo no sabe encontrar un material experimental bien adaptado, el estudio que pretende realizar no será viable. Y tu historia de la mosca es, a mi parecer, un buen ejemplo. ¿Sabes qué fue lo que condujo a los genetistas a estudiar las drosófilas?

E.- No sé. Supongo que se reproducen muy rápido, y que por lo tanto es fácil disponer de mucho material experimental.

P.- Ésta debe ser sin duda una de las razones. Pero lo más probable es que, en un momento dado y para ciertos estudios de genética, la drosófila debió representar un buen "medio". Te explicaré por qué con un ejemplo matemático que seguramente habrás criticado en más de una ocasión.

E.- A ver.

P.- Resulta lógico pensar que el biólogo trabaja con drosófilas, no porque crea que este insecto es una criatura apasionante en sí misma...

E.- No, lo hace porque permite estudiar cuestiones que, en general, sí son esenciales.

P.- Exactamente. Pues, supón ahora que planteas a tus alumnos el siguiente problema: *Un padre tiene 33 años y su hijo 10. Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será el doble de la del hijo?* ¿Ves?

E.- ¡Ah, ya! Para ti los problemas de padres e hijos, son una variedad de mosca verde...

P.- Exactamente. Por eso mismo el estudio de estos problemas no carece para nada de sentido —al contrario de lo que algunos pretenden—.

E.- Vale. Lo admito. Pero no estoy tan seguro que los alumnos o los profesores sean conscientes de ello.

P.- Es verdad. Se corre el riesgo de que el biólogo crea que la drosófila es lo único importante y se olvide de la problemática general. Pero supongo que este riesgo existe tanto en el aula como en las comunidades científicas —aunque no sepa cómo demostrarlo—. En estos casos, el medio del estudio se convierte en el fin. Claro que, como decía antes, este riesgo no sería tan grande si la búsqueda del material, la elaboración de un medio adaptado se considerara como parte del estudio.

E.- Claro. En física, por ejemplo, es necesario inventar un experimento cada vez que se quiere poner a prueba una idea nueva.

P.- Sí, y un experimento que se considere importante. Por lo mismo, en el estudio de una cuestión matemática, incluso en clase bajo la dirección del profesor, debería considerarse que la creación y la gestión de un medio adaptado son una dimensión esencial del estudio.

E.- ¡Pues no nos falta camino ni nada!

P.- En efecto, porque aquí se trata de una cuestión didáctica relativa al reparto de tareas entre el profesor y los alumnos, es decir, una cuestión relativa al contrato didáctico y, por lo tanto, una cuestión difícil. Por cierto, se nos está haciendo muy tarde...

E.- ¡Déjame hacerte una última pregunta!

P.- Adelante.

E.- Cuando empezasteis, en el Instituto Juan de Mairena, ¿qué "drosófila" escogisteis para el estudio de ecuaciones en 2º de ESO?

P.- Buena pregunta. Lástima que ahora no tenga tiempo para contestarte. Recuerda lo que te dije sobre el material ideal: en aquella época, tuvimos una idea muy simple (y muy poco original) a partir de la cual, para fabricar situaciones que den lugar a ecuaciones de primer grado, utilizábamos un tipo de problema general que llamábamos "Pienso en un número".

E.- ¿Y consistía en...?

P.- Pienso, por ejemplo, en el número 20. Si lo divido entre 4 y le añado 10, hallo 15, es decir, el número que he pensado menos 5. De ahí resulta el enunciando siguiente: *Pienso en un número. Si lo divido entre 4 y añado 10, obtengo el mismo número disminuido de 5. ¿Cuál es ese número?* Teníamos así una maquinita para fabricar situaciones que se traducen en ecuaciones. Ya te hablaré otro día de cómo se utiliza esta máquina. Ahora me tengo que ir. Hasta la próxima.

E.- Muy bien. Gracias, Profesora.

Entrar en una obra matemática

E.- Buenos días Profesora.

P.- Buenos días.

E.- Quedamos en que hoy me contarías con más calma aquello de "Pienso en un número".

P.- Tienes razón, lo había olvidado. Pues mira, la idea inicial es muy simple. Tomaré un ejemplo. Supón que el profesor pide a los alumnos que contesten a la siguiente pregunta: pienso en un número; si sumo 3 me da 8; ¿en qué número he pensado? En este caso, la respuesta es inmediata: el número es 5. Pero las cosas se pueden complicar muy deprisa. Pienso en un número; si lo multiplico por 2 y sumo 6 me da 20; ¿en qué número he pensado?

E.- Aquí los alumnos tienen que hacer el cálculo al revés. Si a 20 le resto 6 me da 2 veces el número; como la resta es 14, el número es 7.

P.- Sí, exactamente.

E.- Bueno. Pero aquí aún no hay ecuaciones. O, mejor dicho, se puede contestar a la pregunta sin necesidad de escribir una ecuación e intentar resolverla.

P.- De hecho esto es lo que buscamos.

E.- Pero entonces no lo entiendo. El otro día te hice notar que se podía resolver la ecuación $2.800 + 0{,}8P = P$ sin necesidad de escribirla, observando que 2.800 tenía que ser el 20% de P, y que P era 5 veces 2.800...

P.- ¿Y bien?

E.- Pues, me dijiste que esto requería unos conocimientos de aritmética que los alumnos no tenían. ¡Y ahora me hablas de una solución que se apoya totalmente en estos conocimientos!

P.- Es cierto, pero mantengo lo dicho. Tú me hablaste ese día de una posibilidad que me pareció muy remota porque los alumnos no aprenden ese tipo de técnica.

E.- ¿Qué técnica?

P.- Fíjate, ante la ecuación $2.800 + 0{,}5x = x$, tú dices: 2.800 representan el 50% de x, luego x es 2 veces 2.800, o sea 5.600. Al hacer estos cálculos, pones en práctica una técnica, una "manera de hacer" determinada.

E.- No es verdad, a mí me parece algo natural.

P.- ¡Natural, qué palabra más ingenua! Nada es natural, hombre. Ésta es otra de las creencias de las que pronto tendrás que librarte.

E.- No entiendo nada.

P.- Me explicaré. Considera una ecuación como... digamos... $2.800 + 3{,}2x = 4x$, e intenta resolverla como has hecho con la otra, es decir, con la misma técnica.

E.- Aquí no puedo, ¡en este caso no funciona!

P.- Ajá. Pues tomemos un ejemplo más sencillo. Una ecuación como la de antes, por ejemplo $2.800 + 0{,}6x = x$.

E.- A ver. En este caso tenemos que 2.800 es el 40% de x, luego el 20% de x es 1.400, y x es 5 veces 1.400, o sea ... 7.000. Ha sido un poco más complicado, pero también sale.

P.- Hasta aquí estamos de acuerdo. La idea que utilizas es que si x se puede escribir como algo más $0{,}6x$, es que ese algo es $0{,}4x$, es decir, el 40% de x.

E.- Ésa es la idea de base. Pero luego hay que pasar al 100% de x para sacar x.

P.- Muy bien. Y al hacerlo resuelves la dificultad principal: el hecho que la x esté definida implícitamente, como decíamos el otro día...

E.- Sí, y llegamos a $0{,}4x = 2.800$, de donde podemos sacar x dividiendo por 0,4. Yo utilizaba tantos por ciento, pero quizá no sea necesario. De $2.800 + 0{,}6x = x$ puedo pasar directamente a $2.800 = 0{,}4x$, y ahora x es 2.800 dividido entre 0,4. Muy bien. Pero la verdad, Profesora, no veo por qué haces hincapié en todo esto.

P.- Te lo diré enseguida. Pero antes volvamos a la ecuación de partida: $2.800 + 3{,}2x = 4x$.

E.- Bueno. Pero no veo cómo desarrollar aquí la idea que hemos utilizado. Necesitaría que a la derecha sólo hubiera una x y no 4...

P.- ¡Pues divide entre 4, hombre! ¿Qué encuentras?

E.- ¿Dividiendo entre 4? ¡Claro! ¡Qué tonto soy! $700 + 0{,}8x = x$. Ya estamos en el caso anterior. 700 es el 20% de x, y pues x vale 700 dividido por 0,2, es decir, 3.500.

P.- Muy bien. Como ves, tu técnica también funciona con esta ecuación.

E.- Sí. Claro que aquí sería más simple restar $3{,}2x$ a los dos miembros de la ecuación, porque se llega a lo mismo: $0{,}8x = 2.800$ y $x = 2.800 : 0{,}8$.

P.- Pero entonces recurrirías a la técnica habitual de resolución de ecuaciones. ¿No te acuerdas? Es la técnica que los árabes llamaban *al-jabr*. En cambio tu técnica no lo necesita: se divide pero no se resta.

E.- Sí que se resta: cuando teníamos $700 + 0{,}8x = x$ y decíamos que 700 era $0{,}2x$, estábamos restando 0,8 de 1. Lo hago mentalmente, $1 - 0{,}8 = 0{,}2$, pero es una resta igualmente.

P.- No vayas tan rápido. Ten en cuenta que, con la técnica usual, sale $4x - 3{,}2x$. En cambio, con tu técnica, restas 0,8 de 1. No hay ninguna x; sólo trabajas con números.

E.- Bueno...

P.- Pero hay algo más. Cuando dices que haces la resta $1 - 0{,}8$ mentalmente, no es del todo cierto. En realidad no utilizas el algoritmo de la resta que te enseñaron en la escuela. Lo que haces es buscar qué hay que añadir a 0,8 para obtener 1. Digamos que buscas el "complemento" de 0,8 a la unidad.

E.- De acuerdo.

P.- Pues ahora, si te parece bien, vamos a hacer un ejercicio. Consideremos la ecuación $630 + 4{,}2x = 7x$. Te propongo que la resuelvas primero con la técnica habitual...

E.- La que se enseña a los alumnos.

P.- Sí. Y después la resuelves con tu técnica, que podríamos llamar la "técnica del complemento a la unidad". ¿Ves por qué?

E.- Sí.

P.- Pues venga. *(El Estudiante separa la pizarra en 2 y escribe.)*

$630 + 4{,}2x = 7x$	$630 + 4{,}2x = 7x$
$630 = 7x - 4{,}2x$	$90 + 0{,}6x = x$
$630 = 2{,}8x$	$90 = 0{,}4x$
$x = 630 : 2{,}8$	$x = 90 : 0{,}4$

P.- Muy bien. Ahora mira lo que has escrito. Ves que has hecho dos cosas diferentes que además te conducen a dos expresiones distintas para x.

E.- ¡Distintas en la forma, pero de hecho equivalentes!

P.- Claro. Pero fíjate que en los dos casos has hecho un trabajo matemático específico. Alguien podría muy bien ser capaz de hacer el uno y no el otro. De hecho, se trata de dos técnicas diferentes.

E.- Creo que empiezo a entender... En una se puede utilizar la noción de tanto por ciento, que permite hacer el complemento a la unidad como dices tú; y en la otra no.

P.- Precisamente, lo que yo te quería hacer entender es que, aunque el hecho de utilizar la noción de tanto por ciento te parezca natural, se trata de algo previamente construido, y que seguramente no es natural para los alumnos de los que hablamos. En cambio hacer el pequeño trabajo aritmético que consiste en encontrar un número tal que si lo multiplicamos por 2 y añadimos 4 nos da 14, esto es algo que sí se ha vuelto "natural" para ellos.

E.- ¿Podríamos decir que forma parte de su medio matemático?

P.- Sí. Y de algo que podría no formar parte del medio, pero que está allí gracias al trabajo realizado en los cursos anteriores.

E.- Ya veo. Pues, si me permites, ahora me gustaría volver al principio, cuando se pide a los alumnos que encuentren un número solución de la ecuación $3x + 7 = 25$, o algo así. En realidad, ellos no resuelven la ecuación en el sentido habitual de "resolver una ecuación", es decir, aislando la x y todo eso. Y sin embargo esto es lo que se quiere que aprendan. Entonces ¿de qué sirve empezar con todo aquello? Parece como si se les llevara por una pista falsa...

P.- Pues mira, no estoy de acuerdo contigo. En realidad hay dos razones de peso que explican la táctica usada en este caso. La primera es que les ayuda a identificar cierto tipo de problemas: los del tipo "Pienso en un número...". Supongo que, desde un punto de vista matemático, ves bien a qué me refiero: se busca un número que cumple cierta condición y no se tiene más información sobre el número que la condición que cumple. Lo mejor para que los alumnos identifiquen rápidamente este tipo de problemas es que se encuentren con algún ejemplar, y aún mejor si se resuelve fácilmente.

E.- ¿Qué quiere decir?

P.- Pues, simplemente un problema para el que disponen previamente de una técnica. Eso es todo. No conocen la técnica habitual —ni, por supuesto, la del complemento a la unidad—, pero sí una técnica local, espontánea y muy limitada. Para identificar un tipo de problemas, no hay nada como explorarlo a través de problemas que uno sabe resolver. ¡Porque un problema resuelto tiene mucha más presencia que un problema que no sabemos ni cómo abordar!

E.- Me lo creo. Y se encontrarán con que la técnica espontánea no les permite ir muy lejos.

P.- Exactamente. Y hay que aprovechar estas limitaciones. El tipo de problema existe, ha resuelto ecuaciones cierto número de veces, y de repente se les propone un problema del mismo tipo sobre el que su técnica fracasa.

E.- ¿Por ejemplo?

P.- Por ejemplo, el profesor dirá: "Pienso en un número. Cuando lo multiplico por 2 y le añado 14, encuentro lo mismo que cuando lo multiplico por 3 y le añado 6." Y aquí, como puedes suponer, los alumnos no saben qué contestar. O dicen un número al azar.

E.- Sí. Pero en realidad la ecuación de la que hablas no es del mismo tipo que las que saben resolver.

P.- Todo depende de cómo se mire. De hecho, podríamos sostener que se trata de un subtipo diferente. Para nosotros está muy claro: ellos saben resolver ecuaciones de tipo $ax + b = c$, y aquí se les plantea una ecuación del tipo $ax + b = cx + d$.

E.- Eso es.

P.- Pero, llegados a este punto, los alumnos no tienen los medios necesarios para hacer este tipo de distinciones. Precisamente porque aún no han escrito ninguna ecuación: hasta ahora todo el trabajo se hacía oralmente.

E.- Un momento, Profesora.

P.- ¿Qué pasa?

E.- Hablando de oral y escrito... Respecto a la técnica del complemento a la unidad, hemos considerado la ecuación $2.800 + 3{,}2x = 4x$. Y, para que yo pudiera aplicar mi técnica, había que dividir la ecuación entre 4 para reducirse a la ecuación $700 + 0{,}8x = x$.

P.- Sí.

E.- Pero para hacer esta división, primero hay que haber escrito la ecuación. ¡No se puede realizar oralmente!

P.- Tienes toda la razón. Éste es un caso claro de "gesto técnico" que no se puede llevar a cabo si la ecuación no existe en su forma escrita. Pero te recuerdo que no se les pide esto a los alumnos; la ecuación que mencionamos antes era sólo un ejemplo entre nosotros.

E.- Vale, vale. Por lo tanto, hasta el momento, los alumnos sólo han resuelto ecuaciones del tipo $ax + b = c$ y sólo conocen estas ecuaciones en su forma oral: "Pienso en un número", etc.

P.- Eso es. Todavía no han escrito ninguna ecuación. Lo que han hecho hasta ahora no es más que una adivinanza para ellos. Y la manera de encontrar la solución de la adivinanza no es escribiendo, sino con un pequeño cálculo oral o, mejor dicho, mental.

E.- Estamos de acuerdo. Pero entonces ¿cómo se pasa a la escritura de las ecuaciones?

P.- Buena pregunta... Aunque eso no es lo más importante.

E.- ¿Y qué es lo más importante?

P.- El paso del que hablas es en realidad el primer paso de una obra matemática a otra. ¿Entiendes?

E.- No...

P.- Es el paso de la aritmética al álgebra.

E.- Pero en aritmética también hay escritura...

P.- Sí, pero sólo se escriben cálculos numéricos. Para resolver aritméticamente lo que para nosotros sería la ecuación $2x + 6 = 20$, por ejemplo, se utiliza un discurso, del tipo "si el doble del número aumentado de 6 es 20, entonces el doble vale 20 menos 6, es decir, 14, y el número vale la mitad de 14, es decir 7". El discurso es la parte esencial del trabajo realizado. Y también, claro, el cálculo mental: hay que poder calcular 20 menos 6 y 14 dividido entre 2... En algunos casos, cuando los números son muy grandes, también se pueden escribir las operaciones; pero estas sub-etapas escritas del trabajo son secundarias, accesorias.

E.- Ya veo.

P.- Dicho sea de paso, el énfasis que se ponía antaño en el cálculo mental se basaba en parte en esta exigencia de la aritmética: no interrumpir el discurso, es decir, el trabajo matemático, con tareas de cálculo escrito.

E.- Sí, sí, ya lo entiendo. En aritmética lo importante es el discurso. Y supongo que también dirás que en álgebra la escritura se vuelve imprescindible.

P.- Algo así. Mira, te pondré un ejemplo. Volvamos a la ecuación de antes. Resolverla algebraicamente ya no consiste en hacer un discurso, sino en manipular signos escritos sobre una hoja de papel o una pizarra, así. *(Escribe en la pizarra.)*

$$2x + 6 = 20$$
$$2x = 20 - 6 = 14$$
$$x = 14 : 2 = 7.$$

E.- Vale. Ya veo lo que quieres decir. Y supongo que lo que va a hacer el profesor en clase es enseñar a los alumnos a escribir ecuaciones. Si dice: "pienso en un número; cuando lo multiplico por 2 y le añado 14, encuentro lo mismo que cuando lo multiplico por 3 y le añado 6", entonces los alumnos tendrán que llegar a ser capaces de escribir $2x + 14 = 3x + 6$.

P.- Eso es...

E.- Y entonces supongo que el profesor les dirá: "Ahora hay que poner todas las *x* en un lado y los números en el otro lado del signo =", etc.

P.- No, no, para nada.

E.- ¿Cómo que no?

P.- Mira, es verdad que se les enseña a escribir ecuaciones. Se trata de una invención extraordinaria dentro de la historia de la humanidad, y me parece muy difícil no decir a los alumnos, de una manera u otra: "Vamos a escribir la adivinanza." Pero al mismo tiempo, esta etapa crucial debe haber estado muy preparada...

E.- ¿Cómo lo hacíais vosotros?

P.- Sería muy largo de contar. Pero te lo intentaré resumir en pocas palabras. Supongamos que los alumnos han estado trabajando la noción de programa de cálculo —de cálculo aritmético, claro—. Por ejemplo, tomar el doble de un número y añadirle 14, tomar el triple de un número y añadirle 6, etc. El primer programa de cálculo se escribe $2x + 14$ y el segundo $3x + 6$. Para $x = 2$, por ejemplo, el primer programa da 18 y el segundo 12.

E.- Vale.

P.- A partir de aquí, hay que hallar un número para el que los dos programas den el mismo resultado, es decir, un número *x* tal que $2x + 14 = 3x + 6$.

E.- Ya. Y ellos saben que esto no vale para cualquier número.

P.- Eso mismo.

E.- Pero ahora deben aprender a sacar de esta igualdad el valor de *x*. ¡Es lo que yo decía!

P.- Cierto. Ése es el objetivo. Pero las cosas no resultan ni tan rápidas ni fáciles como parecía.

E.- Profesora, ¿puedo hacer un comentario?

P.- Por supuesto.

E.- Antes hemos hablado de la técnica habitual, la que se suele enseñar a los alumnos. Y después examinamos mi técnica, la que me había inventado.

P.- ¿Y bien?

E.- Pues sigo pensando que mi técnica es más inteligente que la otra, y no lo digo porque sea mía.

P.- Explícate.

E.- Con mi técnica hay que pensar, en cambio con la técnica habitual se hacen las cosas mecánicamente, aplicando una receta.

P.- No obstante, cuando te pedí que resolvieras la ecuación $2.800 + 3{,}2x = 4x$, me pareció que te quedabas en blanco, cuando en realidad resolver esta ecuación con la técnica habitual es una nadería. ¡O sea que prefieres lo difícil a lo fácil, vaya! E incluso cuando no lo sabes hacer... A ver ¿tú qué harías para resolver una ecuación del tipo... $2(x-10) = 16 - x$?

E.- ¡Hombre claro! ¡Con ésta no se puede! Pero...

P.- Tu técnica en realidad tiene un alcance muy limitado. Y si no te gustan las recetas, ¡allá tú! Eres libre de resolver cada día un problema nuevo para ir a comprar el periódico. Pero la mayoría de la gente preferimos que las tareas no resulten problemáticas. ¡y desde luego los matemáticos no trabajan para alimentar perversiones como las tuyas!

E.- No, no, Profesora. Lo que yo quería decir es que, al final, se acabará dando a los alumnos un algoritmo que éstos se limitarán a aplicar, sin ir más allá.

P.- Pues mira, no es verdad. Es lo que te decía antes. Seamos claros. Hay un aspecto muy importante que los alumnos tienen que descubrir. Y ese aspecto es, precisamente, que, para resolver ecuaciones de primer grado, existe una receta. Esto es lo que hay que trabajar: el descubrimiento de la receta, el hecho de que existe una manera determinada de manipular las ecuaciones escritas para hallar el valor de la x. Tú sabes muy bien que, en matemáticas, no siempre existen este tipo de recetas. Y mucho menos en la vida cotidiana. Además, cuando existen, sería un error querer prescindir de ellas.

E.- ¿Por qué hablas de recetas y no de algoritmos?

P.- ¡Uy! ¡Ése es otro problema! O quizá no tanto... La palabra "algoritmo" se utilizaba antaño en un sentido mucho más amplio que el de receta. Históricamente, "algoritmo" designaba cualquier cálculo con cifras. Era, si quieres, la obra aritmética de la que hablábamos.

E.- ¿Por oposición a qué?

P.- Al cálculo con fichas o con un ábaco. En fin, al cálculo sin las cifras indoárabes que todos utilizamos en la actualidad. Pero será mejor no entrar en este tema. Puedes consultar cualquier libro de historia de las matemáticas si te interesa ahondar en la cuestión.

E.- Muy bien. ¿Pero en qué quedamos respecto a la palabra "algoritmo"?

P.- Pues mira, del mismo modo que se puede hablar del algoritmo aritmético, también se puede hablar del algoritmo algebraico, designando con ello al conjunto de lo que se puede hacer con el lenguaje algebraico elemental. También se podría hablar del algoritmo vectorial. Como ves, no se trata tanto de un algoritmo en el sentido de receta, sino de sistema general de cálculo.

E.- Sí. La distinción era pues una pura cuestión de vocabulario.

P.- No del todo. Nunca nada es *sólo* una cuestión de vocabulario. Volvamos a las ecuaciones que los alumnos tienen que aprender a plantear: $2x + 14 = 3x + 6$, $2(x + 10) = 16 - x$, etc. La idea principal con la que se trabaja es que se puede hallar el valor de la x manipulando estas igualdades.

E.- ¿"Manipular" las igualdades significa utilizar el algoritmo algebraico?

P.- Eso es. Sólo que no se explica a los alumnos la manera exacta en que se puede —o se debe— manipularlas. Se trata precisamente de que descubran las manipulaciones más eficaces, es decir, la técnica habitual. Lo que se hace es, por decirlo de alguna manera, explorar con ellos el algoritmo algebraico.

E.- ¿Y en qué consiste concretamente esa exploración?

P.- Supongo que a ti te costará verlo al principio, porque la técnica habitual te es demasiado familiar como para que adivines, por tanteos, cómo se puede reconstruir. Te daré un ejemplo.

E.- Vale.

P.- Tomemos la ecuación $2x + 14 = 3x + 6$. Tú ves en seguida que $x = 14 - 6$. Muy bien. Y ése es el camino que los alumnos deberán acabar por descubrir, porque es el más corto y seguro para llegar al resultado.

E.- Ciertamente.

P.- Sólo que, para llegar hasta ahí, hay que persuadirse primero de que se puede manipular las x del mismo modo que se manipulan los números. O sea, en este caso, que se puede restar $2x$ de los dos miembros de la ecuación.

E.- ¿Y acaso esto no es evidente?

P.- No. Supón por un instante que a un alumno se le ocurre hacer lo siguiente: escribe el primer miembro de la ecuación como $2x + 6 + 8$, y el segundo miembro como $2x + 6 + x$.

E.- ¿Tú crees que a alguien se le ocurriría hacer eso?

P.- Sí, a estos alumnos sí, porque antes han estado trabajando mucho con programas de cálculo. Y han escrito decenas de veces programas de cálculo equivalentes bajo formas distintas; en cambio, nunca han intentado modificar los dos miembros de una igualdad literal restando la x.

E.- Ya veo.

P.- Supongamos entonces que el alumno escribe: $2x + 6 + 8 = 2x + 6 + x$. Llegado a este punto, puede que haga el siguiente razonamiento, similar al que hacía con las primeras "ecuaciones-adivinanzas": "añadir 8 a $2x + 6$ es lo mismo que añadirle x. Luego x vale 8.".

E.- ¡Se necesita mucha imaginación!

P.- Sí, por lo menos cuando se hace por primera vez. Consideremos ahora la ecuación $2x + 15 = 4x + 1$. La segunda vez se ve más rápido que se puede escribir $2x + 1 + 14 = 2x + 1 + 2x$, y pues que $2x = 14$. El doble del número vale 14, luego el número es 7.

E.- Y volvemos así a un trabajo de tipo aritmético.

P.- Eso es. Porque en esta etapa del estudio, aún no hemos entrado del todo en la obra algebraica, quiero decir en el algoritmo algebraico. Falta por descubrir que uno puede entrar todavía más en ella, y que merece la pena. Es importante descubrir que no es necesario buscar cada vez un "truquillo" nuevo, que hay manipulaciones simples que se repiten y conducen de manera rápida y segura al resultado final. ¡Descubrir que existe una receta, vaya!

E.- He aquí la base del trabajo de entrada en la obra algebraica.

P.- Exacto.

E.- Si te parece, me gustaría comprobar que lo he entendido todo bien. Por ejemplo, tomemos la última ecuación, $2x + 14 = 3x + 6$. Supusimos que a alguien se le ocurriría escribir $(2x + 6) + 8 = (2x + 6) + x$, y que llegaría a la conclusión de que $x = 8$.

P.- Sí. Te puede parecer una idea un tanto barroca, pero lo normal es que, cuando se aborda un tipo de problema nuevo, la técnica habitual no sea lo primero que salga. Al principio siempre hay muchos ensayos, desvíos, descubrimientos curiosos. ¡Y eso que sólo hemos tomado un ejemplo!

E.- Sí, sí, vale. Ya lo he entendido. Ahora lo que quiero es intentar imaginar lo que viene después. Supongamos que, en la clase, se parte efectivamente de esa manipulación después de haber sido propuesta por un alumno. Resulta posible imaginar que, al repetir este trabajo, los alumnos se darán cuenta que no es necesario ir tan lejos. Basta con aislar una x de cada miembro, $x + (x + 14) = (2x + 6) + x$, para deducir que $x + 14 = 2x + 6$, y luego, del mismo modo, que $14 = x + 6$. Y entonces se pueden dar cuenta de que esto equivale a restar $2x$ a los dos miembros de la ecuación.

P.- Eso es. Aunque, claro, no todo va tan rápido como tú lo cuentas. Y hay que tener en cuenta, además, que el hecho de que sea mejor restar de golpe $2x$ a cada miembro tiene que aparecer como una conquista de los alumnos...

E.- Como un descubrimiento.

P.- Sí. Y a partir de ahí tendrán que renunciar a los pequeños placeres de encontrar, en cada caso, un truquillo específico para cada ecuación particular. ¡Un pequeño placer al que, por cierto, el otro día tú mismo no querías renunciar, en nombre de la inteligencia o de no sé qué!

E.- Vale, vale. Porque entonces no tuve en cuenta que también existe el placer de ver emerger una técnica general, válida para muchos casos.

P.- ¡Veo que sientas la cabeza! En efecto, la repetición también es una fuente de placer. Además, no olvides que una técnica no se construye en un solo día. Habrá que adaptarla constantemente a nuevos subtipos de ecuaciones, ampliar su alcance y lograr que se convierta en una técnica cada vez más general.

E.- ¿Más general?

P.- Claro, para que permita resolver problemas como: un número es tal que si le restamos 7 a su mitad obtenemos lo mismo que si le sumamos 2 a su onceava parte...

E.- O sea, $\frac{x}{2} - 7 = \frac{x}{11} + 2$.

P.- Sí. Como ves, en este caso la técnica que se ha construido en clase también funciona.

E.- Ya, pero eso no debe ser tan evidente para los alumnos.

P.- Y aunque lo fuera, hay que enriquecer la técnica con un gesto nuevo, para que permita resolver este tipo de ecuación de manera eficaz y fiable.

E.- Ya veo: hay que quitar los denominadores, y después ya estaremos en el caso anterior. Lo empiezo a entender. Sí.

P.- Perfecto. Pues aquí tienes el núcleo del proceso. El resto, que no por ello es menos importante, te lo tendrás que imaginar... Ya es tarde y lo tenemos que dejar aquí. Espero que con esto empieces a entender mejor como funcionan las "reconstrucciones escolares" de las obras matemáticas.

E.- No sé... En todo caso sí sé algo más sobre la obra algebraica. Muchas gracias Profesora y hasta la próxima.

SÍNTESIS 3

En estos *Diálogos*, la Profesora presenta un problema didáctico muy difícil y a la vez muy general. Se parte de una obra matemática —en este caso del álgebra elemental— y de un grupo de personas —una clase de 2º de ESO con su profesor— dispuestas a estudiar esta obra y que tienen, de entrada, cierta familiaridad con determinados objetos matemáticos y con determinadas maneras de utilizarlos. El problema que se plantea es encontrar o inventar situaciones que constituyan un buen "laboratorio" para que dicho grupo de personas pueda avanzar eficazmente en el estudio de la obra considerada. De los *Diálogos* se desprende que una situación adaptada al estudio de una nueva cuestión debe cumplir dos condiciones inseparables:

(1) La situación se debe poder elaborar con materiales pertenecientes al *medio matemático* de los alumnos, es decir, al conjunto de objetos cuyas propiedades se dan más o menos por sentado y que se pueden manipular de forma bastante segura. No es suficiente, en efecto, que los alumnos tengan una mera familiaridad *cultural* con dichos objetos. Es preciso que tengan con ellos una verdadera familiaridad *matemática*.

(2) La situación debe ser susceptible de generar algunas de las cuestiones que dan origen a la obra que se quiere estudiar. Esto significa que mediante una pequeña variación de ciertas tareas y cuestiones conocidas por los alumnos, ha de ser posible provocar la aparición de los principales tipos de problemas y técnicas que componen la obra en cuestión.

Naturalmente, puede darse el caso (y quizá sea esto lo más habitual) que, para una obra matemática concreta y un grupo determinado de alumnos, no se conozca ninguna situación que permita hacer avanzar de manera óptima a los alumnos en el estudio de la obra considerada, lo cual significaría que el problema didáctico planteado no tiene una solución conocida. Puede ocurrir, por ejemplo, que no se conozca la razón de ser de la obra objeto de estudio o que no se encuentre una cuestión inicial que permita generarla. También puede ocurrir que, aunque se conozca una cuestión apropiada, no se sepa cómo realizar concretamente su "implementación didáctica" en el medio matemático disponible para los alumnos.

Por ejemplo, no parece que exista un acuerdo unánime sobre lo que sería una situación óptima para que los alumnos de secundaria puedan pasar del estudio de la "obra aritmética" al estudio de la "obra algebraica". En el *Episodio,* Marta intenta iniciar a sus alumnos de segundo de ESO a las ecuaciones de primer grado, entendiendo éstas como la puerta de entrada a la obra algebraica. La estrategia utilizada consiste, esencialmente, en pasar de ciertos problemas simples y conocidos por sus alumnos sobre el cálculo de porcentajes e impuestos, a los correspondientes problemas "inversos" que surgen al permutar entre sí los datos y las incógnitas.

El Estudiante propone, como posible alternativa, una situación geométrica que es desautorizada por la Profesora por no cumplir las condiciones que hemos citado: con base en el currículo de matemáticas actual, no es previsible que los alumnos de segundo de ESO tengan la familiaridad matemática necesaria con los objetos que constituyen dicha situación. Además, la ecuación de primer grado que permite estudiar esta situación es técnicamente más complicada que la que resulta de la situación de los impuestos propuesta por Marta.

La propia Profesora, aunque considera relativamente adecuada la situación utilizada por Marta, propone una situación diferente generada por problemas-adivinanza del tipo "pienso en un número". La estrategia consiste aquí en pasar de unos problemas resolubles mediante una técnica muy fiable pero esencialmente oral, a problemas *del mismo tipo* en los que la técnica anterior fracasa —porque se requiere la manipulación imprescindible de signos escritos: el "planteo" de una ecuación y su resolución—. La propuesta de la Profesora presupone, así, otra forma de entender la "entrada en la obra algebraica". Pero, en definitiva, deja abierto el problema de la existencia de una situación óptima para este propósito.

Sólo en caso de disponer de una situación didáctica adaptada al estudio de una cuestión matemática, puede plantearse con propiedad el problema de gestionarla adecuadamente. Es en este punto donde entra en juego la pericia del profesor, esto es, el grado en que éste domina las *técnicas didácticas* pertinentes para poner en marcha la situación.

Pero incluso si se dispone de una buena situación para avanzar en el estudio de la cuestión planteada, no todo queda en manos del saber hacer del profesor. El rendimiento de las técnicas didácticas depende ante todo del *contrato didáctico* en el que actúan conjuntamente profesor y alumnos. Es éste el que define lo que será posible o imposible hacer en clase, lo que tendrá sentido para los alumnos y el profesor de una manera compartida. Antes de ser eficaces, las técnicas didácticas tienen que ser aceptables y significativas para los actores del sistema didáctico.

Si queremos comprender el funcionamiento de una clase de matemáticas, no basta con observar lo que hacen el profesor y los alumnos; tampoco es suficiente describir las técnicas didácticas que utilizan (los unos para estudiar, el otro para dirigir su estudio) ni el dominio que muestran de las mismas. Para entender los hechos didácticos que pueden observarse en una clase de matemáticas, es preciso interrogarse sobre la estudiabilidad de la cuestión matemática planteada y sobre las restricciones que emanan del contrato didáctico.

COMENTARIOS Y PROFUNDIZACIONES 3

Si entendemos la enseñanza como una ayuda al estudio, la organización del proceso de enseñanza debe de hacerse en función de la estructura *global* del proceso de estudio. Plantearemos aquí el problema de la organización material de una enseñanza que pretenda ayudar de la mejor forma posible a llevar a cabo el proceso de estudio o proceso didáctico.

1. La formación de un sistema didáctico

Se forma un *sistema didáctico* cada vez que algunas personas se enfrentan a una cuestión cuya respuesta no es evidente y deciden *hacer algo* para resolverla. En este caso, las personas se convierten en *estudiantes* de la cuestión, sin que por ello deban ser forzosamente *alumnos*. De hecho, los estudiantes podrían ser investigadores de matemáticas, biólogos, químicos, economistas e incluso músicos o pintores que se plantean cuestiones matemáticas para utilizar las respuestas en su trabajo. También puede tratarse, claro está, de profesores que estudian cuestiones de matemáticas en el marco de su actividad docente.

Para llevar a cabo la tarea problemática que tienen entre manos, los estudiantes pueden recurrir a la ayuda de un *director de estudio*. En el caso de que los estudiantes sean además alumnos de una escuela, instituto o universidad, la función de director de estudio suele desempeñarla un *profesor*. Pero también puede suceder que los estudiantes prescindan de toda ayuda exterior. En el primer caso tendremos un *sistema didáctico* formado por un grupo de estudiantes, un director y una cuestión matemática por estudiar, mientras que en el segundo caso tendremos un sistema *autodidáctico*. El investigador que se instruye sobre un tema matemático para progresar en sus investigaciones o el profesor que estudia alguna cuestión de matemáticas para poder enseñarla mejor, constituyen dos casos típicos de sistemas autodidácticos.

Un grupo de estudiantes que busca en una obra matemática respuestas a ciertas cuestiones puede pedir ayuda a un director de estudio: se constituye de esta forma un *sistema didáctico*, formado en primera instancia por las cuestiones matemáticas (o la obra matemática que da respuesta a dichas cuestiones), los estudiantes y el director de estudio. Si el grupo estudia por su cuenta, se constituye un *sistema autodidáctico*.

2. Comunidades de estudio e "individualización de la enseñanza"

Vimos en la unidad anterior que la cuestión a la que uno se enfrenta remite, casi sin excepción, a cierto *tipo* de cuestiones. Del mismo modo, es también muy poco frecuente que sea una *única* persona la que se lance al estudio de una cuestión: generalmente la gente se agrupa para compartir el esfuerzo y los logros, formando así una *comunidad de estudio*.

Naturalmente existen casos extremos en los que el grupo empieza por una sola persona, pero esta situación no se prolonga nunca mucho tiempo: es excepcional que un problema sólo se lo plantee una persona, sin compartirlo con nadie más.

La historia de las matemáticas muestra incluso que si, en algún momento, varias personas se han interesado sin saberlo por un mismo problema, acaban generalmente por establecer contacto para formar, si no un equipo de investigadores, sí por lo menos lo que se llamaba, en la Inglaterra de finales del siglo XVII, un *invisible college*, un "colegio invisible", es decir, una comunidad de estudio cuyos miembros se comunican a distancia aunque no se los vea nunca a todos reunidos. En la mayoría de los casos, la constitución de un tipo de problemas y la de una comunidad de estudio *son dos componentes de un mismo proceso*.

Problemas aislados y creación matemática

" ... resulta muy poco frecuente que un problema matemático, incluso después de resuelto, no dé pie a muchos otros. En el caso de las ecuaciones diferenciales de la dinámica, tras un periodo de estancamiento, nació toda una nueva parte de las matemáticas con los trabajos de H. Poincaré a partir de 1880, la teoría de los sistemas dinámicos, rica en cuestiones difíciles y profundas, y a la que muchos matemáticos se dedican ahora con más ardor que nunca."

Jean Dieudonné
En honor del espíritu humano
Alianza Editorial, Madrid 1987, p. 37.

El colegio invisible

Parece que la expresión "colegio invisible" la empleó por primera vez el inglés Robert Boyle (1627-1691) quien bautizó así al grupo de científicos con los que intercambiaba información acerca de las investigaciones llevada a cabo por cada uno de ellos. Este grupo informal fue el germen de la creación en 1662 de la *Royal Society*. "La compañía, que ya no se limitaba a los eminentes y respetables residentes de una capital se convirtió en un "colegio invisible". Para ser escuchado en la *Royal Society* de Londres no era necesario asistir a sus reuniones. John Beale podía escribir desde Herefordshire, en el oeste de Inglaterra, y describir los problemas de las huertas [...] Nathaniel Fairfax de Suffolk, informó sobre unas personas que comían personas y sapos [...] La lista también incluía a John Flamsteed, que escribió sobre astronomía desde Derbyshire y a Martin Lister que escribió desde York sobre biología. Y, desde luego, había frecuentes comunicaciones de Boyle y Newton."
(D. J. Boorstin, *Los descubridores*, Ed. Crítica, Barcelona 1986, p. 378.)

La constitución de un tipo de problemas y la de una comunidad de estudio son acontecimientos simultáneos que pueden ser considerados como las dos caras de un mismo proceso: la formación de un sistema didáctico.

Existen dos tipos de organizaciones que responden muy bien a la noción de "sistema didáctico": las clases de matemáticas (en las que el profesor hace de director de estudio) y las comunidades de investigadores (dirigidas generalmente por un "líder" o "investigador principal"). A pesar de las diferencias que aparecen a primera vista, existen analogías profundas entre ambos tipos de comunidades de estndio.

Se suelen poner de manifiesto las diferencias entre una clase de alumnos y un grupo de investigadores: por ejemplo el hecho de tratar con problemas ya resueltos (a veces desde hace muchos siglos) o con problemas abiertos. Pero aquí resaltaremos las condicionantes comunes. En ambos casos existe un grupo de personas con un director o líder que se propone estudiar juntas una cuestión o un tipo de cuestiones determinadas. En ambos casos hay periodos más o menos largos de "enseñanza": también los investigadores asisten a cursos, conferencias, seminarios, etc. En ambos casos también hay, claro está, "aprendizaje" —el objetivo del estudio—. Incluso la diferencia en el grado de involucración personal y "voluntaria" en la tarea, que suele considerarse como la distinción esencial entre alumnos e investigadores, es sólo una diferencia relativa.

Pero lo que queremos resaltar sobre todo es que en ambos casos el "actor" del estudio es irreductiblemente *una comunidad*, y que *la enseñanza debería organizarse en función del carácter comunitario del estudio*. En esta perspectiva, el tema de la "individualización de la enseñanza" aparece como paradójico: ¡a nadie se le ocurriría propugnar la "individualización de la investigación matemática"!

Parece pues que, al hablar de individualización de la enseñanza, se ignoran dos hechos fundamentales que rigen todo proceso de aprendizaje. En primer lugar, aunque se pueda considerar el aprendizaje como un logro individual, se olvida que es el resultado de un proceso colectivo: el proceso de estudio que se desarrolla *en el seno de una comunidad*, sea ésta una clase o un grupo de investigadores. En segundo lugar, el proceso de estudio sólo puede llevarse a cabo si el aprendizaje es algo bien compartido dentro del grupo: para que el individuo aprenda, *es necesario que el grupo aprenda*. Desde este punto de vista, el aprendizaje es también, necesariamente, un hecho colectivo. De ahí la paradoja de la que hablábamos: ¿por qué querer individualizar un medio de estudio —la enseñanza— cuando el estudio es un proceso colectivo cuyo objetivo —el aprendizaje— tiene aspectos fundamentalmente comunitarios?

Surgen así fuertes dudas respecto a la creencia tan difundida en nuestra cultura escolar de que individualizar la enseñanza sería lo más conveniente, e incluso decisivo, para mejorar la "calidad de la enseñanza". En este contexto, se considera que la personalización de la enseñanza, entendida como individualización extrema, es el horizonte indiscutible al que se debería tender y se acepta que la falta de recursos económicos y humanos es el único motivo que limita el necesario esfuerzo de individualización.

El tratamiento individualizado constituye un eslogan pedagógico muy influyente en la actualidad. Consiste, tal como indica la Profesora en los *Diálogos*, en adaptar la enseñanza a las particularidades de cada alumno en cuanto individuo singular. Se da por supuesto que son las *diferencias* individuales de los alumnos —su capacidad, motivación, interés, actitud, formación previa, etc.— las que determinan el éxito o fracaso del proce-

Paradigma y comunidad científica

Desde principios de los años sesenta está sólidamente establecido que el sujeto de estudio de los campos de problemas científicos son efectivamente las comunidades. Thomas S. Kuhn, en la posdata de 1969 a su *Estructura de las Revoluciones Científicas* de 1962, afirma: "Un paradigma es lo que los miembros de una comunidad científica comparten y, recíprocamente, una comunidad científica consiste en hombres que comparten un paradigma". Y añade: "Si este libro se estuviera reelaborando, daría lugar a que se iniciara una discusión sobre la estructura comunitaria de la ciencia" (p. 271).

La individualización de la enseñanza en la terminología escolar

En la terminología oficial se habla de "individualizar los objetivos", "individualizar los contenidos", "individualizar el ritmo de aprendizaje", "individualizar los métodos de evaluación", etc. Desde una perspectiva constructivista se considera que la verdadera individualización consiste en adaptar los métodos de enseñanza a las características individuales de los alumnos. (*Marc Curricular per a l'Ensenyament Obligatori*, Generalitat de Catalunya, 1990, pp. 60-61.)

so didáctico, y se concluye que la organización ideal a la que debería tenderse pasa por la individualización absoluta de la enseñanza. En contra de esta visión, el análisis didáctico de las *condiciones reales* del aprendizaje conduce a basar la organización de la enseñanza más en las características *compartidas* por los estudiantes que en las singularidades de cada individuo.

La organización de la enseñanza debe basarse más en lo que los estudiantes tienen en común que en lo que es particular a cada uno de ellos. Desde un punto de vista antropológico, el estudio y, con él, el aprendizaje son actividades que *unen* a los individuos.

Surge entonces, inevitablemente, la siguiente cuestión práctica: ¿cómo organizar la enseñanza en una clase integrada por alumnos con formaciones matemáticas muy diferentes? Por ejemplo, ¿cómo organizar un crédito común de matemáticas para una clase que reúne a individuos con historias escolares muy dispares y porvenires también distintos, como ocurre en 4° de ESO?

Es obvio que para estudiar ciertos tipos de problemas (como la resolución de triángulos o la probabilidad condicionada) no cualquier conjunto de alumnos constituye una comunidad de estudio adecuada. Pero a continuación hay que añadir, y esto es lo más importante, que para estudiar *muchos otros* tipos de problemas es posible que ese *mismo* conjunto de alumnos sí constituya una comunidad de estudio pertinente.

En lugar de pretender adaptar los métodos de enseñanza a las características singulares de cada alumno, la organización de la enseñanza debe tener en cuenta lo que los alumnos tienen en común, con el fin de potenciar la formación de grupos de alumnos capaces de estudiar *juntos* todo un abanico de tipos de problemas.

Reaparece aquí el problema del currículo abordado en la unidad anterior. Dijimos que la elección de las obras matemáticas que forman el currículo obligatorio es fruto del acuerdo social. A la vista de lo dicho hasta aquí, parece poco razonable que dicho acuerdo no tome también en cuenta la posibilidad de constituir "comunidades escolares" capaces de estudiar las obras elegidas.

3. El carácter abierto de la relación didáctica

Al constituirse una comunidad de estudio alrededor de un determinado tipo de problemas, se establece una *relación didáctica* entre los estudiantes y el director de estudio. Esta relación resulta ser "abierta" a la vez para los alumnos y para el profesor. Por un lado, los alumnos no podrán generalmente conocer de antemano el camino que deben recorrer a lo largo del estudio, ni entender las razones por las cuales el profesor les conduce hacia tal o cual tipo de problemas, abordándolos con tal o cual técnica de resolución. Por otro lado, el profesor tampoco será siempre capaz de prever todas las dificultades que podrán surgir a lo largo del proceso de estudio, ni las reacciones de los alumnos frente a ellas.

Esta doble apertura es una característica esencial de la relación entre el profesor de matemáticas y sus alumnos. Entre las cosas que un profesor enseña a sus alumnos, hay algunas que conoce y otras que ignora —y quizá nunca podrá saber—. El profesor no puede prever exactamente lo que el alumno hará ni tampoco lo que aprenderá. De hecho, todo intento de "cerrar" la relación didáctica puede llegar a bloquear o debilitar el proceso de estudio, con el consiguiente empobrecimiento e incluso paralización del aprendizaje.

Entre los fenómenos relacionados con la tendencia a cerrar la relación didáctica podemos destacar: la poca consideración otorgada al trabajo matemático del alumno (que no suele ser considerado como un "verdadero" trabajo matemático); la concentración en el aula de las actividades matemáticas del alumno y su fuerte dependencia del profesor; el papel desmesurado que se adjudica al profesor dentro del proceso didáctico; y, en última instancia, lo que hemos denominado la "irresponsabilidad matemática" de los alumnos (ver **Anexo B**).

La enseñanza, como medio del proceso didáctico, no debe pretender controlar de una manera absoluta el desarrollo de dicho proceso. La relación didáctica es una relación "abierta". En la medida en que la enseñanza de las matemáticas se organiza para intentar "cerrar" esta relación, provoca un empobrecimiento del aprendizaje matemático de los alumnos.

4. El profesor como director de estudio

Hemos visto que el estudio de las matemáticas es una actividad comunitaria y que la relación didáctica que se establece en el seno de la comunidad de estudio es una relación abierta.

Al considerar el estudio como objetivo principal del proceso didáctico, se puede superar la sujeción excesiva de los actores a la institución escolar. En esta perspectiva, la enseñanza deja de ser el objetivo último y va tomando un papel de instrumento de apoyo al estudio, lo que produce un cambio fundamental en la visión de los roles de "profesor" y "alumno". Ya no se considera al profesor de matemáticas *sólo* como un enseñante, ni a los alumnos como meros sujetos de un proceso de aprendizaje.

Este cambio de perspectiva es importante en varios sentidos. En primer lugar, la actividad matemática a desarrollar toma un relieve especial: ya no aparece (ni para los alumnos ni para el profesor) como dependiente en cada instante de la voluntad del profesor, y su desarrollo adquiere condicionantes propios, con cierta independencia de los actores.

En segundo lugar, la visión convencional del profesor como "aquel que enseña" y del alumno como "aquel que aprende lo que se le enseña" puede evolucionar hacia una visión en la que los roles de profesor y alumno son definidos menos rígidamente. Aunque siga existiendo una asimetría entre ambos, aparecen nuevos puntos de contacto, dado que ahora se trata de realizar conjuntamente una tarea matemática.

En tercer lugar, por fin, se produce un cambio importante en el equilibrio de las responsabilidades asignadas tradicionalmente tanto al profesor como al alumno. El profesor ya no tiene que decidir en cada instante cuál ha de ser la actividad puntual de los alumnos y deja de considerarse el único (y principal) responsable de la actitud, motivación y quehacer de éstos. La creciente responsabilidad del alumno permite también, por ejemplo, dar sentido y legitimidad a una evaluación *externa* de su trabajo (es decir, una evaluación no diseñada y controlada únicamente por el profesor), en la medida en que el estudio de una obra matemática se vuelve más objetivable e independiente del criterio del profesor.

La evaluación externa

Las evaluaciones internas a las que recurre habitualmente el profesor proporcionan una forma crucial de comunicación entre alumnos y profesores que permite a ambos actuar más adecuadamente para el desarrollo del proceso didáctico. Pero lo que ocurre en un clase debe también adquirir cierta solidez para poder ser apreciado independientemente de los aspectos contingentes de la historia de la clase. Ésta es la función esencial de la evaluación externa: proporcionar a los alumnos y al profesor una imagen más objetiva del fruto de su trabajo en común. Para garantizar esta objetividad, la evaluación externa debe ser diseñada por un equipo ajeno al centro docente que no tenga ningún motivo para preferir que los resultados de los alumnos evaluados sean buenos o malos, y debe realizarse sin que el profesor de la clase conozca de antemano el examen que se pasará a los alumnos.

En contrapartida, se hacen más visibles las responsabilidades del profesor como matemático garante del control y guía de una actividad genuinamente matemática, lo que contribuye a disminuir el riesgo de la "enfermedad didáctica". En particular, el profesor deberá conocer aquellas cuestiones que definen la "razón de ser" de las obras que hay que estudiar, así como las posibles maneras concretas de generar, bajo determinadas condiciones, las principales organizaciones matemáticas (tipos de problemas, técnicas, tecnologías y teorías) que constituyen la obra estudiada. Esta "reconstrucción artificial" de los conocimientos matemáticos ha sido desarrollada por la *teoría de las situaciones didácticas* (el lector encontrará una presentación de los principales elementos de esta teoría en el **Anexo D**).

Del mismo modo, el alumno, en su calidad de estudiante, se puede considerar menos dependiente del profesor al tener un referente externo en la actividad matemática que realiza. Esto le proporciona mayor libertad para gestionar su propio estudio y utilizar medios de estudio complementarios de la enseñanza, como son, por ejemplo, los libros de consulta, las investigaciones personales, los intercambios con los compañeros, etc.

Cuando se considera el estudio como el objetivo principal del proceso didáctico, resulta mucho más fácil traspasar al alumno una parte de la responsabilidad matemática asignada hoy día en exclusiva al profesor. Este nuevo reparto de responsabilidades asigna al profesor el papel de "director de estudio", posibilita que los alumnos reconozcan al profesor como "matemático" y disminuye el riesgo de la "enfermedad didáctica".

Interacción social y contrato

La noción de *contrato didáctico* se inspira en una visión del mundo social en la que cada tipo de interacción particular supone un contrato cuyas cláusulas definen a la vez lo que los actores de la interacción pueden hacer legítimamente y el significado de sus actuaciones. Participar en una interacción social determinada supone que se reconozca (y acepte) el contrato específico que la gobierna. Pero lo que dificulta la "entrada" en el contrato es el carácter ampliamente implícito de sus cláusulas y el hecho de que, en muchos casos, la explicitación de éstas no es posible porque cambiaría el contenido del contrato y su naturaleza. Por ejemplo un alumno no puede preguntar al profesor si debe respetarle sin que su pregunta sea considerada por el profesor como una falta de respeto...

5. Contrato didáctico, contrato pedagógico, contrato escolar

Los cambios descritos en el apartado anterior son cambios de la relación didáctica, esto es, de la relación que se establece dentro de un sistema didáctico entre los estudiantes y el director de estudio en referencia a las cuestiones estudiadas. Se trata, por tanto, de cambios en las cláusulas que rigen el *contrato didáctico*.

Pero el contrato didáctico no rige todos los aspectos de la relación que se establece entre los alumnos y el profesor. Existe primero un contrato más general y visible, el contrato *pedagógico*, que regula las interacciones entre alumnos y profesores que no dependen del contenido del estudio. A su vez, el contrato pedagógico aparece como una parte específica de un contrato más amplio, el contrato *escolar*, que gobierna estas instituciones sociales particulares que llamamos *escuelas*.

Para situar estos distintos contratos, hay que partir de la noción genérica de escuela. La palabra escuela proviene, a través del latín *schola*, de la palabra griega *skholé* que significaba, en la Grecia antigua, ocio, pero que muy pronto pasó a designar todo aquel tiempo libre que, fuera del trabajo, se dedicaba al estudio. La noción de escuela remite, pues, a la idea de una institución en la que, al alejarse de sus actividades normales —en particular del trabajo— uno podía instruirse mediante el estudio. La expresión de *escolaridad obligatoria* significa, en un principio, la obligación de interrumpir sus actividades habituales para dedicar este tiempo libre a instruirse.

> ***Trabajo, ocio y obligación escolar***
>
> Cuando se estableció la obligatoriedad de la instrucción, se quería imponer un tiempo de escolaridad —de "ocio estudioso"— a aquellos niños que trabajaban todo el día en el campo o en la fábrica.
>
> Hoy día, la instrucción obligatoria (entendida desde un punto de vista más profesional o ético que legal) también abarca a los adultos que deben cada vez más interrumpir su trabajo durante un corto periodo de tiempo para renovar sus conocimientos profesionales siguiendo cursos de formación. Para la mayoría de profesiones, la obligación de "ir a la escuela" o de "volver" a la escuela parece que tiende a extenderse a toda la vida activa de la persona.

Es el *contrato escolar* el que, al definir la escuela, define también la posición genérica de alumno: en este sentido, el alumno es toda aquella persona que, interrumpiendo sus actividades "normales", va a una escuela a instruirse; uno se convierte en alumno al ingresar en una escuela. En realidad, por el hecho de ser alumno, se pueden hacer muchas cosas que no se podrían hacer en situación normal. La escuela proporciona a los alumnos un salvoconducto para acceder legítimamente a ciertas obras de la sociedad que no les son normalmente accesibles. Por ejemplo, un ciudadano cualquiera no puede, así como así, entrevistar al tendero del barrio sobre su actividad comercial. Pero un grupo de alumnos de secundaria que tienen que realizar un trabajo sobre los problemas de los comerciantes en la gestión del I.V.A. quedan automáticamente legitimados para realizar dicha entrevista. Del mismo modo, sin la mediación de la escuela, muchos niños no podrían nunca acceder a la obra musical de Mozart porque interesarse por esta obra aparecería como algo ilegítimo en su entorno social. La posición de alumno proporciona quizá más libertad que ninguna otra posición respecto de las normas sociales y culturales de su entorno: paradójicamente la *obligación* escolar es productora de *libertad*.

Ahora bien, para acceder a estas obras, la escuela proporciona a sus alumnos unos "guías" —los profesores— para que hagan de "pedagogos". La palabra "pedagogo" designaba originariamente, en la Grecia antigua, al esclavo que conducía al joven alumno a la escuela y le servía de preceptor. La utilizamos aquí para designar al profesor en cuanto persona encargada de *conducir al alumno hacia y hasta las obras* que éste debe estudiar. El *contrato pedagógico* gobierna entonces los aspectos generales que afectan al entorno del estudio, es decir, los aspectos no específicos de la obra a estudiar. El contrato pedagógico se parece al sistema operativo de un ordenador —que sería la escuela—, en el sentido de que posibilita el funcionamiento de distintos programas —los contratos didácticos— que permiten realizar tareas específicas de estudio. Así, por ejemplo, el contrato pedagógico exige del alumno una confianza general en el profesor, en las decisiones que éste toma, y un respeto a su autoridad. Al mismo tiempo, también exige del profesor una atención y responsabilidad especiales hacia los alumnos y sus condiciones de trabajo.

Se activa el contrato didáctico cuando, bajo la dirección del profesor, el alumno entra verdaderamente en contacto con una obra concreta para estudiarla y se adentra en ella. Se pasa del *contrato pedagógico* al *didáctico* cuando la relación entre dos (profesor y alumno) se convierte realmente en una relación entre tres: el alumno, la obra a estudiar y el profesor como director de estudio. Si retomamos la metáfora anterior, el contrato didáctico sería el programa de ordenador que, en un sistema operativo adecuado, permite realizar tareas concretas (aunque no *cualquier* tipo de tareas).

Vemos, pues, que el contrato didáctico sólo puede existir cuando existe un contrato pedagógico y, más allá, un contrato escolar. En realidad, el contrato escolar y el contrato pedagógico, mediante su contenido y la manera como son interpretados, afectan en gran parte *los tipos de contratos didácticos posibles*, aunque éstos queden principalmente determinados por la obra a estudiar.

Puede ocurrir que el alumno acepte mal el contrato escolar, por ejemplo, porque no entiende bien las

Lo escolar, lo pedagógico, lo didáctico

El profesor deja de escribir en la pizarra y se gira enojado hacia sus alumnos porque éstos no paran de hablar. El origen de los murmullos se puede hallar en cada uno de los tres niveles indicados.

Puede ser que sean alumnos relativamente ajenos a la institución escolar, es decir alumnos "no civilizados" respecto a esta institución y que rehúyen el contrato escolar.

También puede ser que a los alumnos les repela el "estilo" pedagógico del profesor porque parece menospreciarlos o porque no tiene suficiente autoridad, etc.

Pero a lo mejor los murmullos responden a una ruptura del contrato didáctico por parte del profesor: quizá está resolviendo el problema con una técnica que los alumnos no conocen; o bien es que no muestra claramente lo que los alumnos deberán hacer por sí mismos al respecto; o tal vez actúa como si los alumnos tuvieran ciertas informaciones que ellos desconocen; etc. La observación de clases muestra que éste es el origen más frecuente de los murmullos espontáneos que suelen surgir en el aula.

razones de ser de la escuela (tal como las explicitaba la Profesora en los *Diálogos* de la Unidad 2). Pero, aún siendo así, puede ser también que acepte al mismo tiempo el contrato pedagógico que lo liga con tal o cual profesor: al alumno le gusta estar con su maestro o maestra, pero no le gusta lo que hacen en la escuela. También puede ocurrir que el alumno se adhiera gratamente al contrato escolar, pero acepte mal el contrato pedagógico que hace depender su acceso a las obras por estudiar de su relación con el profesor.

Muchos "movimientos innovadores" intentan sobre todo modificar el contrato pedagógico o el contrato escolar, en vistas a hacer viables determinados contratos didácticos. Pero sabemos que el disponer de un ordenador más potente o con un sistema operativo mejor deja aún abierto el problema de la construcción de programas eficaces para llevar a cabo determinados tipos de tareas. Sin olvidar la interdependencia entre los tres niveles (lo escolar, lo pedagógico y lo didáctico), cabe recordar que el contrato didáctico es la piedra de toque de toda organización escolar.

PEQUEÑOS ESTUDIOS MATEMÁTICOS

PEM 10. Problemas de primer grado

La cuestión inicial

¿Cómo se resuelven los dos *Problemas de primer grado con una incógnita* que cita la Profesora en los *Diálogos*?

Problema 1

Un padre tiene 33 años y su hijo 10. ¿Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será la doble de la del hijo?

Vías de estudio: una, de nivel 1.
Ayudas: [28] –> [148]

Problema 2

Cuando el reloj marca las 12, las dos agujas coinciden. ¿A qué hora volverán a coincidir?

Vías de estudio: una, de nivel 1.
Ayudas: [5] –> [78] –> [45] –> [139] –> [57]

PEM 11. De una variable a dos variables

La cuestión inicial

¿Cómo hallar los máximos y mínimos de una función de dos variables $f(x,y)$ cuando sólo se conoce una técnica para funciones de una variable?

Problema 1

¿Tiene extremos (máximos y mínimos) la función $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$ para $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$? ¿Cuáles son?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [60] -> [2] -> [111]

Problema 2

Elaborar una técnica debidamente justificada para hallar los extremos de la función cuadrática $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$ a partir del estudio de funciones de una variable. ¿Cuál es el ámbito de aplicabilidad de esta técnica?

Vías de estudio: una, de nivel 4.
Ayudas: [27] -> [40]

PEM 12. Construcciones con la regla de dos bordes paralelos

La cuestión inicial

Generalmente asociamos la construcción de figuras geométricas con dos instrumentos de trazado que los matemáticos griegos instauraron como los instrumentos matemáticos por excelencia: la regla y el compás. Con estos dos instrumentos se pueden trazar círculos, rectas, y otras figuras más complejas: la paralela a una recta por un punto dado, la mediatriz de un segmento, la perpendicular a una recta por un punto dado, un paralelogramo, un triángulo equilátero de lado dado, etc. Todas estas figuras son *constructibles con regla y compás*. El estudio de su construcción y de sus propiedades es precisamente uno de los objetivos de la geometría elemental sin coordenadas —la geometría *euclidea*—.

La cuestión que queremos plantear aquí debería hacer descubrir al lector un *nuevo tipo de problemas* dentro del ámbito de la construcción de figuras geométricas del plano. Se trata de cambiar el sistema de instrumentos clásico formado por la regla y el compás por un *único instrumento de trazado* que utilizamos muy a menudo para fines no matemáticos y que nos es, por ello, mucho más familiar: *la regla de dos bordes paralelos.*

regla de dos bordes paralelos:

Del mismo modo que la regla y el compás nos permiten trazar rectas (definidas por dos puntos dados) y círculos (de centro y radio dados), la regla de dos bordes paralelos nos permite igualmente trazar rectas, y también rectas paralelas a distancia igual que la amplitud de la regla. ¿Qué más nos permite construir? ¿Qué configuraciones geométricas se pueden trazar con una regla de dos bordes paralelos? ¿Cómo se realizan dichas construcciones? ¿Existen figuras constructibles con regla y compás que no lo son con esta regla? ¿Y a la inversa?

Problema 1

Consideremos una regla de dos bordes paralelos de anchura d. Dados dos puntos A y B con $AB > d$, realizar con esta regla las siguientes construcciones:
(a) Trazar un punto C tal que B sea el punto medio de $[AC]$.
(b) Trazar el punto medio I del segmento $[AB]$.
(c) Trazar la mediatriz de $[AB]$.
(d) Trazar la perpendicular a (AB) que pasa por B.
(e) Dados tres puntos no alineados A, B y C, trazar la bisectriz interior del ángulo CAB.
(f) ¿Se pueden realizar las construcciones anteriores si partimos de dos puntos A y B con $AB < d$?

Vías de estudio: una, de nivel 1.
Ayudas: *(a)* [66]; *(b)* [137]; *(c)* [137]; *(d)* [31]; *(e)* [132]; *(f)* [79] -> [106]

Problema 2

Utilizando sólo una regla de dos bordes paralelos de anchura d, realizar las siguientes construcciones:

(a) Dada una recta (AB) y un punto P externo a la recta, trazar la paralela a (AB) que pasa por P.

(b) Dada una recta (AB) y un punto P externo a la recta, trazar la perpendicular a (AB) que pasa por P.

(c) Dado un segmento [AB] y un punto C sobre (AB), trazar un punto D tal que $CD = AB$.

(d) Dado una recta (AB), una recta r distinta de (AB) y un punto C sobre r, trazar otro punto D sobre r tal que $AB = CD$.

(e) Dado un segmento [AB] y un segmento [AC'] de longitud $AC' = b < AB$, trazar un triángulo ABC rectángulo en C con $AC = b$.

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: *(a)* [69] –> [140]; *(b)* [67]; *(c)* [121]; *(d)* [54] –> [8];
(e) [94] –> [147] –> [12] –> [49]

Problema 3

Sea ABC un triángulo isósceles de base $b = AC$ y lado $a = AB = BC$. ¿Se puede construir el triángulo ABC con una regla de dos bordes paralelos a partir de los datos siguientes?

(a) Dado el lado a y el ángulo $\hat{A}$ opuesto a la base.

(b) Dada la base b y el lado a (con $a > b/2$).

(c) Dada la base b y el ángulo opuesto $\hat{B}$.

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: *(a)* [117]; *(b)* [29]; *(c)* [91]

PEM 13. La "potencia" de la regla de dos bordes paralelos

La cuestión inicial

Hemos visto en el estudio anterior que muchas de las construcciones realizables con regla y compás también pueden efectuarse con una regla de dos bordes paralelos. La cuestión que hemos dejado abierta es la de saber si existen figuras constructibles con regla y compás que no lo son con la regla de dos bordes paralelos. En lo que sigue, utilizaremos las siguientes definiciones:

Un punto es *constructible con regla y compás* si se puede determinar como:

(1) la intersección de dos rectas que pasan por dos puntos dados o constructibles;

(2) la intersección de una recta (que pasa por dos puntos dados o constructibles) y de un círculo de centro y radio dados o constructibles;

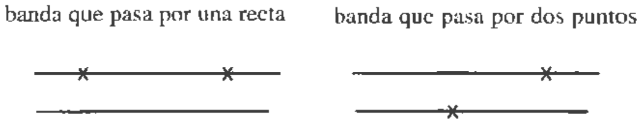
(3) la intersección de dos círculos de centros y radios dados o constructibles.

Un punto es *constructible con regla de dos bordes paralelos* si se puede determinar como:

(1) la intersección de dos rectas que pasan por dos puntos dados o constructibles;

(2) la intersección de dos bandas que pasan cada una por dos puntos dados o constructibles;

(3) la intersección de una banda que pasa por dos puntos dados o constructibles y de otra banda que pasa por una recta dada o constructible.



Problema 1

Demostrar que, si partimos de tres puntos A, B, C no alineados o de dos puntos A, B con $AB \geqslant d$, entonces todo punto constructible con regla y compás a partir de A, B, C es también constructible con una regla de dos bordes paralelos de anchura d.

Vías de estudio: una, de nivel 4.
Ayudas: [15] -> [50] -> [39] -> [87] -> [10] -> [131]

Problema 2

¿Es cierto que toda figura constructible con una regla de dos bordes paralelos es constructible con regla y compás?

Vías de estudio: una, de nivel 4.
Ayudas: [146] -> [61]

PEM 14. Puntos coordenados constructibles con la regla de dos bordes paralelos

La cuestión inicial

Supongamos que tenemos definido en el plano un sistema de referencia dado por un cuadrado OIKJ de lado OI = *d*. (OI) es el eje de las abscisas, (OJ) el eje de la ordenadas y K el punto de coordenadas (1,1). Sabemos —o admitiremos aquí— que todos los puntos del plano constructibles con regla y compás son aquéllos cuyas coordenadas son o bien números racionales o bien expresiones obtenidas mediante sumas, restas, productos, divisiones y raíces cuadradas de coordenadas de puntos constructibles. Por decirlo más precisamente, son aquellos puntos cuyas coordenadas pertenecen al más pequeño subcuerpo de R que contiene Q y es estable por la raíz cuadrada.

¿Son estos puntos constructibles con una regla de dos bordes paralelos (de anchura *d*)?

Problema

Demostrar que, dado un sistema de referencia ortonormal $(O, \vec{OI}; \vec{OJ})$ *con* $OI = OJ = d$*, todo punto* $P(x,y)$ *constructible con regla y compás es también constructible con una regla de dos bordes paralelos.*

Vías de estudio: una, de nivel 4.
Ayuda inicial: [104] -> [19]

ANEXO D

Esbozo de la teoría de situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau pretende modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de la problematización y cuestionamiento de un "conocimiento matemático enseñado". En cierto sentido, una *situación didáctica* puede ser considerada como un *estado del sistema didáctico* determinado por ciertos valores concretos de las variables del sistema.

La teorización de los fenómenos didácticos llevada a cabo por la teoría de las situaciones se hace "a través de" una modelización concreta del conocimiento matemático enseñado. Se trata de un ejemplo paradigmático de cómo la introducción del conocimiento matemático, ausente en la problemática de la didáctica clásica (ver **Anexo A**), es una vía que posibilita el tratamiento científico de lo didáctico permitiendo superar así las dificultades que se plantean al respecto dentro de nuestra cultura debido a la peyoración cultural y social de lo didáctico.

Para llevar a cabo dicha teorización Brousseau parte de un modelo general del "conocimiento matemático" que, de forma esquemática, resumiremos a continuación.

"Saber matemáticas" no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es "ocuparse de problemas" en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones. Una buena reproducción, por parte del alumno, de la actividad matemática exige que éste intervenga en la actividad matemática, lo cual significa que formule enunciados y pruebe proposiciones, que construya modelos, lenguajes, conceptos y teorías, que los ponga a prueba e intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura matemática y que tome los que le son útiles para continuar su actividad.

"Enseñar un conocimiento matemático concreto" (por ejemplo, los números decimales) es, en una primera aproximación, hacer posible que los alumnos desarrollen con dicho conocimiento una actividad matemática en el sentido anterior. El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos.

Precisaremos a continuación el significado que se da en la teoría de situaciones a los términos que aparecen en esta primera formulación que, como tal, es forzosamente ambigua.

1. Situación matemática específica de un conocimiento concreto

Se toma la noción de "situación matemática" como primitiva, exigiéndose que pueda ser modelizada mediante un juego formal.[9] Se dice que una *situación matemática* es *específica de un conocimiento concreto* si cumple las dos condiciones siguientes:

(i) Es comunicable sin utilizar dicho conocimiento.

(ii) La estrategia óptima del juego formal asociado a la situación matemática se obtiene a partir de la estrategia de base (que consiste en jugar al azar, aunque respetando las reglas del juego) utilizando el conocimiento en cuestión.

EJEMPLO DE SITUACIÓN MATEMÁTICA

Existe una situación matemática modelizable mediante el juego denominado "La carrera al 20": Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número x menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor: x + m (con m < 3). Gana el jugador que dice 20 por primera vez.

La teoría de las situaciones postula que cada conocimiento concreto debe poder "determinarse" (en el sentido indicado) mediante una o más situaciones matemáticas, cada una de las cuales recibe el nombre de situación (matemática) específica de dicho conocimiento.

9. Un *juego formal* de k jugadores es una estructura definida por los elementos siguientes: un conjunto X de "posiciones" distintas; una aplicación $\Gamma: X \longrightarrow P(X)$ que a todo estado $x \in X$ le asocia un conjunto $\Gamma(x)$ de "posiciones permitidas" (Γ representa las "reglas del juego"); un "estado inicial" I y uno o más "estados finales" F; un con-

EJEMPLO DE CONOCIMIENTO ASOCIADO A UNA SITUACIÓN MATEMÁTICA

El conocimiento matemático asociado a la "carrera al 20" es la división euclídea: se trata de buscar los números que tengan el mismo resto que al dividir 20 entre 3 (números congruentes con 20 módulo 3).

Se llama *situación adidáctica* (específica de un conocimiento concreto) a una situación matemática específica de dicho conocimiento tal que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permita o provoque un cambio de estrategia en el jugador. Este cambio debe ser (relativamente) estable en el tiempo y estable respecto a las variables de la situación. La forma de "provocar" este cambio suele provenir de ciertas características de la situación adidáctica que hace que fracasen las estrategias espontáneas.

En la definición de situación adidáctica interviene la noción de "variable" que hay que definir: se llaman *variables de una situación matemática* a aquellos elementos del juego formal que son susceptibles de tomar diferentes valores y que al tomarlos, provocan cambios tales en el juego que hacen variar la estrategia óptima (o ganadora).

EJEMPLO DE VARIABLES DE UNA SITUACIÓN MATEMÁTICA

Los valores 20 y 3 que aparecen en la definición de la "carrera al 20" son valores concretos de sendas variables de la situación matemática. Pueden cambiarse para dar origen a un cambio en el juego que provoca una modificación de la estrategia óptima (si bien el conocimiento matemático asociado sigue siendo el mismo).

EJEMPLO DE ESTRATEGIAS GANADORAS

Si $n = 20$ y $m < 3$, la estrategia ganadora consiste en decir, sea cual sea el número elegido por el contrincante, un número de la lista:

2, 5, 8, 11, 14, 17 y 20.

Si $n = 45$ y $m < 7$, la estrategia ganadora consiste en decir:

3, 10, 17, 24, 31, 38 y 45.

Si $n = 100$ y $m < 12$, la estrategia ganadora consiste en decir:

4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88 y 100.

junto J de *k* jugadores y una aplicación Q: JxX —> J que, en cada estado *x* del juego, designa el "sucesor" (*j,x*) del jugador *j*; una función G de "ganancia" o "preferencia" definida en un subconjunto de X (que contenga a F) y con valores en el conjunto de los números reales. (Ver Brousseau, 1986.)

Una variable de una situación adidáctica se llama *variable didáctica* si sus valores pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor. Partiendo de un conocimiento concreto y de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento, resulta que la modificación de los valores de las variables didácticas de esta situación adidáctica permite engendrar un *tipo de problemas* a los que corresponden diferentes *técnicas* o *estrategias de resolución*.

Podemos ahora decir que *aprender un conocimiento matemático* significa *adaptarse a una situación adidáctica específica de dicho conocimiento*, lo que se manifiesta mediante un cambio de estrategia del jugador (el alumno) que le lleva a poner en práctica la estrategia ganadora u óptima de manera estable en el tiempo y estable respecto a los diferentes valores de las variables de la situación adidáctica en cuestión.

La teoría de situaciones postula, en este punto, que cada conocimiento matemático concreto C puede caracterizarse así por una o más situaciones adidácticas específicas de C que proporcionan su "sentido" a C. Dado que el alumno no puede resolver en un momento dado cualquier situación adidáctica específica de C, la tarea del profesor consiste en procurarle aquellas situaciones adidácticas (específicas de C) que están a su alcance. Estas situaciones adidácticas, ajustadas a fines didácticos, determinan el "conocimiento enseñado" C' en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar en ese momento en la institución escolar.

Se llama *situación fundamental* (correspondiente a C) a un conjunto mínimo de situaciones adidácticas (específicas de C) que permiten engendrar, por manipulación de los valores de sus variables didácticas, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación de C según como se haya reconstruido C en la institución didáctica en cuestión. Según esta definición, la situación fundamental correspondiente a C proporcionaría una realización o representación explícita del conocimiento C tal como es utilizado implícitamente por la institución.

Con ayuda de la noción de situación fundamental podemos "definir" ahora lo que significa "aprender un conocimiento". Diremos que *un alumno ha aprendido el conocimiento* C si se ha adaptado (en el sentido anterior) a todas las situaciones adidácticas que constituyen una situación fundamental (correspondiente a C). El problema que se plantea en este punto es el de discernir en qué condiciones puede el alumno aprender efectivamente los conocimientos matemáticos que se desea que aprenda.

2. De la situación adidáctica a la situación didáctica

La utilización por parte del profesor de situaciones adidácticas con una intención didáctica es necesaria porque el medio "natural" en el que vivimos es *no didáctico*. Pero esta utilización es insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que aprenda. Aunque Brousseau aceptó inicialmente la idea de Piaget de que la construcción de los conocimientos se lleva a cabo mediante una adaptación personal (hecha de asimilaciones y acomodaciones) al medio, denunció posteriormente que la teoría de Piaget, al sobrevalorar el aprendizaje "natural" o "espontáneo", corre el riesgo de descargar al profesor de toda responsabilidad didáctica y caer en un nuevo tipo de empirismo.

Para que un alumno aprenda un conocimiento matemático concreto es necesario que haga funcionar dicho conocimiento en sus relaciones con cierto medio adidáctico que es la imagen en la relación didáctica de un medio que es "exterior" a la enseñanza. Pero los conocimientos matemáticos no pueden vivir por sí mismos en la institución escolar, sólo pueden funcionar como tales conocimientos, en la relación didáctica.

Resulta, por tanto, que la situación adidáctica es únicamente una parte de una situación más amplia que Brousseau llama *situación didáctica* (específica de C). Ésta comprende las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático C.

La noción de *medio* ("milieu") es esencial en la teorización de Brousseau: forma parte del medio de una situación didáctica lo que la Profesora llama en los *Diálogos* 3 el "medio matemático de los alumnos" (es decir, todos aquellos objetos con los que los alumnos tienen una familiaridad matemática tal que pueden manipularlos con toda seguridad y cuyas propiedades les parecen incuestionables) así como los diferentes dispositivos de ayuda al estudio ("clase de matemáticas", "libro de texto", etc.) a través de los cuales se contextualiza la matemática enseñada.

La situación didáctica comprende una serie de intervenciones del profesor sobre el par alumno-medio destinadas a hacer funcionar las situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas provocan. Estas intervenciones son principalmente *devoluciones* e *institucionalizaciones* (términos de la teoría que se explicarán a continuación). La evolución de una situación didáctica requiere, por tanto, la intervención constante, la acción mantenida y la vigilancia del profesor. En este sentido la situación didáctica se opone a la situación adidáctica y es mucho más amplia y compleja.

3. Devolución de una situación adidáctica: el contrato didáctico

Si se interpreta en términos de juego, puede decirse que en la situación didáctica juegan al menos dos jugadores: el alumno y el profesor. Uno de los jugadores, el profesor, busca que el otro jugador, el alumno, se apropie, responsabilice o haga suya una situación adidáctica. Este primer paso es la denominada *devolución del problema*.

Es necesario, además, que la situación "devuelta" al alumno provoque en éste una interacción con C lo más independiente posible de las intenciones didácticas y lo más fecunda posible en lo que respecta a la construcción por parte del alumno del conocimiento C. Para ello el profesor comunica o se abstiene de comunicar (según el caso) informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. El profesor está por tanto implicado en un juego con el sistema de interacción del alumno con los problemas que él le ha planteado. Este juego determina una situación más amplia que es lo que hemos denominado situación didáctica (específica de C).

Estamos ahora en condiciones de "definir" dentro de la teoría de las situaciones una noción básica que aún no ha sido explicada. *Enseñar un conocimiento matemático* C consiste en hacer devolución al alumno de una situación adidáctica específica de dicho conocimiento. Esta devolución puede modelizarse como un proceso que se realiza dentro de la negociación de un contrato que se denomina *contrato didáctico* (específico de C).

En la situación didáctica en la que están inmersos alumno, profesor y conocimiento matemático C, la situación adidáctica es una especie de ideal hacia el que se trata de converger: el profesor debe ayudar constantemente al alumno a despojar la situación de todos los artificios didácticos para que éste pueda construir el conocimiento C.

La *devolución de una situación adidáctica* consiste, en definitiva, no sólo en presentar al alumno las reglas del juego sino, además, en hacer que el alumno se sienta responsable (en el sentido de la *responsabilidad matemática*, no de la culpabilidad) del resultado que debe buscar. Su realización conlleva el cumplimiento de una parte esencial del contrato didáctico, pero no de la totalidad de dicho contrato.

Tradicionalmente la problemática que engloba la devolución ha sido analizada en términos de motivación del alumno; las soluciones preconizadas son entonces de naturaleza psicológica, psicoafectiva o pedagógica. Brousseau propone que el análisis parta, por contra, de la situación adidáctica y del conocimiento específico C que la situación caracteriza.

4. Institucionalización de los conocimientos matemáticos

Imaginemos que el profesor intenta enseñar un determinado conocimiento matemático C a los alumnos; si la devolución de la situación fundamental correspondiente a C se lleva a cabo, si los alumnos entran en el juego y si acaban por poner en práctica, de manera estable, la estrategia ganadora, entonces el aprendizaje se ha realizado. En este punto, ¿cómo podrán distinguir los propios alumnos entre todas las decisiones tomadas para ganar, aquellas que dependen de características coyunturales del juego particular, de aquellas otras que han sido posibles gracias al conocimiento adquirido?

Los alumnos que han aprendido un conocimiento matemático son capaces de plantear adecuadamente y de responder a cuestiones que antes ni siquiera podían enunciar pero, dado que no tienen medios para contextualizar dichas cuestiones, no pueden adjudicar a los nuevos conocimientos un estatuto adecuado. Es preciso, pues, que alguien del exterior venga a dilucidar cuáles de entre sus actividades tienen un interés científico "objetivo", un estatuto cultural.

Ésta es la función de la *institucionalización* que, de hecho, origina una transformación completa de la situación. Se lleva a cabo mediante la elección de algunas cuestiones de entre las que se saben responder, colocándolas en el núcleo de una problemática más amplia y relacionándolas con otras cuestiones y saberes. Se trata de un trabajo cultural e histórico que difiere totalmente del que puede dejarse a cargo del alumno y es responsabilidad del profesor. No es, por tanto, el resultado de una adaptación del alumno.

Inversamente a la devolución, la institucionalización consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los alumnos: actividades, lenguajes, y conocimientos expresados en proposiciones. Constituye, junto a la devolución, una de las actividades principales del profesor.

5. Las paradojas del contrato didáctico

Pero, ¿y si el alumno no entra en el juego o, aun entrando, no llega a poner en práctica la estrategia ganadora? Entonces sale a la luz una parte de un sistema de obligaciones recíprocas referentes al conocimiento matemático buscado. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato pero, en realidad, no es un verdadero contrato y esto por muchas razones:

(i) No puede hacerse completamente explícito porque se refiere al resultado de la enseñanza de C. En particular las cláusulas de ruptura y de realización del contrato no pueden ser descritas con anterioridad.

(ii) Si el contrato se establece sobre reglas de comportamiento del profesor y el alumno, entonces su respeto escrupuloso condenaría la relación didáctica al fracaso. De hecho el contrato pone a profesor y alumno ante una paradoja: si aceptan que, como indica una cláusula del contrato, el profesor "enseñe" los resultados al alumno, entonces éste no puede establecerlos por sí mismo y, por tanto, no aprende matemáticas. El aprendizaje no descansa, en realidad, sobre el buen funcionamiento del contrato sino sobre sus rupturas.

(iii) Tanto el profesor como el alumno aceptan implícitamente en el contrato responsabilidades sobre acciones que no están en condiciones de controlar, colocándose así en un caso patente de "irresponsabilidad jurídica". Por ejemplo, el profesor acepta la responsabilidad de proporcionar al alumno los medios efectivos que le aseguren la adquisición de un conocimiento C, mientras que el alumno acepta la responsabilidad de resolver problemas de los que no se le ha enseñado la solución.

En resumen, más que hablar de un "contrato didáctico" prefijado de antemano a modo de los contratos jurídicos, Brousseau indica que debería hablarse de un proceso de búsqueda de un contrato hipotético.

Sin embargo, en el momento de las rupturas parece como si un verdadero contrato implícito uniera al profesor y al alumno: sorpresa y rebelión del alumno que no sabe resolver el problema, y sorpresa también del profesor que estima sus prestaciones razonablemente suficientes. Se produce así una crisis que origina la renegociación y búsqueda de un nuevo contrato en función de los nuevos conocimientos adquiridos o, al menos, apuntados. En última instancia es el conocimiento matemático el que resolverá las crisis originadas por las rupturas del contrato.

6. Tipos de situaciones adidácticas

Hemos visto que la situación adidáctica específica de un conocimiento C caracteriza (parcialmente) el conocimiento C. Uno de los avances más importantes de la teoría de las situaciones didácticas proviene del hecho que las situaciones adidácticas pueden estudiarse de forma teórica en estrecha relación con las diversas formas de los conocimientos matemáticos y los correspondientes modos de funcionamiento de dichos conocimientos.

En concreto, uno de los primeros resultados de la teoría de las situaciones adidácticas consiste precisamente en establecer una correspondencia entre:

(I) *Tres formas de los conocimientos matemáticos.*
(a) *Modelo implícito*
(b) *Lenguaje*
(c) *Teoría*

(II) *Tres modos de funcionamiento de dichos conocimientos.*
(a) Un *modelo implícito* sugiere una *decisión* o un *algoritmo*.
(b) Un *lenguaje* permite la producción de un *mensaje*.
(c) Una *teoría* permite construir proposiciones y *juicios*.

(III) *Tres tipos de interacción del alumno con el medio.*

La evolución de las citadas formas de los conocimientos matemáticos y de sus correspondientes modos de funcionamiento es la imagen, la traza o incluso la causa de la evolución del aprendizaje del sujeto. Esta evolución se pone de manifiesto según el tipo de interacción del alumno con el medio:

(a) *Intercambio de informaciones no codificadas* (la acción influye directamente sobre el medio).

(b) *Intercambio de informaciones codificadas según un lenguaje.*

(c) *Intercambio de juicios.*

¿Cuáles son los tipos de situaciones adidácticas que las distinciones anteriores nos llevan a considerar? Esto es, dado un conocimiento concreto C, cuáles son los tipos de relaciones posibles entre la interacción juego-jugador y el conocimiento C?

(a) Situación adidáctica de acción

Toda *situación adidáctica de acción* propone al alumno un problema en unas condiciones tales que la mejor solución se obtiene mediante el conocimiento a enseñar C y de tal forma que el alumno puede actuar sobre la situación y hacer elecciones durante esta acción, al tiempo que la situación le devuelve información sobre las consecuencias de su acción.

No se trata de una situación de manipulación libre o según un orden preestablecido: una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. Las informaciones que le devuelve la situación son percibidas por el alumno como sanciones o refuerzos de su acción.

En una situación de acción se produce un "diálogo" entre el alumno y la situación. Esta dialéctica de la acción le permite mejorar su modelo implícito, es decir, tener reacciones que no puede todavía formular, probar ni, mucho menos, organizar en una teoría. En todo caso la situación adidáctica provoca un aprendizaje por adaptación (de acuerdo con la teoría de Piaget).

Los modelos implícitos aparecen como elecciones preferentes antes de que el alumno sea capaz de formularlos y mucho antes de que esté convencido de su veracidad. En la clase, el estatuto de las nociones que aparecen en un modelo implícito es el de *nociones protomatemáticas*, esto es, nociones cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

> *EJEMPLO DE SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE ACCIÓN*
>
> *Primera fase de la "carrera al 20". Juego entre dos jugadores. Cada jugador produce únicamente una serie de decisiones, no tiene ningún interés en indicar sus estrategias. Toma el juego en un cierto estado y lo deja en otro.*

(b) Situación adidáctica de formulación

Para que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado. En una *situación adidáctica de formulación* el alumno intercambia informaciones con una o varias personas. Comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o grupo de alumnos que le devuelve la información. Los dos interlocutores, emisor y receptor se intercambian mensajes escritos u orales que son redactados en lenguaje matemático según las posibilidades de cada emisor. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con la ayuda de signos y de reglas conocidos o nuevos.

El estatuto que tienen en clase las nociones de un modelo explícito es el de *nociones paramatemáticas:* esto significa que se utilizan

> *EJEMPLO DE SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE FORMULACIÓN:*
>
> *Segunda fase de la "carrera al 20". Los alumnos son agrupados en dos equipos que compiten el uno contra el otro. En cada grupo se asignan letras a los alumnos. A la llamada del profesor los dos alumnos designados por la letra nombrada van a disputar una partida en la pizarra. Los restantes alumnos no tienen derecho a intervenir ni a hablar. El equipo del jugador ganador se adjudica un punto. Entre partida y partida los alumnos de un mismo equipo discuten entre ellos las mejores estrategias. El éxito de cada equipo depende de la acción y de la comprensión que cada jugador manifiesta de las estrategias que se discuten.*

conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas.

(c) Situación adidáctica de validación

La validación empírica obtenida en las fases precedentes es insuficiente. En la dialéctica de la validación el alumno debe demostrar por qué el modelo que ha creado es válido. Pero para que el alumno construya una demostración y ésta tenga sentido para él es necesario que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. Una *situación adidáctica de validación* es la ocasión para un alumno (proponente) de someter el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El proponente debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo y proporcionar, si es posible, una validación semántica y una validación sintáctica. El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquéllas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo).

El estatuto que tienen en clase las nociones que se utilizarán en una situación de validación, especialmente después de la institucionalización por parte del profesor, es el de *nociones matemáticas*, esto es, objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en las aplicaciones prácticas. Las nociones matemáticas son, por tanto, objeto de estudio en sí mismas, además de servir como instrumento para el estudio de otros objetos.

Como puede observarse una dialéctica de la validación puede incluir diversas dialécticas particulares de la acción, o de la formulación (por ejemplo, para establecer una terminología). Está claro, además, que una dialéctica de la validación es en sí misma una dialéctica de la formulación y, en consecuencia una dialéctica de la acción.

EJEMPLO DE SITUACIÓN ADIDÁCTICA DE VALIDACIÓN:

Tercera fase de la "carrera al 20". El profesor cambia el juego. Cada equipo, después de la discusión, puede proponer una declaración o un método para ganar; puede criticar una declaración del otro equipo e intentar probar que es falsa y, por último, puede obligar a jugar una partida utilizando el método que ha propuesto. En esta última fase los alumnos aprenden sin intervención del profesor: a enunciar "teoremas" (como, por ejemplo, "es necesario jugar 17"), a discutir su validez ("yo he jugado 17 y he perdido"), y a producir demostraciones ("si él juega 17, yo sólo puedo jugar 18 o 19, en los dos casos él podrá decir 20").

7. La noción de "obstáculo" en la teoría de las situaciones

En la bibliografía actual es fácil encontrar diferentes maneras de emplear la noción de "obstáculo" a fin de explicar, describir o estudiar diversos fenómenos didácticos. Incluso es posible encontrar una utilización "ingenua" de la noción de "obstáculo" próxima a la de "dificultad" para que el alumno aprenda ciertas nociones matemáticas, aunque no toda dificultad sea considerada como un obstáculo.

Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia interna (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persistentes (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado conscientemente el "modelo" defectuoso), resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen origen epistemológico, se postula que se pueden rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión. A pesar de lo anterior, para la mayoría de los autores y, en particular, para Guy Brousseau que fue el introductor de la noción de obstáculo en didáctica de las matemáticas, un obstáculo es un conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio es ineficaz y puede ser fuente de errores y dificultades.

¿Cuál es la noción de "obstáculo" en el marco de la teoría de las situaciones en el que nació? Para definirla utilizaremos, naturalmente, las elementos básicos de dicha teoría. De la noción de "aprender un conocimiento matemático C" tal como ha sido definida en la teoría de las situaciones se desprenden dos consecuencias principales:

(a) Aprender un conocimiento matemático C se corresponde siempre con un cambio de estrategia: todo conocimiento surge asociado a una nueva estrategia capaz de resolver un problema que la estrategia de base se había mostrado incapaz de resolver.

(b) La estabilidad de la estrategia ganadora es siempre relativa respecto al cambio de los valores que pueden tomar las variables didácticas. Es necesario cambiar sucesivamente las respectivas estrategias óptimas que van apareciendo.

Si definimos el "coste de cada estrategia" a partir del "precio del aprendizaje", "el precio de la ejecución" (que depende de la complejidad de la tarea) y el "precio del riesgo de error" (que depende del producto de los riesgos de error de las tareas elementales), entonces para cada variable didáctica podemos considerar la curva que nos da la variación del coste de cada estrategia óptima en función de los valores de dicha variable didáctica.

Supongamos que se da el caso en que los intervalos de eficacia óptima de las diferentes estrategias sean muy característicos de cada una de ellas y estén muy separados entre sí respecto de los valores de la variable didáctica en cuestión. En este caso, las situaciones adidácticas sucesivas que se plantean al dar valores sucesivos a dicha variable didáctica descalificarán de manera evidente la estrategia óptima anterior, haciendo necesaria la invención de una estrategia nueva.

En la teoría de las situaciones se dice que aparece un *obstáculo didáctico* cuando son necesarios estos cambios bruscos de estrategia óptima. Resulta, por tanto, que al nivel de análisis en el que se sitúa la teoría de las situaciones, un obstáculo es relativo a una situación característica de un conocimiento matemático concreto y a una variable didáctica de dicha situación.

Así, si se diseña una situación que pretende apoyarse en una primera estrategia y hacer que aparezcan ciertas limitaciones para introducir una segunda estrategia más eficaz, puede obtenerse un efecto contrario al deseado, reforzando la estrategia que se pretendía cambiar e impidiendo la aparición de la nueva. Tendríamos en este caso un *refuerzo didáctico de un obstáculo.*

En resumen, tenemos que un obstáculo siempre va asociado a un cambio de estrategia necesario y, por tanto, al desarrollo del conocimiento matemático. Si lo miramos desde el punto de vista del profesor (o, en general, del director de estudio), podría decirse que el obstáculo es el conocimiento de la primera estrategia que "dificulta" la aparición de la nueva. Pero desde la óptica del conocimiento matemático mismo lo que caracteriza un obstáculo concreto no es la antigua ni la nueva estrategia, es el cambio de estrategia y su necesidad en el proceso de adaptación a la situación adidáctica.

Referencias bibliográficas sobre la teoría de situaciones

BROUSSEAU, G. (1981). "Problèmes de didactique des décimaux", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2.1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1983). "Les obstacles epistémologiques et les problèmes en didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G. (1986). "Fundamentos y métodos de didáctica de la matemática", *Publicaciones del Seminario García de Galdeano.* Universidad de Zaragoza. (Traducción de "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble.)

BROUSSEAU, G. (1989). "Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1ª parte)", *SUMA*, 4, 5-12.

BROUSSEAU, G. (1991). "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (2ª parte)", *Enseñanza de las Ciencias,* 9 (1), 10-21.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Publicaciones del IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, N. (1987). *La mesure en Cours Moyen 1re année.* IREM de l'Université de Bordeaux, 1992.

UNIDAD 4

LA ESTRUCTURA DEL PROCESO DE ESTUDIO

LAS MATEMÁTICAS "EN VIVO"

EPISODIO 4

En clase de prácticas

Había quedado para visitar una clase de Luis con sus alumnos de 4° de ESO. Pero he llegado muy tarde y sólo puedo asistir a los últimos 20 minutos.

Los alumnos están trabajando. Luis me trae una hoja con 35 ejercicios (!) titulada "Cálculo con radicales". Los ejercicios son todos muy parecidos y tienen un enunciado común: "Eliminar los radicales del denominador de las siguientes expresiones".

Luis.- Vamos a ver, habéis dicho que la mayoría de los 35 ejercicios no planteaban ningún problema. ¿No es eso?

Algunos alumnos asienten, pero todos siguen trabajando.

Luis.- Y supongo que ahora debéis ir por el ejercicio 23...

Algunos alumnos mueven la cabeza sin interrumpir su trabajo. El ejercicio 23 consiste en "Eliminar los radicales de la expresión $\frac{22}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}$*." Luis ha escrito esta expresión en la pizarra.*

Han pasado 5 minutos. Parece una eternidad. Luis estaba sentado en su mesa. Se ha levantado y se pasea por el aula. Luego vuelve a la pizarra y se dirige a sus alumnos. Dos o tres de ellos han dejado de trabajar.

Luis.- ¡Vamos a ver! Creo que es hora de hacer una pequeña puesta en común.

Espera unos instantes y se acerca a una alumna que sigue trabajando.

L.- A ver, Andrea, ¿qué has encontrado?
Andrea.- Nada...
L.- ¿No te ha salido nada?

Los alumnos interrumpen su trabajo para seguir el diálogo entre Luis y Andrea.

L.- A ver, ¿y los demás? ¿Alguien ha encontrado algo? ¿Una idea o un amago de idea?

La mayoría de los alumnos no se atreven a contestar. Uno parece decidirse.

L.- Miguel quiere decir algo. ¡Adelante!
Miguel.- Sí, bueno... Había pensado en hacer desaparecer la $\sqrt{3}$ del denominador. Con la técnica de antes...
L.- O sea, como si sólo hubiera una $\sqrt{3}$, ¿no es eso? Ignoras que hay una $\sqrt{5}$.
Miguel.- Sí... Escribo en el denominador $\sqrt{5}$ más 1, menos $\sqrt{3}$. Poniendo $\sqrt{5}$ más 1 entre paréntesis. *(Hace un gesto con la mano.)*
L.- Vamos a ver, si te entiendo bien, has hecho esto. *(Escribe en la pizarra.)*

$$\frac{22}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}=\frac{22}{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{3}}$$

M.- Eso es.
L.- ¿Y a partir de aquí...?
M.- Pues lo de siempre: multiplico por la expresión conjugada.
L.- ¿Y qué encuentras?
M.- No lo sé, aún no lo he hecho.
L.- ¿Cómo que no?
M.- No, porque me seguirá quedando alguna $\sqrt{5}$ en el denominador.
L.- Ya, claro. Pero, hombre, en lugar de ver que seguirá quedando alguna $\sqrt{5}$, ¡es mejor decirse que ya no habrá ninguna $\sqrt{3}$! ¡Es como aquello de la botella medio vacía o medio llena! *(Risas de los alumnos.)* Bueno, volvamos al principio. Si hacemos lo que dice

Miguel, nos quedará alguna $\sqrt{5}$ que tendremos que hacer desaparecer... Pues hagámoslo. Pensar está bien, pero de nada sirve pensar si después no actuamos. ¿Lo entendéis? Primero hay que hacerlo, y después ya veremos. Así, el primer paso es... ¿Miguel?
M.- Multiplicar por la expresión conjugada: por $\sqrt{5} + 1$, más $\sqrt{3}$.

Luis añade en la pizarra:

$$\frac{22}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1} = \frac{22}{(\sqrt{5} + 1) - \sqrt{3}} = \frac{22 \times ((\sqrt{5} + 1) + \sqrt{3})}{((\sqrt{5} + 1) - \sqrt{3}) \times ((\sqrt{5} + 1) + \sqrt{3})}$$

L.- Isabel, ¿estás de acuerdo?
Isabel (tímidamente).- Sí, sí.
L.- Pues, ahora hay que hacer los cálculos. Os doy 2 minutos.

Luis deja la tiza y se pasea en silencio por el aula. Los alumnos trabajan. Luis se detiene ante una alumna, mira lo que hace, habla un poco con ella. Después repite lo mismo con un alumno de la primera fila. Ya han transcurrido los 2 minutos. Luis consulta su reloj, vuelve a la pizarra y mira a la clase.

L.- Supongo que ya debéis estar acabando...

Espera un poco más... Después se dirige a la alumna con la que ha hablado antes.

L.- Maite, ¿nos puedes enseñar el cálculo?

Maite se levanta y va a la pizarra. Escribe el cálculo sin pronunciar palabra. Luis y los demás la observan en silencio.

$$\frac{22}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1} = \frac{22 \times ((\sqrt{5} + 1) + \sqrt{3})}{((\sqrt{5} + 1) - \sqrt{3}) \times ((\sqrt{5} + 1) + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{22\,(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + 1)^2 - 3} = \frac{22\,(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{3 + 2\sqrt{5}}$$

L.- Gracias Maite. Pues bien, esto es lo que se obtiene. Como veis, ya no queda ninguna $\sqrt{3}$ en el denominador
Un alumno.- ¡Pero sigue habiendo una $\sqrt{3}$ en el numerador!
Una alumna.- ¡Da igual!

Bastantes alumnos parecen estar de acuerdo.

L.- Bueno, Carlos, dices que queda alguna $\sqrt{3}$ en el numerador. Tienes toda la razón. Pero recuerda cuál es el objetivo del problema: eliminar las raíces *del denominador*. Lo que ocurra en el numerador no importa, nos limitamos a constatarlo: queda una expresión con $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.
La alumna de antes.- Por cierto, cuando había un sólo radical, pasaba lo mismo. Si en el denominador había $4 - \sqrt{3}$, al multiplicar por $4 + \sqrt{3}$ seguía quedando alguna $\sqrt{3}$ en el numerador.
L.- Sí. No es nada raro que quede alguna $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ en el numerador. Lo que importa es el denominador. Miguel, ¿querías decir algo?
Miguel.- Sí. Que lo que ha escrito Maite es uno de los ejercicios de la lista.
L.- ¿Qué quieres decir?
M.- Que sale $\frac{22}{3 + 2\sqrt{5}}$, como en el ejercicio 7.

Luis y algunos alumnos consultan la lista de ejercicios.

L.- Es verdad, fijaos en el ejercicio 7: había que racionalizar la expresión $\frac{22}{3 + 2\sqrt{5}}$. ¿Por lo tanto...?
M.- En el ejercicio 7 hemos encontrado una expresión del tipo $a + b\sqrt{5}$. Si ahora hacemos lo mismo con la expresión de la pizarra, tendremos $a + b\sqrt{5}$ multiplicado por $1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
L.- Muy bien. ¿Y a partir de aquí qué harías?
M.- Nada. ¡Ya no quedarán raíces en el denominador! De hecho, ¡ni siquiera habrá denominador!
Una alumna.- Podemos desarrollar el producto.
Algunos alumnos.- ¡Luis, me he perdido! ¡Vas muy deprisa!
L.- Vale, vale. Voy a recapitular. Mirad la expresión que ha escrito Maite en la pizarra. Podemos escribir esta expresión así. *(Escribe.)*

$$\frac{22}{3 + 2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

Y, llegado aquí, Miguel se ha dado cuenta de que esta expresión *(rodea con el dedo la expresión* $\frac{22}{3 + 2\sqrt{5}}$*)* es la del ejercicio 7 que ya hemos racionalizado antes. Sabemos que la podemos escribir en la forma $a + b\sqrt{5}$. Es lo que hemos hecho en los ejercicios anteriores. Si lo hacemos, llegaremos a una expresión del tipo:

$$(a + b\sqrt{5})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

Y entonces Nuria ha propuesto que desarrollemos el producto. Pero ya se ve que no queda nada en el denominador.
Un alumno.- ¡Pero para desarrollar hay que conocer *a* y *b*!
L.- Sí. ¿Quién ha hecho el ejercicio 7? ¿Tú, Marcos?
Marcos- No, éste no lo he hecho.
L.- ¿Y tú, Carlos?
Carlos.- Sí. He hallado... $4\sqrt{5} - 6$. *(Luis escribe esta expresión en la pizarra.)*
L.- Marcos ¿lo puedes comprobar con la calculadora?

Marcos teclea su calculadora. Todo el mundo lo espera.

Marcos- Sí, está bien. En los dos casos sale 2,94427191.
L.- Bueno... *(Mira su reloj.)* Vaya... Lo tendremos que dejar aquí por hoy. La expresión del ejercicio 23 es igual a... *(escribe en la pizarra)*

$$(4\sqrt{5} - 6)(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

Para mañana, me desarrolláis este producto, como proponía Nuria. ¿Veis lo que ocurrirá? Hallaréis una expresión con alguna $\sqrt{3}$ multiplicada por alguna $\sqrt{5}$, es decir, con alguna $\sqrt{15}$. No olvidéis comprobar el resultado con la calculadora. Y mirad también el ejercicio 24. Mañana volveremos a hablar de todo esto.

La clase ha terminado.

DIÁLOGOS 4

Técnicas, tecnologías y teorías matemáticas

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Buenos días. ¡Te veo muy en forma!

E.- Sí. ¿Te has mirado el episodio? Es el de la clase de Luis, el de la racionalización de expresiones con radicales. Creo que nos irá muy bien para contrastar nuestros análisis sobre la clase de Marta.

P.- Son episodios realmente muy distintos...

E.- ¡Y tan distintos! A mí la clase de Marta me gustó mucho. Pero ésta de Luis ya es otra cosa... ¡Tantos ejercicios y tan parecidos! No sé...

P.- Vaya. Así que no te entusiasma lo que hace Luis. Y eso que ahora ya deberías disponer de algún que otro elemento para poder analizar y entender lo que hace.

E.- Quizá sí, pero...

P.- Vamos a ver, empecemos eliminando una primera dificultad. Una cosa que te disgusta, por lo que has dicho antes, es que Luis haya distribuido a sns alumnos una lista con muchos ejercicios. ¿No es eso?

E.- Sí. Muchos y muy iguales. Porque, a pesar de tus enseñanzas, sigo sin entender para qué sirve proponer tantos ejercicios tan parecidos.

P.- No son tan parecidos como a ti te parece: hay expresiones con un solo radical y expresiones con dos radicales.

E.- Sí, claro. Lo que se quiere es que los alumnos se enfrenten a un nuevo tipo de problemas: racionalizar una expresión con dos radicales. Y antes se les dan muchos ejercicios con uno solo radical para que, a partir de la técnica de que disponen, creen una técnica para las expresiones con dos radicales. ¿Es eso, no?

P.- Yo diría que lo que Luis quiere en primer lugar es que sus alumnos dominen la técnica de racionalización de expresiones con un solo radical en el denominador.

E.- Entonces ¿por qué incluye en la lista expresiones con dos radicales?

P.- No conozco exactamente las razones de Luis. Pero me puedo imaginar muchos y buenos motivos para ello. Por ejemplo, porque quiere que sus alumnos pongan a prueba la técnica de que disponen.

E.- La de multiplicar por la expresión conjugada.

P.- Sí, eso mismo. Si los alumnos ya dominan esta técnica y la han puesto a prueba con un número bastante importante de ejercicios, entonces no hace falta que hagan los otros de la lista. A cada uno le corresponde juzgar lo que es útil y necesario para su estudio.

E.- Ya veo. Si alguien cree que ya domina bastante la técnica, entonces puede repasar rápidamente la lista, hacer algún ejercicio para asegurarse de que no se equivoca y centrarse en los que parecen un poco más difíciles para así poder enfrentarse a nuevas dificultades.

P.- Eso es.

E.- Pero sigo sin entender por qué ha mezclado Luis en una misma lista ejercicios de dos tipos diferentes: con un radical y con dos.

P.- Seguro que hay un motivo, o más de uno. En primer lugar, y como tú decías muy bien, esta "mezcla" plasma la idea de elaborar una técnica para expresiones con dos radicales a partir de la técnica para expresiones con un radical.

E.- Sí, claro, pero...

P.- Hay algo más. Porque esto, en el fondo, es una creación técnica por continuidad. Al mismo tiempo también hay una ruptura que no se sitúa exactamente en el plano de la propia técnica.

E.- A ver, a ver... Ya no te sigo.

P.- Claro que el episodio termina justo en el momento en el que se va a producir lo que yo pienso. Quizá ocurrió en la siguiente clase.

E.- ¿Qué quieres decir? ¿Dónde hay una ruptura?

P.- En el tipo de resultado que se encuentra en cada caso. En eso se diferencian las expresiones con un radical de las de dos.

E.- ¡Ah, ya sé a qué te refieres! Lo pensé al leer el episodio. Cuando los alumnos calculan la expresión $\frac{22}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}$, obtienen un resultado con *tres* radicales: además de $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$ también hay alguna $\sqrt{15}$, ¿no? En cambio, al racionalizar expresiones con un solo radical, se encuentran siempre expresiones con el mismo radical.

P.- Eso es lo fundamentalmente nuevo. Por lo tanto, la novedad no es sólo la manera de proceder, la técnica. Lo nuevo es la *forma* del resultado que se obtiene.

E.- Por lo tanto, no todo se reduce a la técnica. Hay algo más. ¿Pero qué? ¿Me lo puedes explicar?

P.- Claro que sí. Mira, imagínate a uno de los alumnos de Luis cuando llega a casa y se pone a resolver el ejercicio que has indicado. Va a desarrollar el producto... *(Mira la última hoja del episodio y escribe en la pizarra.)*

$$\frac{22}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1} = (4\sqrt{5} - 6)(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

E.- Vale.

P.- Encontrará... *(Hace el cálculo rápidamente)* $14 - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15}$. Este alumno sabe que, al día signiente, Luis le puede pedir que salga a la pizarra para presentar su solución. Y tendrá que afirmar, delante del profesor y de toda la clase, que:

$$\frac{22}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1} = 14 - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15}$$

Pero, claro, ¿cómo puede estar seguro de que ésta es la respuesta que espera Luis?

E.- ¡Hombre, porque ha obtenido una expresión sin radicales en el denominador! En este caso, ¡ni siquiera hay denominador!

P.- Es verdad. Pero a lo mejor el alumno piensa que tiene que presentar la solución en su forma más simple, en su forma canónica, estándar. Y no sabe si aún debe simplificar más la expresión o si ya ha llegado al final.

E.- Si llegara a una expresión del tipo $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$ sería diferente, ¿es eso?

P.- Sí. En el resultado de antes, podría ser que el alumno quisiera eliminar la $\sqrt{15}$. Y como no sabe cómo hacerlo, piensa que no sabe resolver el problema, que hay alguna manipulación que se le escapa. En definitiva, no está seguro de haber realizado el ejercicio correctamente.

E.- ¿Se puede decir entonces que la técnica que manipula aún no está a punto, que no la domina del todo?

P.- Si quieres. De hecho, lo que le falta es un criterio de parada.

E.- Como en un algoritmo, en informática.

P.- Exacto. Y esto no forma parte de la técnica sino, por decirlo de alguna manera, de un saber relativo a la técnica. Forma parte de la *tecnología* de la técnica.

E.- ¿La tecnología? ¿Qué quieres decir?

P.- Mira, tecnología significa, literalmente, un discurso razonado (*logos*) sobre un objeto que es una *techné*, una técnica.

E.- ¿Y que sería aquí ese discurso razonado sobre la técnica?

P.- Pues sería algo así como: "una expresión del tipo considerado se puede escribir de manera única como $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$".

E.- Así que, cuando el alumno encuentra $14 - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15}$ y no se ha equivocado, puede estar seguro de que ésa es la solución que espera Luis, puesto que sólo hay una.

P.- Eso es.

E.- Entonces, lo que has llamado tecnología, será algo así como un teorema.

P.- Aquí sí, es un teorema. Aunque este teorema es sólo una *parte* de la tecnología.

E.- ¿Qué más habría?

P.- En general, una tecnología es un discurso matemático que justifica y permite entender cierta técnica. El teorema que he citado cumple estas condiciones puesto que nos asegura que, si hacemos los cálculos apropiados para quitar los radicales del denominador, entonces hallaremos la forma canónica deseada.

E.- Ya veo. En la clase de Luis han empezado por quitar la $\sqrt{3}$ del denominador. Y el teorema dice que si se empieza quitando la $\sqrt{5}$ se llega al mismo resultado –puesto que es único–.

P.- Sí, eso es. Podríamos pensar que, si empezamos quitando la $\sqrt{5}$, a lo mejor nos encontramos con algo que bloquea el cálculo, que no nos permite seguir. Pero esto no puede ser, porque una vez quitada la $\sqrt{5}$ ya sólo quedará una $\sqrt{3}$ que, según la tecnología que rige la técnica para expresiones con un radical, siempre podremos eliminar.

E.- ¡Uf! ¡Qué complicado! Lo que quieres decir es que, en la tecnología de la técnica de dos radicales, hay que incluir la de un radical. ¿Es eso?

P.- ¡Sí, efectivamente...!

E.- Pero hay algo más. El teorema que has citado dice que una vez llegados a la expresión $14 - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15}$ ya no podemos simplificar más. Pero no dice por qué, no dice por qué con un radical se obtiene algo de la forma $a + b\sqrt{3}$ y con dos radicales algo de la forma $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + c\sqrt{15}$. La tecnología no explica de dónde sale ese término con una $\sqrt{15}$.

P.- ¡Eres muy exigente! ¿Que por qué es así? Esto lo tendría que explicar la tecnología de la tecnología.

E.- ¿Un discurso que explicaría por qué el teorema afirma lo que afirma?

P.- Sí, y que justifique por qué es así.

E.- ¿Y dónde está esa tecnología de la tecnología?

P.- En primer lugar, hay que decir que a la tecnología de la tecnología la llamamos una *teoría*, la teoría de la técnica.

E.- ¡Es verdad que todo esto se vuelve cada vez más teórico!

P.- Y añadiré esto: puede ocurrir que una tecnología justifique sin dar a entender.

E.- Antes has dicho que hacía las dos cosas a la vez.

P.- No, he dicho que una tecnología tenía *a priori* esas dos funciones. Pero muchas veces, en matemáticas, se demuestra que algo es como es sin poder explicar por qué es así. Por ejemplo, puedes intentar demostrar el teorema de antes. Ahora bien, explicar el fenómeno que describe este teorema, eso ya es otra cosa. ¡Y de una dificultad muy superior! Para empezar, te podrías preguntar en qué podría consistir esa explicación. La respuesta no es trivial. Pero así es como se progresa en matemáticas.

E.- Vale, ya lo pensaré. Pero aún hay otra cosa. ¿Tú crees que los alumnos van a ir tan lejos? A mí me da la impresión de que, en la práctica, todo es mucho más sencillo: el alumno enseñará su resultado al profesor, éste le dirá si está bien o mal, a lo sumo le hará notar que hay tres radicales en lugar de dos, y poco más. ¿No basta con eso? ¡Mientras los alumnos "racionalicen" bien!

P.- Basta y no basta. Para cualquier matemático, y para los matemáticos en general en una época determinada, siempre existen cuestiones oscuras, que te dirán que no entienden.

E.- Ésa es la tarea de los investigadores: difundir las luces del saber para disminuir la oscuridad.

P.- Sí. Pero creo que para contestar mejor a tu pregunta, empezaré planteándote yo una a ti.

E.- Te escucho.

P.- Imagínate una clase en la que los alumnos tienen que hacer sumas de fracciones. Un alumno enseña su resultado al profesor: ha encontrado $\frac{19}{28}$. El profesor le dice que se ha equivocado, que el resultado correcto no es ése. ¿Qué es lo que le permite dar esta respuesta?

E.- ¡Pues, supongo que el profesor habrá hecho los cálculos y le saldrá otra cosa! A lo mejor el resultado exacto no es $\frac{19}{28}$ sino $\frac{20}{28}$ o, mejor dicho, simplificando, $\frac{5}{7}$. Y eso es lo que le dice el profesor a su alumno.

P.- En otras palabras, ¡el resultado correcto sólo puede ser el que ha encontrado el profesor!

E.- Sí. A menos, claro, que el profesor se haya equivocado. Pero supongo que la probabilidad de error del profesor es menor que la de sus alumnos.

P.- Pues, supón ahora que los alumnos tienen que hacer un cálculo algebraico y que un alumno ha encontrado $(x - 1)^2+1$. En cambio el profesor ha encontrado $x^2 - 2x + 2$.

E.- ¡Es lo mismo!

P.- Sí. ¿Pero entonces por qué $\frac{19}{28}$ no sería también lo mismo que $\frac{5}{7}$?

E.- Porque son fracciones distintas... e irreductibles...

P.- Sí. Cuando se escriben dos fracciones en su forma irreductible, para ser iguales tienen que ser idénticas, es decir, deben tener el mismo numerador y el mismo denominador. Claro que si una de las dos fracciones no está reducida, el criterio no funciona.

E.- Como con $\frac{20}{28}$ y $\frac{5}{7}$. Pero, espera un momento. Lo que me estás diciendo es que, en general, se intentan escribir los objetos matemáticos en una forma que tenga la propiedad de ser única.

P.- Eso mismo. Se procura que los objetos del mismo tipo se puedan escribir de la misma forma. Es lo que se llama la forma *canónica.*

E.- Ya, ya lo sé: las fracciones se simplifican, los polinomios se escriben ordenando los términos por grados decrecientes... y las expresiones como las de antes con un radical se escriben de la forma $a + b\sqrt{n}$.

P.- Muy bien. Uno se pasa mucho tiempo aprendiendo a poner una expresión dada en su forma canónica, simplificando fracciones por ejemplo. Pero ahora quiero que volvamos a mi pregunta.

E.- ¡Si ya la hemos contestado!

P.- Matemáticamente sí. El profesor puede decirle a su alumno que se ha equivocado porque su resultado, en forma canónica, es distinto del que ha encontrado el profesor. Y también porque el profesor sabe que la expresión del resultado en forma canónica es única.

E.- Ya, ya veo por dónde vas. Porque el teorema de unicidad no se ha demostrado en clase. Y es precisamente lo que justifica la respuesta del profesor.

P.- ¡Es mucho peor! No es que el teorema no se haya demostrado, ¡es que ni siquiera se ha enunciado! Ni siquiera se ha planteado la cuestión. Se da por sentado, como si fuera evidente que la respuesta es única.

E.- Eso debe ser porque en la escuela siempre se trabaja con expresiones en forma canónica, para las que hay unicidad.

P.- Seguramente. Pero, después, mira lo que ocurre. Los alumnos pasan mucho tiempo aprendiendo a escribir ciertas expresiones matemáticas en su forma canónica (simplificando fracciones, desarrollando y ordenando los términos de un polinomio, etc.) y, al mismo tiempo, se les esconde la razón de todo este trabajo y el porqué de tanto esfuerzo.

E.- ¿Estás criticando a Luis?

P.- No, no, en absoluto. De hecho no sabemos lo que ocurre después de la clase del episodio.

E.- Vale, de acuerdo. Pero aún tengo otra pregunta.

P.- Pues venga, plantéala.

E.- Entiendo que lo de poner una expresión en una forma canónica para poder identificar tal o cual objeto sea importante. Por ejemplo, hay que poder saber si tal fracción es o no igual que tal otra, o si tal polinomio es igual que tal otro, etc.

P.- Eso es.

E.- Pero lo que no entiendo es que, con todo esto de los radicales y de racionalizar los denominadores de ciertas expresiones... Todo este trabajo... En el fondo es una obra matemática, ¿no?

P.- Sí.

E.- Y si es una obra, responde a alguna cuestión.

P.- Sí, claro, se justifica por el hecho de que, en matemáticas, a veces hay que manipular expresiones con radicales.

E.- Esto sería lo más natural. Pero no lo acabo de tener muy claro... ¿Qué hace que se tengan que manipular expresiones con radicales? ¿Seguro que los alumnos de ESO tendrán que estudiar situaciones matemáticas en las que aparecerán expresiones con radicales? Mira lo que te digo: si la respuesta es que no, entonces me parece una estupidez, e incluso poco ético, el hacerles estudiar una obra matemática que, para ellos, no responde a ninguna cuestión, que no satisface ninguna necesidad. Creo que habría que crear al mismo tiempo la necesidad y la manera de satisfacerla. ¿No te parece?

P.- La cuestión que planteas es en efecto esencial. Y si tu hipótesis es cierta, entonces creo que deberíamos concluir que, en el currículo de secundaria, esta obra matemática es una obra muerta. Está ahí, se estudia, pero nadie sabe por qué está ahí ni por qué hay que estudiarla.

E.- ¿Y seguro que no es lo que ocurre con lo de los radicales?

P.- Pues depende... Recuerda que nos estamos refiriendo a un currículo abierto.

E.- ¿Y eso qué tiene que ver?

P.- Puede ocurrir que los alumnos se encuentren con problemas que conduzcan a manipular expresiones con radicales o no, dependiendo del instituto. Y, claro, en el Instituto Juan de Mairena no se estudiarían las expresiones con radicales si no respondieran a una necesidad matemática concreta.

E.- Eso es lo que quería saber. ¿A qué necesidad responden?

P.- ¡Ah! ¡Bonito problema! Podrías intentar resolverlo tú mismo. Piensa un poco... ¿Cómo pueden aparecer expresiones con radicales en las matemáticas elementales? O, mejor dicho, ¿dónde?

E.- Vamos a ver... ¿En geometría, tal vez? Debido al teorema de Pitágoras, ¿es eso?

P.- Exactamente.

E.- Pero sigo sin ver concretamente en qué tipo de problemas aparecen expresiones como las de antes.

P.- Mira, como ya es hora de terminar, lo dejaremos para el próximo día. Así tendrás tiempo –y yo también, por cierto– para buscar un ejemplo. A ver qué pasa.

E.- Me parece bien. Buscaré en los manuales que tengo en casa, a ver si encuentro algo. Gracias, Profesora.

Creación y dominio de técnicas matemáticas

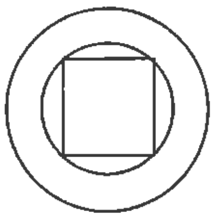
P.- ¡Hola, Estudiante! ¿Cómo te ha ido con aquello de los radicales? ¿Has hallado algún ejemplo geométrico.

E.- He buscado, pero sin éxito. No he encontrado nada en los manuales. Claro que no he mirado en todos... Sólo los que tengo en casa. Y no he tenido tiempo de pensar un ejemplo por mi cuenta.

P.- Bueno, entonces te propondré yo un ejemplo sencillo.

E.- ¿Tienes uno? Muy bien, cuéntame.

P.- A ver... Considera esta figura *(va a la pizarra y dibuja lo siguiente):*



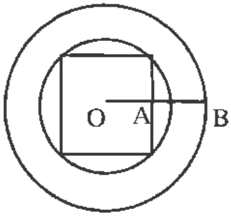
Hay dos círculos que delimitan una corona y, en el círculo pequeño, hay un cuadrado inscrito. Podría tratarse, por ejemplo, de un motivo en un cuadro abstracto.

E.- Vale.

P.- Ahora supón que tenemos una foto de este motivo y que queremos conocer sus dimensiones exactas. Por ejemplo, cuánto mide, en centímetros, el radio *r* del círculo exterior. ¿De acuerdo?

E.- Sí. Pero tal como lo presentas, el objeto puede ser de cualquier tamaño, ¿no?

P.- Si no tenemos ningún dato más, sí. Pero imagina que, además, el lado del cuadrado divide el radio del círculo mayor por la mitad. Algo así:



$$OA = AB$$

$$r = OB$$

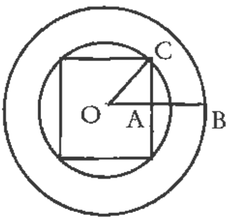
E.- Vale, pero sigue pasando lo mismo. La figura real puede ser muy grande o muy pequeña, no lo podemos saber.

P.- De acuerdo, de acuerdo. Pero supón que conocemos alguna medida de la figura real. Por ejemplo la amplitud de la corona, o sea la diferencia entre los radios de los dos círculos. Supongamos que es de unos 45 cm. ¿Podemos determinar ahora el tamaño real de la figura? ¿Podemos hallar el radio r del círculo exterior?

E.- Vamos a ver... Supongo que la figura debe ser bastante grande. Aunque, la verdad, no sé ...

P.- ¿Tú qué harías?

E.- ¿Para hallar la r? Pues... *(Va a la pizarra y escribe.)* Sabemos que esto *(señala el segmento* OA*)* vale $\frac{r}{2}$. Bueno. Luego esto *(señala el radio* OC*)* vale $OA\sqrt{2}$, es decir $\frac{r}{2}\sqrt{2}$. Por otra parte, OC vale también $r - 45$. Así que tenemos *(escribe)*:



$$OA = AB$$

$$r = OB$$

$$\frac{r}{2}\sqrt{2} = r - 45$$

P.- Bueno. Y ahora sólo falta resolver esta ecuación. ¡Y de eso sí que sabemos un rato!

E.- ¡Si no, pregúntaselo a Marta! *(Risas.)* Venga. Si multiplico los dos miembros por 2, sale *(escribe)*:

$$r\sqrt{2} = 2r - 90$$

De donde... *(escribe)*

$$r = \frac{90}{2 - \sqrt{2}}.$$

P.- Muy bien. Pero supón que alguien ha resuelto la ecuación de la manera siguiente. Como $\frac{r}{2}\sqrt{2}$ es igual a $\frac{r}{\sqrt{2}}$, multiplico los dos miembros por $\sqrt{2}$ y obtengo *(escribe)*:

$$r = \sqrt{2}r - 45\sqrt{2}$$

Luego la r es... *(escribe)*

$$r = \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

E.- Ya. De esta manera salen dos expresiones distintas para una misma solución.

P.- Eso mismo. Y también hubiéramos podido resolver la ecuación elevando los dos miembros al cuadrado, y recordando que la r debe ser mayor que 45. Llegaríamos a:

$$\begin{aligned}
&\frac{r^2}{4} \times 2 = (r - 45)^2 \\
&r^2 = 2(r - 45)^2 \\
&r^2 - 290r + 2\times 45^2 = 0 \\
&(r - 2\times 45)^2 - 2\times 45^2 = 0 \\
&r = 2\times 45 + 45\sqrt{2} = 45(2 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

E.- ¡Huy! ¡Eso ya es mucho más complicado!

P.- Sí, pero en cambio se obtiene directamente la expresión canónica de r. Y así llegamos a tres resultados formalmente distintos:

$$r = \frac{90}{2 - \sqrt{2}}\,; \quad r = \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\,; \quad r = 45(2 + \sqrt{2}).$$

¿Cuál es el bueno? Aquí es donde entra en juego todo el trabajo matemático sobre las expresiones con radicales. Porque es importante poder demostrar que las tres expresiones representan en realidad un mismo número: el radio r de la figura.

E.- Muy bien. Ya tenemos lo que buscábamos. Para resolver este problema, hay que ver que las tres soluciones son iguales y, para ello, hay que saber manipular expresiones con un radical. Muy bien. Pero creo que el ejemplo no es tan bueno como parece.

P.- ¿Ah no?

E.- No. Porque lo que queríamos al principio era encontrar el tamaño del objeto. Por lo tanto, lo que nos interesa no es la expresión con radicales, sino su valor numérico. Y con la calculadora tenemos enseguida una aproximación decimal de r. *(Coge su calculadora y teclea unos instantes.)* El círculo mayor mide, aproximadamente, 154 cm de radio. Pongamos un metro y medio. Eso es lo que queríamos saber, ¿no?

P.- No del todo...

E.- ¡Me lo esperaba!

P.- Tu comentario me parece correcto: *a priori* queremos un valor aproximado del tamaño del objeto. Queremos saber si r vale 80 cm, o 2 m, o 1 cm, etc. Desde este punto de vista, las tres expresiones sirven igual, ¡siempre que tengamos una calculadora a mano, claro! Pero antes de calcular el valor numérico de la r, hubiésemos podido querer *controlar* nuestra solución. Y una buena manera de comprobar que el resultado es correcto consiste en ir por un camino diferente y ver si se llega al mismo resultado. Al final hay que asegurarse de que las dos expresiones son iguales. Y, como hemos visto, pueden ser *formalmente* muy distintas.

E.- Ya. Y para ver que son lo mismo, lo mejor es escribirlas en su forma canónica $a + b\sqrt{2}$.

P.- Así es. También puedes intentar pasar de una a otra, pero para ello ya hay que ser un poco más "manitas" *(escribe en la pizarra)*:

$$\frac{90}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\times 45}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2\times 45}{(\sqrt{2})^2-\sqrt{2}} = \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.$$

E.- Vale, estoy de acuerdo. Pero si uno supone que no se ha equivocado, no sirve de nada reducirse a la forma canónica para llegar a un valor aproximado de la r.

P.- Tienes algo de razón... Pero no *toda* la razón. Lo que dices no es del todo cierto.

E.- ¿Por qué no?

P.- Fíjate bien. Supón que quieres un valor aproximado de la r con un error máximo de algunos centímetros. Digamos que, como la r vale unos 150 cm, te contentarías con un valor aproximado entre 150 y 160 cm.

E.- Vale.

P.- Supón también que no tienes calculadora. Intentarás hacer el cálculo a mano y simplificando algo las cosas. Por ejemplo, en lugar de $\sqrt{2}$ vas a tomar 1,5. Si lo haces con la expresión $\frac{90}{2-\sqrt{2}}$, ¿a qué resultado llegas?

E.- Pues 90 dividido entre 2 menos 1,5, es decir, 90 entre 0,5, que es lo mismo que 90 multiplicado por 2, o sea 180.

P.- ¡Ya estás fuera de la zona 150 – 160!

E.- Sí, pero porque he tomado un valor de $\sqrt{2}$ muy poco aproximado. $\sqrt{2}$ es 1,414 y algo más.

P.- Bueno, pero no me negarás que 1,5 es una aproximación muy práctica para hacer cálculos mentales. Por ejemplo, prueba ahora con la segunda expresión: $\dfrac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

E.- ¡Dará lo mismo!

P.- ¡Hazlo por favor!

E.- De acuerdo. 45 por 1,5 y dividido entre 0,5, o sea 45 por 3,... 135. Es verdad, no da lo mismo.

P.- No. Y tampoco da lo mismo con la expresión canónica. Mira: teníamos $45(2 + \sqrt{2})$, es decir, con la aproximación, 45 por 3,5. 45 por 3 dan 135, y si le sumamos la mitad de 45, es decir 22,5, llegamos a 157,5.

E.- ¡Vaya! ¡Y esta aproximación sí que entra en la franja 150 – 160! Qué curioso... ¿Por qué hallamos cosas tan distintas? No lo entiendo...

P.- ¿No lo entiendes? Entonces es que estás en un tipo de situación de la que ya hemos hablado: necesitas una tecnología matemática que te permita entenderlo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, simplemente que te encuentras ante un fenómeno matemático que no entiendes, a saber, por qué la expresión $45(2 + \sqrt{2})$ da un valor aproximado mejor que las otras dos.

E.- Muy bien. ¿Pero en este caso qué sería una tecnología matemática apropiada?

P.- Será algo que te permita entender el fenómeno. Aquí, por ejemplo, puede consistir en un modelo matemático.

E.- ¿Un modelo matemático de un fenómeno matemático? Me suena un poco raro...

P.- No lo es en absoluto. Para nada. Siempre ocurre algo parecido: para entender un fenómeno matemático, se construye un modelo matemático. Las matemáticas progresan de esta manera. Para entender un fenómeno matemático que no se entiende, lo primero que se necesita son *más matemáticas*.

E.- Vale, vale. ¿Y qué se necesita aquí?

P.- Mira, podemos modelizar la situación de la siguiente manera. Tenemos tres expresiones numéricas *(escribe)*:

$$\frac{90}{2-\sqrt{2}} \qquad \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \qquad 45(2+\sqrt{2}).$$

A cada una le haremos corresponder una función, sustituyendo $\sqrt{2}$ por la variable x. Para la primera, tendremos la función $f(x) = \dfrac{90}{2-x}$.

E.- Ya veo. Para la segunda, será $g(x) = \dfrac{45x}{x-1}$ y para la tercera $h(x) = 45(2 + x)$.

P.- Sí, o $h(x) = 90 + 45x$. Muy bien. Ahora considera la función h. Es una función afín creciente.

E.- Sí, y lo que nos interesa es $h(\sqrt{2})$.

P.- Eso es. Si tomamos 1,5 como valor aproximado de $\sqrt{2}$, tendremos que calcular $h(1{,}5)$. Y como 1,5 es mayor que $\sqrt{2}$, hallaremos un valor de $h(1{,}5)$ mayor que el valor buscado $h(\sqrt{2})$.

E.- Es verdad. Teníamos que $h(\sqrt{2}) \simeq 154$ y $h(1{,}5) = 157{,}5$.

P.- ¿Y con las demás funciones?

E.- Vamos a ver. La función $f(x) = \dfrac{90}{2-x}$ es una función hiperbólica... Cuando x crece siendo menor que 2, el denominador $2 - x$ decrece y, por lo tanto, la función crece.

P.- ¿Por lo tanto?

E.- Por lo tanto, el valor aproximado $f(1{,}5)$ será mayor que $f(\sqrt{2})$. Creo que era 180, ¿no?

P.- Sí. Y ahora sólo falta la función $g(x) = \dfrac{45x}{x-1}$. ¿Es creciente o decreciente?

E.- A ver... *(Piensa unos instantes.)* Así de pronto, no lo sé.

P.- ¿No lo sabes? Pero te acuerdas del resultado numérico, ¿no?

E.- Sí. Era $g(1{,}5) = 135$, o sea, menor que $g(\sqrt{2})$. Así que supongo que la función será decreciente. Vaya, eso creo. Pero tendría que verlo mejor, calculando la derivada y todo eso.

P.- ¡Venga! ¡No es necesaria tanta complicación! Mira esto *(escribe en la pizarra):*

$$g(x) = \frac{45x}{x-1} = \frac{45(x-1)+45}{x-1} = 45 + \frac{45}{x-1}.$$

E.- ¡Claro! ¡Qué ingenioso! Y ahora se ve que cuando x crece y es mayor que 1, $\dfrac{45}{x-1}$ decrece. Por lo tanto, la función $g(x)$ también decrece. Lo que decíamos antes.

P.- Bueno. Me imagino que ya entiendes por qué, cuando tomamos 1,5 como aproximación de $\sqrt{2}$, la primera y tercera expresiones nos dan valores mayores que el que buscamos, y la segunda nos lo da menor.

E.- Sí, perfectamente.

P.- Pues la tecnología matemática que te permite entenderlo proviene de haber modelizado expresiones numéricas con funciones. A partir de aquí, podemos utilizar las propiedades más elementales de las funciones, como su crecimiento o decrecimiento, por ejemplo. Cosa que no podíamos hacer con las expresiones numéricas que son valores constantes: ni crecen ni decrecen.

E.- Vale. Estoy de acuerdo. Pero aún no hemos acabado. Lo que queríamos saber era por qué la tercera expresión da una mejor aproximación por exceso.

P.- ¿A ti qué te parece?

E.- No lo veo muy claro...

P.- Te dejaré buscarlo por ti mismo.

E.- Vale, como quieras. Ya lo haré. Pues entonces... ¿Podríamos volver a Luis?

P.- Claro que sí.

E.- Sigo preguntándome por qué da a sus alumnos una lista tan larga de ejercicios.

P.- Veamos. Supongo que los alumnos de Luis habrán abordado, durante las clases anteriores a la del episodio, un nuevo tipo de problemas matemáticos: dada una expresión numérica con un radical $\sqrt{n}$, cómo escribirla sin que haya radicales en el denominador. También hemos visto, hace un rato, qué podía justificar el estudio de este tipo de problemas.

E.- Sí.

P.- Por lo tanto, durante las clases anteriores, tendrá que haber surgido, en manos de los alumnos, una determinada técnica que permita abordar este tipo de tareas matemáticas.

E.- La técnica de la expresión conjugada.

P.- Eso mismo. Al principio, las tareas matemáticas del tipo considerado eran, sin duda, para los alumnos, totalmente problemáticas. Lo que Luis debe conseguir es que, después de cierto trabajo, estas tareas se vuelvan casi rutinarias para sus alumnos. O, si quieres, que cuando estén ante una expresión del tipo considerado, por ejemplo... *(escribe en la pizarra)*

$$\frac{5-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

la utilización de la técnica de multiplicar por el conjugado sea algo casi automático. Que lo hagan como por rutina.

E.- Permíteme un comentario, Profesora.

P.- Adelante.

E.- ¿Por qué se quiere que los alumnos lleguen a dominar esta técnica hasta tal punto que se convierta en algo natural? ¡Son alumnos, no profesionales! ¡No se supone que se tengan que pasar la vida racionalizando este tipo de expresiones!

P.- O sea, tú preferirías que este tipo de tarea se mantuviera siempre un poco problemática para ellos. ¿Es eso? ¡Tienes unos placeres muy refinados!

E.- Yo no digo eso. Digo simplemente que quizá sea una exigencia didáctica un tanto excesiva... Además, de todos modos, su dominio de la técnica sólo durará un tiempo limitado. Tres meses más tarde ya lo habrán olvidado y el tipo de tarea volverá a ser problemática.

P.- Seguramente. Es verdad. Ahora sí que has dado con el verdadero problema. ¿Por qué se quiere que este tipo de tarea T se vuelva rutinaria para los alumnos? Hay una respuesta muy simple. Tomemos otro tipo de tarea T' que contenga las tareas anteriores.

E.- Por ejemplo tu problema de geometría. Se llega a una expresión con un radical y se quiere escribir como $a + b\sqrt{n}$.

P.- Muy bien. Cuando los alumnos se enfrenten por vez primera con tareas del tipo T', tendrá que emerger cierta técnica. Si suponemos que para utilizar esta técnica hay que poder realizar las tareas del tipo T, y si estas tareas no son rutinarias, entonces será aún más difícil que emerja una técnica para resolver las tareas del tipo T'. En cambio, si se han creado previamente algunos automatismos relativos a las tareas del tipo T, el esfuerzo para aprender a realizar T' será menor. ¿Ves lo que quiero decir?

E.- Hay que convertir en rutina lo que se ha creado, para poder seguir creando. ¿Es eso, no?

P.- Sí, eso mismo.

E.- Pero no has contestado del todo a mi objeción. Si los alumnos van a enfrentarse a T' tres meses después de haber estudiado las tareas del tipo T, ya no sabrán cómo realizarlas. Quizá no serán tan problemáticas como al principio, pero ya no serán rutinarias.

P.- Estás en lo cierto. Se trata de un fenómeno que todo el mundo conoce. Cuando has sabido hacer algo muy bien, pero que, con el tiempo, has dejado un poco de lado, es generalmente bastante fácil volver a encontrar el dominio que se tuvo en su día. Vuelves a vivir el proceso de aprendizaje, pero de manera muy acelerada. ¿Cómo era? ¿Cómo se hacía? Esto es lo que se pregunta aquel que lo supo hacer un día. Y muy pronto volverá a encontrar los gestos básicos, es decir, la técnica que dominaba y que, en poco tiempo, se convertirá otra vez en una manera de hacer casi automática.

E.- Vale, ya lo entiendo.

P.- Claro que, aparte de esto, hay otra razón que explica lo que hace Luis. No se trata sólo de que los alumnos dominen la técnica, se trata también de que dispongan de una buena técnica.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Esto: cuando crees tener un principio de técnica, cuando has intentado utilizar esta manera de hacer con uno, dos o tres ejemplos, no es muy seguro que la técnica de que dispones funcione con un cuarto ejemplo. Tienes que ponerla a prueba con otros ejemplos, para ver si es resistente. En general, te darás cuenta de que tu técnica inicial era muy rudimentaria y que hay que complicarla un poco para aumentar su alcance, para que sea realmente eficaz.

E.- Por ejemplo, los alumnos han empezado trabajando con expresiones que contienen un solo radical y, en el episodio que hemos visto, tienen que abordar el caso de expresiones con dos radicales. Y aquí hay que complicar un poco la técnica inicial para que funcione.

P.- Sí. Pero no hace falta ir tan lejos. El fenómeno también se produce cuando uno se limita a las expresiones con un solo radical. Mira, considera la expresión de antes... *(Va a la pizarra.)* Pero ahora con un cuadrado en el denominador:

$$\frac{5-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}$$

Si los alumnos no han visto hasta el momento expresiones con un exponente, aparecerá aquí una pequeña ruptura técnica: tendrán que pasar a otro nivel. O, mejor dicho, la técnica que utilizan deberá absorber esta nueva dificultad.

E.- ¿Multiplicando dos veces por el conjugado?

P.- Multiplicando dos veces, dices... O sea, si multiplico una vez me dará *(escribe)*:

$$\frac{5-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})^2}=\frac{(5-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})}=\frac{13-7\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Y si ahora vuelvo a multiplicar, será:

$$\frac{13-7\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{(13-3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{1}=47-27\sqrt{3}$$

E.- ¡Eso es!

P.- Sí. Pero a lo mejor a los alumnos les conviene descubrir una variante de este cálculo que consiste en multiplicar de entrada por $(2-\sqrt{3})^2$. En el denominador, quedará $(2+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})^2$, es decir, $(4 - 3)^2$, o sea, 1. Y sólo habrá que calcular el numerador: $(5 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2$.

E.- Y para ello hay que desarrollar el factor $(2 - \sqrt{3})^2$...

P.- Bueno. Creo que nos estamos entendiendo. En cualquier caso, ves que no se trata sólo de dominar una técnica, sino de *crearla*. Y para ello hay que hacerla trabajar sobre muchos problemas distintos, para asegurarse de que será operativa cuando la pongamos realmente en práctica.

E.- O sea que lo que hacen los alumnos de Luis es poner a punto una técnica relativa al tipo de tareas T.

P.- Sí. Además creo que se trata de la última puesta a punto. Por lo menos en lo que respecta a las expresiones con un radical.

E.- También hay el principio de un trabajo nuevo para hacer evolucionar la técnica y adaptarla a las expresiones con dos radicales.

P.- Eso es. Se trabaja la técnica para evitar que su aplicación se reduzca a un tipo restringido de problemas, para poder utilizarla de manera flexible, adaptándola a nuevos problemas. En eso consiste la rutinización.

E.- Pero, Profesora, ¡en matemáticas no sólo hay técnicas!

P.- Tienes toda la razón. También hay tecnologías y teorías. Pero de eso ya hablamos el otro día, ¿no?

E.- Sí. De todas formas, a mí me da la impresión que, para Luis, lo único importante sea la técnica.

P.- Hablas sin conocimiento de causa. El episodio que hemos examinado es tan sólo un momento del trabajo. Y habrá, en la clase, muchos otros momentos dedicados a otras partes de la organización matemática que Luis quiere construir con sus alumnos. De eso también hablamos el otro día, creo.

E.- Sí.

P.- Queda, sin embargo, algo por aclarar. Me da la impresión de que, para ti, existen en el trabajo matemático momentos nobles y momentos menos nobles. Cuando ves a los alumnos descubrir de repente una técnica, aunque sea en un estado naciente, lo encuentras excitante y muy interesante. En cambio, cuando los ves trabajar con paciencia una técnica para ponerla a punto y, al mismo tiempo, conseguir dominarla, lo encuentras pesado, carente de interés. ¿No es así?

E.- Quizá sí.

P.- Déjame decirte algo. En la actividad matemática, como en cualquier otra actividad, hay dos partes que no pueden vivir la una sin la otra. Están, por un lado, las tareas y las técnicas y, por otro lado, las tecnologías y teorías. La primera parte es lo que podemos llamar la "práctica" o, en griego, la *praxis*. La segunda está hecha de elementos que permiten justificar y entender lo que se hace, es el ámbito del discurso razonado –implícito o explícito– sobre la práctica, lo que los griegos hubieran llamado el *logos*. Y lo que tienes que recordar es que no hay *praxis* sin *logos*, pero que tampoco hay *logos* sin *praxis*. Los dos están unidos como las dos caras de una hoja de papel. Cuando juntamos las palabras griegas *praxis* y *logos*, sale, en castellano, la palabra *praxeología*. Una organización matemática, como la que Luis intenta hacer vivir en su clase, es una *praxeología matemática*. Debe permitir a los alumnos actuar con eficacia para resolver problemas, y entender al mismo tiempo lo que hacen de manera racional. Reflexiona un poco sobre todo esto. Volveremos a hablar de ello el próximo día. Pero ahora hay que "plegar", como dicen los catalanes.

E.- Muy bien. Hasta el próximo día. Y gracias.

Lo didáctico es inseparable de lo matemático

E.- Buenos días, Profesora.

P.- Hola, ¿cómo estás? ¿Has pensado en lo que dijimos la última vez?

E.- Por supuesto. Además hay algo que me molesta un poco, que no acabo de entender.

P.- ¿Y qué es?

E.- Es algo relativo a la praxeología.

P.- A ver, ¿qué es lo que no entiendes?

E.- He pensado en lo que dijimos, hace ya algún tiempo, acerca de las obras. De las obras matemáticas, claro. Dijimos, por ejemplo, que las expresiones con un radical son una obra matemática. O una obrita, como quieras. Es algo que responde a una cuestión: ¿cómo escribir una expresión con un radical en la forma $a + b\sqrt{n}$? Y también vimos en qué tipos de situaciones surgía la necesidad de responder a esta cuestión. Por lo tanto, es una obra.

P.- Hasta aquí, estoy totalmente de acuerdo.

E.- Pero la última vez ya no hablabas de obra sino de praxeología. Además también hablaste en algún momento de organización matemática. Obra, praxeología, organización matemática, ¿no son muchas palabras? ¿De verdad que se necesitan tantos términos?

P.- Sí, son muchas palabras. Y es que a veces, en aras del rigor y la precisión, se necesitan muchas palabras. ¿Cómo has venido hoy, a pie?

E.- No, en coche.

P.- ¿En coche o en automóvil?

E.- Como quieras, es lo mismo.

P.- Me alegra que lo digas. También hubieras podido venir en tren, ¿no?

E.- Sí, ya veo: en tren o en ferrocarril.

P.- ¡Muy bien, estás progresando!

E.- ¡Venga, Profesora! ¿Entonces una praxeología y una obra es lo mismo?

P.- Sí, es lo mismo. O casi. Lo que hemos dicho es que una obra surge como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones.

E.- Sí.

P.- Decir que surge como respuesta a una cuestión es una manera de hablar. Una manera un poco metafórica, imaginaria. Lo que hay que preguntarse después es: ¿en qué consiste esta respuesta? Y el último día dijimos que la respuesta que aporta la obra a la cuestión que la motiva no es nada más que una determinada...

E.- Praxeología.

P.- Eso mismo. Por lo tanto, al pasar de la palabra "obra" a la palabra "praxeología", hemos ganado algo. Nuestra descripción inicial en términos de cuestiones y respuestas se quedaba un poco en la superficie de las cosas. Con la noción de praxeología podemos adentrarnos un poco más en la "carne" de la obra. ¿De qué se compone una obra? De cierta praxeología. O, mejor dicho, de un sistema de praxeologías, de un conjunto estructurado de praxeologías.

E.- Ya veo, ya veo. Y este conjunto estructurado tendrá algo que ver con la expresión "organización matemática" que también empleaste. ¿Me equivoco?

P.- Fíjate que la expresión "organización matemática" es un poco floja, es un término neutro. Una obra matemática es un conjunto organizado de objetos, es una organización de objetos ligados entre sí por diversas interrelaciones. La expresión no dice gran cosa por sí misma, pero es útil a veces porque permite indicar que tal o cual objeto pertenece o no pertenece a tal o cual organización matemática.

E.- ¿Como lo de los dos radicales del otro día, que al principio no formaban parte de la organización?

P.- Sí. Podemos decir que el trabajo que realiza Luis con sus alumnos consiste en reorganizar cierta obra matemática para que pueda integrar las expresiones con dos radicales. Cuando haya llevado a cabo este trabajo, lo que obtendrá es una nueva organización matemática que incluye la anterior –la de las expresiones con un solo radical–.

E.- ¿Y en esta nueva organización también habrá técnicas, tipos de problemas y todo eso?

P.- Sí, claro. Para construir la nueva organización, habrá que elaborar una nueva praxeología, con un tipo de problemas determinado, una o varias técnicas, su tecnología y la teoría correspondiente. Organizar es crear una praxeología. Una praxeología nueva o renovada. En realidad, habría que hablar de organización praxeológica.

E.- ¡Una expresión más!

P.- Mira, no hay que ir con reparos. Incluso se tendría que hablar de organizaciones praxeológicas matemáticas, para luego abreviarlo en "organización matemática" o, como decía antes, en "praxeología matemática". Es lo mismo. Todo depende de lo que quieras poner en evidencia.

E.- A mí me gustaba lo de "obra", se veía bien el carácter objetivo de la cosa.

P.- Ya entiendo. Porque debes ser sensible a la idea...

E.- De algo que se construye, que construyen los hombres como respuesta a ciertas necesidades.

P.- A ciertas necesidades praxeológicas. Es decir, a la necesidad de poder actuar más y mejor, y también de manera más justificada e inteligible.

E.- Es verdad. Todo depende de lo que se quiera poner en evidencia. También creo que lo de organización tiene un carácter más dinámico: algo que se organiza y reorganiza en función de las necesidades, como hace Luis, y que puede cambiar... De todas formas, ahora tengo otra pregunta.

P.- Adelante.

E.- Mira, supongamos que queremos construir una organización matemática.

P.- Vale.

E.- Para hacer este trabajo, para realizar esta tarea, se necesitan técnicas y, por tanto, tecnologías y teorías. Por lo tanto... se necesita algo... una praxeología ¿no? Para construir una organización matemática se necesita otra praxeología. Pero esta nueva praxeología, que sirve para construir otra, no es una praxeología matemática. ¿O sí?

P.- Acabas de tocar un punto muy delicado. Veamos. Elaborar o reconstruir ciertas organizaciones matemáticas, esto lo hacen tanto los profesores con sus alumnos como los investigadores en matemáticas. Y cuando un matemático construye una nueva organización matemática, lo hace con ciertas técnicas justificadas de cierta manera, o sea, recurriendo a cierta praxeología. ¿Vale?

E.- Sí.

P.- Hace un trabajo de matemático, un trabajo regulado por cierta praxeología. ¿Y tú dirías que el trabajo de un matemático no es matemático?

E.- Pues, la verdad...

P.- Claro, es muy delicado. La praxeología del matemático es lo que le permite hacer matemáticas. Hacer matemáticas, es decir, fabricar matemáticas, praxeologías matemáticas. ¿Me sigues?

E.- Creo que sí.

P.- Bueno, pues continuemos, aunque sea un poco difícil. La praxeología matemática que quiere construir el matemático es el objetivo de su trabajo, el producto que quiere obtener. En cambio su praxeología de matemático es lo que le proporciona los *medios* para realizar este trabajo.

E.- Profesora, ¿te puedo interrumpir un momento? Al examinar el episodio de Marta y sus alumnos, tú hablaste de *técnica didáctica*. Marta quería que sus alumnos construyeran cierta praxeología matemática –relativa al álgebra elemental– y recurría para ello a cierta técnica didáctica.

P.- Sí, didáctica en el sentido de relativa al estudio.

E.- Precisamente. Si "didáctico" quiere decir "relativo al estudio", entonces... Mira, en general, cuando el matemático quiere construir una praxeología matemática, es porque quiere resolver cierto tipo de problemas. Y aquí también se dice, en el lenguaje corriente, que el matemático *estudia* los problemas que se plantea.

P.- Claro. El biólogo estudia problemas de biología, el químico problemas de química, etc.

E.- Pues entonces, si estudia problemas, también diremos que la técnica que utiliza para estudiar problemas es una técnica didáctica. Y la praxeología que le permite actuar será, por lo mismo, una praxeología didáctica.

P.- ¿Conclusión?

E.- Resulta que para elaborar una praxeología matemática, el matemático necesita una praxeología didáctica. ¿Es eso?

P.- Eso mismo. Claro que aquí volveremos a encontrar una dificultad. Y además una dificultad inevitable, que forma parte de la propia naturaleza de las cosas.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, que la frontera entre lo didáctico y lo matemático no está establecida una vez por todas. No se pueden separar fácilmente. "Hacer matemáticas", en el lenguaje corriente, quiere decir a la vez operar, actuar según cierta praxeología matemática –como cuando resuelvo una ecuación de segundo grado– y también quiere decir fabricar una praxeología matemática nueva o parcialmente nueva. La dificultad de la que te hablo aparece muy claramente en esta doble vertiente del verbo hacer: hacer en el sentido de fabricar y hacer en el sentido de actuar.

E.- Espera. ¿Para actuar se recurriría a una praxeología matemática y para fabricar se necesitaría una praxeología didáctica? No lo veo muy claro. También has dicho que la frontera entre ambos no está establecida una vez por todas. ¿Qué quieres decir exactamente?

P.- Esa es también una cuestión difícil. Mira, la historia de las matemáticas muestra que muchas técnicas que se utilizaban para fabricar matemáticas se han acabado integrando, a la larga, en organizaciones matemáticas. O, si prefieres, que ciertas "cosas didácticas" que sirven para estudiar problemas y crear nuevas matemáticas se convierten progresivamente en "cosas matemáticas", se acaban "matematizando". Vaya, que se produce históricamente cierta "matematización" de lo didáctico.

E.- No lo entiendo. No me parece nada claro todo esto.

P.- ¿Qué es lo que no ves nada claro?

E.- Tomemos un ejemplo. Yo, cuando tengo que estudiar un tipo de problemas de matemáticas, suelo empezar examinando algunos problemas sencillos, los más simples que me pueda imaginar. ¿Es esto una técnica didáctica?

P.- Sí, por supuesto.

E.- ¿Y tú crees que esta técnica didáctica, a la larga, se va a matematizar y pasará a formar parte de una organización matemática?

P.- La pregunta no es tonta. Pero antes hay que hacer algunas observaciones generales. Te diré primero que el proceso de matematización del que hablaba afecta en general a todo tipo de objeto, y no sólo a los objetos didácticos. Es un fenómeno mucho más amplio. Por ejemplo, a partir de la idea común de rectilinealidad, de nuestra noción de línea recta, el proceso de matematización va a fabricar la recta matemática, con su ecuación cartesiana y todo eso. Claro que, a la inversa, el proceso de "matematización" deja de lado muchos objetos y sólo se va a apoderar de algunos de ellos, sean o no didácticos.

E.- Por lo tanto la matematización de las cosas es un fenómeno poco frecuente.

P.- Sí, se puede decir esto. Aunque es más frecuente de lo que parece, siempre que tengamos en cuenta que la matematización de un objeto es algo parcial, que sólo se traduce matemáticamente algunas propiedades del objeto matematizado. Por ejemplo, en la técnica didáctica que has descrito...

E.- Sí, ¿y bien?

P.- Pues, podemos imaginar que, de la utilización de esta técnica, surja la idea de que, cuando se estudia cierto tipo de problemas, es útil examinar un buen número de especímenes para sacar a relucir las propiedades realmente interesantes que aparecen en cada problema del tipo en cuestión. En ciertos contextos del trabajo matemático, esta idea conduce a la noción de axiomática: se reformulará el tipo de problemas considerando únicamente aquellos casos en los que se cumplen ciertas propiedades planteadas a priori –los axiomas–. Y entonces se estudian las propiedades de los "sistemas matemáticos" que cumplen estas propiedades.

E.- Vale, pero construir una axiomática en el sentido de explicitar ciertos supuestos previos, ¡esto sigue siendo una técnica de estudio, una técnica didáctica!

P.- Efectivamente. Claro que, a partir de aquí, se produce una evolución histórica muy importante en la que se va a matematizar la técnica de axiomatización que, como tú dices, es en principio una técnica didáctica. A partir del siglo XIX y, sobre todo, de principios del XX, los matemáticos han elaborado toda una teoría matemática de las axiomáticas con el objetivo de entender mejor –y controlar también mejor– la herramienta axiomática, que es un instrumento de trabajo para el matemático.

E.- ¡Pero entonces volveremos a tener un instrumento didáctico, puesto que esta herramienta servirá para estudiar mejor nuevos tipos de problemas!

P.- Exactamente. Al principio hay una manera de hacer, una técnica para estudiar ciertos tipos de problemas. Esta técnica se va a matematizar parcialmente dando lugar a nuevos conocimientos matemáticos que permitirán mejorarla, precisarla, darle mayor eficacia. Ése es el interés de toda matematización y no sólo de la matematización de cosas didácticas. Por eso decía que no se podían separar.

E.- Ya lo empiezo a entender... Aunque preferiría un ejemplo más elemental.

P.- ¡Siempre pidiendo más! ¡Nunca te das por satisfecho! A ver, un ejemplo más elemental... Pues mira, será un ejemplo un poco artificial, pero en todo caso más concreto.

E.- Vale.

P.- Imaginemos un alumno muy interesado por las matemáticas y que dispone de una técnica de estudio un poco particular: consiste en suponer que existe un número que cumple ciertas propiedades aunque no sepa si el número existe o no, o incluso aunque sepa que dicho número no existe realmente.

E.- Como no lo concretes un poco más...

P.- Mira, toma el siguiente caso. Considera una obra matemática que existe en todos los currículos de secundaria y cuyo objetivo es responder a la cuestión: cómo resolver una ecuación cuadrática.

E.- Vale. La resolución de ecuaciones de segundo grado.

P.- Nuestro alumno quiere reconstruir a su manera la organización matemática que ha estudiado en clase bajo la dirección de su profesor.

E.- O sea que conoce esta organización matemática.

P.- Sí, es lo que supondré. Sabe por ejemplo que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones distintas si y sólo si $b^2 - 4ac > 0$, una solución si $b^2 - 4ac = 0$ y ninguna solución si $b^2 - 4ac < 0$.

E.- Vale. $b^2 - 4ac$ es el discriminante de la ecuación. Es lo primero que se aprende al estudiar las ecuaciones de segundo grado.

P.- Sí. Pero esta organización matemática no es de su agrado.

E.- ¿Por qué?

P.- Porque no entiende el resultado anterior. No entiende por qué el discriminante desempeña un papel tan importante, por qué aparece precisamente la expresión $b^2 - 4ac$. ¿Tú le podrías responder?

E.- No sé... ¿Por qué lo decisivo es el signo del discriminante y no otra cosa? No sé. Es lo que se obtiene al resolver la ecuación.

P.- Mira, imaginemos a nuestro alumno trabajando sobre la cuestión que se plantea. Lo primero que hará será utilizar su técnica de estudio habitual para ver qué ocurre en este caso.

E.- ¿Y en qué consiste concretamente esa técnica?

P.- En suponer que la ecuación tiene una solución x_0 de la ecuación...

E.- Pero en principio no sabe si la ecuación tiene o no solución.

P.- Exactamente. Ésa es su técnica: suponer que existe un número x_0 que cumple la ecuación $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$. Y entonces lo resta de la ecuación inicial, así *(va a la pizarra y escribe)*:

$$\begin{array}{rr} & ax^2 + bx + c = 0 \\ & ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \hline & a(x^2-x_0^2) + b(x-x_0) = 0 \\ \iff & a(x-x_0)(x+x_0) + b(x-x_0) = 0 \end{array}$$

E.- Muy bien. ¿Y ahora qué?

P.- Ahora llega a la siguiente conclusión: simplificando por $a(x - x_0)$ aparece otra solución de la ecuación que cumple $a(x+x_0) + b = 0$. Por lo tanto, si x_0 es una solución, la otra solución es $x_1 = -x_0 - \frac{b}{a}$.

E.- ¿Y entonces?

P.- Pues, se acaba de dar cuenta de que si la ecuación tiene una solución, entonces tiene dos.

E.- A menos que sea la misma.

P.- Sí, claro. En realidad, lo que acaba de demostrar –o casi– es que una ecuación de segundo grado tiene como mucho dos raíces, algo que el profesor no había hecho en clase.

E.- Vale, vale. Pero ¿y lo del discriminante?

P.- A eso voy. Su técnica consiste en suponer que siempre existen los números que se buscan, es decir, en este caso, las soluciones de la ecuación. Supone que hay una, y demuestra que entonces tiene que haber otra, aunque pueda ser igual a la anterior. Pero él lo que quiere es ver qué se esconde detrás de la ecuación, ir en cierta forma a mirar al otro lado del espejo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Pues, aquí lo que hará será expresar los coeficientes *a*, *b*, *c* en función de las soluciones y sustituirlo en la ecuación inicial. Ya sabe, porque lo han visto en clase, que la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado vienen dados por:

$$x_0 + x_1 = \frac{-b}{a} \quad \text{y} \quad x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}.$$

E.- Eso es. Suponiendo que la ecuación tiene dos soluciones, claro.

P.- Ya, pero ésa es precisamente su técnica de estudio. Supone que hay dos soluciones, aunque no existan. Prosigo. Porque ahora se dará cuenta de que estos resultados vistos en clase se desprenden fácilmente de lo que ya tenía.

E.- Sí. Él había obtenido $x_1 = -x_0 - \frac{b}{a}$. Para la suma es evidente que $x_1 + x_0 = \frac{-b}{a}$.

P.- Y para el producto también. Lo voy a hacer, mira *(escribe)*:

$$x_0 \cdot x_1 = x_0(-x_0 - \frac{b}{a}) = -x_0^2 - \frac{b}{a}x_0 = \frac{-1}{a}(ax_0^2 + bx_0) = \frac{-1}{a}(-c) = \frac{c}{a}.$$

E.- Muy bien. Pero aún no hemos llegado al discriminante.

P.- ¡Paciencia! Ya casi estamos. De las dos expresiones anteriores saca que $b = a(x_1+x_0)$ y que $c = ax_1 \cdot x_0$. Y llega entonces a:

$$b^2 - 4ac = a^2(x_0+x_1)^2 - 4a^2x_0 \cdot x_1 = a^2[(x_0+x_1)^2 - 4\,x_0 \cdot x_1] = a^2\,(x_0 - x_1)^2$$

E.- ¡Ah! Ya entiendo. Si hay dos soluciones, entonces el discriminante $b^2 - 4ac$ que vale $a^2\,(x_0 - x_1)^2$ es necesariamente positivo, y es igual a 0 cuando las soluciones son iguales. Si es negativo no puede haber soluciones, ¡porque si las hubiera sería positivo!

P.- Perfecto. Pero aún no hemos acabado. Nuestro alumno ha aprendido en clase una fórmula que tampoco entiende, que le parece un tanto misteriosa: la que da la expresión de las soluciones. Te la recordaré *(escribe):*

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si aplica aquí las mismas sustituciones que antes, llegará a

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{x_0 + x_1}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2\,(x_0 - x_1)^2}}{2a} = \frac{x_0 + x_1}{2} \pm \frac{x_0 - x_1}{2}$$

La fórmula anterior se convierte entonces en:

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \pm \frac{x_0 - x_1}{2}$$

Con el signo + se obtiene x_0 y con el signo $-$, x_1.

E.- Muy bien. Creo que ya veo lo que quieres decir. Pero tengo algo que objetar.

P.- A ver, ¿cuál es tu objeción?

E.- Pues mira, la técnica de estudio que utiliza nuestro alumno es en realidad una técnica superclásica. Consiste en estudiar las consecuencias que plantea la existencia de un objeto que no se conoce: si el objeto existe, entonces debe ocurrir esto o aquello. A lo mejor el alumno lo ha descubierto él solo, y esto en sí ya tiene mucho mérito, pero la técnica utilizada sigue siendo una técnica de estudio, una técnica didáctica. No veo en qué se ha matematizado. Además hay un error en su argumentación: ha demostrado que si el discriminante es negativo, entonces no hay soluciones; pero no ha demostrado que si es positivo, hay efectivamente *dos* soluciones.

P.- Tienes razón. Aunque su error no es muy grave porque esto ya lo habían visto en clase.

E.- ¿Y mi objeción?

P.- Ya voy, ya voy. En cierto sentido, vuelves a tener razón. Pero lo que yo suponía es que el estudiante se imaginaba un universo de números más amplio que el que conoce, números ficticios, si quieres. Son números que no existen aún para él, pero que sí existen para el matemático.

E.- ¿Te refieres a los números complejos?

P.- Exactamente. De hecho la técnica que utiliza está hoy día totalmente matematizada: consiste en situarse en el plano complejo. O, si aún te queda algún recuerdo de la teoría de cuerpos que has estudiado en la licenciatura, en situarse en el cuerpo de descomposición del polinomio $ax^2 + bx + c = 0$.

E.- A ver, hay algo que no entiendo bien. Si digo "supongo que existe una solución etc.", estoy utilizando una técnica didáctica. En cambio si digo "me sitúo en el cuerpo de los números complejos, etc." es que recurro a una técnica matemática. En los dos casos se trata de técnicas que utiliza el matemático. ¿Por qué la primera sería didáctica y la segunda matemática?

P.- Tienes razón. La diferencia es muy sutil. Por eso decía antes que la frontera entre lo matemático y lo didáctico es muy borrosa. De todas formas, sí hay una pequeña diferencia.

E.- ¿Cuál?

P.- Situémonos en el nivel de la justificación de la técnica, en el nivel tecnológico. En el primer caso, cuando supongo que existe una solución y examino las consecuencias, lo que hago se justifica en el ámbito de la lógica. Incluso, en la mayoría de los casos, estaríamos en el ámbito de la lógica natural que aún no ha sido matematizada por el lógico o el matemático. En cambio, en el segundo caso, cuando considero las soluciones complejas, lo que justifica mi técnica es cierta *organización matemática* que los matemáticos han elaborado alrededor de la noción de número complejo. Lo puedo suponer, por ejemplo, porque hay un teorema que dice que todo polinomio de grado n tiene n raíces complejas.

E.- Ya. En el primer caso tenemos una organización que no tiene por qué ser matemática (aunque se pueda matematizar) y en el segundo caso se trata de una organización indudablemente matemática.

P.- Eso mismo. Además la distinción que acabo de hacer no es en absoluto "metafísica". De hecho provoca en el aula dificultades muy concretas y difíciles de gestionar. Cuando los instrumentos del trabajo matemático no tienen el estatuto de objetos matemáticos, por ejemplo, cuando forman parte de nuestra "praxeología natural", la que se supone que todos tenemos de manera espontánea, entonces el profesor no puede tomarlos como objetos de estudio oficiales.

E.- ¿Porque si no son objetos matemáticos, no los puede tener en cuenta?

P.- Algo más. Es como si tuviera que suponer que los alumnos los conocen y dominan, que disponen de ellos de manera natural, espontánea. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la lógica natural, la que permite hacer los primeros razonamientos, tomar las primeras decisiones, sacar las primeras conclusiones en el trabajo matemático.

E.- Creo que ya empiezo a entenderlo, pero me parece todo muy confuso. ¿Te puedo hacer otra pregunta?

P.- Bueno, pero será la última por hoy. Piensa además que las cosas no se pueden entender siempre a la primera.

E.- Mira. Al principio, cuando examinamos el episodio de Marta, me hablaste de técnicas didácticas. Hace poco hablábamos de las técnicas que utiliza el matemático y ahora me acabas de describir una técnica didáctica que utiliza un alumno. En todos los casos hablamos de técnica didáctica.

P.- Sí. O, más en general, de praxeología didáctica.

E.- ¿Y es siempre lo mismo, en los tres casos?

P.- Sí, esencialmente sí. Aunque, claro, el matemático, el profesor y el alumno no se enfrentan siempre a los mismos problemas didácticos. Pero en los tres casos lo que hacen es poner en práctica –a veces incluso crear– una técnica de estudio de las matemáticas. Sí, una técnica didáctica.

E.- Pues, entonces, el matemático es a la vez el alumno y el profesor, es su propio profesor.

P.- Sí.

E.- Por lo tanto, un gran matemático será a la vez el mejor alumno y el mejor profesor. ¡Será el mejor didacta!

P.- Sí y no. Es el mejor alumno en el ámbito en el que trabaja. Seguro que hay mejores alumnos que él en otros ámbitos. Y, sobre todo, como profesor, sólo es un buen profesor respecto a un solo alumno: él mismo. Su ciencia didáctica tiene un alcance muy limitado: es en principio eficaz, incluso extremadamente eficaz, pero en un solo caso.

E.- Cuando él es el profesor y también el alumno.

P.- Entenderás entonces que la ciencia didáctica que intentamos elaborar no se pueda basar en este tipo de proezas, sino que pretenda tener un alcance mucho mayor, ser válida para la mayoría de profesores y de alumnos. Ocurre lo mismo con la ciencia médica: no se desarrolla para la gente que goza de buena salud. Pero ahora lo tendremos que dejar aquí. Guárdate las preguntas que te queden para el próximo día, y repasa bien lo que hemos dicho hoy.

E.- Así lo haré. Gracias, Profesora.

Los momentos del estudio

E.- Hola, Profesora.

P.- Hola. ¿Has preparado algunas preguntas para hoy?

E.- Sí, claro. Me da la impresión de que cada vez tengo más.

P.- Pues adelante.

E.- Mira, es otra vez acerca de Marta y de Luis. Dijiste que los dos conducían el estudio de un tipo de problemas y que los dos episodios se distinguían, en primer lugar, porque no presentaban el mismo momento del proceso de estudio. ¿No es eso?

P.- Sí, eso mismo.

E.- Por lo tanto, hay distintos momentos.

P.- Sí.

E.- ¿No me lo podrías explicar? Quiero decir, ¿no me podrías contar cuáles son los distintos momentos posibles? Esa es la pregunta que traía hoy.

P.- Es una gran pregunta. ¡Y espero que no traigas muchas más como esa! Bueno. Empecemos por el principio, quiero decir por lo que ya hemos visto hasta ahora.

E.- Lo de Marta y Luis.

P.- Eso es. En el caso de Marta, vimos el momento en el que los alumnos se encuentran por vez primera con un nuevo tipo de problema. Es lo que se llama *el momento del primer encuentro* con el tipo de problema.

E.- Vale. Pero eso también ocurre en la clase de Luis: los alumnos se encuentran por primera vez con expresiones con *dos* radicales.

P.- Tienes razón. Pero también recordarás que no era esto lo que te molestaba más.

E.- Es verdad.

P.- Lo que te molestaba era, de hecho, otro momento del proceso de estudio. Cuando Luis pide a sus alumnos que resuelvan un gran número de ejercicios sobre expresiones con un radical, está claro que ya no se trata del momento del primer encuentro con este tipo de problemas. Ya ni siquiera se habla de problemas, sino de ejercicios: los alumnos se ejercitan en la resolución de ejercicios de este tipo. Ya disponen de una técnica, y lo que están haciendo es mejorar su dominio de esta técnica. Incluso, al final, se contentan con comprobar que la saben utilizar.

E.- ¿Y eso es un momento del proceso de estudio?

P.- Sí, es el *momento del trabajo de la técnica.* Ya hablamos de ello, ¿no te acuerdas?

E.- Es verdad. Pero entonces...

P.- ¿Qué pasa?

E.- Has dicho que, en el episodio de la clase de Luis, hay el momento del primer encuentro con un nuevo tipo de problemas –las expresiones con dos radicales– y ahora acabas de decir que hay el momento del trabajo de la técnica.

P.- Sí.

E.- ¡Entonces, hay dos momentos al mismo tiempo!

P.- Hay que precisar más este punto. Es verdad que en este episodio de clase los alumnos y el profesor viven dos momentos distintos al mismo tiempo. O, por lo menos, durante el mismo periodo de tiempo.

E.- Sí, es lo que decía.

P.- Y aquí surge una pequeña dificultad. Porque la noción de "momento" que he utilizado no es una noción estrictamente cronológica.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Mira, cuando decimos que los alumnos de Luis viven el momento del primer encuentro con un nuevo tipo de problemas, lo más probable es que Luis les haya distribuido la hoja de ejercicios al principio de la clase, o incluso antes. En cualquier caso, los alumnos han estado trabajando, durante la sesión de clase, con esta hoja de ejercicios. Por lo tanto, cada uno habrá podido encontrarse con el nuevo tipo de problemas individualmente. Y no al mismo tiempo, claro.

E.- ¿Y qué conclusión hay que sacar?

P.- Pues que, para estos alumnos, el momento del primer encuentro se realizará en dos instantes distintos. En primer lugar, hay un encuentro en el que están solos con la hoja de ejercicios. Después hay el encuentro en el que les guía el profesor. Generalmente, los momentos no se viven una sola vez. Existen de manera dispersa. Se viven varias veces. Por ejemplo, es muy probable que algunos alumnos se hayan perdido esos dos instantes de la clase de Luis, como cuando te cruzas con alguien por la calle y no lo ves. Entonces puede ocurrir que el primer encuentro se produzca más tarde, cuando, en casa, tengan que hacer el trabajo que les manda Luis.

E.- Ya veo. Y lo mismo ocurrirá con el momento del trabajo de la técnica, ¿no? Porque supongo que una técnica no se debe trabajar en una sola vez.

P.- Pues claro. Además, cuando un alumno se pone a hacer los deberes en casa, a retomar lo que se ha hecho en clase...

E.- Volverá a vivir los distintos momentos: el del primer encuentro, el de la técnica...

P.- Eso es.

E.- O sea, que un momento no es sólo algo que se vive en clase, con el profesor.

P.- Exactamente. Incluso si no hubiera profesor, si el alumno tuviera que estudiar solo, por ejemplo porque ha faltado a clase, también tendría que pasar por los distintos momentos que componen el proceso de estudio: se trata de las grandes tareas didácticas que no puede dejar de realizar. Dicho esto, cuando se dispone de un profesor para dirigir el estudio, estas tareas didácticas son tareas cooperativas, en las que cooperan alumnos y profesor: el alumno cuenta con el profesor para que le ayude a vivir estos distintos momentos y el profesor cuenta con la energía de sus alumnos y con su involucración en el proceso de estudio (que incluye, como bien sabes, el trabajo en casa) para que su ayuda sea eficaz.

E.- De acuerdo. ¿Pero sólo hay estos dos momentos? ¿Quieres decir que el proceso de estudio se reduce a encontrarse con un tipo de problemas y en poner a punto una técnica que permita resolverlos?

P.- ¿A ti qué te parece?

E.- Pues... Por ejemplo, hemos dicho que toda técnica debía ser justificada. Por lo tanto, habrá necesariamente un momento... ¡Ah, claro! ¡Ahora ya sé por qué les llamas momentos! Es sencillamente en el sentido de que "hay un momento en el que..." ¿Es eso?

P.- Sí, muy bien. Es exactamente eso. Pero sigue con lo que decías.

E.- Decía que hay un momento en el que habrá que justificar la técnica. Debe ser el momento de la justificación, o algo así, ¿no?

P.- Se podría decir así. Es el *momento tecnológico-teórico*. Suena más sabio, pero además tiene la ventaja de poner énfasis en los dos niveles de justificación: la tecnología de la técnica, que se mantiene más cerca de la técnica, y la teoría, un poco más alejada.

E.- Vale, vale. Por lo tanto, hay tres momentos del estudio.

P.- No vayas tan rápido. Es más complicado de lo que crees. Tal vez será mejor que dediquemos un poco de tiempo a crear una pequeña organización matemática alrededor de un tipo de problema que no debes conocer muy bien. ¿Qué te parece? Así podremos concretar mejor los distintos momentos.

E.- Como quieras, Profesora.

P.- Muy bien. Te propongo que estudiemos el siguiente problema: determinar si un número dado es racional o irracional.

E.- ¿Como $\sqrt{2}$, por ejemplo?

P.- Por ejemplo. $\sqrt{2}$ es un número irracional. Eso ya lo sabes.

E.- Sí, claro.

P.- ¿Y qué más sabes al respecto?

E.- No gran cosa. $\sqrt{3}$ también es irracional, y $\sqrt{5}$, etc.

P.- ¿Y $\sqrt{c}$, en general?

E.- ¿Cuando c es un número natural? Creo que sí, a menos de que sea un cuadrado perfecto, como 4 o 9.

P.- ¿Lo sabrías demostrar?

E.- ¿Que es un número irracional? Conozco una demostración para $\sqrt{2}$, la clásica.

P.- ¿Y para el caso general?

E.- Supongo que sería más o menos igual.

P.- Bueno. Ahora te propongo lo siguiente: no vamos a demostrar en seguida que $\sqrt{c}$ es irracional, sino que intentaremos construir una técnica para determinar si un número dado es o no irracional. Si lo conseguimos, y si la justificación de esta técnica exige la demostración de este resultado, entonces ya lo haremos. Pero primero hay que concentrarse en la construcción de la técnica.

E.- Vale. Por lo tanto, vamos a diferir el momento tecnológico-teórico, el de la demostración y justificación de la técnica. Porque ya sabemos que un momento se vive varias veces.

P.- Exactamente. En realidad, se trata de algo muy banal en la actividad matemática. Sólo en algunos libros o en algunos cursos se empieza alineando todos los resultados necesarios sin que el lector o el oyente del curso pueda percibir su necesidad. Es una manera de proceder bastante económica, pero también artificial. Bueno, pues manos a la obra.

E.- ¿Qué? ¿Perdón?

P.- Hay que estudiar el problema. ¿Por dónde empiezas?

E.- Ni idea.

P.- Estás cayendo en un vicio muy escolar: esperas que el profesor te diga lo que debes hacer. Y te lo voy a decir, si no, no acabaremos nunca.

E.- No, no. Ya sé por donde empezar: tomando un caso particular. Por ejemplo, $2\sqrt{2}$.

P.- ¿Y bien?

E.- Es irracional.

P.- ¿Por qué?

E.- Porque si fuera racional, entonces su mitad también lo sería. Pero su mitad es $\sqrt{2}$ que es irracional. ¡Estamos utilizando el teorema, Profesora!

P.- Es verdad. Pero aún no basta para que lo demostremos. Sigamos. ¿Qué otro caso?

E.- Tomemos... $7 + \sqrt{2}$. Aquí también es fácil. Si fuera racional, entonces $7 + \sqrt{2} - 7$ también lo sería. Y esto es falso.

P.- Sí. Y si tomáramos $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{4}$?

E.- Pues lo mismo: si fuera racional, entonces 4 veces $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{4} = 3 + \sqrt{5}$ también lo sería, y lo mismo con $3 + \sqrt{5} - 3 = \sqrt{5}$. Por lo tanto, si sabemos que $\sqrt{5}$ no es racional, entonces $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{4}$ tampoco lo será.

P.- Bueno. Pues ahora ya tenemos una pequeña técnica de corto alcance y esencialmente discursiva: lo que hacías ahora, cada vez, era repetir un pequeño discurso.

E.- Sí.

P.- Y lo que podemos hacer es intentar aligerar esta técnica para que no tengas que repetir cada vez lo mismo.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- Podemos recurrir a una estrategia didáctica muy simple: enriquecemos el entorno tecnológico de la técnica para hacerla de utilización más ágil.

E.- No lo veo.

P.- Te lo voy a enseñar. Voy a incluir en la tecnología el siguiente teorema: si a y b son números racionales, con b distinto de 0, y si α es un número irracional, entonces $a + b\alpha$ también es irracional.

E.- De acuerdo. Es muy fácil de demostrar: si $a + b\alpha$ fuera racional, entonces $a + b\alpha - a = b\alpha$ también lo sería, y lo mismo con $b\alpha/b = \alpha$. Y esto es falso.

P.- Exactamente. Acabas de repetir una vez más el pequeño discurso, pero ahora lo has hecho una vez por todas. Si quisieras demostrar que $\dfrac{11 - 3\sqrt{8}}{7}$ es irracional, podrías escribir *(va a la pizarra y escribe)*:

$$\sqrt{8} \text{ irracional} \Rightarrow \frac{11 - 3\sqrt{8}}{7} = \frac{11}{7} - \frac{3}{7}\sqrt{8} \text{ irracional.}$$

E.- De acuerdo. Pero aquí también necesitamos saber que $\sqrt{8}$, $\sqrt{5}$, etc. son irracionales.

P.- Sí. Y esto hace que el teorema sobre $\sqrt{c}$ sea aún más interesante. Pero detengámonos en lo que acabamos de escribir. Se puede aplicar a cualquier número del tipo $a + b\sqrt{c}$, pero también a cualquier número que se pueda escribir igual. ¿Ves lo que quiero decir?

E.- ¡Claro! Si tomamos un número como $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ ...

P.- ¡Volvemos a nuestros números preferidos! Ése es el alcance de la técnica. Y, llegados a este punto, nuestra organización matemática comporta, de momento, un teorema demostrado y un teorema conjeturado que espera ser demostrado.

E.- Y la técnica del discurso, y la de manipulación de expresión con radicales, y todo eso, ¿no?

P.- Claro, claro. Pero yo quería subrayar lo siguiente: el discursito que hacías antes ya no forma parte de la técnica que consideramos. Nos podrá seguir sirviendo durante la construcción de la organización matemática que llevamos a cabo, pero se ha vuelto técnicamente inútil.

E.- No lo entiendo.

P.- Mira. Hasta ahora, ante un número como $3 - \sqrt{7}$, decías: "Si $3 - \sqrt{7}$ fuera racional, entonces... ". Ahora dirás: "Como $\sqrt{7}$ es irracional, $3 - \sqrt{7}$ también es irracional." No se trata del mismo discurso, ya no se utiliza la misma técnica. En una clase, por ejemplo, los alumnos podrán haber empezado haciendo los discursitos que tú hacías, pero tendrá que llegar un momento en el que el profesor dirá: "Bueno, ahora ya no lo tenéis que hacer más así. Esto era al principio. Ahora hay que ir más rápido, hacerlo directamente."

E.- Pero siempre habrá alumnos que se mantendrán en lo del principio.

P.- Sí, alumnos de alguna manera reaccionarios, a los que les costará desprenderse de la primera técnica. Es normal. Pero el profesor les indica que, en esta institución que es su clase, hay que hacerlo de tal o cual manera. Por fuerza, en algún momento, deberá precisar cuál será la "buena técnica".

E.- Dices que hay por fuerza un momento en el que... ¿Es un nuevo momento? ¿Quiero decir como los que ya hemos visto?

P.- Sí. Es el *momento de la institucionalización.*

E.- ¿Y todos los profesores tienen que precisar este tipo de cosas? ¿Por qué no se deja que cada alumno utilice la técnica que mejor le convenga? –mientras esté justificada, claro–.

P.- ¡Buena pregunta! En primer lugar, debes tener en cuenta que la institucionalización no concierne únicamente a la técnica. Concierne a la organización matemática en su conjunto y en toda su complejidad. A la praxeología matemática. También se institucionalizan elementos tecnológicos y teóricos, los subtipos de problemas, etc. Además, piensa que la institucionalización no es cosa de profesores. Se produce siempre, incluso en el caso de un matemático que estudia solo un tipo de problema.

E.- ¿Y cómo puede institucionalizar algo él solo? ¿Una persona sola ya es una institución?

P.- Es un caso límite de institución, claro que sí. Lo importante es ver que el fenómeno es el mismo: si el matemático no quiere perderse entre todo lo que está haciendo, entonces, con cierta regularidad, tendrá que institucionalizar el producto de su trabajo: precisar qué técnica utiliza, qué elementos forman parte del entorno tecnológico-teórico –y cuáles no–, a qué subtipos de problemas se puede aplicar la técnica y a cuáles no, etc. Si no, su propia actividad se volvería ilegible para él mismo.

E.- Ya lo entiendo. Y todavía será más importante si, en lugar de un matemático, se trata de un grupo de matemáticos o de alumnos.

P.- En efecto. Es mucho más difícil asegurar la legibilidad de una actividad cooperativa, ponerse de acuerdo para saber qué es lo que hace cada uno, etc.

E.- Pues ahora, retrospectivamente, hemos visto un momento tecnológico-teórico, un momento de institucionalización y... y el momento del primer encuentro o, mejor dicho, del primer reencuentro, porque la cuestión de la irracionalidad no es nueva para mí.

P.- Nueva del todo no, pero casi.

E.- De acuerdo. Pero, ¿y aparte de esto? Por ejemplo, entre todo lo que hemos hecho hasta ahora, ha habido más momentos?

P.- Sí. Fíjate que estamos intentado que emerja una técnica para poder resolver el problema que estudiamos.

E.- ¿Y esto es un momento?

P.- Es el *momento exploratorio*, durante el cual se explora el tipo de problemas intentando construir una técnica.

E.- A propósito, se me había ocurrido algo antes, sobre la técnica que intentamos construir.

P.- ¿Sí?

E.- Tomemos $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$. Aquí puedo decir: si fuera racional, su cuadrado sería racional, y entonces $3 + \sqrt{5}$ sería racional, lo que es falso. Y, por lo mismo, también hubiera podido tomar $\sqrt[7]{3 + \sqrt{5}}$, o cualquier otra raíz.

P.- Muy bien. Lo que has hecho es hallar un subtipo de problema al que se puede extender la técnica.

E.- ¿Y esto forma parte del momento del primer encuentro?

P.- Como quieras. Todo depende de lo que tomes como punto de referencia. Durante la exploración del tipo de problemas de partida, es frecuente encontrarse con subtipos de problemas particulares. Y al hallar un nuevo subtipo, el proceso vuelve a empezar: se explora el subtipo, se intenta adaptar la técnica, justificar o explicar la adaptación, etc.

E.- Y, por lo tanto, se volverá a institucionalizar.

P.- Sí, por supuesto.

E.- Pero, respecto al entorno tecnológico-teórico, con la variación que he introducido no hay que cambiar nada.

P.- ¿Cómo que no? Debes mirar las cosas con más cuidado. Fíjate que, en la técnica que acabas de utilizar, el primer gesto consiste en elevar al cuadrado.

E.- Sí. Es lógico, lo primero que se le ocurre a cualquiera.

P.- Pues, acabas de utilizar un nuevo elemento tecnológico-teórico: que si un número es racional, su cuadrado también lo es.

E.- Claro. Es evidente.

P.- Sí, pero hasta ahora era algo implícito.

E.- No es verdad. Cuando decimos que $a + b\,\alpha$ es irracional, utilizamos la suma y el producto. Y un cuadrado es un caso particular de producto.

P.- Tienes razón. Pero en algún momento hay que explicitarlo, decir que las sumas, restas, productos, divisiones, cuadrados, las potencias enésimas de números racionales son racionales.

E.- Y todo esto forma parte de la institucionalización.

P.- Eso es. Y, al mismo tiempo, forma parte del momento tecnológico-teórico. Lo que acabo de decir formaría parte de la teoría, dado su lado fundamental: es lo más básico, lo primero.

E.- ¿Qué quieres decir?

P.- No sé si te has dado cuenta que, hasta ahora, no hemos dicho en ningún momento lo que es un número racional. Sólo hemos admitido que si c es racional y no es un cuadrado, entonces $\sqrt{c}$ es irracional. Por lo tanto, en algún momento habrá que precisar lo que entendemos por número racional. Por ejemplo, cuando queramos demostrar el teorema tecnológico que afirma que $\sqrt{c}$ es irracional. Son los fundamentos de la tecnología de la organización matemática que estamos construyendo. O sea, la teoría. Además, al abordar la teoría de la organización, a lo mejor nos daremos cuenta de que estos resultados no son específicos de los números racionales, sino de cualquier subcuerpo de los reales. Pero esto ya es otro cantar.

E.- Bueno, bueno. Es mejor que nos quedemos en lo técnico, es más fácil...

P.- Sí. Precisamente te iba a proponer un nuevo ejemplo. ¿Qué harías con el número $\sqrt{3} + \sqrt{5}$? ¿Sigue funcionando tu técnica?

E.- No lo sé... Si elevamos al cuadrado...

P.- ¡Adelante! Hay que intentarlo. *(Le da la tiza y le señala la pizarra.)*

E.- A ver. *(Escribe.)*

$$(\sqrt{3}) + \sqrt{5}) = \sqrt{3}^2 + \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 3 + 5 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 8 + \sqrt{15}.$$

Y ahora vuelve a ser igual que antes: si $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ fuera racional, su cuadrado también lo sería, pero esto no es verdad. La técnica no ha cambiado mucho.

P.- De acuerdo. En cualquier caso, el entorno tecnológico-teórico no cambia. Tomemos otro ejemplo. Considera ahora $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. ¿Qué vas a hacer?

E.- Lo mismo. Elevar al cuadrado. Aquí tenemos... Es algo del tipo $(a + b + c)^2$ ...

P.- ¿Te acuerdas de la fórmula?

E.- Sí, claro. *(Escribe.)*

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

Por lo tanto, en este caso:

$$(\sqrt{2}) + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 2 + 3 + 5 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10}) + 2\sqrt{15}$$
$$= 10 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15})$$

P.- ¿Y a partir de aquí?

E.- ¡Ostras! Aquí no funciona: volvemos a tener tres radicales, como al principio.

P.- Eso es. Además se ve muy bien por qué funcionaba la técnica antes: porque permitía pasar de dos radicales a uno solo. Si pudiéramos pasar de tres a dos, podríamos pasar de dos a uno y resolver el problema, lo que constituiría en realidad una modificación muy simple de la técnica.

E.- ¿Y cómo se hace para pasar de tres a dos?

P.- Te recuerdo que el que estudia el problema eres tú.

E.- Sí, pero se supone que tú me tienes que ayudar. ¿Lo sabes hacer o no?

P.- Sí que sé. Y también te voy a ayudar. Considera, por ejemplo, $\sqrt[3]{5}$. ¿Es irracional?

E.- Sí. Pero para demostrarlo... Creo que necesitamos otro teorema.

P.- ¿Cuál?

E.- El que dice que si un número entero no es un cubo, su raíz cúbica es irracional.

P.- Vale. ¿Y en general? Si consideraras, por ejemplo, $\sqrt[5]{12}$...

E.- Sí, sí. Hay que tomar un teorema más general que afirma que si un número entero no es una potencia n-ésima, entonces su raíz n-ésima no es racional.

P.- Muy bien. Y ahora falta demostrarlo. Pero antes de lanzarse en la demostración, veamos si se trata o no del teorema que necesitamos. Considera por ejemplo $\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}$. Supongo que crees que es un número irracional, ¿no?

E.- Sí... Eso creo. Pero aquí no sé qué hay que hacer para...

P.- Como ves, lo que queremos en primer lugar no es demostrar el teorema, sino tener una técnica que nos permita demostrar que este número es irracional. Y para ello no nos basta con el teorema anterior, por muy "general" que sea.

E.- ¿Entonces qué hacer? ¿Cómo se construye una técnica general? Y no me digas que el que estudia soy yo, que eso ya lo sé.

P.- No, no. Te lo voy a enseñar. Porque una técnica no se inventa así como así. La idea consiste en relacionar los números con un objeto matemático no numérico.

E.- ¿Con qué?

P.- Con ecuaciones.

E.- ¿Y cómo se hace?

P.- Toma por ejemplo $\sqrt[3]{5}$. Escribo $x = \sqrt[3]{5}$. Si elevo al cubo, me da: $x^3 = 5$. Ésta es la ecuación. Y esta ecuación tiene una relación muy clara con el número de partida: $\sqrt[3]{5}$ es una de sus soluciones. Eso es lo que nos interesa.

E.- ¿Y cómo se utiliza esta ecuación?

P.- ¡Ja! Aquí es donde necesitamos un elemento teórico nuevo que nos diga qué es –y qué no es– un número racional.

E.- Eso es fácil: un número racional es un número que se puede escribir como el cociente de dos enteros, como una fracción.

P.- Exactamente. Pues, ahora vamos a demostrar que ninguna solución de la ecuación $x^3 = 5$ se puede escribir como el cociente de dos enteros. Para ello seguiremos un razonamiento parecido al que habrás visto en el caso de $\sqrt{2}$. Es un razonamiento por reducción al absurdo. Supondremos que la solución de $x^3 = 5$ se puede escribir como el cociente de dos enteros y llegaremos a una contradicción.

E.- Vale.

P.- Pues, cojamos $x = \dfrac{p}{q}$ y supongamos que es una fracción irreductible.

E.- O sea, que p y q no tienen divisores comunes.

P.- Eso es. Ahora, como $\frac{p}{q}$ es solución de la ecuación, tenemos que $(\frac{p}{q})^3 = 5$ o, lo que es lo mismo, que $p^3 = 5q^3$. De esta igualdad se desprende que p divide a $5q^3$ y, como no divide a q, tiene que dividir a 5. ¿Me sigues?

E.- Sí. Estás utilizando propiedades de la divisibilidad.

P.- Bueno, pues sigamos. Como p divide a 5, por fuerza tenemos que $p = 1$ o $p = 5$.

E.- Vale, porque 5 es un número primo que no tiene otros divisores.

P.- Muy bien. Y ahora haremos lo mismo con q. Es obvio que q divide $5q^3$. Por lo tanto, de la igualdad $p^3 = 5q^3$ se desprende que q divide a p^3. Pero como la fracción $\frac{p}{q}$ es irreductible, q no divide a p y - por lo tanto tiene que ser igual a 1.

E.- ¡Vaya! ¡Qué sutil!

P.- Lo importante aquí es la conclusión siguiente: si la fracción irreductible $\frac{p}{q}$ es solución de la ecuación $x^3 = 5$, entonces por fuerza $p = 1$ o $p = 5$ y $q = 1$. En otras palabras, las únicas soluciones posibles son $\frac{1}{1}$ y $\frac{5}{1}$, o sea 1 o 5. Y como ni 1^3 ni 5^3 valen 5, la ecuación no tiene ninguna solución racional.

E.- Por lo tanto, como $\sqrt[3]{5}$ es solución, no puede ser un número racional.

P.- Exactamente. Es un poco complicado, pero lo vamos a simplificar recurriendo a una estrategia que ya conocemos. En lugar de repetir este proceso cada vez que tengamos un número solución de una ecuación, lo haremos una vez por todas.

E.- Ya. Demostraremos un teorema para no tener que hacer la demostración cada vez. ¿Es eso?

P. Sí. Aquí el teorema es que si tienes una ecuación con coeficientes enteros

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0$$

y la fracción irreductible $\frac{p}{q}$ es solución de la ecuación, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n Éste es el resultado tecnológico clave.

E.- A ver, a ver... Antes teníamos la ecuación $x^3 = 5$, es decir $x^n - 5 = 0$. Luego $a_0 = -5$ y $a_n = 1$.

P.- Eso es.

E.- Y concluíamos que p dividía a 5 y que q dividía a 1. Efectivamente. Pero, antes de demostrar el teorema, hay que ver cómo se utiliza en un caso general.

P.- Muy bien. Veamos cómo se utiliza. Habías demostrado antes que $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es irracional. Hagámoslo ahora con la nueva técnica. Sea $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Necesito una ecuación polinómica con coeficientes enteros que tenga a este número por solución.

E.- Vale. Lo elevamos al cuadrado. Resulta... $x^2 = 8 + 2\sqrt{15}$. Es lo que teníamos antes. Y ahora, $x^2 - 8 = 2\sqrt{15}$ y lo volvemos a elevar al cuadrado.

P.- Muy bien. Fíjate lo que tenemos *(escribe en la pizarra)*:

$$x^2 - 8 = 2\sqrt{15}$$
$$(x^2 - 8)^2 = 4 \cdot 15 = 60$$
$$x^4 - 16x^2 + 64 = 60$$
$$x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

E.- Por lo tanto, tenemos que p divide a 4 y que q divide a 1, es decir $q = 1$.

P.- Sí. Y p puede ser 1, 2 ó 4. Lo que nos da como posibles soluciones $\frac{p}{q}$ las fracciones 1/1, 2/1 ó 4/1.

E.- Y ahora es fácil ver que ni 1 ni 2 ni 4 son soluciones. Luego $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ no puede ser racional.

P.- Eso mismo. O, sin sustituir en la ecuación, demostrando que $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ no es ni 1 ni 2 ni 4.

E.- Vale, vale. Así que ahora ya tenemos una nueva técnica. Pero admitirás que en este último caso mi técnica del principio era mucho más rápida y sencilla.

P.- Sí. Pero ésta tiene mayor alcance. La puedes utilizar para expresiones con tres radicales o para raíces enésimas, etc.

E.- Claro. Por lo tanto, en nuestra organización matemática habrá dos técnicas distintas.

P.- Eso mismo, a utilizar en función de las necesidades.

E.- ¡Y ya tenemos nuestra organización matemática totalmente elaborada!

P.- Lamento decirte que no. Todavía estamos lejos del final. Para empezar, hay que poner un poco de orden en esta organización. Hay cosas que hemos nombrado, incluso utilizado pero que, a la larga, dejaremos totalmente de lado. Recuerda que estamos construyendo una praxeología matemática que nos debe permitir actuar de manera eficaz y justificada. Hay que organizar las cosas para que se pueda ver con claridad que lo que hacemos es eficaz y para poner en evidencia su carácter justificado o justificable.

E.- ¡Ya veo! ¡Hay que institucionalizar!

P.- En efecto. Es inevitable.

E.- Y después de institucionalizar ya habremos acabado.

P.- No del todo. Porque, aunque supongamos que nuestra organización matemática está bien definida, no estamos aún totalmente seguros de que la sabemos utilizar, poner en práctica. Y aquí aparecerá otro momento: el *momento de la evaluación*.

E.- Pero Profesora, ¡lo de la evaluación es para los alumnos, en clase! Yo creía que hablábamos del trabajo del matemático.

P.- Querido Estudiante, creo que éste será tu último error. Porque hoy es nuestra última sesión de trabajo, como sabes bien.

E.- Sí, sí. ¿Pero dónde está mi error?

P.- La evaluación no es una invención de la escuela. En absoluto. Considera tu situación real respecto a la organización matemática que acabamos de construir. Si quieres entrar de verdad en esta pequeña obra matemática, si quieres apropiarte realmente de la praxeología que define, entonces aún queda mucho por hacer.

E.- Ya, tengo que trabajar la técnica que me has enseñado.

P.- Sí. Y, para empezar, aprender a utilizarla. Porque aún no la has puesto en práctica por ti mismo.

E.- Es verdad.

P.- Además, después de haberla practicado durante algún tiempo, después incluso de haberla mejorado en algunos casos concretos, tendrás que preguntarte, en algún momento: ¿domino bien esta obra matemática?

E.- Ya entiendo, me tendré que poner a prueba, evaluarme.

P.- Sí. Es un momento relativamente solemne y que, como los demás momentos, no se vive de una vez por todas. Se trata del momento en el que pones a prueba tu dominio de la obra: conozco sus razones de ser, sé para qué sirve, pero ¿seguro que sé utilizarla? Como ya te he dicho, una obra es una construcción humana. La construimos nosotros y somos también nosotros los que la hacemos vivir. Evaluar tu relación con una obra es importante para ti personalmente, pero también lo es para dar a la obra una oportunidad más de seguir viviendo. Si muere para muchos de nosotros, si no somos capaces de seguir dándole vida, morirá pronto para siempre.

E.- Lo entiendo, Profesora. Me acabas de decir que estudiar es una manera de colaborar a dar vida a las obras.

P.- Si. Y también lamento decirte que, a partir de ahora, tendrás que seguir estudiando solo. El estudio no finaliza nunca, pero mi papel de directora de estudio no puede ser eterno.

E.- Es una lástima, Profesora.

P.- ¡O tal vez una suerte!

SÍNTESIS 4

Una *obra matemática* surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. Pero ¿en qué se materializa dicha respuesta? En una primera aproximación podríamos decir que la respuesta matemática a una cuestión cristaliza en un conjunto organizado de objetos ligados entre sí por diversas interrelaciones, esto es, en una *organización matemática*. Dicha organización es el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que consta de *tareas* y *técnicas*, y el discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica que está constituido por *tecnologías* y *teorías*.

No es posible, ni para el matemático profesional ni para los alumnos de una clase de secundaria, actuar matemáticamente con verdadera eficacia sin entender lo que se está haciendo. Pero tampoco se puede entender en profundidad una organización matemática determinada si no se lleva a cabo simultáneamente una práctica matemática eficaz. No hay praxis sin logos, pero tampoco hay logos sin praxis. Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de *praxeología*: para responder a un determinado tipo de cuestiones matemáticas hay que elaborar una *praxeología matemática* constituida por un tipo de problemas determinado, una o varias técnicas, su tecnología y la teoría correspondiente.

¿Qué se necesita para elaborar una praxeología matemática? ¿Cuáles son los medios de los que dispone el matemático investigador o los alumnos de matemáticas para construir una praxeología matemática que responda a ciertas cuestiones?

La Profesora explica en los *Diálogos* que tanto el investigador como los alumnos, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas* como instrumentos para construir una praxeología matemática: el profesor utiliza técnicas didácticas para reorganizar ciertas obras matemáticas de manera que den respuesta a las cuestiones que los alumnos se plantean; los investigadores utilizan técnicas de estudio de las matemáticas que también son técnicas didácticas si entendemos lo "didáctico" en el sentido amplio de lo "relativo al estudio de las matemáticas". De hecho, la frontera entre lo didáctico y lo matemático es muy borrosa: históricamente se ha producido una matematización creciente de lo didáctico y, muy en particular, de las técnicas de estudio de las matemáticas.

Elaborar una praxeología matemática supone para cualquier "estudiante", ya sea matemático investigador o alumno de matemáticas, entrar en un *proceso de estudio* que, como tal, no es un proceso homogéneo sino que está estructurado en diferentes *momentos*. Cada momento del proceso de estudio hace referencia a una dimensión o aspecto de la actividad de estudio, más que a un periodo cronológico preciso. Por lo tanto, los momentos están distribuidos de una forma dispersa a lo largo del proceso de estudio y no pueden ser vividos "de una vez por todas".

La descripción que hace la Profesora del proceso de estudio pone en relación cada momento con los diferentes elementos que constituyen la *obra matemática* y con las relaciones que se establecen entre ellos. El momento del *primer encuentro* hace referencia a los objetos matemáticos que constituyen un tipo de problemas; el momento *exploratorio* relaciona un determinado tipo de problemas con la construcción de una técnica adecuada para abordarlos; el momento del *trabajo de la técnica* se refiere al dominio, puesta a punto y nueva creación de técnicas matemáticas; el momento *tecnológico-teórico* hace referencia, como indica su nombre, a los dos niveles de justificación de la práctica matemática; y los momentos de *institucionalización* y *evaluación* se refieren, por fin, a la obra matemática en su conjunto.

En esta descripción subyace un principio "democratizador" que la Profesora subraya en varias ocasiones: no hay momentos "nobles" y momentos "menos nobles", como tampoco hay momentos "más matemáticos" y momentos "más didácticos". Precisamente el episodio de la clase de prácticas y los comentarios didácticos subsiguientes ponen de manifiesto la importancia crucial de uno de los momentos más desprestigiados —el momento del trabajo de la técnica— y la necesidad de que dicha dimensión del proceso de estudio tenga cabida en los dispositivos didácticos escolares.

Los *Diálogos* concluyen con un doble mensaje que hace referencia a la naturaleza del estudio y al sentido que tiene la actividad humana de estudiar. La Profesora anuncia al Estudiante que deberá seguir estudiando solo, recordándole así indirectamente que el objetivo al que debe tender todo sistema didáctico es su propia desaparición, dado que el conocimiento personal sólo aparece después de que desaparezcan todos los artificios didácticos. En cuanto al sentido del estudio, la Profesora es muy clara: se estudia para colaborar a dar vida a las obras humanas, para darles una oportunidad de seguir viviendo; si el teorema de Pitágoras muere para todos nosotros, morirá para siempre.

COMENTARIOS Y PROFUNDIZACIONES 4

Si consideramos el proceso de estudio tal como lo describe la Profesora en el último *Diálogo,* vemos que hay momentos de dicho proceso que difícilmente se pueden llevar a cabo en la organización actual de la enseñanza de las matemáticas. Surge entonces la necesidad de crear nuevos dispositivos de ayuda al estudio distintos de la "clase de matemáticas" tradicional y capaces de asumir funciones que ésta no puede asumir, ni siquiera cuando se desdobla en "clase de teoría" y "clase de problemas" tal como ocurre en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario.

Dispositivos didácticos

En general, un *dispositivo escolar* será cualquier "mecanismo" dispuesto para obtener determinados objetivos educativos. Así, por ejemplo, la clase de matemáticas, la de lengua, el libro de texto, la biblioteca, los exámenes, las preguntas que hace el profesor en clase, las sesiones de tutoría y los descansos son dispositivos escolares. En la medida en que cada uno de estos dispositivos incide sobre la estructuración y el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas, funcionando como un *dispositivo de ayuda al estudio de las matemáticas*, diremos que se trata, además, de un *dispositivo didáctico* (en el sentido de didáctico-matemático).

1. Clase de problemas, clase de prácticas

Llamamos *clase de prácticas* a un dispositivo didáctico en el que pueda desarrollarse plenamente el momento del proceso de estudio que la Profesora denomina "momento del trabajo de la técnica". Para describir las funciones de este dispositivo cuyo funcionamiento se vislumbra en el *Episodio*, explicaremos las cláusulas del contrato didáctico que lo caracterizan.

En la clase de prácticas el profesor proporciona a los alumnos un *corpus* de problemas que, aparentemente, son bastante parecidos entre sí. Cuando un estudiante se encuentra por primera vez en una clase de prácticas, es muy probable que la relacione con una clase de problemas debido a que el tipo de actividad central que se lleva a cabo en ambas puede describirse a primera vista como "resolver problemas".

En la *clase de problemas*, el estudiante intenta resolver por primera vez problemas concretos de diversos tipos y manipula por primera vez ciertas técnicas matemáticas para resolverlos. La función principal de la clase de problemas consiste precisamente en permitir que el estudiante tome contacto efectivo con ciertos tipos de problemas y con las técnicas correspondientes.

El *contrato didáctico en la clase de problemas* asigna al profesor, en cuanto director de estudio, la responsabilidad de elegir adecuadamente los representantes de cada uno de los tipos de problemas que constituyen el currículo y de ejemplificar en cada caso la manera de resolverlos. Por su parte, el estudiante es responsable de interpretar las resoluciones propuestas por el profesor y resolver por su propia cuenta algunos problemas de cada tipo.

Una de las cláusulas explícitas del contrato que se establece en la clase de problemas asigna al estudiante la obligación de "pensar los problemas". Ésta es una expresión muy arraigada en la cultura escolar y hace referencia a la actividad matemática *exploratoria* que se pide al estudiante cuanto aborda por primera vez un problema. Esta cláusula del contrato subraya que el estudiante no debe disponer, de entrada, de las técnicas que le permitirían resolver el problema de una forma rutinaria.

La actividad matemática que se lleva a cabo en la clase de problemas se caracteriza por el cambio relativamente frecuente de un tipo de problemas a otro, lo que comporta cierta rigidez en la utilización de las técnicas matemáticas. Esta rigidez provoca

Clase de matemáticas: ¿teoría, problemas o prácticas?

La *clase de matemáticas* es el principal dispositivo didáctico en las instituciones escolares preuniversitarias. A nivel de enseñanza universitaria, la clase de matemáticas se desdobla en dos dispositivos diferentes: la *clase de teoría* y la *clase de problemas*.

Esta estructura responde básicamente a la concepción teoricista según la cual la actividad matemática puede analizarse en dos momentos: un momento principal, el momento teórico, en el que se muestra la teoría matemática acabada, y un momento auxiliar en el que se ejemplifican, aplican, practican y consolidan las nociones teóricas previamente aprendidas.

Recientemente, y en respuesta a las evidentes insuficiencias de esta estructura clásica, ha sido creado, en algunas universidades, un nuevo dispositivo: el *taller de prácticas matemáticas*.

errores que los estudiantes sólo pueden superar familiarizándose con dichas técnicas y fortaleciendo su dominio de las mismas. Pero esta necesidad no puede satisfacerse plenamente en la propia clase de problemas en la que, por definición, se tiende constantemente a explorar *nuevos* tipos de problemas.

El *contrato didáctico en la clase de prácticas* cambia radicalmente algunas de las cláusulas vigentes en la clase de problemas. Los cambios más importantes son los siguientes:

(a) En la clase de prácticas se da carácter "público" a un aspecto del estudio —el trabajo técnico— que, en la clase de problemas, tenía un carácter "privado". El estudiante tiene por primera vez la responsabilidad de *rutinizar oficialmente ciertas técnicas*. Esta nueva responsabilidad se materializa en la obligación de resolver en presencia de sus compañeros y del profesor muchos problemas aparentemente muy parecidos entre sí.

(b) Otra cláusula del contrato que se establece en la clase de prácticas exige que el estudiante se familiarice con ciertas técnicas hasta alcanzar un dominio tan robusto de las mismas que llegue a utilizarlas como algo "natural". A partir de aquí, estas técnicas podrán ser consideradas de manera oficial como técnicas "adquiridas" por los alumnos —pasando a formar parte del *medio matemático* de la clase—.

Lo anterior significa que en la clase de prácticas el estudiante debe tratar con un tipo bastante restringido de problemas (los que se obtienen mediante pequeñas variaciones de algunos problemas inicialmente estudiados en clase de problemas) poniendo a prueba la robustez de la técnica frente a esos cambios. Mientras que en la clase de problemas el punto de partida y el punto de referencia de la actividad eran los problemas (en función de los cuales se construían posibles técnicas de estudio), en la clase de prácticas se espera del estudiante que se centre en las técnicas y utilice los problemas para probar la robustez y flexibilidad de las mismas.

(c) El contrato didáctico de la clase de prácticas establece, por último, una nueva responsabilidad compartida en diferentes proporciones entre el profesor y los estudiantes. Se trata de la *producción de técnicas nuevas*, ya sea por variación de la técnica inicialmente utilizada, ya sea o por combinación de dos o más técnicas. En cualquier caso, la producción se apoya en el dominio robusto de las técnicas básicas.

Mientras que en la clase de problemas la actividad del estudiante se centra en explorar tipos de problemas muy diferentes entre sí y en buscar técnicas para resolver dichos problemas, en la clase de prácticas se parte de una técnica dada y de un conjunto de problemas del mismo tipo que se utilizan como instrumento para que los estudiantes alcancen un dominio robusto de dicha técnica. En la clase de problemas, la actividad evoluciona al saltar de un tipo de problemas a otro. En la clase de prácticas, por contra, la evolución viene dada por el desarrollo interno de las técnicas.

Es de esperar que si un alumno se encuentra por primera vez en una clase de prácticas, tenga dificultades para entrar en el nuevo contrato y que éste llegue a provocarle cierto desconcierto. Es previsible asimismo que el alumno no entienda por qué se le pide que resuelva un gran número de ejercicios muy parecidos y repetitivos, ni por qué se le exige que realice públicamente, "en vivo", un trabajo que, hasta la fecha, había realizado a lo sumo en privado. *Todas estas dificultades son de índole matemática* porque tienen que ver con la ignorancia del papel del trabajo de la técnica en la actividad matemática.

2. Clase de teoría y obstáculos epistemológicos

Como dice la Profesora en los *Diálogos*, la aparición de una técnica nueva provoca la necesidad de interpretarla, justificarla y relacionarla con las técnicas ya existentes. En particular con la emergencia de una nueva técnica surge la necesidad de analizar su alcance (el tipo de problemas a los que se puede aplicar) y sus limitaciones (los subtipos de problemas que plantean dificultades a la utilización de la técnica).

Supongamos, por ejemplo, que en la clase de prácticas se ha ensayado una nueva manera de resolver ecuaciones: partiendo de una ecuación dada $f(x) = 0$, se intenta escribirla bajo la forma $g(x) = ax + b$, en la que $y = g(x)$ es una curva "estándar" (por ejemplo, $g(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$). A partir de aquí, la ecuación $g(x) = ax + b$ resuelve mediante consideraciones gráficas. En este contexto, se puede suponer que haya emergido la siguiente técnica para resolver aproximadamente ecuaciones cúbicas:

> Se ha observado que, en algunos casos, existe una traslación de la incógnita que permite eliminar el término de segundo grado:

Ecuación inicial:	$x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$
Cambio:	$x = z - 1$
Ec. equivalente:	$z^3 - 4z + 4 = 0$
Sistema equivalente:	$\begin{cases} y = z^3 \\ y = 4z - 4 \end{cases}$

La resolución gráfica de este sistema permite afirmar que tiene una única solución:

$$-3 < z < -2.$$

Y, deshaciendo el cambio, resulta que la ecuación inicial tiene asimismo una única solución:

$$-4 < x < -3.$$

En este punto sería normal que se plantearan las siguientes preguntas: ¿cómo justificar esta nueva técnica? ¿cuál es su alcance? ¿es aplicable a todas las ecuaciones cúbicas? ¿y a ecuaciones polinómicas de grado superior? ¿qué condiciones debe cumplir una ecuación de cuarto grado para poder eliminar el término de grado tres mediante una traslación? ¿qué ocurre si aplicamos la técnica a una ecuación de segundo grado?

Es en la *clase de teoría* donde se suelen presentar los elementos justificativos e interpretativos. Además el contrato didáctico asigna esencialmente al profesor, y de forma muy limitada al estudiante, la responsabilidad de dicha presentación. Pero las demostraciones matemáticas que se dan en la clase de teoría no siempre satisfacen las necesidades explicativas que aparecen en el trabajo técnico. Así, por ejemplo, la demostración que se daría de la técnica presentada anteriormente sería la siguiente:

Dada la ecuación general de tercer grado $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, el *cambio de Vieta*: $x = z - b/3$, la convierte en una ecuación de la forma

$$z^3 - pz - q = 0$$

que es equivalente al sistema: $\begin{cases} y = z^3 \\ y = pz + q \end{cases}$

Demostración: sustituyendo en la ecuación original x por $z - b/3$ se obtiene:

$$(z - b/3)^3 + b(z - b/3)^2 + c\,(z - b/3) + d = 0$$

Desarrollando y simplificando resulta:

$$z^3 - (b^2/3 - c)z - (bc/3 - 2b^3/27 - d\,) = 0$$

Ahora bien, esta demostración no basta para constituir un entorno tecnológico apropiado en el que situar la técnica. Para tener una buena comprensión del fenómeno, sería útil cerciorarse de que en toda ecuación de grado n se puede eliminar el término de grado $n - 1$ mediante una traslación de la incógnita; que en el caso de una ecuación de segundo grado, el cambio de variable anterior nos remite a la técnica clásica; e incluso preguntarse qué ocurre con las ecuaciones de primer grado.

Es obvio que el contrato didáctico habitual en la clase de teoría no permite dar cabida a este tipo de desarrollos que, surgiendo de la práctica matemática concreta, pueden llegar a estar relativamente alejados de la "teoría estándar" de un determinado ámbito matemático. Además es previsible que esta ausencia sea una fuente de dificultades para el estudiante. Por un lado, en la clase de teoría sólo se recogen algunos elementos tecnológicos particulares, ignorándose generalmente aquellos que el estudiante puede identificar por sí mismo porque surgen de su propia práctica. Por otro lado, el estudiante no asume nunca la responsabilidad de elegir, formular y plantear las cuestiones tecnológicas que se han de tratar en clase.

En estas condiciones, lo más probable es que el estudiante no vea que las dificultades con que se encuentra resultan más de la organización matemática escolar que de una posible incapacidad personal. En efecto, el contrato en el que opera no permite identificar su problema como un problema didáctico, es decir, un problema *de estudio* y de *organización del estudio*. La didáctica fundamental postula que, en última instancia, es el conocimiento matemático el que puede resolver la "crisis" así abierta: como dice la Profesora en los *Diálogos*, "para entender un fenómeno matemático que no se entiende, lo primero que se necesita son más matemáticas". El problema radica en que no existe ningún lugar en la organización tradicional del proceso didáctico para responder adecuadamente a esta necesidad de "más matemáticas".

El paso de las justificaciones locales y puntuales propias de la clase de teoría a justificaciones de mayor al-

La noción de "obstáculo"

La noción de *obstáculo epistemológico* la tomó Guy Brousseau de la obra *La formation de l'esprit scientifique* (1938) del físico y filósofo de la ciencia francés Gaston Bachelard. Según este autor, los obstáculos epistemológicos son constitutivos del desarrollo de la ciencia: todo conocimiento científico se construye *en contra* de un conocimiento anterior.
En la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau la noción de obstáculo conserva plenamente este carácter constitutivo del desarrollo dinámico del conocimiento matemático (ver **Anexo D** de la Unidad 3).

cance supone un cambio de actividad matemática y, como tal, constituye un "obstáculo" en el desarrollo del proceso didáctico. Por lo general, en el proceso de estudio pueden aparecer *obstáculos epistemológicos* cada vez que se hace necesario un *cambio* en la actividad matemática, lo que ocurre regularmente dado que el proceso didáctico, lejos de ser homogéneo, está organizado en *diferentes momentos* dentro de cada uno de los cuales, tal como explica la Profesora, predomina un aspecto o dimensión de la actividad matemática.

Aunque habitualmente se identifican los obstáculos con las nociones, conceptos o concepciones movilizados por los alumnos, aquí no los identificaremos con ningún objeto de la actividad matemática inicial (ni con un tipo de problemas, ni con una técnica concreta, ni con ningún elemento tecnológico, ni mucho menos psicológico) que supuestamente dificulte o impida el pasaje a la nueva actividad matemática. Consideraremos simplemente que aparece un *obstáculo epistemológico* cuando el actor de la actividad tiene necesidad de *cambiar de momento* en el proceso de estudio. El adjetivo "epistemológico" hace referencia a que el obstáculo puede ser descrito en términos de la actividad matemática en sí misma, sin hacer referencia a las particularidades de los actores.

Dado que en el proceso de estudio podemos distinguir diferentes momentos o dimensiones de la actividad, consideraremos también diferentes tipos de obstáculos epistemológicos relativos a cada uno de los cambios necesarios para llevar a cabo dicho estudio. En esta perspectiva, es importante subrayar que, como dice la Profesora en los *Diálogos*, los "momentos" no pueden encerrarse en un periodo de tiempo determinado (no se pueden llevar a cabo de una vez por todas) ni en un dispositivo didáctico concreto. De ahí se deduce que los diferentes tipos de obstáculos epistemológicos tampoco serán localizables temporalmente a lo largo del proceso didáctico, ni en dispositivos didácticos concretos.

3. La necesidad de nuevos dispositivos didácticos

En la descripción que realiza la Profesora del proceso de estudio aparecen hasta seis momentos distintos. Es previsible, por tanto, que en dicho proceso surjan diversos tipos de obstáculos epistemológicos en correspondencia con los múltiples cambios de actividad matemática determinados por la estructura heterogénea del proceso de estudio.

Supongamos que se pone de manifiesto que una parte importante de los alumnos presenta graves dificultades para entrar, por ejemplo, en el contrato didáctico de la clase de problemas. Esto se manifiesta por el hecho de que muchos alumnos, después de tomar un primer contacto con un determinado tipo de problemas, no llegan a realizar con ellos la actividad exploratoria que les asigna una cláusula del contrato: los alumnos "no piensan" los problemas que el profesor les propone. Este hecho también puede interpretarse diciendo que los alumnos presentan dificultades para superar el obstáculo ligado al paso del *momento del primer encuentro* al *momento exploratorio*, tal como éstos se escenifican en los dispositivos didácticos actuales.

Ante estos hechos, la institución escolar responde generalmente ignorando la naturaleza didáctica del problema (ignorando el proceso de estudio) y apelando a factores psicopedagógicos tales como el hecho de que el alumno no quiere o no puede hacerse cargo de sus responsabilidades (ya sea por "desidia", "falta de interés", "falta de motivación", "preparación inadecuada", "falta de capacidad", etc.) o bien que los "métodos de enseñanza" del profesor no facilitan que el alumno lleve a cabo la actividad matemática en cuestión.

El libro de texto utilizado como dispositivo pedagógico

En la enseñanza secundaria, el libro de texto de matemáticas tiende a jugar un papel auxiliar y relativamente externo al "curso" que "dicta" el profesor: sirve básicamente para proporcionar listas de ejercicios, algunos problemas resueltos y el gráfico preciso de alguna figura compleja. Así, para el estudiante, el libro de texto suele jugar un papel de *dispositivo pedagógico* dado que sus funciones son esencialmente independientes de la materia estudiada y, lo que es más importante, porque no incide significativamente sobre la estructuración y desarrollo del proceso de estudio.

La reacción de la institución escolar sería la misma si los alumnos presentaran dificultades en cualquier otro punto del proceso didáctico (como, por ejemplo, en el paso del *momento exploratorio* al *momento del trabajo de la técnica*) o en el estudio de cualquier otra obra. Se ignora así el proceso de estudio de las matemáticas y su estructura intrínseca.

El análisis de la estructura del proceso de estudio pone de manifiesto la necesidad de crear nuevos dispositivos didácticos capaces de articular el tránsito entre los diferentes momentos de dicho proceso. Pero la ignorancia del proceso de estudio y la tendencia a interpretar en términos psicopedagógicos todas las dificultades que conlleva el aprendizaje de las matemáticas impide a las instituciones escolares reconocer dicha necesidad.

Junto a la escasez de dispositivos didácticos, es interesante observar entonces la creciente proliferación de dispositivos *pedagógicos*, esto es, instrumentos (materiales o no) de ayuda a la enseñanza independientes del contenido a enseñar y presuntamente facilitadores del aprendizaje de cualquiera de dichos contenidos, entre los que destacan los medios audiovisuales y la informática educativa.

4. Los peligros de la atomización de la enseñanza

Uno de los hechos más llamativos en las instituciones escolares actuales reside en la gran cantidad de alumnos de matemáticas que no llegan nunca a "entrar" en el contrato didáctico tal como éste se plasma en los dispositivos actuales. Podemos suponer que ello se debe, en gran medida, a la falta de dispositivos cuyos contratos didácticos específicos articulen de manera adecuada el tránsito entre los diferentes momentos del proceso de estudio. Pero, desde el interior de la institución, el abandono de los alumnos se interpreta como un aflojamiento de la necesaria sujeción del alumno y se reacciona aumentando la dependencia mutua entre el profesor y los alumnos: el profesor se ve llevado a *explicitar las cláusulas del contrato* hasta extremos insospechados evitando cualquier transgresión de dichas cláusulas.

Esta situación tiene consecuencias paradójicas porque, al intentar proteger al alumno de toda desconcertación y evitarle el encuentro con los sucesivos obstáculos epistemológicos, se fracciona el proceso de enseñanza hasta hacerlo desaparecer como proceso. Se pretende de esta manera paliar las dificultades que comporta toda actividad matemática sostenida y compleja. La enseñanza se convierte en un conjunto atomizado de actividades matemáticas aisladas, de "anécdotas" matemáticas encadenadas arbitrariamente e independientes entre sí que no permiten al alumno llegar a dominar ninguna técnica y lo convierten, de hecho, en un "incompetente".

Este tipo de enseñanza tiende a lo que podríamos denominar una "enseñanza instantánea": una definición matemática se aprende instantáneamente, un teorema, una demostración o la utilización de una técnica son objetos matemáticos que se "enseñan" y se "aprenden" casi al mismo tiempo. La actividad de estudio del alumno no es considerada como un proceso complejo y duradero, sino como un auxiliar puntual y local para "fijar" y "consolidar" aquello que ya se aprendió instantáneamente. Incluso al proceso de "entender", considerado culturalmente como el momento cumbre del aprendizaje, se considera como algo "instantáneo". En esta enseñanza instantánea desaparecen los objetivos a largo plazo a favor de los objetivos relativos al funcionamiento diario de la clase.

Como ya hemos apuntado, esta situación tiene consecuencias paradójicas porque, intentando proteger a los alumnos de toda desconcertación, los lleva a un estado de desconcertación permanente y los sitúa definitivamente fuera del contrato didáctico. Los alumnos se instalan entonces en el contrato pedagógico del que también acabarán saliendo ya que éste sólo puede mantenerse con argumentos de autoridad. En el momento en que los alumnos rompen las cláusulas del contrato pedagógico (y hasta del contrato escolar), el problema toma una dimensión tal que desaparece todo rastro de su origen didáctico.

La gravedad del problema se debe a que las cláusulas del contrato pedagógico y, en un sentido más radical, las del contrato escolar no pueden ser transgredidas porque de su cumplimiento depende la existencia misma de la institución escolar. Es comprensible que, llegados a este punto, se recurra a medidas de control de las cláusulas del contrato pedagógico, apelando por ejemplo al "control de la calidad de la enseñanza", y también es comprensible que dicho control pueda llegar a degenerar en la aplicación de simples medidas de "disciplina escolar".

Para intentar mantener a los alumnos dentro del sistema escolar, las instituciones didácticas procuran protegerlos de toda desconcertación y evitarles el enfrentamiento con cualquier obstáculo epistemológico. Esta tendencia pedagógica aumenta el peligro de la atomización de la enseñanza y puede degenerar en una "enseñanza instantánea" que conduce a los alumnos a un estado de desconcertación permanente que los expulsa, paradójicamente, del contrato didáctico y, en última instancia, del contrato escolar.

5. La función integradora del trabajo de la técnica

En el marco general que hemos descrito, queremos volver a considerar —para subrayar su importancia— este momento particular del proceso de estudio que es el *momento del trabajo de la técnica*. En efecto, ante la tendencia a la atomización de la enseñanza, este momento desempeña un *papel integrador* en la medida en que aparece a la vez como el desarrollo natural del momento exploratorio y como la fuente de las necesidades tecnológico-teóricas. Si, por la razón que sea, se elimina esta función integradora, el proceso didáctico se atomiza muy rápidamente.

Para analizar más a fondo esta función esencial del momento del trabajo de la técnica, utilizaremos un ejemplo concreto. Consideremos el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, situándonos en el momento exploratorio en el que aparecen tres técnicas simples (substitución, reducción e igualación) para sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Dado el sistema $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 4x - y = 28, \end{cases}$

existen, en la enseñanza secundaria actual, 3 técnicas para resolverlo aparentemente independientes entre sí:

Substitución	*Igualación*	*Reducción*
$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ y = 4x - 28 \end{cases}$	$\begin{cases} y = (-2-3x)/5 \\ y = 4x - 28 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 4x - y = 28 \end{cases}$
$\Rightarrow 3x+5(4x-28) = -2$	$\Rightarrow -2-3x = 5(4x-28)$	$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 20x - 5y = 140 \end{cases}$
$\Rightarrow 3x+20x-140 = -2$	$\Rightarrow \mathbf{23x = 138}$	$\Rightarrow \mathbf{23x = 138}$
$\Rightarrow \mathbf{23x = 138}$		
$\Rightarrow x = 6\ ;\ y = -4$	$\Rightarrow x = 6\ ;\ y = -4$	$\Rightarrow x = 6\ ;\ y = -4$

Las actividades matemáticas correspondientes a cada una de estas técnicas se proponen, a nivel exploratorio, como actividades independientes entre sí. La rigidez propia de la actividad exploratoria comporta, de suyo, este fraccionamiento; y el carácter algorítmico de las técnicas citadas refuerza la ilusión de la instantaneidad de su aprendizaje: la técnica de substitución, por ejemplo, "se sabe" o "no se sabe utilizar". No se concibe un proceso de estudio complejo a lo largo del cual la relación del alumno a la técnica de substitución sufra cambios progresivos importantes derivando hacia la técnica de igualación o de reducción, y ampliándose para el estudio de sistemas con tres o más incógnitas. Y se suele entonces tratar el subtipo de los sistemas 2x2 como independiente del de los sistemas con ecuaciones con más de 2 incógnitas.

En este punto del proceso de estudio es cuando aparece la importancia del momento del trabajo de la técnica: es preciso poner en funcionamiento repetidamente las tres técnicas simples, analizar las semejanzas y las diferencias entre los gestos que cada una de ellas pone en marcha, trabajarlas hasta que dejen de ser problemáticas y llegar a rutinizarlas. Sólo entonces se pone de manifiesto la relación que hay entre ellas, qué es lo que tienen en común (la eliminación de una ecuación y una incógnita), cuál es el mecanismo que cada una de ellas pone en marcha para alcanzar ese objetivo y cuál es la forma más adecuada de extenderlas al caso de más de 2 incógnitas.

La primera evidencia que surge del trabajo técnico encaminado a eliminar una ecuación y una incógnita (para pasar de un sistema 3x3 a un sistema 2x2) es que el nombre de las incógnitas puede ser obviado con ventaja a lo largo del proceso de eliminación. Emerge así la noción de *matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales* como uno de los primeros frutos de la "creatividad" del trabajo de la técnica. Al sistematizar el mecanismo de eliminación emerge la *regla del pivote* que es una técnica nueva y muy potente que permite resolver muy rápidamente sistemas de ecuaciones lineales aunque éstos tengan coeficientes no enteros.

En las tres técnicas anteriores, el objetivo principal era eliminar una ecuación y una incógnita. En concreto, se parte del sistema $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ 4x - y = 28 \end{cases}$ y se obtiene la ecuación $23x = 138$. Este *proceso de eliminación* puede esquematizarse mediante el paso:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3} & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 28 \end{array}\right) \longrightarrow \overset{x}{(5\cdot 4-3\cdot(-1)} \mid 5\cdot 28-(-2)\cdot(-1)) = (\overset{x}{23} \mid 138)$$

y puede generalizarse a sistemas lineales cualesquiera:

$$\text{Si } a \neq 0:\quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{a} & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{af-be} & ag-ce & ah-de \\ aj-bi & ak-ci & al-di \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \text{etc.}$$

La utilización reiterada de la regla del pivote muestra su alcance y generalización a sistemas de ecuaciones con mayor número de incógnitas y de ecuaciones. Pero, para realizar esta generalización efectivamente, es preciso ir más allá de la mera utilización puntual de la nueva técnica. Es preciso flexibilizar su uso, comprobar cómo quedan caracterizados los sistemas que no tienen solución y los que tienen infinitas soluciones, cómo se escribe el conjunto de todas las soluciones, etc. Todo ello requiere, de nuevo, un importante trabajo de la técnica del que podrán emerger las nociones de "rango de un sistema compatible", "rango de una matriz" y "número de grados de libertad de un sistema compatible", entre otras. El trabajo de la técnica se muestra así *creador* de objetos matemáticos.

La emergencia de la técnica "regla del pivote" y de los demás objetos que hemos citado provoca necesidades tecnológico-teóricas evidentes. ¿Cómo interpretar la noción de "rango de una matriz" que en el trabajo técnico ha surgido como el número de matrices no nulas que aparecen en un proceso de eliminación? ¿Cómo justificar la invariancia de dicho número respecto al particular proceso de eliminación? ¿Cómo justificar la caracterización empírica de los sistemas compatibles dada por la igualdad entre el rango de la matriz y el de la matriz ampliada? ¿Cómo interpretar el número de grados de libertad de las soluciones de un sistema compatible? ¿Cómo utilizar la regla del pivote para eliminar "parámetros" en lugar de eliminar "incógnitas"?

El momento del trabajo de la técnica presenta dos características esenciales:

(a) En el proceso de estudio de un tipo de problemas, el momento del trabajo de la técnica resulta *creador de nuevos objetos matemáticos.* En él emergen nuevas nociones, nuevas técnicas y nuevas relaciones entre objetos que pueden considerarse, a su vez, como nuevos objetos.

(b) El momento del trabajo de la técnica completa el estudio exploratorio e *integra* de manera natural al momento exploratorio y al momento tecnológico-teórico en el proceso. Se desprende de aquí que la debilitación de dicha dimensión de la actividad matemática crearía un abismo entre la exploración puntual y rígida de problemas por un lado y los discursos "teóricos" (justificativos e interpretativos) por otro.

6. La paradoja de la creatividad

Toda actividad matemática forma parte de un proceso a lo largo del cual pueden emerger nuevos objetos matemáticos —en particular nuevas técnicas, nuevas nociones "teóricas" y nuevos problemas—, así como nuevas relaciones entre técnicas, teorías y tipos de problemas, con la consiguiente emergencia de "ideas generales". Podemos decir que, en este sentido, toda actividad matemática es potencialmente *creativa.*

La creatividad matemática así entendida surge en el seno del proceso de estudio, es decir, de un proceso ligado por fuertes restricciones: es el resultado de una actividad sostenida y estructurada, fuente de nuevos problemas y de nuevas tareas matemáticas. Al aplicar esta visión de la "creatividad matemática" a las actividades que se realizan actualmente en la escuela, nos encontramos ante una situación paradójica que provoca importantes disfunciones en las instituciones escolares:

(a) En las instituciones escolares actuales no existe ningún dispositivo didáctico institucionalizado que permita hacer vivir con normalidad el momento del trabajo de la técnica. Por razones diversas, en ningún nivel de la enseñanza de las matemáticas se ha materializado un dispositivo didáctico en el que este momento crucial del trabajo matemático pueda desarrollar las funciones que hemos descrito: "creación" de nuevos objetos matemáticos e "integración" de los diferentes momentos del proceso de estudio.

(b) En las instituciones escolares actuales impera una fuerte tendencia a fraccionar la matemática enseñada. El estudiante se encuentra con unos objetos matemáticos poco relacionados entre sí, con unas técnicas muy rígidas, con problemas relativamente aislados (o formando clases muy estereotipadas) y con una teoría poco relacionada con la práctica matemática concreta. Resulta, en definitiva, que la actividad matemática escolar que llevan a cabo los alumnos no está sometida a las restricciones de un proceso sostenido y estructurado y, por lo tanto, tiene pocas posibilidades de ser *creativa*.

(c) Paradójicamente y a pesar de que, como hemos visto, es la propia estructura de la institución escolar la que dificulta el desarrollo de una actividad matemática creativa, en la escuela se otorga un gran valor a la "creatividad", como si la falta de creatividad visible provocara una necesidad cada vez más imperiosa de la misma. Así, se observa una tendencia del momento exploratorio a invadir todo el espacio del estudio, desplazando tanto al momento tecnológico-teórico como al del trabajo de la técnica, e incluso al de la institucionalización. Podemos hallar un síntoma reciente de la importancia que se otorga a la *exploración libre de problemas aislados* en la proliferación de "olimpíadas matemáticas", en las que se identifica la "exploración libre" de problemas no rutinarios con la actividad matemática más "creativa".

El precio de la creatividad

"—Señor Martínez, salga usted a la pizarra y escriba, para que todos copien, lo que voy a dictarle:

"Yo conocí a un poeta de maravilloso natural, y borraba tanto, que sólo él entendía sus escritos, y era imposible copiarlos; y ríete, Laurencio, del poeta que no borra".

Y ahora, agarraos, hijos, adonde bien podáis, para escuchar lo que voy a deciros. El autor de estas líneas, y probablemente el poeta a que en ellas se alude, fue aquel monstruo de la naturaleza, prodigio de improvisadores, que se llamó Lope Félix de Vega Carpio."

Antonio Machado (1936)
Juan de Mairena.

De lo anterior resulta que, más que una necesidad de actividad matemática creativa, el sistema muestra una necesidad de *apariencia de creatividad*. Parece como si nuestra cultura escolar opusiera frontalmente "actividad matemática creativa" y "actividad rutinaria o repetitiva". Como si la actividad matemática sólo fuera creativa en la medida en que se presentara como "sorprendente", "diferente", "original" y, en definitiva, "libre" y "espontánea".

Al identificar la actividad matemática "creativa" con una actividad puntual, desligada ("libre") de las técnicas rutinarias y no sometida a las restricciones de un proceso de estudio estructurado, la organización escolar dificulta objetivamente el desarrollo "normal" de la verdadera creatividad matemática. Dado que, sin embargo, la escuela otorga un gran valor a la creatividad, se produce un desfase entre los medios o dispositivos escolares que pone en juego y los fines que pretende alcanzar.

PEQUEÑOS ESTUDIOS MATEMÁTICOS

PEM 15. Racionalizar expresiones con radicales

La cuestión inicial

Hemos visto en el *Episodio* a los alumnos de Luis trabajar la técnica de racionalización de expresiones con radicales. Esta técnica consiste en lo siguiente: para "quitar los radicales" del denominador de una expresión como $\frac{22}{1+\sqrt{5}}$, se multiplican el numerador y el denominador de esta fracción por el "conjugado" de $1 + \sqrt{5}$, es decir, por $1 - \sqrt{5}$; se obtiene entonces una expresión igual a $\frac{22}{1+\sqrt{5}}$, pero sin raíces en el denominador:

$$\frac{22}{\sqrt{5}+1} = \frac{22(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{22(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{22(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{11(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Si en la expresión inicial aparecen dos radicales distintos, como en $\frac{22}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, una variación adecuada de la técnica anterior consiste en multiplicar primero por la cantidad conjugada del denominador *respecto de* $\sqrt{5}$, es decir por $1 - \sqrt{3} - \sqrt{5}$, y, después, por la cantidad conjugada del denominador obtenido *respecto de* $\sqrt{3}$ (o viceversa).

Los alumnos de Luis, a fuerza de poner en práctica esta técnica, han constatado que, al racionalizar una expresión del tipo $\dfrac{A}{B + C\sqrt{n}}$ con A, B, C $\in$ Q*, siempre obtenían una expresión del tipo $a + b\sqrt{n}$ con $a, b \in$ Q. En cambio, al racionalizar una expresión con dos radicales del tipo $\dfrac{A}{B + C\sqrt{n} + D\sqrt{m}}$ con A, B, C, D $\in$ Q* y $n \neq m$, obtenían una expresión con *tres* radicales del tipo $a + b\sqrt{n} + c\sqrt{m} + d\sqrt{nm}$, con $a, b, c, d \in$ Q.

En la organización matemática que Luis y sus alumnos construyen en torno a las expresiones con radicales, este tipo de aserciones y su justificación formarían parte de la *tecnología* de la técnica utilizada. ¿Son ciertos estos dos resultados? Si lo son, ¿cómo se pueden demostrar? Una vez establecidos, ¿de qué manera podrían modificar el desarrollo posterior de la técnica?

Problema 1

Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - 2} \qquad \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} \qquad \frac{\sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}} \qquad \frac{4}{3 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \qquad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \qquad \frac{4}{3 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} \qquad \frac{9 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$$

¿Se confirma la observación de los alumnos de Luis sobre la forma del resultado obtenido?

Vías de estudio: una, de nivel 1.*
Ayudas: [21]

Problema 2

Demostrar si son ciertos los dos resultados tecnológicos conjeturados por los alumnos de Luis o dar un contraejemplo si son falsos.

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [4] –> [119]

Problema 3

Situándose en un ámbito teórico apropiado, se puede extender la técnica anterior para racionalizar expresiones como las siguientes:

$$\frac{6}{2-\sqrt[3]{5}} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt{7}+1} \qquad \frac{53}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{7}}$$

Indicar los cambios que supondría esta variación teórica respecto a la técnica utilizada en el problema 1.

Vías de estudio: dos, de nivel 4.
Ayudas: vía 1: [103] -> [34] -> [71] -> [7]
vía 2: [103] -> [92] -> [75]

PEM 16. ¿Cuándo son iguales dos fracciones irreducibles?

La cuestión inicial

En los *Diálogos*, la Profesora imagina un episodio de clase en el que el profesor invalida el resultado de un alumno que ha encontrado la fracción $\frac{19}{22}$ como solución a un ejercicio, siendo la respuesta correcta la fracción $\frac{5}{7}$. ¿Cómo sabe el profesor que el alumno se ha equivocado?

A raíz de este episodio, la Profesora afirma que "cuando se escriben dos fracciones en su forma irreducible, entonces para ser iguales tienen que tener el mismo numerador y el mismo denominador". Éste es un resultado *tecnológico* que siempre damos por sentado cuando trabajamos con fracciones. ¿Cómo se puede demostrar? ¿Qué elementos *teóricos* lo sustentan?

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [138] -> [23]

PEM 17. Funciones y valores aproximados

La cuestión inicial

En los *Diálogos*, la profesora y el estudiante consideran diferentes expresiones del número $a = \frac{90}{2-\sqrt{2}}$ que hacen intervenir $\sqrt{2}$: por ejemplo, $a = 90(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$, $a = \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ y la "forma canónica" $a = 90 + 45\sqrt{2}$ (obtenida "racionalizando" el denominador de $\frac{90}{2-\sqrt{2}}$).

Supongamos, como la Profesora y el Estudiante, que queremos calcular un valor aproximado de a partiendo de la aproximación $\sqrt{2} \simeq 1{,}5$. Hallaremos, en cada caso:

$$\frac{90}{2-\sqrt{2}} \simeq 180\ ;\ 90(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \simeq 150\ ;\ \frac{45\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \simeq 135\ ;\ 90+45\sqrt{2} \simeq 157{,}5.$$

En cambio, si utilizamos la calculadora (que nos da la aproximación $\sqrt{2} \simeq 1{,}414\ 213\ 562$) hallaremos en los cuatro casos un mismo valor: $a \simeq 153,\ 639\ 610$.

¿Cómo explicar estas diferencias? ¿Por qué $90(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $90 + 45\sqrt{2}$ nos dan mejores aproximaciones al tomar $\sqrt{2} \simeq 1{,}5$ que las otras dos expresiones? ¿Podemos hallar una expresión que nos dé una aproximación aún mejor?

La explicación que dan la Profesora y el Estudiante en los *Diálogos* es que la función $f(x) = \frac{90}{2-\sqrt{x}}$ es "más creciente" que la función $g(x) = 90 + 45x$. ¿Qué significa esto? ¿Qué relación tienen las funciones y su crecimiento con estos cálculos aproximados?

Problema 1

Las funciones siguientes toman el mismo valor $a = \frac{90}{2-\sqrt{2}}$ *cuando* $x = \sqrt{2}$. *Estudiar su crecimiento y representarlas gráficamente para* $x \in (1;2)$:

$$f_1(x) = 90 + 45x \quad ; \quad f_2(x) = 90(1 + \frac{1}{x})$$

$$f_3(x) = 45\,\frac{x}{x-1} \quad ; \quad f_4(x) = \frac{90}{2-x}.$$

¿Cuáles son las imágenes del intervalo (1;2) por f_1, f_2, f_3, f_4*? ¿Y las del intervalo (1,4;1,5)? ¿Cuál será el error máximo cometido al calcular aproximadamente el valor de a con cada una de estas funciones tomando un valor aproximado de* $\sqrt{2}$ *entre 1,4 y 1,5?*

Vías de estudio: una, de nivel 2.
Ayudas: [42]

Problema 2

Consideremos las funciones $f_1(x) = 90 + 45x$ *y* $f_2(x) = 90(1 + \frac{1}{x})$, *que son las que nos han dado mejores aproximaciones para* $a = \frac{90}{2-\sqrt{2}}$. *Para hallar una función que nos dé una aproximación aún mejor, podemos tomar, por ejemplo,* $F_\lambda(x) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_2(x)$ *con* $\lambda \in (0,1)$. *Interpretar gráficamente esta nueva función y hallar algún valor de* λ *para el cual* $F_\lambda(x)$ *proporcione una aproximación mejor de a.*

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [90] -> [16] -> [150]

PEM 18. ¿Cómo determinar si $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ es irracional?

La cuestión inicial

Al final de los *Diálogos*, la Profesora y el Estudiante viven juntos algunos momentos del proceso de estudio de una cuestión matemática: la de determinar si un número dado es o no irracional. Esta cuestión es sin duda muy amplia, pero la Profesora y el Estudiante nos muestran una técnica que permite abordarla para algunos casos particulares.

La técnica consiste en buscar primero una ecuación con coeficientes enteros que tenga como solución el número estudiado y en demostrar después que la ecuación hallada no tiene ninguna solución racional. ¿Para qué tipos de números funciona esta técnica? ¿Cómo hallar en cada caso una ecuación apropiada? ¿Qué tipos de propiedades de los números elegidos se deben utilizar? ¿Qué relación tiene esta técnica con la técnica clásica, utilizada por los antiguos griegos, para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional?

Problema

Determinar, con la técnica indicada, si los números siguientes son o no racionales:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{n},\ \sqrt[3]{n},\ \sqrt{3}+\sqrt{5},\ \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5},\ \sqrt[3]{5}+\sqrt{7},$$
$$\sqrt[4]{7}+\sqrt{7}+1,\ \cos(\pi/9),\ \cos(\pi/5),\ \cos(\pi/7).$$

Vías de estudio: una, de nivel 3.
Ayudas: [59] -> [13] -> [114] -> [46] -> [143]

EPÍLOGO

A modo de epílogo, reproducimos a continuación la transcripción de una entrevista que mantuvimos con María Núñez después de que leyera el manuscrito de este libro. Quedamos pues, una vez más, en deuda con ella.

Los autores

María Núñez.- He quedado sorprendida al ver la cantidad de información que contiene mi reportaje. Resulta asombroso descubrir que, para estudiar matemáticas, haya que saber tantas cosas...

Los autores.- Quizá parece que sean muchas porque, como en toda iniciación, hay que avanzar muy despacio. Además, sobre el papel, siempre se acaban necesitando muchas palabras. Los diálogos entre el Estudiante y la Profesora son un buen ejemplo de esta exigencia. No olvidemos que son transcripciones de conversaciones orales y, como habrás visto, la Profesora y el Estudiante saben dar tiempo al tiempo. Nosotros no creemos en aprendizajes "instantáneos": ¡las cosas se olvidan tan pronto como se aprenden!

M.- ¿Cómo definiríais el objetivo de vuestro libro?

A.- En primer lugar, invitamos al lector a detenerse unos momentos sobre la cuestión del estudio de las matemáticas. A reflexionar, meditar, y también a actuar —matemáticamente, por ejemplo—.

M.- ¿A reflexionar sobre qué?

A.- Pues, sobre una noción que tenemos un tanto olvidada: la noción de estudio. ¿Y sabes por qué la hemos olvidado? Porque partimos de la base universalmente aceptada de que el profesor enseña y el alumno aprende. Es la ficción del aprendizaje "instantáneo", en tiempo real. La gente se comporta como si todo se pudiera entender, y por lo tanto aprender, al mismo tiempo que se enseña. Se trata de una exigencia absurda e inhumana.

M.- De todas formas, aunque partís de la noción de estudio, acabáis conduciendo al lector a través una reflexión sobre la sociedad, la escuela y, en el fondo, casi todos los aspectos de nuestra vida.

A.- No somos nosotros los que lo hacemos, sino la Profesora y el Estudiante. Aunque estamos, por supuesto, totalmente de acuerdo con ellos. Estudiar es una actividad cardinal, un proceso vital. Existen muchas cuestiones, grandes o pequeñas, que nos obligan a todos, periódicamente, a "volver a la escuela", ¡aunque ésta no tenga muros ni profesores! La escuela, es decir, lo que los griegos llamaban *skholé*, no es un mero paréntesis en el que nos encierran durante la infancia y adolescencia. Es toda una dimensión de nuestra vida.

M.- Sin embargo, si hablamos de la escuela en el sentido habitual de la palabra, vuestra actitud resulta bastante ambivalente. Por un lado, implícita o explícitamente, subrayáis las insuficiencias de esta "institución didáctica" (como veis, me he aprendido la lección a conciencia...), mientras que, por otro lado, mostráis que se trata de una pieza fundamental en nuestra "maquinaria social".

A.- Así es. En efecto. El problema es que mucha gente ha dejado de entender, hoy día, lo que es la escuela, cuáles son sus razones de ser y en qué se basan sus "reglas del juego".

M.- ¿Los profesores también?

A.- A veces sí, por desgracia. Creemos que ha llegado el momento de volver a analizar la misión de los profesores, de volver a abrir el debate sobre su posición y el papel que desempeñan en la escuela y en la sociedad, de volver a negociar con mucha claridad el contrato que les une a la sociedad. Y no se trata de volver a negociarlo sólo con las autoridades educativas, sino con toda la sociedad. En particular con los alumnos y con los padres de alumnos. Ésta es la razón por la cual el libro va dirigido a diversos grupos de lectores que queremos tratar conjuntamente porque tienen un proyecto social común... y compartido.

M.- Por ejemplo, parecéis aconsejar a los profesores que renuncien a la ilusión de querer controlarlo todo en materia de aprendizaje escolar.

A.- Sí, hay algo de eso. Se trata de una ilusión que no han inventado ellos, pero que han acabado por aceptar y dar por sentado, pese a que se trata, al mismo tiempo, de una exigencia imposible de satisfacer. Y que debería ser, por tanto, totalmente inaceptable. En efecto, al igual que los médicos, los profesores no tienen una obligación de cara a los resultados, sino de cara a los medios. No se puede acusar a un médico porque su enfermo no mejora, pero sí de que no haya hecho todo lo que estaba en sus manos para que pudiera curarse. La obligación de medios es una exigencia fuerte, pero lógica. Puede que la siguiente afirmación sorprenda, aun y cuando debería parecernos más que evidente: el profesor sólo puede *ayudar* al alumno a estudiar y, aunque su ayuda sea muchas veces indispensable —y casi siempre preciosa—, no puede estudiar ni, mucho menos, aprender en su lugar.

M.- En realidad, parece como si quisierais criticar la noción de enseñanza, ¿no es verdad?

A.- No criticamos ni la idea ni el hecho. Simplemente queremos mostrar cómo la ilusión de un control total del aprendizaje escolar pervierte la noción misma de enseñanza. En algunos casos, la enseñanza, que debería consistir ante todo en una ayuda al estudio, se fragmenta en una serie de declaraciones e instrucciones que los alumnos deben memorizar o "aplicar". En cambio, desde el punto de vista del aprendizaje, hacer algo porque nos dicen que lo hagamos no equivale a hacerlo *motu proprio*, porque lo vemos como una solución posible a un problema que nos planteamos.

M.- Ya. En realidad, los que debemos seguir estudiando una vez acabada la escuela, no disponemos en general de un profesor ni, todavía menos, de una enseñanza organizada y regulada.

A.- Eso mismo. Y ahí descubrimos el interés de haber podido contar, en la escuela, con profesores dispuestos a guiarnos por el bosque de dificultades que debíamos superar. Claro que la escuela sin muros ni profesores, el estudio que corre por nuestra cuenta es una realidad cada vez más presente en la vida de jóvenes y adultos. Éste es otro motivo por el cual cada uno de nosotros necesita construir muy pronto —ya desde la escuela— una cultura del estudio —o *cultura didáctica*— que nos permita después estudiar, por gusto o a la fuerza, de manera autónoma, así como sacar el mejor provecho de los posibles cursos o lecciones que podamos seguir. ¡Cuando los hay!

M.- ¿No será que la cultura didáctica de la que habláis se considera, en cierto modo, como algo privado, que depende de cada individuo y de su actuación personal?

A.- Sí. Tendemos a considerar que estudiar es un asunto privado, e incluso íntimo, con el que algunos se desenvuelven muy bien solos, porque descubren por sí mismos o por su entorno familiar y social, y casi sin darse cuenta, las "técnicas didácticas" que les permiten actuar de manera adecuada. Y en general, estos buenos estudiantes no entienden por qué hay que explicitar las técnicas didácticas, por qué no son espontáneas también para los demás. De hecho, lo que no entienden es que la cultura y el "saber hacer" didácticos están repartidos de manera muy desigual en la sociedad —lo que constituye, como bien sabemos, un factor importante de desigualdad escolar—.

M.- Supongo que ahí es donde debe intervenir el profesor, ¿no?

A.- El profesor tiene un papel importante en este esfuerzo de educación didáctica, pero es el estudiante quien debe ocuparse de instruirse a sí mismo y de ayudar a instruirse a los demás. Es lo que intentamos hacer nosotros con este libro, a fin de contribuir al esfuerzo de todos.

M.- Vuestro libro trata del estudio de las matemáticas. Parece que pensáis que todo el mundo debe tener una instrucción mínima en matemáticas, ¿no es así?

A.- Evidentemente. Y también en gramática, en historia, en cuestiones de arte, de lenguas extranjeras, de deporte, etc. No se trata de un mero derecho. Es una obligación que se impone a todo ciudadano.

M.- Pero, ¿acaso las matemáticas no desempeñan un papel especial en la formación general de cada individuo?

A.- Sí, claro, claro. Ésa es la función que les asignaba Platón: la de preparación, de "propedéutica". El motivo es simple. Las matemáticas son un ámbito en el que es posible formular problemas sencillos a los que se puede aportar, bastante fácilmente, respuestas seguras y justificables. La experiencia matemática nos enseña desde un buen principio a no contentarnos con medias verdades o con simples opiniones, subjetivas y cambiantes. Es mucho más difícil llegar hasta este punto en física o en biología, ¡o incluso en gramática! Pero, desde este punto de vista, la experiencia matemática sólo es útil si sabemos exportar sus exigencias fuera de las matemáticas para poderlas aplicar a la vida cotidiana. De nada nos serviría si no nos enseñase a buscar más allá de las opiniones preestablecidas, de lo que Platón llamaba la *doxa*.

M.- Entonces vuestro libro ¿es un libro de matemáticas o de didáctica?

A.- Toda actividad matemática conlleva una parte de didáctica. A partir del momento en que uno estudia una cuestión, va a encontrar irremediablemente problemas de estudio, es decir, problemas didácticos. Nuestro libro ha querido poner de relieve esta dimensión didáctica de la actividad matemática.

M.- Así, ¿los grandes matemáticos serían los mejores didácticos?

A.- Pues, en cierto sentido, sí. Aunque debemos tener en cuenta que el conocimiento didáctico de un gran matemático es muy personalizado y, por ello, muy difícil de compartir. Es un conocimiento privado que se ha construido en condiciones extremadamente específicas. La iniciación que proponemos nosotros va dirigida a todo el mundo, es una propuesta de didáctica para cualquier ciudadano.

M.- ¿Me permitís una última pregunta? Al Estudiante ya lo conozco, puesto que soy amiga de sus padres. En cuanto a la Profesora, ¿existe de verdad o es un personaje que os habéis inventado con la complicidad del Estudiante?

A.- ¡A la Profesora no le haría ninguna gracia tu pregunta! Nosotros lo único que hemos hecho ha sido "anonimarla", junto con el Estudiante, porque hemos querido respetar la intimidad de sus entrevistas.

M.- O sea, ¿que existe de veras?

A.- ¿Has oído hablar del matemático Nicolas Bourbaki?

M.- Sí. Era, creo, el nombre colectivo de un grupo de matemáticos franceses.

A.- Mira, María, cuando en los años cuarenta aparecieron los *Elementos de matemáticas* de Nicolas Bourbaki, algunos propalaron el rumor de que Bourbaki, matemático poldavo y profesor de la Universidad de Nancago, ¡en realidad no existía! Incluso hubo un redactor de la *Encyclopædia Britannica* que tuvo la osadía de publicar este rumor como si fuera cierto. Y, para contestarle, ¡los amigos de Bourbaki hicieron correr la voz de que el redactor en cuestión tampoco existía!

M.- ¿Y existía de veras o no?

A.- Por supuesto que sí. Era un matemático americano bastante conocido. ¿Y a ti te gustaría, querida María, que hiciéramos lo mismo contigo? ¿Que hiciéramos correr la voz de que no existes? ¿De que eres un personaje inventado?

M.- ¡Claro que no!

AYUDAS PARA LOS PEQUEÑOS ESTUDIOS MATEMÁTICOS

[1] Los partidos de una liga (de fútbol, tenis, basquet, ping-pong) se representan habitualmente por una tabla en la que cada casilla indica el resultado del partido entre el jugador de cada fila y el jugador de la columna correspondiente. Por ejemplo, si tenemos 7 jugadores J1, J2,..., J7, tendremos una tabla como la siguiente (donde se indica el resultado empezando por el jugador de número menor):

J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	
	1-3	3-0	3-1	3-2			J1
1-3		2-3	0-3	3-0			J2
3-0	2-3		1-3	3-2			J3
3-1	0-3	1-3		1-3			J4
3-2	3-0	3-2	1-3				J5
							J6
							J7

Así, vemos que J1 ha perdido 1-3 contra J2, pero que J2 ha ganado 3-0 contra J5, etc. Como ningún jugador juega contra sí mismo, podemos anular la diagonal de la tabla. Además, y a diferencia de los que ocurre en la liga de fútbol profesional, en el torneo de ping-pong del Instituto no hay partidos "en casa" ni "fuera". Por lo tanto, el partido del jugador J1 contra J2 (segunda casilla de la primera fila) es el mismo que el partido de J2 contra J1 (primera casilla de la segunda fila), y lo mismo para los demás. En otras palabras, la tabla de los resultados es una *tabla simétrica*, de la que podemos eliminar la parte triangular inferior sin perder información. Una vez construida la tabla, ya sólo queda contar el número de casillas, que corresponde al número de partidos jugados. En el caso de tener 7 jugadores, hay 21 casillas y pues se jugarán en total 21 partidos. Se puede ver, considerando las tablas correspondientes, que con 2 jugadores se jugará un solo partido; con 3 jugadores, 3 partidos; con 4 jugadores, 6 partidos.

J2	
1-3	J1

J2	J3	
1-3	3-0	J1
	2-3	J2

J2	J3	J4	
1-3	3-0	3-1	J1
	2-3	0-3	J2
		1-3	J3

Con la construcción de tablas triangulares tenemos una técnica muy simple para contar el número total del partidos. Pero esta técnica no parece muy eficaz para todos los casos: ¿qué ocurre si hay 40 jugadores? ¿Y si hay 50? ¿O 100? Además, lo que nos interesa es hallar una *fórmula* que nos permita calcular el número total T de partidos a partir de un número cualquiera n de jugadores.

Ayuda siguiente: vía 1: [30]; vía 2: [110]; vía 3: [47].

[2] En el primer caso se obtiene una primera familia de parábolas en forma de U con vértice en el punto $V_y = (\frac{3}{2}y, -\frac{9}{4}y^3)$. En el segundo caso se obtiene una familia de parábolas en forma de U invertida y vértice en el punto $V_x = (\frac{x}{6}, -\frac{x^3}{12})$.

Ayuda siguiente: [111].

[3] Contando el número de cuadritos, obtenemos L_A, longitud total del hilo del tendedero A y L_B, longitud total de hilo del tendedero B.

Ayuda siguiente: [77].

[4] Aplicar la técnica de "multiplicar por la expresión conjugada del denominador" a las expresiones generales $\frac{A}{B + C\sqrt{n}}$ y $\frac{A}{B + C\sqrt{n} + D\sqrt{m}}$.

Ayuda siguiente: [119].

[5] Coger un reloj con dos agujas y con 60 divisiones marcadas en la esfera: 12 divisiones para las horas con 5 subdivisiones para los minutos. Mover las agujas y observar entre qué dos divisiones se cruzan. Queda por explicar por qué se vuelven a encontrar en este punto y no en otro.

Ayuda siguiente: [78].

[6] Considerar valores concretos para x y r. Se puede tomar, por ejemplo, un cuadrado de lado $x = 3$ m. Sabemos que la superficie A del cuadrado es de 9 m^2. ¿Qué tanto por ciento aumenta la superficie si aumentamos el lado un 10 %? ¿Y si lo aumentamos un 2%? ¿Un 37%? ¿Un r%? ¿Y si en lugar de aumentarlo lo disminuimos? ¿El aumento relativo de la superficie depende del valor inicial x del lado del cuadrado? ¿Qué pasa si el lado del cuadrado mide 3 cm? ¿Y si mide 250 m? ¿Y si mide un valor cualquiera x? Hacer lo mismo en el caso del rectángulo de base x y altura $x + 1$, cuya superficie es $B = x^2 + x$.

Ayuda siguiente: [118].

[7] Queremos racionalizar $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$. La nueva técnica consiste en buscar el máximo común divisor k de $x^3 - 5$ y $x - 2$ para hallar $p(x)$ y $q(x)$ tal que se cumpla la identidad de Bézout: $(2 - x)\cdot p(x) = k + (x^3 - 5)\cdot q(x)$ (por ejemplo con el algoritmo de Euclides). En este caso, tenemos que: $(2 - x)\cdot(x^2 + 2x + 4) = 3 - (x^3 - 5)$ y, tomando clases en $\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-5)\mathbb{Q}[x]}$, resulta que $(2 - \sqrt[3]{5})\cdot(\sqrt[3]{5^2} + 2\sqrt[3]{5} + 4) = 3$. Luego:

$$\frac{6}{2-\sqrt[3]{5}} = 2(\sqrt[3]{5^2} + 2\sqrt[3]{5} + 4)$$

lo que podemos comprobar fácilmente con la calculadora.

Si ahora aplicamos esta técnica a $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$, buscaremos el inverso de la clase de $x - 2$ en $\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2-3)\mathbb{Q}[x]}$. Si utilizamos el algoritmo de Euclides con los polinomios $x^2 - 3$ y $x - 2$, hallamos que $x^2 - 3 = (x - 2)(x + 2) + 1$. Luego tenemos que $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) = -1$ y que $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2} = -\sqrt{3} - 2$.

[8] Supongamos que r no es paralela a (AB) y que C es la intersección de (AB) con r. Sea una banda (r_1,r'_1) tal que r_1 sea paralela a r y pase por A. Sea otra banda (r_2,r'_2) con r_2 = (AB). Sea E la intersección de r'_2 y r'_1, y sea F la intersección de (AE) con la paralela a r que pasa por B. Entonces BF = AB y, como (BF) es paralela a r, la paralela a (AB) que pasa por F corta a r en D, el punto buscado.

Si C no es la intersección de r y (AB), sea C' esta intersección y sea D' sobre r tal que C'D' = AB. Ahora se construye CD sobre r con CD = C'D'.

[9] $L_B = l_1 + l_2 + \dots + l_{(n-1)/2} = 4a + (4a - 8d) + (4a - 8d\cdot 2) + \dots + (4a - 8d\cdot(n-3)/2)$
Ayuda siguiente: [51].

[10] Trazar un círculo que corte los círculos C(A;b) y C(B;a) en dos puntos fáciles de determinar.
Ayuda siguiente: [131].

[11] Según se ve en los problemas 1 y 2 de este mismo PEM, la elasticidad arco E de una función f entre dos puntos x y $x' = x + rx$ es el cociente de la variación relativa s de f por la variación relativa r de x:

$$E(f,x,r) = \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x} = \frac{s}{r}.$$

El problema se traduce entonces en hallar aquellas funcions f para las cuales su elasticidad $E(f,x,r)$ no depende de x, sino sólo de la variación relativa r de x.
Ayuda siguiente: [112].

[12] Construir primero un triángulo AFG rectángulo en G tal que AG = d y AF/AB = b/d.
Ayuda siguiente: [49].

[13] Sabemos que $\cos(\pi/3) = 1/2$. Intentemos pues escribir $\cos(\pi/9)$ en función de $\cos(\pi/3)$ teniendo en cuenta que $\pi/3 = 3\cdot\pi/9$.
Ayuda siguiente: [114].

[14] Si x es un número muy grande respecto a 1, el rectángulo es "casi" un cuadrado y, por lo tanto, la variación relativa de su superficie "casi" no depende de x. De hecho se tiene que, cuando x tiende a infinito, $\Delta B/B$ tiende a $\Delta A/A$.

[15] Hay que demostrar que los puntos de intersección de una recta y un círculo y los puntos de intersección de dos círculos son constructibles con la regla de dos bordes paralelos, lo que conduce a las dos construcciones siguientes:

(a) Dados dos puntos A y B, construir dos puntos M y N de la recta (AB) que estén a distancia dada r de un punto O dado (suponemos $r > d(O,(AB))$).

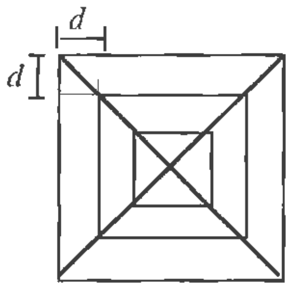
(b) Dados dos puntos A y B, construir un triángulo ABC de lados AC = b y BC = a dados (suponiendo AB = $c < a + b$).

Ayuda siguiente: [50].

[16] Al estar, para todo x, $F_\lambda(x)$ entre $f_1(x)$ y $f_2(x)$, la función F_λ siempre dará una aproximación igual o mejor que f_1 y f_2. Para conocer el error máximo cometido, lo más fácil es buscar un valor de λ para el que $F_\lambda(x)$ sea siempre monótona. De esta manera tendremos que el error máximo será $e = |F_\lambda(1) - F_\lambda(2)|$ si tomamos inicialmente una aproximación de $\sqrt{2}$ en el intervalo (1;2), o bien $e = |F_\lambda(1{,}4) - F_\lambda(1{,}5)|$ si tomamos inicialmente una aproximación de $\sqrt{2}$ en el intervalo (1,4;1,5).

Ayuda siguiente: [150].

[17] En el tendedero B hay $\frac{n-1}{2}$ cuadrados de perímetros $l_1, l_2, \ldots, l_{(n-1)/2}$. Si empezamos por el cuadrado exterior, tenemos $l_1 = an$ y $l_k = l_{k+1} - 8d$.



Ayuda siguiente: [9].

[18] $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$ es una raíz quinta de la unidad ($\omega^5 = 1$) y se tiene $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

Deducir que $\cos(2\pi/5)$ es solución de la ecuación de segundo grado $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Ayuda siguiente: [82].

[19] (a) M es la intersección de (OI) con la perpendicular a (OI) que pasa por P, y N la intersección de (OI) con la perpendicular a (OJ) que pasa por P, ambos puntos constructibles como se ve en el PEM 12.

(b) Dado $P(x,y)$, el punto $Q(y,x)$ es el simétrico de P respecto de la recta (OK'). Una construcción posible es la siguiente: se traza una banda (r_1,r'_1) tal que r_1 = (OP); sea E la intersección de r'_1 con (OK') y sea (r_2,r'_2) otra banda tal que r_2 pase por O y r'_2 por E; se traza entonces otra banda (r_3,r'_3) tal que r_3 = (EP); r'_3 corta (AA') en un punto F; finalmente, se traza una banda (r_4,r'_4) tal que r_4 pase por E y r'_4 por F; la intersección de r_4 con r_2 es el punto Q buscado.

(c) Dados $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$, el punto $(x_1+x_2,0)$ se obtiene transportando en $(x_2,0)$ la distancia x_1, constructible según se ve el PEM 12.

(d) Dado el punto $P(x_1,y_1)$, queremos construir un punto $Q(x_2,y_2)$ tal que $y_2 = y_1x_2/x_1$ o, lo que es lo mismo, $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}$. Para ello trazamos la recta (OP) y la perpendicular a (OI) en $(x_2,0)$, que se cortan en el punto Q buscado, dado que los rectángulos Ox_1Py_1 y Ox_2Qy_2 son semejantes.

(e) Dados $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$, para construir un punto de abscisa $x=\sqrt{x_1x_2}$, basta con construir un segmento [MN] tal que $MN = x_1 + x_2$ y un punto P tal que el triángulo MPN sea rectángulo en P (ver PEM 12). Se tiene entonces que la altura [PH] del triángulo cumple $PH^2 = x_1x_2$.

[20] El signo 13% es otra manera de designar el número decimal $\frac{13}{100}$ (que también se escribe 0,03). Se puede consultar un libro de matemáticas elementales (por ejemplo un manual de primer ciclo de ESO) que trate el tema de los porcentajes o tantos por ciento.

Ayuda siguiente: [83].

[21] Los resultados conjeturados se confirman. Por ejemplo, en el caso de expresiones con dos radicales, llegaríamos a las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}\frac{22}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1} &= \frac{22(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{5}-\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)} = \frac{22(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-1)^2}\\ &= \frac{22(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)}{5-4+2\sqrt{3}} = \frac{22(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)}{1+2\sqrt{3}} = \frac{22(\sqrt{5}+\sqrt{3}-1)(1-2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}\\ &= \frac{-22}{11}(-77+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}) = 14-6\sqrt{3}-2\sqrt{5}+4\sqrt{15}.\end{aligned}$$

Para comprobar, en cada caso, que se ha hallado la expresión correcta, se puede utilizar la calculadora de la manera siguiente:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{3+2} = \frac{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{3-4} = -\sqrt{3}+2-3+2\sqrt{3} = -1+3\sqrt{3}.$$

Con la calculadora: $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} \simeq 0{,}7320508076$ y $-1+3\sqrt{3} \simeq 0{,}7320508076$.

En el caso anterior, tendríamos: $\frac{22}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1} \simeq 14{,}62749258.$

y $\qquad 14-6\sqrt{3}-2\sqrt{5}+4\sqrt{15} \simeq 14{,}62749258.$

[22] Hay que volver a derivar.

Ayuda siguiente: [56].

[23] Tenemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$. Esta última igualdad indica, en particular, que a divide al producto bc. Como a y b no tienen divisores comunes, entonces por fuerza a divide a c. Se deduce, del mismo modo, que c divide al producto ad y, por lo tanto, que c divide a a. Luego $a = c$. Como ahora $ad = ab$, si dividimos los dos miembros por a, llegamos a la conclusión de que $b = d$.

Esta pequeña demostración recurre constantemente a propiedades de la *divisibilidad* en Z, que constituye así el *marco teórico* en el que toman sentido y se justifican las aserciones que hemos realizado.

[24] La luz del sol tiene un comportamiento ondular. Cuando la onda luminosa se propaga de un medio (el aire) a otro (el agua) sufre un fenómeno de *refracción*. Consultar algún libro de física elemental.

Ayuda siguiente: [129].

[25] Representar los cuadrados de las figuras 1 y 2 en una cuadrícula, tomando por ejemplo la escala: 1 metro = 8 cuadritos (o también 1 cuadrito = 0,125 m.).

Ayuda siguiente: [3].

[26] Reducir el caso del sen$x$ al estudio de cos$x$ y buscar algunos casos simples en los que se puede hallar una fórmula para $\cos \frac{2\pi k}{n}$.

Ayuda siguiente: [85].

[27] La técnica utilizada en [111] consiste en buscar el máximo $M(y)$ de la función $x \to f(x,y)$ (máximo que depende de y) y hallar después el máximo de la función $y \to M(y)$.

Ayuda siguiente: [40].

[28] ¿Qué edad tenía el padre al nacer el hijo? ¿Cuántos años se llevan? ¿Qué edad tendrán dentro de 5 años, de 10, de 15? ¿Cuántos años se llevarán? Hallar dos relaciones entre la edad E del padre y la edad e del hijo.

Ayuda siguiente: [148].

[29] El problema se reduce a construir un triángulo rectángulo de hipotenusa dada a (lado del triángulo isósceles) y de cateto dado $b/2$ (ver Problema 2(e) de este mismo PEM).

[30] Si a la tabla cuadrada inicial le quitamos la diagonal, obtendremos dos tablas triangulares con igual número de casillas.

Ayuda siguiente: [102].

[31] Trazar C tal que B sea el punto medio de [AC] (C es el simétrico de A respecto de B). Trazar después la mediatriz de [AC].

[32]

precio inicial p	$\frac{\Delta p}{p}$	$\frac{\Delta q}{q}$	$\frac{p\cdot f'(p)}{f(p)}\cdot\frac{\Delta p}{p}$	error cometido con la fórmula
6	1%	− 5,66%	− 6%	− 0,0034
10	1%	− 1,96%	− 2%	− 0,0004
45	1%	− 1,2%	− 1,125%	0,00075
15	1%	− 1,48%	− 1,5%	− 0,0002
14,56	1%	− 1,5%	− 1,523%	− 0,00023

En ningún caso se obtiene un error menor en valor absoluto a 10^{-4}.

[33] Tenemos $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$. Por lo tanto, $\cos(2x)$ será expresable con racionales y radicales reales si y sólo si $\cos x$ lo es. De la expresión de $\cos\frac{2\pi}{n}$ se deducen las de $\cos\frac{2\pi\cdot 2}{n}$ y $\cos\frac{2\pi}{2n}$. Más en general, $\cos\frac{2\pi}{n}$ será expresable con racionales y radicales si y sólo si, para todo $m > 0$, también lo es $\cos\frac{2\pi}{n\cdot 2^m}$.

Ayuda siguiente: [65].

[34] Queremos racionalizar $\frac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$. Podemos considerar $\frac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$ como la clase de equivalencia de $\frac{6}{2-x}$ en el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^3-5)\mathbb{Q}[x]}$.

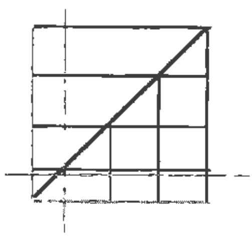
Ayuda siguiente: [71].

[35] Sea r^* tal que $\operatorname{sen} r^* \approx 0{,}76 \approx \operatorname{sen} 50°$. Si $r \geq r^*$, no hay ningún rayo de luz que llegue hasta el punto T. La zona de la superficie del mar por la que se ve el cielo desde el punto T es un disco situado justo encima de T y de radio $R = h\ \operatorname{tg} r^*$, donde h es la distancia de T a la superficie del agua.

[36] Sea $\omega_n = \exp(i2\pi k/n)$ y $\alpha_k = \cos\frac{2\pi k}{n}$ (k coprimo con n). El Q-automorfismo $\sigma_k(z) = z^k$ envía ω_n a ω_n^k y pues α a α_k. Luego α_k es raíz de $\Phi_n(x)$ para todo k, y como hay un total de $\varphi(n)/2$, es que son todas las raíces. Por lo tanto, $\Phi_n(x)$ tiene todas las raíces reales. Según Isaacs (1985), si $\cos\frac{2\pi}{n}$ es expresable con radicales reales, entonces $\varphi(n)/2$ es una potencia de 2 y todas las raíces de $\Phi_n(x)$ son constructibles con regla y compás.

Referencias bibliográficas: [68].

[37] Caso n par. Considerar la figura:



Ayuda siguiente: [89].

[38] $f'(p) = \dfrac{-100}{(p-5)^2}$ y $\dfrac{p \cdot f'(p)}{f(p)} = \dfrac{-p}{p-5}$. Se acostumbra a notar $e(p) = \dfrac{p \cdot f'(p)}{f(p)}$ (suponiendo $\dfrac{\Delta p}{p} \leq 1\%$).

Ayuda siguiente: [32].

[39] (b) El punto C buscado es la intersección de un círculo de centro A y radio b y otro círculo de centro B y radio a. Como $a + b > c$ = AB, hay dos puntos C y C' soluciones, siendo (AB) la mediatriz de [CC']. El problema se resuelve hallando un punto de (CC') constructible a partir de los datos.

Ayuda siguiente: [87].

[40] Podemos considerar una justificación basada en el resultado siguiente:

Si $f(x,y)$ es una función continua en I × J, con I y J compactos de $\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\underset{x \in I}{\text{Máx}} \left(\underset{y \in J}{\text{Máx}} f(x,y)\right) = \underset{(x,y) \in I \times J}{\text{Máx}} f(x,y).$$

Para demostrarlo, sea $M = \underset{(x,y) \in I \times J}{\text{Max}} f(x,y)$. Como f es continua sobre un compacto, existe $(x_0,y_0) \in I \times J$ tal que $M = f(x_0,y_0)$. Dado que, por definición de máximo, $f(x_0,y_0) \geq \underset{x \in I}{\text{Máx}} \left(\underset{y \in J}{\text{Máx}} f(x,y)\right)$, sólo falta comprobar que la desigualdad estricta $f(x_0,y_0) > \underset{x \in I}{\text{Máx}} \left(\underset{y \in J}{\text{Máx}} f(x,y)\right)$ implica contradicción.

[41] Hacer un modelo geométrico (vía 1) o un modelo algebraico (vía 2).

Ayuda sigiente: vía 1: [100]; vía 2: [122].

[42] La función $f_1(x) = 90 + 45x$ es una recta de pendiente positiva, es pues una función estrictamente creciente. La imagen del intervalo (1;2) es $(f_1(1);f_1(2))$ = (135;180) y la imagen de (1,4;1,5) es (153;157,5).

La función $f_2(x) = 90(1 + \dfrac{1}{x})$ es una rama de hipérbola estrictamente decreciente con una asíntota vertical en el eje Oy. La imagen del intervalo (1;2) es $(f_2(2);f_2(1))$ = (135;180) y la imagen de (1,4;1,5) es (150;154,3).

La función $f_3(x) = 45\dfrac{x}{x-1}$ también es una rama de hipérbola estrictamente decreciente que tiene como asíntota vertical la recta $x = 1$. La imagen de (1;2) es (90;+∞) y la imagen de (1,4;1,5) es (135;157,5).

La función $f_4(x) = \dfrac{90}{2-x}$ es una rama de hipérbola estrictamente creciente y tiene una asíntota en la recta $x = 2$. La imagen del intervalo (1;2) es el intervalo (90;+∞) y la imagen de (1,4;1,5) es (150;180).

Si tomamos un valor aproximado de $\sqrt{2}$ entre 1,4 y 1,5, la función f_1 nos dará un valor aproximado de a con un error máximo e = 157,5 – 153 = 4,5. Con f_2 el error máximo será e = 4,3, con f_3 el error máximo será e = 22,5 y con f_4 el error máximo será e = 30. Vemos que la mejor aproximación nos la dará la función f_2.

[43] Por simetría, debajo de la diagonal, cada segmento horizontal corresponde a un segmento vertical.

Ayuda siguiente: [96].

[44] Si el grado de la extensión $Q \subset Q(\omega n)$ es menor o igual a 4, entonces $\cos 2\pi/n$ es solución de una ecuación resoluble por radicales (pero no forzosamente reales). Si el grado es mayor que 4, habria que conocer el polinomio mínimo de $\cos \frac{2\pi k}{n}$ sobre Q. Existe una técnica para hallar la expresión explícita de este polinomio para todo n (ver el artículo de Watkins y Zertin (1993) en la ayuda [68]). En algunos casos, hemos visto que podemos concluir: si $n = 2^{i-2}$ con $i \geq 0$, o si $n = 2^i p_1 p_2 ... p_j$, con p_i primo de Fermat (esto es, primo y de la forma 2^{2k+1}), entonces el ángulo $\frac{2\pi}{n}$ es constructible con regla y compás. ¿Qué pasa en los otros casos?

Ayuda siguiente: [133].

[45] ¡Ojo! Antes de que las dos agujas se crucen, la grande ya habrá dado una vuelta. Hay que tener en cuenta estos 60 minutos (o estas 60 divisiones) que recorre de más.

Ayuda siguiente: [139].

[46] A partir de la igualdad $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$, se puede demostrar que $\cos(\pi/9)$ es solución de la ecuación $8x^3 - 6x - 1 = 0$ y deducir que es un número irracional.

Para $\cos(\pi/5)$ y $\cos(\pi/7)$, hay que utilizar los números complejos $e^{i\pi/5}$ y $e^{i\pi/7}$ que son solución de las ecuaciones $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ y $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ respectivamente (ver PEM 3).

Ayuda siguiente: [143].

[47] Sea $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$. Si derivamos esta función, es fácil ver que $T = f'(1)$.

Ayuda siguiente: [93].

[48] Hemos reducido el problema a lo siguiente: ¿en qué casos $\cos 2\pi/n$ es expresable mediante números racionales y raíces de racionales? Buscar algunos casos particulares simples para empezar el estudio.

Ayuda siguiente: [109].

[49] Trazar D tal que AD = AC' = b. Sea E sobre (AD) tal que AE = d, longitud de la regla. Trazar F sobre (AB) tal que (DF) // (EB). Construir ahora el triángulo AFG rectángulo en G y tal que AG = d . La paralela a (FG) que pasa por B corta (AG) en el punto C buscado.

[50] (a) Trazar la proyección ortogonal H de O sobre (AB). Los puntos M y N buscados son tales que los triángulos OHM y OHN deben ser rectángulos en H y de hipotenusa de longitud r dada. Sea entonces P un punto cualquiera tal que OP = r. Construir K tal que el triángulo OPK sea rectángulo en K y con OK = OH. Basta ahora determinar M y N sobre (AB) tales que HM = HN = PK.

Ayuda siguiente: [39].

[51] La suma de los N primeros enteros es (ver *Pequeño Estudio Matemático* 1): $S = N(N+1)/2$ y la suma de los N primeros términos de una progresión aritmética cual-

quiera es: $S = a_1 + a_2 + \ ... + a_N = \frac{a_1 + a_N}{2}. D$, donde D es la diferencia entre dos términos $D = a_{p+1} - a_p$. Se puede establecer entonces que $L_B = a(n+1)$.

Ayuda siguiente: [135].

[52] También se puede utilizar una definición equivalente del cociente de a entre b que, al igual que la técnica de división presentada, no hace intervenir el resto r:

Definición: El cociente de a entre b es el único entero q tal que $bq \leq a < b(q+1)$

Ayuda siguiente: [126].

[53] Observar que $2{\cdot}3 - 5 = 1$. Luego $\cos\frac{2\pi}{15} = \cos\frac{2\pi(2{\cdot}3-5)}{15} = \cos(\frac{2\pi{\cdot}2}{5} - \frac{2\pi}{3})$.

Concluir para $\cos\frac{2\pi}{15}$ y abordar el caso general $\cos\frac{2\pi}{n \cdot m}$ con $(n,m) = 1$.

Ayuda siguiente: [113].

[54] Si r es paralela a AB, la solución es obvia. Si r no es paralela a AB, suponer primero que C es la intersección de (AB) con r.

Ayuda siguiente: [8].

[55] Se sabe (ver Carrega (1981), Jones (1991) o Edwards (1984), cf. ayuda [68]) que si $n = 2^{i+2}$ o si $n = 2^i p_1 p_2 ... p_p$ con $i \geq 0$ y p primo de Fermat (esto es, primo y de la forma $1+2^{2k}$), entonces el ángulo $\frac{2\pi}{n}$ (y por lo tanto $\cos\frac{2\pi}{n}$) es constructible con regla y compás, por lo que su expresión sólo contendrá raíces cuadradas. ¿Qué pasa en los otros casos?

Ayuda siguiente: [84]

[56] $T = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

[57] La posición de la aguja grande después de t minutos es: $P = 1t - 60n$, donde n es el cociente entero de t entre 60. Se obtiene entonces la solución general: $1t - 60n = (1/12)t$, o sea, $t = 60n{\cdot}12/11$.

Para $n = 0$ se tiene $t = 0$, solución que corresponde a las doce en punto.

Para $n = 1$ se obtiene la solución anterior $t = 60{\cdot}12/11$; para $n = 2$ se obtiene $t = 60{\cdot}2{\cdot}12/11$; etc.

En general, las agujas se encuentran cada $60{\cdot}12/11$ minutos.

[58] Queremos dividir a entre $b = b_1 b_2 b_3 ... b_n$. Sea q el cociente de a entre b y sean q_1 el cociente de a entre b_1 y r_1 el resto. Tenemos que $a - r$ es divisible por b y, como $b = b_1 b_2 b_3 ... b_n$, también es divisible por b_1. Luego resulta que $r_1 \leq r$ y que $a - r_1$ tiene el mismo cociente que a al dividirlo entre b. Además, como $a - r_1 = b_1 q_1$, el cociente de $a - r_1$ entre b es igual al cociente de q_1 entre $b_2 b_3 ... b_n$.

Sea q_2 el cociente de q_1 entre b_2 y r_2 el resto. q_1 tiene el mismo cociente entre $b_2 b_3 ... b_n$ que $q_1 - r_2$. Como $q_1 - r_2 = b_2 q_2$, el cociente de $q_1 - r_2$ es igual al cociente de q_2 entre $b_3 ... b_n$. Etc. Iterando el proceso, resulta que a entre b es igual a q_1 entre $b_2 b_3 ... b_n$, a q_2 entre $b_3 ... b_n$, a q_3 entre $b_4 ... b_n$, etc.

[59] $\sqrt{2}$ es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$, entonces $p^2 = 2q^2$. Como p y q no tienen divisores comunes, p dividiría 2 y q dividiría 1. Por lo tanto, tendríamos $q = \pm 1$ y $p = \pm 1$ o ± 2. Como $1<\sqrt{2}<2$, $\sqrt{2}$ no puede ser racional.

$\sqrt{n}$ es solución de la ecuación $x^2 - n = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$, entonces $p^2 = nq^2$. En particular, p dividiría n y q dividiría 1. Luego tendríamos $q = \pm 1$ y $p^2 = n$. Por lo tanto, $\sqrt{n}$ sólo es racional cuando n es un cuadrado perfecto.

$\sqrt[3]{n}$ es solución de la ecuación $x^3 - n = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$, entonces $p^3 = nq^3$. En particular, p dividiría n y q dividiría 1. Luego tendríamos $q = \pm 1$ y $p^3 = \pm n$. Por lo tanto $\sqrt[3]{n}$ sólo es racional cuando n es un cubo perfecto.

$\sqrt{3} + \sqrt{5}$ es solución de $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$, entonces q dividiría 1 y p dividiría 4. Tendríamos así $q = \pm 1$ y $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ahora bien, dado que $1 < \sqrt{3} < 2$ y $2 < \sqrt{5} < 3$, tenemos que $3 < \sqrt{3} + \sqrt{5} < 5$. Por lo tanto sólo convendría el caso $p/q = 4$, que no es solnción de la ecuación.

$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ es solución de $x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576 = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional $\dfrac{p}{q}$ con $(p,q) = 1$, entonces q dividiría 1 y p dividiría $576 = 2^6 \cdot 3^2$. Como $4 < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} < 7$, sólo convendría el caso $p/q = 6$ que no es solución de la ecuación. Se concluye pues que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ es irracional.

$\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}$ es solución de $x^6 - 21x^4 - 10x^3 + 147x^2 - 210x - 318 = 0$. Si esta ecuación tuviera una solución racional p/q con $(p,q) = 1$, entonces $q = 1$ y p dividiría $318 = 2 \cdot 3 \cdot 53$. Imposible porque $3 < \sqrt[3]{5} + \sqrt{7} < 5$.

$\sqrt[4]{7} + \sqrt{7} + 1$ es solución de: $x^8 - 8x^7 - 464x^5 + 2714x^4 - 7912x^3 + 13536x^2 - 12400x + 6201 = 0$. Tenemos que $6201 = 3^2 \cdot 13 \cdot 53$. Como $4 < \sqrt[4]{7} + \sqrt{7} + 1 < 6$, $\sqrt[4]{7} + \sqrt{7} + 1$ no puede ser racional.

Falta ahora hallar ecuaciones polinómicas que tengan como solución $\cos(\pi/9)$, $\cos(\pi/5)$ y $\cos(\pi/7)$.

Ayuda siguiente: [13].

[60] Considerar, para cada valor de y, la parábola de ecuación $T = F(Z) = yZ^2 - 3y^2Z$ o bien, para cada valor de x, la parábola de ecuación $T = G(Z) = -3xZ^2 + x^2Z$.

Ayuda siguiente: [2].

[61] Es evidente que, dada una recta (AB), se puede construir con regla y compás la paralela a (AB) a distancia d dada: basta con construir la perpendicular a (AB) en A y transportar en ella la distancia d. Ahora bien, aparece aquí una dificultad imprevista: podría ser que la distancia d no nos venga dada en la configuración de puntos inicial, ni sea constructible con regla y compás. En este caso, y para la configuración inicial considerada, habría figuras constructibles con la regla de dos bordes paralelos que no serían constructibles con regla y compás. Para que toda figura constructible con la regla de dos bordes paralelos sea también constructible con regla y compás, debemos exigir que la distancia d o bien nos venga dada en la configuración inicial (considerando por ejemplo $AB = d$), o bien sea constructible con regla y compás a partir de los puntos iniciales.

Suponiendo lo anterior, para construir ahora una banda de amplitud d dada que pase por dos puntos dados A y A', basta con construir un triángulo APA' rectángulo en P y tal que AP = d. Para ello, se puede construir I, punto medio de AA', y el círculo de centro I y radio IA. Una de las intersecciones de este círculo con el círculo C(A,d) es el punto P buscado. Notemos que si AA' < d, entonces los dos círculos no intersectan.

[62] Ver el PEM 7 para el tema de la variación relativa de una magnitud.
Ayuda siguiente: [6].

[63] Tenemos $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} = \frac{\overline{\omega}_n + \omega_n}{2}$ donde $\omega_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ es una raíz primitiva enésima de la unidad y $\overline{\omega}_n = \cos \frac{2\pi}{n} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ es su conjugado.

Ayuda siguiente: [130].

[64]

Precio inicial	*Precio final*	*Variación absoluta*	*Variación relativa*
2.000 ptas	2.260 ptas	260 ptas	*13%*
200 ptas	226 ptas	26 ptas	*13%*
2.000 ptas	*2.350 ptas*	350 ptas	17,5%
200 ptas	*550 ptas*	350 ptas	175%
2.000 ptas	1.900 ptas	– 100 ptas	*– 5%*
200 ptas	190 ptas	– 10 ptas	*– 5%*

Se ve muy claramente en esta tabla que una misma variación relativa (por ejemplo, del 13%) puede representar variaciones absolutas muy distintas, y viceversa.

[65] Si $\cos \frac{2\pi}{n}$ es expresable con racionales y radicales, ¿qué puede decirse de $\cos \frac{2\pi k}{n}$?

Ayuda siguiente: [141].

[66] La regla permite trazar *bandas* (r,r') de amplitud d formadas por dos rectas paralelas r y r' a distancia d una de otra. Trazar una banda (r,r') tal que r pase por A y r' por B. Trazar entonces otra banda (r',r'') de tal modo que r'' no coincida con r. El punto C es la intersección de r'' y (AB).

[67] Trazar la recta r paralela a (AB) que pasa por P (Problema 2 (a)) y después la perpendicular a r que pasa por P (Problema 1 (d)).

[68] Referencias bibliográficas:

- W. Watkins & J. Zeitlin, "The Minimal Polynomial of cos($2\pi/n$)", *American Mathematical Monthly*, 1993, pp. 471-474. (Se da la forma explícita del polinomio mínimo $\Phi_n(x)$ de cos($2\pi/n$) sobre Q, se demuestra que su grado es $\varphi(n)/2$ y que sus demás

raíces son $\cos(2\pi k/n)$ siendo $(k,n) = 1$ y $k \leq s$, con $s = n/2$ si n par o $s = (n-1)/2$ si n impar.)

- I. M. Isaacs, "Solution of Polynomials by Real Radicals", *American Mathematical Monthly*, 1985, pp. 571-575. (El principal resultado de este artículo es el siguiente: Sea $f \in Q[x]$ un polinomio irreductible con todas sus raíces en R. Si f tiene una raíz expresable con radicales reales, entonces el grado de f es una potencia de 2 y todas sus raíces son constructibles con regla y compás.)

- J. C. Carrega, *Théorie des corps. La règle et le compas*. Hermann, Paris, 1981.

- H.M. Edwards, *Galois Theory*. Springer-Verlag, New York, 1984.

- A. Jones (*et al.*), *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[69] Existen varias soluciones. Tal vez la más simple consista en construir un paralelogramo de vértices A y P con un lado en la recta (AB).

Ayuda siguiente: [140].

[70] Se tiene $\cos\frac{2\pi}{n} = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2}$ con $\omega = \exp(i2\pi/n)$ raíz primitiva enésima de la unidad.

Caso $n = 5$. Resolviendo la ecuación de segundo grado $4x^2 + 2x - 1 = 0$, se tiene que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Caso $n = 7$. Se tiene $\omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$ y, como $\omega^6 = \bar{\omega}$, $\omega^5 = \bar{\omega}^2$ y $\omega^4 = \bar{\omega}^3$, se llega a:

$$2\cos\frac{6\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 1 = 0.$$

Expresando ahora $\cos\frac{6\pi}{7}$ y $\cos\frac{4\pi}{7}$ en función de $\cos\frac{2\pi}{7}$, se ve que $\cos\frac{2\pi}{7}$ es solución de la ecuación de tercer grado $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$. Ahora bien, aunque esta ecuación sea resoluble por radicales (como todas las ecuaciones polinómicas de grado ≤ 4), la expresión de sus soluciones hace intervenir raíces de racionales negativos y *no únicamente radicales reales*. (Para la resolución de la ecuación cúbica y la forma general de sus soluciones, ver por ejemplo G. Birkhoff y S. MacLane (1970) *Álgebra Moderna*, Vicens-Vives 1980, o Jean Dieudonné (1987) *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Editorial 1989.) Por lo tanto, no está claro que $\cos 2\pi/7$ sea expresable mediante sumas, productos y radicales *reales* de números racionales.

Caso $n = 9$. Se trata de manera similar al anterior, observando que $\omega^8 = \bar{\omega}$, $\omega^7 = \bar{\omega}^2$, $\omega^6 = \bar{\omega}^3$ y $\omega^5 = \bar{\omega}^4$. La solución de la ecuación cúbica obtenida tampoco es resoluble mediante radicales reales.

Caso $n{\cdot}m$, con $(n,m) = 1$. Por la identidad de Bézout, existen r y s tales que $nr + ms = 1$. Luego, dado que

$$\cos\frac{2\pi}{n\cdot m} = \cos\left(\frac{2\pi r}{n} + \frac{2\pi s}{m}\right) = \cos\frac{2\pi r}{n}\cdot\cos\frac{2\pi s}{m} - \operatorname{sen}\frac{2\pi r}{n}\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi s}{m},$$

$\cos\frac{2\pi}{n\cdot m}$ será expresable con racionales y radicales reales si y sólo si también lo son $\cos\frac{2\pi}{n}$ y $\cos\frac{2\pi}{m}$.

[71] Como $x^3 - 5$ es irreducible sobre Q[x], el anillo $\dfrac{Q[x]}{(x^3-5)Q[x]}$ es un cuerpo y el polinomio $\dfrac{1}{6}(2-x)$ tiene un inverso $p(x)$ que cumple: $(2-x)\cdot p(x) = k + (x^3-5)\cdot q(x)$ para cierto $k \in Q^*$ y cierto $q(x) \in Q[x]$.

Ayuda siguiente: [7].

[72] María Moliner (1990): *Diccionario de uso del español*, Editorial Gredos, Madrid.

"**elasticidad.** Cualidad de elástico."

Real Academia Española (1992): *Diccionario de la lengua española*, Madrid.

"**elasticidad.** f. Cualidad de elástico. [...]"

Vemos que los diccionarios de la lengua no son muy explícitos. Necesitamos consultar algún diccionario de términos económicos, algún libro elemental de economía o una enciclopedia. No hace falta buscar en la literatura muy especializada: si los profesores hablan de introducir esta noción en el currículo de secundaria, es que no debe tratarse de una noción excesivamente técnica ni complicada.

Ayuda siguiente: [144].

[73] El número de intérpretes I viene dado por $I = n^2 - n = n(n-1)$, solución lógica puesto que cada lengua debe traducirse a los otros $n-1$ idiomas, y que en total hay n lenguas distintas. Si se añaden k nuevos idiomas, el número de intérpretes I' es: $I' = (n+k)^2 - (n+k)$. Se requiere así un aumento de $2nk + k(k-1)$ intérpretes: los k nuevos países necesitarán, para traducirse entre ellos, a $k(k-1)$ intérpretes, a los que hay que añadir los intérpretes que se necesitan para traducir las n lenguas anteriores a las k nuevas lenguas y viceversa ($2nk$).

[74] Si aparece un problema en la manipulación de desigualdades, se puede utilizar el resultado siguiente:

Si x e y son enteros positivos, entonces $x < y \iff x \le y - 1$.

Ayuda siguiente: [136].

[75] Sabemos que $Q(\sqrt[3]{5})$ coincide con el anillo $Q[\sqrt[3]{5}] = Q[\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}]$.

Por lo tanto $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$ es de la forma $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$. Se tiene entonces la igualdad:

$$6 = (2-\sqrt[3]{5})(a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}) = (2a-5c) + (2b-a)\sqrt[3]{5} + (2c-b)\sqrt[3]{25}$$

de donde:

$$\begin{cases} 2a - 5c = 6 \\ 2b - a = 0 \\ 2c - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Así, $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}} = 8 + 4\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{25}$.

Del mismo modo, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7} + \sqrt{7} + 1} \in Q(\sqrt[4]{7}) = Q[\sqrt[4]{7}, \sqrt[4]{7^2}, \sqrt[4]{7^3}]$ es de la forma $a + b\sqrt[4]{7} + c\sqrt{7} + d\sqrt[4]{7^3}$, y $\dfrac{53}{\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}} \in Q(\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}) = Q(\sqrt{7})[\sqrt[3]{5}]$ es de la forma $\dfrac{53}{\sqrt[3]{5} + \sqrt{7}} = (a + a'\sqrt{7}) + (b + b'\sqrt{7})\sqrt[3]{5} + (c + c'\sqrt{7})\sqrt[3]{25}$.

En el caso de expresiones como $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$, esta técnica conduciría a considerar de entrada que $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ es de la forma $a + b\sqrt{3}$ y a deducir a y b de la igualdad: $(\sqrt{3} - 2)(a + b\sqrt{3}) = 1$.

Con la técnica inicial (multiplicación por el conjugado del denominador), el hecho que la racionalización de fracciones con un radical conduzca a una expresión del tipo $a + b\sqrt{n}$, y que la de racionalización de fracciones con dos radicales conduzca a una expresión del tipo $a + b\sqrt{n} + c\sqrt{m} + d\sqrt{nm}$ era un resultado tecnológico que se podía conjeturar (como hacen los alumnos de Luis) y que quedaba por demostrar. En el ámbito teórico en el que nos situamos ahora, ya no se trata de un resultado por establecer sino del *principio director de la técnica*, que se justificaría a su vez por las igualdades $Q(\sqrt{n}) = Q[\sqrt{n}]$ y $Q(\sqrt{n},\sqrt{m}) = Q(\sqrt{n})[\sqrt{m}]$.

[76] Dado que $\cos \frac{2\pi k}{n} = \cos \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \frac{2\pi(k-1)}{n} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi(k-1)}{n}$, si $\cos \frac{2\pi}{n}$ es expresable con racionales y radicales, como $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$ también lo será, lo serán $\cos \frac{4\pi}{n}$ y $\operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}$, $\cos \frac{6\pi}{n}$ y $\operatorname{sen} \frac{6\pi}{n}$, ..., y pues $\cos \frac{2\pi k}{n}$ y $\operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}$ para todo $k > 0$.

Ayuda siguiente: [48].

[77]

Longitud de hilo de tendido

Lado del cuadrado	1 metro (8 cuadritos)	1,25 m (10 cuad.)	0,75 m (6 cuad.)	a	a
Nº segmentos	9	11	7	n impar	n par
Tendedero A L_A	9 metros (72 cuadritos)	13,75 m (110 cuad.)	5,25 m (42 cuad.)	$a \cdot n$	$a \cdot n$
Nº cuadrados	4	5	3	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n}{2}$
Tendedero B L_B	10 m (80 cuadritos)	15 m (120 cuad.)	6 m (48 cuad.)	$a(n+1)$	$a \cdot \frac{n^2}{n-1}$
$\frac{L_B}{L_A}$	$1 + \frac{1}{9}$	$1 + \frac{1}{11}$	$1 + \frac{1}{7}$	$1 + \frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n-1}$

[78] La aguja grande y la pequeña no recorren las divisiones de la esfera a la misma velocidad. Por ejemplo: después de 60 min, la aguja grande está en la división 60 y la pequeña está en la división 5 (la que indica a la vez 5 minutos y 1 hora); después de 72 min, la aguja grande está en la división 12 y la pequeña está en 6; después de 100 min, la aguja grande está en la división 8 y la pequeña está entre la 8 y la 9; etc.

Hallar la velocidad a la que se mueva cada aguja y la división en la que están después de t minutos. A partir de aquí, basta con suponer que, en el minuto buscado, las dos agujas están en la misma división del reloj.

Ayuda siguiente: [45].

[79] En caso de que AB $< d$, podemos construir igualmente el punto medio I de [AB] considerando un punto O externo a (AB), las rectas (AO) y (BO) y rectas paralelas a (AB) a distancia d unas de otras.

Ayuda siguiente: [106].

[80] En la primera fila de la tabla hay n–1 casillas. El número buscado T es la suma de los n–1 primeros números naturales. Podemos escribir:

$$\begin{array}{ccccccccc} T & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & (n-1) \\ T & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 \end{array}$$

Al sumar término a término las dos igualdades, obtenemos una expresión simple para $2T$.

Ayuda siguiente: [56].

[81] Sea q' el cociente de a entre b' y q'' el cociente de q' entre b'', tenemos:

$$b'q' \leq a \leq b'(q'+1) - 1. \qquad (1)$$
$$b''q'' \leq q' \leq b''(q''+1) - 1. \qquad (2)$$

Queremos ver que (1) y (2) implican que q'' es el cociente de a entre b, es decir que

$$bq'' \leq a \leq b(q''+1) - 1.$$

De $b'q' \leq a$ y $b''q'' \leq q'$ se deduce inmediatamente que $a \geq b'q' \geq b'b''q'' = b\,q''$.

Para demostrar la segunda desigualdad:

$$a \leq b'(q'+1) - 1 \leq b'((b''(q''+1) - 1) + 1) - 1 =$$
$$= b'(b''q'' + b'') - 1 = bq'' + b - 1 = b(q''+1) - 1.$$

Luego $\qquad a < b(q''+1)$.

Falta ahora demostrar el caso general.

Ayuda siguiente: [116].

[82] Utilizar que $\omega^4 = \overline{\omega}$ y $\omega^3 = \overline{\omega}^2$ para $n = 5$. Se puede ver del mismo modo que $\cos \dfrac{2\pi}{15}$ es solución de la ecuación $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$ y que $\cos \dfrac{2\pi}{9}$ es solución de $8x^3 - 6x + 1 = 0$. ¿Qué pasa con $\cos \dfrac{2\pi}{15}$ o $\cos \dfrac{2\pi}{21}$?

Ayuda siguiente: [53].

[83] En el primer caso (artículo de 2.000 ptas cuyo precio aumenta un 13%), la variación relativa del precio es de un 13%. La variación absoluta es el 13% de 2.000 ptas, es decir: $13\% \times 2.000$ ptas $= \dfrac{13}{100} \times 2.000$ ptas $= 260$ ptas. El artículo costará 2.260 ptas.

Ayuda siguiente: [64].

[84] Se puede buscar primero en qué casos $\alpha = \cos \dfrac{2\pi}{n}$ es solución de una ecuación polinómica con coeficientes en Q resoluble por radicales. Después habrá que ver en qué casos la solución se puede expresar mediante radicales *reales*.

Ayuda siguiente: [63].

[85] De la igualdad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, se tiene $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$. Por lo tanto, si $\cos x$ es expresable mediante sumas, productos y raíces de números racionales, entonces $\operatorname{sen} x$ también lo será.

Algunos casos simples: probar con $\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, etc., $\pi/16$, $3\pi/16$, etc., $\pi/12$, $\pi/24$, etc.

Ayuda siguiente: [33].

[86] sen $r = 0{,}76 \cdot \text{sen}\, i \leq 0{,}76$. Al desplazar el punto T hacia la superficie del agua, el ángulo r aumenta.

Ayuda siguiente: [35].

[87] Utilizar la siguiente propiedad:

Dados tres círculos C_1, C_2 y C_3 de centros no alineados y que se cortan dos a dos, entonces las rectas R_1, R_2 y R_3 definidas respectivamente por los puntos intersección de C_1 y C_2, C_2 y C_3, C_1 y C_2 se cortan en un único punto W llamado *centro radical* de C_1, C_2 y C_3.

Ayuda siguiente: [10].

[88] *Gran Enciclopedia Larousse*, Editorial Planeta, Barcelona.

"**ELASTICIDAD** n. f. Cualidad de elástico. [...]

— Econ. pol. El concepto de *elasticidad*, introducido en economía por Alfred Marshall, indica el grado de variación de un fenómeno económico en función de las variables exógenas. Sea la función $y = f(x)$; la elasticidad será la relación entre el porcentaje de la variación de y y el porcentaje de la variación de x. El coeficiente de elasticidad vendrá dado, pues, por la fórmula general

$$e = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \times \frac{x}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y},$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}.$$

Si se considera la fórmula

$$e = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x},$$

se puede definir la elasticidad como la relación entre el valor marginal de la función y su valor medio. "

[89] Sea $d = \dfrac{a}{n-1}$ la distancia entre dos segmentos o entre dos cuadrados consecutivos. Al pasar del modelo A al modelo B faltan n trocitos de longitud $\dfrac{d}{2}$ (los de la parte inferior).

Ayuda siguiente: [135]

[90] $F_\lambda(x) = \lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_2(x)$ con $\lambda \in (0,1)$ es una función cuya gráfica está, para todo x, entre las gráficas de f_1 y f_2. Tenemos de hecho que, para todo x, la ordenada $y = F_\lambda(x)$ pertenece al segmento $(f_1(x);f_2(x))$ cuando $f_2(x)$ es mayor que $f_1(x)$ o al segmento $(f_2(x);f_1(x))$ cuando es menor.

Ayuda siguiente: [16].

[91] La construcción es evidente si consideramos que el ángulo adyacente a la base es $\dfrac{\pi - \hat{B}}{2}$, ángulo que se obtiene trazando la bisectriz del complementario del ángulo dado (ver el Problema 1(e) de este mismo PEM).

[92] Considerar la fracción $\dfrac{6}{2-\sqrt[3]{5}}$ como un elemento de $Q(\sqrt[3]{5})$.

Ayuda siguiente: [75].

[93] Establecer la igualdad $(x-1)f(x) = x^n-1$ y derivarla.
Ayuda siguiente: [22].

[94] Hay que distinguir dos casos: $b = d$ y $b \neq d$.
Ayuda siguiente: [147].

[95] La extensión $Q(\omega_n) \supset Q$ es de grado $\varphi(n)$ donde φ es la función de Euler ($\varphi(n)$ = número de enteros menores que n y primos con él). Luego la extensión $Q(\alpha) \supset Q$ es de grado $\varphi(n)/2$.
Ayuda siguiente: [44].

[96] Como en el tendedero total el lado inferior de los dos primeros "cuadrantes" coincide con el superior, al pasar del modelo A al modelo B faltará hilo. Caso n par: reducirse al caso n impar.
Ayuda siguiente: [37].

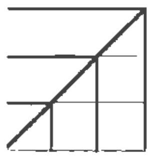
[97] Establecer los resultados parciales indicados en la vía 1.
Ayuda siguiente: [127].

[98] La dificultad está en hallar la fórmula para la variación relativa. Resolver antes el problema 1 de este PEM, e intentar hallar la fórmula general a partir del trabajo realizado.
Ayuda siguiente: [149].

[99] Para $p = 6$, $q = f(6) = 100$, $p' = 1{,}01 \cdot 6$, $q' = f(6{,}06) = 94{,}34$ y $\dfrac{\Delta q}{q} = \dfrac{94{,}34 - 100}{100}$ $= -5{,}66\%$.

Para $p = 10$, $\dfrac{\Delta q}{q} = -1{,}96\%$ y para $p = 45$, $\dfrac{\Delta q}{q} = -1{,}2\%$. Falta hallar p tal que $\dfrac{\Delta q}{q} = -1{,}5\% = -0{,}015$.
Ayuda siguiente: [145].

[100] Caso n impar: considerar la figura siguiente que representa un cuarto del tendedero:



Ayuda siguiente: [43].

[101] Ph. Deane, J. Kuper, eds. (1986): *Vocabulario básico de economía*, Editorial Crítica, Barcelona.

"**elasticidad** [*elasticity*]. Muchas proposiciones en economía se expresan en forma de una relación entre dos variables. En general, podemos escribir la relación como $y = f(x)$, que se lee "y es función de x". "La cantidad consumida (y) es una función del precio (x)" es un ejemplo de una proposición semejante. Una característica importante de cualquier relación de este tipo es cómo responde y a un cambio en x. Si suponemos que

Δx es el cambio en x y que Δy es el cambio correspondiente en y, el signo de $\Delta y/\Delta x$ nos dice si y aumenta o disminuye cuando se produce un incremento dado en x. Así, "la cantidad consumida disminuye cuando aumenta el precio" estaría representado por un signo negativo de $\Delta y/\Delta x$.

Para muchas finalidades no basta con conocer simplemente la *dirección* de la respuesta de y ante un cambio dado en x; también tenemos que saber la *magnitud* de esta respuesta. ¿Cómo medirla? Un candidato es el valor absoluto de $\Delta y/\Delta x$.

El problema de esta medida es que depende de las unidades en que se hayan medido x e y, dado que Δx y Δy se miden ambos en sus respectivas unidades. Sin embargo, $\Delta x/x$ y $\Delta y/y$ son medidas —independientes del tipo de unidad— del cambio en x, y del correspondiente cambio en y. Por tanto,

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$$

es una medida –independiente del tipo de unidad– de la sensibilidad de y ante un cambio en x. El valor absoluto de esto se conoce como *elasticidad* de y con respecto a x. La expresión puede escribirse como $(\Delta y/\Delta x)\cdot(x/y)$, y para variaciones infinitamente pequeñas de x se convierte en $(dy/dx)\cdot(x/y)$, donde dy/dx es la derivada de y con respecto a x. [...]"

Ayuda siguiente: [88].

[102] En una tabla cuadrada de n filas y n columnas, hay un total de n^2 casillas. En la diagonal de la tabla hay n casillas.

Ayuda siguiente: [56].

[103] Podemos elegir dos ámbitos tecnológico-teóricos distintos (aunque íntimamente relacionados): el de los anillos de polinomios (vía 1) y el de las extensiones algebraicas de Q (vía 2).

Ayuda siguiente: vía 1: [34]; vía 2: [92].

[104] Basta con demostrar que los siguientes puntos son constructibles con la regla de dos bordes paralelos:

(a) Dado un punto $P(x,y)$, las proyecciones de P sobre los ejes: $M(x,0)$ y $N(0,y)$.

(b) Dado $P(x,y)$, el punto Q de coordenadas (y,x).

(c) Dados los puntos $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$, un punto de abscisa $x = x_1+x_2$.

(d) Dados (x_1,y_1) y $(x_2,0)$, un punto de ordenada $y_2 = \dfrac{y_1x_2}{x_1}$.

(e) Dados $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$, un punto de abscisa $x=\sqrt{x_1x_2}$.

Ayuda siguiente: [19].

[105] Tenemos $x' = (1+r)x$ con $r > 0$ y $f(x') = (1+s)f(x)$. Sea $E = \dfrac{\Delta f/f}{\Delta x/x} = \dfrac{f(x') - f(x)}{f(x)} \cdot \dfrac{x}{x' - x}$. Según el Teorema del Valor Medio, existe un $c \in (x,x')$ tal que $f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x)$.

Ayuda siguiente: [128].

[106] Sea O un punto exterior a (AB) y sean $r_1, r_2, ..., r_n$ rectas paralelas a (AB) y a distancia d unas de otras. La recta (OA) corta estas rectas en los puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ y la recta (OB) en los puntos $B_1, B_2, ..., B_n$. Para algún n tendremos $A_nB_n > d$. Podemos entonces construir el punto medio I_n de $[A_nB_n]$ y obtener el punto I como la intersección de (OI_n) con (AB).

Para construir el simétrico C de B respecto de A, se construye, a partir de los puntos A_n y B_n construidos anteriormente, el simétrico C_n de B_n respecto de A_n. C es entonces la intersección de (OC_n) y (AB).

Para construir la perpendicular a (AB) en B, se puede empezar trazando una banda (r,r') tal que r pase por B y r' corte (AB) en un punto A'. Tendremos entonces $A'B \geq d$.

La construcción de la bisectriz no requiere ninguna condición sobre la distancia entre A, B y C.

[107] (1) Se da la igualdad $E(f,x,x') = e(f,x)$ cuando $f'(c) = f'(x)$ para todos $x, x', c \in$ I, es decir cuando $f(x)$ es una función afín.

(2) El error absoluto cometido al sustituir $E(f,x,x')$ por $e(f,x)$ es:

$$|E(f,x,x') - e(f,x)| = \leq \frac{x}{f(x)} \leq \cdot |(f'(c) - f'(x)| = \leq \frac{f''(d)\,x\,(c-x)}{f(x)} \leq \text{para cierto } d \in (x,c)$$

$$\leq \frac{M_2 x^2 r}{f(x)} \quad \text{donde } M_2 = \mathrm{Sup}\{f''(u) \,/\, u \in [x,x']\}.$$

Así, si aproximamos $\Delta f(x)/f(x) = E\cdot\Delta x/x$ por $\Delta f(x)/f(x) = e\cdot\Delta x/x$, el error cometido será:

$$|\,E\Delta x/x - e\Delta x/x\,)\,| < \frac{M_2(\Delta x)^2}{f(x)}.$$

Sería ahora interesante volver al Problema 2 del PEM 8 y comprobar, para la función $f(p) = \dfrac{100}{p-5}$, que los errores hallados son inferiores a la cota obtenida aquí.

[108] Se tiene $a = b'q' + r'$ con $0 \leq r' < b'$ y $q' = b''q'' + r''$ con $0 \leq r'' < b''$. Hay que demostrar que existe r tal que $a = bq'' + r$ y $0 \leq r < b$.

Ayuda siguiente: [74].

[109] Proponemos estudiar aquí los casos $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$ y los del tipo $\dfrac{2\pi}{n\cdot m}$ cuando se sabe de antemano que $\dfrac{2\pi}{n}$ y $\dfrac{2\pi}{m}$ son expresables con radicales.

Ayuda siguiente: [18].

[110] Si, en el caso de 7 jugadores, contamos el número de casillas de la tabla triangular por filas y empezando por abajo, contaremos 1 casilla, luego 2 casillas, 3 casillas, 4, etc., hasta llegar a las 6 casillas de la primera fila. El número total de casillas es, para $n = 7$: $\quad T = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

Ayuda siguiente: [80]

[111] Caso $F(Z) = yZ^2 - 3y^2Z$ y $V_y = (\frac{3}{2}y\,, -\frac{9}{4}y^3)$.

La ordenada de V_y es mínima para $y = 1$ y es también el mínimo de la familia de parábolas. Por lo tanto, podemos afirmar que $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$ tiene un solo mínimo en $(\frac{3}{2}, 1)$, cuya imagen es $f(\frac{3}{2}, 1) = -\frac{9}{4}$.

Como las parábolas tienen forma de U, el máximo de cada una será un extremo del intervalo [0;1]. Como $f(0,y) = 0$ y $f(1,y) = y - 3y^2$, el máximo será el máximo de $f(1,y)$, es decir $f(1, \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$.

Caso G(Z) = $= -3xZ^2 + x^2Z$ y $V_x = (\frac{x}{6}, \frac{x^3}{12})$.

La ordenada de V_x es máxima para $x = 1$ y es también el máximo de la familia de parábolas. Por lo tanto, podemos afirmar que $f(x,y) = x^2y - 3xy^2$ tiene un solo máximo en $(1, \frac{1}{6})$, en cuyo caso $f(1, \frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$. Como las parábolas tienen forma de U invertida, el mínimo de cada una será un extremo del intervalo [0;1]. Como $f(x,0) = 0$ y $f(x,1) = x^2 - 3x$, el mínimo será el mínimo de $f(x,1)$, es decir $f(\frac{3}{2},1) = -\frac{9}{4}$.

[112] Si $E(f, x, r)$ no depende de x, entonces $e(f,x) = (\lim_{r \to 0} E(f,x,r)$ tampoco dependerá de x.

Ayuda siguiente: [124].

[113] En general, si $(n,m) = 1$, existen r , $s \in \mathbb{Z}$ tales que $mr + ns = 1$ (*identidad de Bézout*).

Ayuda siguiente: [70].

[114] Establecer que $\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

Ayuda siguiente: [46].

[115] Podemos considerar que en lugar de idiomas e intérpretes tenemos jugadores de pimpón y partidos de ida y vuelta: al intérprete alemán-italiano le correspondería el partido Alemania-Italia, al traductor italiano-alemán el partido Italia-Alemania, etc. De esta manera, se necesitarán tantos intérpretes como número de partidos por organizar. Ver PEM1.

Ayuda siguiente: [73].

[116] Sean q y r el cociente y resto de la división de a entre $b = b_1b_2b_3...b_n$. Sean q_i, r_i tal que $a = q_1b_1 + r_1$ y $q_{i-1} = q_ib_i + r_i$ con $0 \le r_i = q_{i-1} - q_ib_i \le b_i - 1$ para i = 1 ... n. Queremos ver que $q = q_n$, es decir, que $0 \le r = a - bq_n \le b - 1$. Veamos primero que $0 \le r$, es decir que $bq_n = b_1b_2b_3...b_nq_n \le a$. Como $q_{i-1} \le q_ib_i$, tenemos: $b_1b_2b_3...b_nq_n \le b_1b_2b_3...b_{n-1}q_{n-1} \le b_1b_2b_3...b_{n-2}q_{n-2} \le ... \le b_1q_1 \le a$.

Veamos ahora que $a - bq_n \le b - 1$, es decir que $bq_n \ge a - b + 1$. Como $q_ib_i \ge q_{i-1} - b_i + 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
b_1b_2b_3...b_nq_n &\ge b_1b_2b_3...b_{n-1}(q_{n-1} - b_n + 1)\\
&\ge b_1b_2b_3...b_{n-1}q_{n-1} - b + b_1b_2b_3...b_{n-1}\\
&\ge b_1b_2b_3...b_{n-2}(q_{n-2} - b_{n-1} + 1) - b + b_1b_2b_3...b_{n-1}\\
&\ge b_1b_2b_3...b_{n-2}q_{n-2} - b + b_1b_2b_3...b_{n-2}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\ge b_1q_1 - b + b_1 \ge a - b_1 + 1 - b + b_1 = a - b + 1
\end{aligned}$$

[117] Hemos visto en el problema 2 (c) y (d) que se puede transportar un segmento [AB] sobre una recta r. De ahí que también se puedan transportar ángulos dados por dos semirrectas [OA) y [OB): se transporta el segmento [OA] y el segmento [AH] donde H es la intersección de (OB) con la perpendicular a (OA) en A.

Para construir el triángulo, basta pues con tomar OA igual a la longitud a dada y trazar OB tal que el ángulo AOB sea igual al ángulo dado y que OB = OA.

[118] El lado del cuadrado pasa a ser $x' = x + r\%\cdot x = x(1 + r\%)$. Falta calcular la variación relativa de su superficie A, es decir, $\frac{\Delta A}{A} = \frac{A'-A}{A}$. Y lo mismo con la variación relativa $\Delta B/B$ de la superficie B del rectángulo, que pasa de $B = x\ (x + 1)$ a $B' = (1 + r\%)x((1 + r\%)x + 1)$.

Ayuda siguiente: [123].

[119] En el caso de expresiones con un radical, tenemos que: $\frac{A}{B + C\sqrt{n}} = \frac{A(B - C\sqrt{n})}{B - C\sqrt{n}} = a + b\sqrt{n}$, y es evidente que $a = \frac{AB}{B^2 - C^2n} \in Q$ y $b = \frac{-AC}{B^2 - C^2n} \in Q$. El caso de las expresiones con dos radicales se demostraría de manera análoga.

Señalemos aquí que estas transformaciones de la expresión general $\frac{A}{B + C\sqrt{n}}$ podrían suscitar la necesidad de ser justificadas: ¿es suficiente la condición A, B, C$\in Q^*$? ¿no habría que imponer también la condición $B^2 - C^2n \neq 0$? ¿por qué se tiene siempre $a = \frac{AB}{B^2 - C^2n} \in Q$? etc. Estas explicaciones y justificaciones de resultados tecnológicos formarían parte entonces de la *teoría* de la organización matemática construida en torno a la técnica de racionalización por "multiplicación del conjugado del denominador".

[120] En los episodios, los profesores parecen referirse a la elasticidad como si fuera una noción de economía, relacionada con la variación en la demanda y el precio de un artículo. Lo más simple es empezar consultando el diccionario de la lengua, por ejemplo:

- María Moliner (1990), *Diccionario de uso del Español*, Editorial Gredos, Madrid.
- Real Academia Española (1992), *Diccionario de la lengua española*.

Ayuda siguiente: [72].

[121] Trazar una banda (r_1, r'_1) tal que $r_1 = (AB)$. Sea A' un punto cualquiera de r'_1 y sea B' un punto de r'_1 tal que (AA')//(BB'). Sea r_2 la recta paralela a (A'C) que pasa por B'. r_2 corta (AB) en D y tenemos AB = CD.

[122] Caso n impar (el caso n par se estudia de manera análoga): la distancia entre dos segmentos o entre dos cuadrados consecutivos es $d = \frac{a}{n-1}$. El cálculo de la longitud de los segmentos del tendedero A no plantea ninguna dificultad. Para calcular L_B, se puede calcular cuántos cuadrados concéntricos hay y determinar la longitud de cada uno respecto de la longitud del anterior.

Ayuda siguiente: [17].

[123] Para el caso del cuadrado, tenemos $A = x^2$ y $A' = x^2(1+r\%)^2 = x^2(1 + \frac{2r}{100} + \frac{r^2}{10000})$. La variación relativa de la superficie del cuadrado es $\frac{\Delta A}{A} = (\frac{2r}{100} + \frac{r^2}{10000}) = (2 + \frac{r}{100})\cdot r\ \%$. No depende de x.

Para el caso del rectángulo, tenemos $B = x^2 + x$ y $B' = (1+r\%)B + (1+r\%)r\%\cdot x^2$

De donde: $\frac{\Delta B}{B} = \frac{B' - B}{B} = r\% + \frac{r\%(1+r\%)x}{1+x}$, que sí depende de x. A partir de esta última expresión, se ve que, dada una variación relativa $r\%$ constante, cuanto mayor es x, menor es la variación relativa $\Delta B/B$ del área del rectángulo. Este fenómeno tiene una explicación simple.

Ayuda siguiente: [14].

[124] Si $E(f, x, r)$ no depende de x, entonces $e(f,x)$ tampoco depende de x y tenemos que $e = \frac{xf'(x)}{f(x)}$ es una constante que sólo depende de f. Así, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e}{x}$ y $f(x) = Cx^e$ para cierta constante $C > 0$. Recíprocamente, es fácil comprobar que las funciones del tipo $f(x) = Cx^a$ con C y a constantes positivas tienen una elasticidad que no depende de x. Se tiene además que $E(Cx^a, x, r) = \frac{(1+r)^a - 1}{r}$ y que $e(Cx^a) = a$.

[125] De hecho, las raíces de $\Phi_n(x)$ son: $\cos \frac{2\pi k}{n}$ con $(k,n) = 1$ y $k \leq n/2$ si n par o $k \leq (n-1)/2$ si n impar.

Ayuda siguiente: [36].

[126] Se tiene: $bq' \leq a < b'(q'+1) <=> bq' \leq a \leq b(q+1) - 1$.

Ayuda siguiente: [81].

[127] El problema se reduce a hallar para qué $n \in \mathrm{N}$ $\cos \frac{2\pi}{n}$ es expresable mediante sumas, productos y radicales reales de números racionales. Se puede empezar por un caso particular: aquél en el que $\cos \frac{2\pi}{n}$ (y pues el ángulo $\frac{2\pi}{n}$ o el polígono regular de n lados) es *constructible con regla y compás*, lo que equivale a decir que es expresable mediante racionales y raíces cuadradas.

Ayuda siguiente: [55].

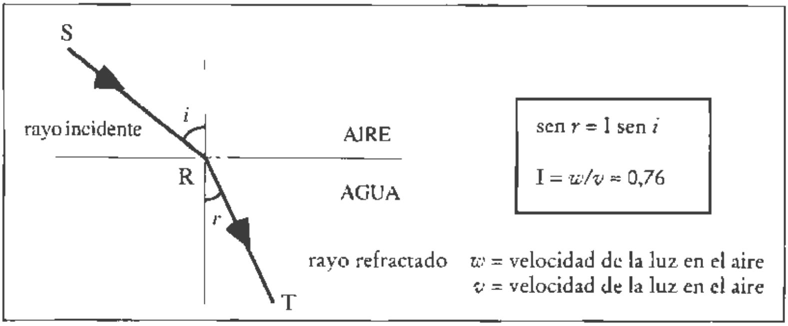
[128] Si $r = \frac{x' - x}{x}$ es suficientemente pequeño, entonces $f'(c) \approx f'(x)$ y $E = \frac{f'(c)x}{f(x)} \approx \frac{xf'(x)}{f(x)}$. Esta última expresión es lo que se define como la *elasticidad puntual* de f: $e(f,x) = \frac{xf'(x)}{f(x)}$, mientras que $E = \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x}$ es la *elasticidad arco* de f entre x y x'. Surgen ahora dos cuestiones: (1) ¿En qué casos tenemos que $E(f,x,x') = e(f,x)$? (2) ¿Cuál es el error cometido al sustituir $E(f,x,x')$ por $e(f,x)$?

Ayuda siguiente: [107].

[129] Cuando la onda luminosa se propaga de un medio a otro, la transmisión de la onda sufre un cambio de dirección (ver figura). Así, si la fuente de luz se halla en S, el rayo llegará hasta el punto T siempre que se cumpla la relación: $\operatorname{sen} r = I \operatorname{sen} i$ donde i es el ángulo entre el rayo de luz y la recta perpendicular (normal) a la superficie del agua,

r es el ángulo del rayo de luz en el agua con la misma recta,

$I = w/v$ es el *índice de refracción*, es decir la razón entre la velocidad de la luz en el agua ($w = 2{,}3.10^8$ m/s) y la velocidad de la luz en el aire ($v = 3.10^8$ m/s).



Ayuda siguiente: [86].

[130] Queremos saber de qué grado es la extensión $Q(\alpha) \supset Q$. Tenemos $Q(\omega_n) \supset Q(\alpha) \supset Q$ y ω_n raíz del polinomio irreductible sobre $Q(\alpha)$: $x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1$.

Ayuda siguiente: [95].

[131] Sean A' y B' tales que AA' = b, BB' = a, (AA') y (BB') sean perpendiculares a (AB) y A', B' estén del mismo lado respecto a (AB). Sea I' el punto medio de [A'B']. Tenemos ahora tres círculos C_1(A;b), C_2(B;a) y C_3(I';I'A') con centros no alineados. Para hallar el punto W, trazar la perpendicular a (AI') que pasa por A' y la perpendicular a (BI') que pasa por B'. Trazar finalmente la recta r perpendicular a (AB) por Ω. El problema se reduce ahora a hallar los puntos de intersección de la recta r con los círculos C(A,b) y C(B,a) (ver Problema 2 de este mismo PEM).

[132] Trazar dos bandas (r_1,r'_1) y (r_2,r'_2) tal que r_1 pase por A y B y r_2 pase por A y C. r'_1 y r'_2 se cortan en un punto D. (AD) es entonces la bisectriz del ángulo CAB.

[133] Resumamos. Sea $\Phi_n(x)$ el polinomio mínimo de α sobre Q. Hemos visto que $\Phi_n(x)$ tiene grado $\varphi(n)/2$. Si $\varphi(n) \leq 8$, entonces $\Phi_n(x)$ es de grado ≤ 4, luego es resoluble por radicales. Si $\varphi(n) \geq 10$, $\Phi_n(x)$ puede ser resoluble por radicales o no serlo. En cualquier caso, el hecho de que sea resoluble por radicales no significa necesariamente que sus raíces vengan dadas por una expresión con números racionales y radicales *reales* (*casus irreducibilis* de la ecuación cúbica). Nos interesa entonces el resultado siguiente (ver Isaacs (1985) en la ayuda [68]):

Sea $f \in Q[x]$ un polinomio irreductible con todas sus raíces en R. Si f tiene una raíz expresable con radicales reales, entonces el grado de f es una potencia de 2 y todas sus raíces son constructibles con regla y compás.

Para aplicar este resultado, hay que establecer que todas las raíces de $\Phi_n(x)$ son reales.

Ayuda siguiente: [125].

[134] Utilizar el resultado siguiente:

Sean q y r el cociente y el resto de la división entera de a entre b.

Entonces r es el menor entero tal que $a - r$ es divisible por b.

Y ver que si $0 \leq x \leq r$, entonces a, $a - x$ y $a - r$ tienen el mismo cociente al dividirlos entre b.

Ayuda siguiente: [58].

[135] Se tiene $L_A = L_B - 2\frac{a}{2}$, luego $L_B = L_A + a$ para el caso n impar. Para el caso n par, $L_A = L_B - n\,\frac{d}{2}$ con $d = \frac{a}{n-1}$, luego $L_B = L_A + a\,\frac{n}{n-1}$.

Ayuda siguiente: [77].

[136] Sea q' el cociente de a entre b' y q'' el cociente de q' entre b'', tenemos:

$$a = b'q' + r' \text{ con } 0 \leq r' \leq b' - 1. \qquad (1)$$
$$q' = b''q'' + r'' \text{ con } 0 \leq r'' \leq b'' - 1. \qquad (2)$$

Queremos ver que (1) y (2) implican que q'' es el cociente de a entre $b = b'b''$, es decir

$$a = b'b''q'' + r \text{ con } 0 \leq r \leq b'b'' - 1. \qquad (3)$$

Consideremos $r = a - bq'' = a - b'b''q''$. Tenemos:

$$r = a - b'b''q'' = a - b'(q' - r'') = a - b'q' - b'r'' =$$
$$= a - (a - r') + b'r'' = r' + b'r''.$$

Es evidente que $r \geq 0$. Utilizando las desigualdades de (1) y (2) se obtiene:

$$r = r' + b'r'' \leq b' - 1 + b'(b'' - 1) \leq b'b'' - 1 < b'b''.$$

Luego q'' es el cociente de a entre b.

Ayuda siguiente: [52].

[137] Trazar dos bandas distintas (r_1,r'_1) y (r_2,r'_2) tal que r_1 y r_2 pasen por A y r'_1 y r'_2 por B. Sea C el punto de intersección de r_1 y r'_2, y sea D la intersección de r_2 y r'_1. Se obtiene así un rombo ACBD. Sus diagonales [AB] y [CD] son perpendiculares y se cortan en el punto medio I de [AB].

[138] Dados cuatro enteros positivos y no nulos a, b, c, d, se trata de demostrar que:

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ con } (a,b) = (c,d) = 1, \text{ entonces } a = c \text{ y } b = d.$$

Ayuda siguiente: [23].

[139] Velocidad de la aguja grande: V = 60 divisiones/hora = 1 división/minuto.

Velocidad de la aguja pequeña: v = 60 div/12h = 5 div/h = 5div/60min = 1/12 div/min.

Posición de la aguja grande después de t minutos ($60 < t < 120$): P = $1t - 60$

Posición de la aguja pequeña después de t minutos ($60 < t < 120$): p = $(1/12)\,t$

Las agujas coinciden cuando P = p, es decir cuando:

$$1t - 60 = (1/12)t, \text{ o sea, } t = 60.12/11 \approx 65$$

¿En qué otros momentos se volverán a encontrar?

Ayuda siguiente: [57].

[140] Trazar una banda (r_1,r'_1) con $r_1 = (AP)$; trazar otra banda (r_2,r'_2) tal que $r_2 = r'_1$ y $r'_2 \neq r'_1$. Sea D la intersección de r'_2 con (AB). (PD) corta r'_1 en E, punto medio de (PD), y (AE) corta r'_2 en un punto F simétrico de A respecto de E. Tenemos ahora que APFD es un paralelogramo y pues que (PF)//(AD).

[141] Tenemos $\cos\frac{2\pi k}{n} = \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right)$.

Ayuda siguiente: [76].

[142] Dividir a entre b consiste en hallar dos números q y r tales que $a = bq + r$, con $0 \leq r < b$.

Ayuda siguiente: [108].

[143] Utilizar que $\cos(4\pi/5) = \cos(\pi - \pi/5) = -\cos(\pi/5)$ y $\cos(3\pi/5) = -\cos(2\pi/5)$ para demostrar que $\cos(\pi/5)$ es solución de la ecuación $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

Se puede ver de modo similar que $\cos(\pi/7)$ es solución de $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

[144] A. Seldon, F. G. Pennace: *Diccionario de Economía*, Oikos-tau ediciones, Barcelona.

"**elasticidad de demanda.** Concepto que describe la sensibilidad de la demanda a un cambio en el precio. En forma más precisa, mide el cambio relativo en la demanda de una mercancía cuando su precio varía en una pequeña proporción.

La elasticidad puede definirse como el cambio relativo en la cantidad demandada, dividido por el cambio relativo en el precio. Si una baja del 1 % en el precio resulta en un aumento del 2 % en la cantidad demandada, decimos que la elasticidad tiene un valor de 2. (Hablando en términos precisos, esta cantidad será negativa, puesto que la demanda aumenta cuando el precio baja y viceversa y el numerador y el denominador de la expresión de la elasticidad tendrán signos distintos y, por lo tanto, toda la expresión será negativa. En la economía no matemática, normalmente se ignora el signo negativo). [...]"

Ayuda siguiente: [101].

[145] $\Delta q = f(p + 0{,}01p) - f(p) = f(1{,}01p) - f(p)$.

$$\frac{\Delta q}{q} = -1{,}5\% \iff f(1{,}01p) - f(p) = -0{,}015 f(p) \iff f(1{,}01p) = 0{,}985 f(p).$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $p = 14{,}56$.

La utilización de la fórmula simplifica los cálculos, una vez se ha derivado la función $f(p) = \dfrac{100}{p-5}$.

Ayuda siguiente: [38].

[146] Queremos ver que toda figura constructible con una regla de dos bordes paralelos es también constructible con regla y compás. Para ello, hay que construir con la regla y el compás, por un lado, una banda de amplitud d dada que pase por dos puntos dados A y A' y, por otro lado, una banda de misma amplitud que pase por una recta definida por dos puntos A y B.

Ayuda siguiente: [61].

[147] Si $b = d$, trazar una banda (r,r') tal que r pase por A y r' por B. Sea R la perpendicular a r' en A. R corta r' en el punto C buscado. El caso $b \neq d$ no es tan sencillo.

Ayuda siguiente: [12].

[148] Tenemos $E = 2e$ (relación dada por el enunciado) y $E - e = 23$ (años que se llevan). Por lo tanto, llegamos a $2e - e = 23 \Rightarrow e = 23$. Luego $E = 33 + 23 = 56$. La solución es lógica: si cuando nació el hijo el padre tenía 23 años, después de 23 años (edad del hijo) el padre tendrá el doble de edad.

[149] La variación absoluta es $\Delta p = p' - p$. Supongamos que la variacion relativa viene dada en forma de un tanto por ciento $r\%$ (si $r > 0$ la variación será un aumento, si

$r < 0$ será una disminución). Si p varía un $r\%$, entonces $p' = p + r\% \cdot p = (1+r\%) \cdot p$, por lo tanto: $r\% = \frac{r}{100} = \frac{p' - p}{p} = \frac{\Delta p}{p}$.

[150] $F_\lambda(x) = 45\ [\lambda(2 + x) + 2(1 - \lambda)(1 + 1\frac{1}{x})]$. La derivada respecto de x es $F'_\lambda(x) = 45[\ \lambda - 2(1 - \lambda)\ \frac{1}{x^2}]$, que es positiva para $x \geq \sqrt{2(1 - \lambda)/\lambda}$ y negativa para $x \leq \sqrt{2(1 - \lambda)/\lambda}$. Como tomamos $1<x<2$, podemos asegurar que $F_\lambda(x)$ es una función decreciente cuando $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{3}$ y creciente cuando $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq 1$. Si tomamos $\lambda = \frac{1}{3}$, entonces, para $x \in (1{,}4;1{,}5)$, la función $F_{1/3}$ nos da una aproximación de a con un error máximo $e = 1{,}4$.

ÍNDICE TERMINOLÓGICO

Estudiar matemáticas. El eslabón perdido
entre enseñanza y aprendizaje,

se imprimió en los talleres de
A&M Gràfic, S.L.
con domicilio en
Ctra. N-152, km. 14,9 - Santa Perpètua de Mogoda
en noviembre de 1998.

El tiraje fue de 20 000 ejemplares.

Una de las mayores virtudes de este libro consiste en haber logrado ubicar el estudio de las matemáticas en cuatro niveles que son incluyentes y permiten apreciar de manera clara los alcances de ese paradigma que se ha llamado educación matemática.

El primer nivel es el de la sociedad, en la que muchos de sus integrantes resuelven problemas de matemáticas como parte de sus actividades cotidianas. El segundo nivel es el de la escuela, que se apoya en un currículo del que forman parte otras asignaturas además de las matemáticas. El tercer nivel es el del aula, en la que interactúan tres elementos indispensables del proceso didáctico: el profesor, los alumnos y las actividades de estudio. El cuarto nivel es el de las matemáticas "en vivo", donde se analizan los procesos de construcción de técnicas, tecnologías y teorías, es decir, el desarrollo de procedimientos informales que llegan a convertirse en técnicas, la justificación de esas técnicas y la demostración de teoremas.

Seguramente el contenido de este libro será de gran utilidad para todos los interesados en la educación matemática, pero sobre todo para los profesores que desean acercarse al estudio de la didáctica de las matemáticas mediante el análisis de múltiples experiencias y reflexiones que resultarán muy cercanas a su propia práctica.

Yves Chevallard, investigador en didáctica de las matemáticas es conocido internacionalmente por su teoría de la transposición didáctica. Es catedrático universitario y responsable de la formación inicial del magisterio de secundaria de matemáticas en Marsella, Francia.

Marianna Bosch es investigadora en Didáctica de las Matemáticas y profesora en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Josep Gascón Pérez, doctor en matemáticas y profesor de enseñanza secundaria, imparte actualmente Didáctica de las Matemáticas en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona.

ISBN 84-85840-50-X
9 788485 840502

Institut de Ciències de l'Educació
Divisió Ciències de l'Educació
UNIVERSITAT DE BARCELONA

SEP
Secretaría de Educación Pública

FONDO MIXTO DE COOPERACIÓN TÉCNICA Y CIENTÍFICA MÉXICO-ESPAÑA

COOPERACIÓN ESPAÑOLA