MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Štěpánek

Základy teorie kategorií

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

2011

Poděkování

Rád bych poděkoval prof. RNDr. Jiřímu Rosickému, DrSc. za čas, který mi věnoval a za všechny rady, náměty a připomínky, díky kterým se mi povedlo tuto práci vytvořit.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Brně, dne 3. června 2011

Matěj Štěpánek

Název práce: Základy teorie kategorií
Autor: Matěj Štěpánek
Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty, MU
Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Abstrakt: Cílem této práce je definovat základní pojmy teorie kategorií a demonstrovat je na příkladech. V textu je nejprve definována kategorie, poté funktor a přirozená transformace. Poslední kapitola je pak věnována limitám.
Klíčová slova: kategorie, funktor, přirozená transformace, limita.

Title: Elements of category theory
Author: Matěj Štěpánek
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, MU
Supervisor: prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Abstract: This thesis defines basic terms of category theory and gives an illustration of them. There are category, functor and natural transformation gradually defined and last chapter deals with limits.
Keywords: category, functor, natural transformation, limit.

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce si klade za cíl vysvětlení základních pojmů teorie kategorií. Text je koncipován tak, aby mohl posloužit jako doplňkový studijní materiál k předmětu M7150 Teorie kategorií, který je vyučován na Ústavu matematiky a statistiky.

Hlavní zdroje, z kterých jsem při psaní čerpal, jsou [1], [2] a mé poznámky z přednášek prof. RNDr. Jiřího Rosického, DrSc. k zmíněnému předmětu Teorie kategorií. Při volbě značení a výběru vhodných formulací definic a vět jsem vycházel hlavně z [1]. Z něj je také převzata většina příkladů. Příklady 3.6. 3) a 4.10. jsou z [2] a při psaní stručných životopisů na konci práce jsem čerpal z [4].

Osnova práce vychází ze základní trojice pojmů - kategorie, funktor a přirozená transformace. Poslední kapitola je pak věnována limitám. K porozumění textu postačí znalost základních algebraických pojmů.

Teorie kategorií je odvětví abstraktní algebry, které se zabývá zkoumáním matematických struktur a vztahů mezi nimi. Její základy položili ve 40. letech minulého století Samuel Eilenberg a Saunders Mac Lane ve svých pracích, zabývajících se algebraickou topologií.

Postupně se objevila řada aplikací: v algebraické geometrii, logice, lingvistice, teoretické informatice, filosofii a dalších. Ukázalo se, že teorie kategorií je v jistém smyslu univerzální jazyk matematiky, podobně jako teorie množin. Důsledkem tohoto širokého uplatnění teorie kategorií je také to, že často odhaluje zajímavé souvislosti mezi různými obory nejen matematiky. Například spojitosti mezi algebrou a geometrií nebo mezi teorií relativity a kvantovou fyzikou.

Kapitola 1

Kategorie

1.1 Kategorie

Definice 1.1. *Kategorie* $\mathcal{K}$ je tvořena třídou objektů $ob(\mathcal{K})$ a třídou morfismů $Hom(\mathcal{K})$, kde pro libovolné dva objekty A, B je dána množina $Hom(A, B)$ morfismů z A do B. Tyto morfismy lze skládat tak, že pro $f, g \in Hom(\mathcal{K})$, $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je dána kompozice $g \circ f : A \to C$, přičemž toto skládání je asociativní. Dále pro libovolný objekt A je dán identický morfismus $id_A : A \to A$, přičemž platí:

$$\begin{aligned} id_A \circ f &= f \qquad \forall f : B \to A \\ g \circ id_A &= g \qquad \forall g : A \to B. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Příklad 1.2.
1) **Set** je kategorie, která má objekty množiny a morfismy zobrazení mezi množinami. Skládání morfismů je klasické skládání zobrazení, tj. kompozice $f : A \to B$ a $g : B \to C$ je zobrazení $g \circ f : A \to C$, pro které platí

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Toto skládání je, jak víme, asociativní, neboť $\forall a \in A$ platí

$$((h \circ g) \circ f)(a) = h(g(f(a))) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Dále pro každou množinu A existuje identické zobrazení $id_A : A \to A$ definované takto:

$$id_A(a) = a \quad \forall a \in A,$$

které splňuje rovnosti 1.1. Tedy opravdu **Set** splňuje výše uvedenou definici kategorie.

Celá řada dalších kategorií vznikne zúžením **Set** tak, že za objekty vezmeme speciální množiny a za morfismy vezmeme zúžená zobrazení. Tak dostaneme například kategorii $\mathbf{Set_{fin}}$ všech konečných množin a zobrazení mezi nimi. Jiným příkladem může být kategorie, která má objekty množiny a morfismy injektivní zobrazení. (Složení dvou injektivních zobrazení je opět injektivní a identita je taktéž injektivní zobrazení.)

2) Dalším běžným příkladem jsou kategorie, které mají objekty množiny se strukturou a morfismy zobrazení, která tuto strukturu zachovávají.

Pos je kategorie uspořádaných množin. Připomeňme, že uspořádaná množina je množina s relací $\leq$, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Roli morfismu hraje izotonní zobrazení, tj. zobrazení $m : A \to B$, které zachovává uspořádání:

$$a \leq_A a' \Rightarrow m(a) \leq_B m(a') \quad \forall a, a' \in A.$$

Co musí **Pos** splňovat, aby to byla kategorie? Musíme ukázat, že jestliže $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou izotonní zobrazení, pak také $g \circ f : A \to C$ je izotonní. To ale zřejmě platí neboť

$$a \leq a' \Rightarrow f(a) \leq f(a') \Rightarrow g(f(a)) \leq g(f(a')) \Rightarrow (g \circ f)(a) \leq (g \circ f)(a').$$

Dále musíme ověřit, že $id_A : A \to A$ je izotonní zobrazení, což lze jasně vidět z implikace $a \leq a' \Rightarrow a \leq a'$.

Kategorie **Mon** má objekty monoidy a morfismy homomorfismy monoidů, tj. zobrazení tvaru $h : M \to N$, která $\forall m, n \in M$ splňují:

$$\begin{gathered} h(m \cdot_M n) = h(m) \cdot_N h(n) \\ h(1_M) = 1_N, \end{gathered}$$

kde M, N jsou monoidy s operacemi $\cdot_M$, $\cdot_N$ a 1 značí jednotkový prvek monoidu.

3) **Rel** je kategorie, kde objekty jsou množiny a morfismy jsou binární relace. Tzn. morfismus $f : A \to B$ je podmnožina $f \subseteq A \times B$. Identitou je relace identita

$$id_A = \{(a, a) \in A \times A | a \in A\} \subseteq A \times A$$

a pro $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ definujeme kompozici $S \circ R$ takto

$$(a, c) \in S \circ R \iff \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S.$$

4) Předuspořádaná množina je množina P spolu s relací $\leq$, která je reflexivní a tranzitivní. *Předuspořádaná množina* je kategorie, která má objekty prvky P a morfismy definované takto: $a \to b \iff a \leq b$, kde $a, b \in P$. (Uspořádaná množina je speciální případ předuspořádané množiny - vznikne přidáním požadavku antisymetrie - proto

je také kategorií.)

5) *Monoid* $(M, \cdot)$ je kategorie, která má jeden objekt a morfismy jsou prvky $x \in M$. Identitou je jednotkový prvek monoidu a skládání morfismů je dáno operací $\cdot$ monoidu.

6) **Vect** je kategorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení mezi nimi.

7) Příklad z oblasti matematické logiky je kategorie, která má za objekty formule a za morfismy důkazy.

Definice 1.3. Řekneme, že kategorie $\mathcal{K}$ je

- *tenká*, když $|\mathcal{K}(A, B)| \leq 1 \quad \forall A, B \in ob(\mathcal{K})$ (tzn. mezi každými dvěma objekty existuje nejvýše jeden morfismus),
- *malá*, když $ob(\mathcal{K})$ i $Hom(\mathcal{K})$ jsou množiny,
- *lokálně malá*, když $Hom(A, B)$ je množina pro každé dva objekty $A, B \in \mathcal{K}$,
- *velká*, když není malá.

Příklad 1.4.
1) Předuspořádaná množina je tenká i malá kategorie.
2) Monoid a $\mathbf{Set_{fin}}$ jsou malé kategorie.
3) Lokálně malé kategorie jsou např. **Set**, **Pos**.

1.2 Konstrukce na kategoriích

V této části si ukážeme několik konstrukcí, pomocí nichž můžeme z daných kategorií vytvořit nové kategorie.

Definice 1.5. *Součin $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ kategorií $\mathcal{K}$* a $\mathcal{L}$, je kategorie, která má

- objekty tvaru (K, L), kde $K \in ob(\mathcal{K})$ a $L \in ob(\mathcal{L})$,
- morfismy tvaru $(f, g) : (K, L) \to (K', L')$, kde $f : K \to K' \in Hom(\mathcal{K})$ a $g : L \to L' \in Hom(\mathcal{L})$.

Kompozice a identita jsou definovány po složkách:

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$$
$$id_{(K,L)} = (id_K, id_L).$$

Definice 1.6. *Duální kategorie $\mathcal{K}^{op}$* ke kategorii $\mathcal{K}$ má stejné objekty jako $\mathcal{K}$ a morfismus $f : A \to B$ v $\mathcal{K}^{op}$ je morfismus $f : B \to A$ v $\mathcal{K}$. (Tedy $\mathcal{K}^{op}$ vznikne tak, že v $\mathcal{K}$ otočíme všechny morfismy opačným směrem.)

Příklad 1.7. Diagram je soubor objektů v kategorii spolu se souborem morfismů mezi těmito objekty. Diagram v $\mathcal{K}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

vypadá v $\mathcal{K}^{op}$ takto

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f"'] \\ & C \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "f\circ g"] \end{tikzcd}$$

Dualita je v teorii kategorií velice užitečný nástroj. Brzy se seznámíme s několika dvojicemi typu „pojem - duální pojem“, „věta - duální věta“ apod.

Definice 1.8. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie a K její objekt. *Kategorie nad objektem*, psáno $\mathcal{K}/K$, má

- objekty: všechny morfismy tvaru $f : X \to K$, kde $X \in ob(\mathcal{K})$ libovolný,
- morfismy: morfismus g z $f : X \to K$ do $f' : X' \to K$ je morfismus $g : X \to X'$ v $\mathcal{K}$ takový, že $f' \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & K \\ X' \arrow[ur, "f'"'] \end{tikzcd}$$

Jak funguje kompozice morfismů g_1 a g_2 v $\mathcal{K}/K$, ukazuje následující obrázek:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"] \arrow[dd, bend right, "g_2\circ g_1"'] & K \\ X_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[d, "g_2"] & \\ X_3 \arrow[uur, "f_3"'] & \end{tikzcd}$$

Identita vypadá takto: Nechť $f : X \to K$ je objekt v $\mathcal{K}/K$ pak id_f je id_X v $\mathcal{K}$. (Ověřte si nakreslením obrázku, že jsou splněny podmínky 1.1.)

Poznámka 1.9. Obdobně lze definovat také *kategorii pod objektem*, psáno $K/\mathcal{K}$, kde K je objekt kategorie $\mathcal{K}$. Objekty jsou v tomto případě všechny morfismy tvaru $f : K \to X$ pro $X \in ob(\mathcal{K})$ libovolný. A morfismus z $f : K \to X$ do $f' : K' \to X$ je morfismus $h : X \to X'$ takový, že $h \circ f = f'$. Kompozice a identita se konstruují analogicky jako v $\mathcal{K}/K$. Zkuste popsat vztah mezi $\mathcal{K}/K$ a $K/\mathcal{K}$ pomocí duální kategorie.

1.3 Speciální objekty a morfismy

Definice 1.10. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie. Morfismus $f : A \to B$ v $\mathcal{K}$ se nazývá *izomorfismus*, jestliže existuje morfismus $g : B \to A$ v $\mathcal{K}$ tak, že platí:

$$\begin{aligned} g \circ f &= id_A \\ f \circ g &= id_B. \end{aligned}$$

Definice 1.11. V libovolné kategorii $\mathcal{K}$ se morfismus $f : A \to B$ nazývá

- *monomorfismus*, jestliže $\forall g, h : C \to A$ platí $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

- *epimorfismus*, jestliže $\forall i, j : B \to D$ platí $i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & D \end{tikzcd}$$

Věta 1.12. *Zobrazení $f : A \to B$ mezi množinami je monomorfismus právě tehdy, když je injektivní.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $f : A \to B$ je monomorfismus. Nechť $a, a' \in A$, $a \neq a'$ jsou dva různé prvky množiny A a $\{x\}$ je libovolná jednoprvková množina. Definujme zobrazení $g_a, g_{a'} : \{x\} \to A$ takto:

$$g_a(x) = a, \;\; g_{a'}(x) = a'.$$

Z toho, že f je monomorfismus a $g_a \neq g_{a'}$, plyne $f \circ g_a \neq f \circ g_{a'}$. Proto

$$f(a) = (f \circ g_a)(x) \neq (f \circ g_{a'})(x) = f(a')$$

tedy f je injektivní.

Naopak předpokládejme, že f je injektivní a $g, h : C \to A$, $g \neq h$ jsou různá zobrazení. Pak existuje $c \in C$, pro který platí $g(c) \neq h(c)$. Z injektivity f plyne $f(g(c)) \neq f(h(c))$, tedy $f \circ g \neq f \circ h$ a f je monomorfismus. □

Věta 1.13. *Každý izomorfismus je zároveň monomorfismus i epimorfismus.*

Důkaz. Mějme následující diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & B \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "id"'] & C \arrow[d, "e"] & \\ & & B \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & E \end{tikzcd}$$

Nechť m je izomorfismus s inverzí e. Pak

$$m \circ x = m \circ y \;\Rightarrow\; x = e \circ m \circ x = e \circ m \circ y = y,$$

tedy m je monomorfismus. Podobně platí

$$u \circ e = v \circ e \;\Rightarrow\; u = u \circ e \circ m = v \circ e \circ m = v,$$

tedy e je epimorfismus. □

Poznámka 1.14. Opačné tvrzení (každý morfismus, který je monomorfismus a zároveň epimorfismus, je izomorfismus) obecně neplatí. Platí ale například v kategorii **Set**.

Definice 1.15. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie.

- Objekt 0 nazveme *iniciální*, jestliže pro každý objekt $K \in \mathcal{K}$ existuje jediný morfismus
$$0 \to K.$$
- Objekt 1 nazveme *terminální*, jestliže pro každý objekt $K \in \mathcal{K}$ existuje jediný morfismus
$$K \to 1.$$

Iniciální a terminální objekt jsou navzájem duální pojmy. Tedy terminální objekt v kategorii $\mathcal{K}$ je iniciálním objektem v kategorii $\mathcal{K}^{op}$.

Příklad 1.16.
1) Kategorie **Set** má jeden iniciální objekt $\emptyset$ a terminální objekty tvaru $\{x\}$, tedy jednoprvkové množiny.
2) V předuspořádané množině je iniciální prvek nejmenší prvek a terminální prvek největší prvek.
3) V kategorii **Mon** je iniciálním i terminálním objektem jednoprvkový monoid.

Věta 1.17. *Iniciální objekt, pokud existuje, je určen jednoznačně až na izomorfismus.*

Důkaz. Nechť I, J jsou iniciální objekty v kategorii $\mathcal{K}$. Pak existuje jediný morfismus $f : I \to J$ a jediný morfismus $g : J \to I$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, shift left, "f"] & J \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$

Jejich složením ale dostaneme

$$g \circ f = id_I, \ \ f \circ g = id_J.$$

Tedy f a g jsou izomorfismy. $\square$

Nyní uvedeme ještě duální větu k větě 1.17. K jejímu důkazu nám postačí říct, že terminální objekt v $\mathcal{K}$ je iniciálním objektem v $\mathcal{K}^{op}$ a jednoznačnost iniciálního objektu už jsme dokázali.

Věta 1.18. *Terminální objekt, pokud existuje, je určen jednoznačně až na izomorfismus.*

1.4 Volný monoid, univerzální vlastnost

Na závěr první kapitoly si definujeme pojem volný monoid, který budeme v následujícím textu využívat. Uvedeme nejprve intuitivní a poté formální definici.

Mějme abecedu znaků - množinu A . Slovo nad abecedou je konečná posloupnost znaků této abecedy. Například slova nad abecedou $\{c, d\}$ jsou $c, d, cc, cd, dc, dd, ccc, \ldots$ a prázdné slovo (tj. posloupnost délky nula). Nechť A^* je množina všech slov nad abecedou A. Na A^* definujme binární operaci $\cdot$ takto: $u \cdot v = uv$ pro všechna slova $u, v \in A^*$. Tato operace se nazývá zřetězení, je zřejmě asociativní a jako jednotka funguje prázdné slovo. Monoid $(A^*, \cdot)$ je volný monoid na množině A.

Definice 1.19. Nechť $A \subseteq M$. Řekneme, že monoid M je *volně generovaný množinou* A, jestliže každý prvek $m \in M$ lze zapsat jako součin prvků množiny A právě jedním způsobem. Monoid volně generovaný množinou A budeme značit $M(A)$.

Řekneme, že monoid M je *volný*, pokud existuje množina A, která jej volně generuje.

Zobrazení $\eta : A \to M$ definované předpisem $\eta(a) = a$ pro všechna $a \in A$ nazýváme *vložení generátorů*.

Na příkladu volného monoidu se seznámíme s tzv. univerzální vlastností, se kterou se budeme v dalších kapitolách opakovaně setkávat. Univerzální vlastnost nám umožňuje jednoduše popisovat pojmy, jejichž definice často jednoduchá být nemusí.

Volný monoid $M(A)$ nad množinou A má tuto *univerzální vlastnost*: mějme libovolný monoid N a libovolné zobrazení $f : A \to N$. Pak existuje jediný morfismus $u : M(A) \to N$ takový, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd}
M(A) \arrow[r, dotted, "u"] & N \\
A \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Poznámka 1.20. Připomeňme, že tvrzením „diagram komutuje“ máme na mysli, že platí $u \circ \eta = f$.

Věta 1.21. *Monoid A^* slov nad abecedou A má univerzální vlastnost volného monoidu.*

Důkaz. Nechť N je libovolný monoid a $f : A \to N$ libovolné zobrazení. Zobrazení $u : A^* \to N$ definujeme předpisem

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &= 1_N \\ u(a_1 \ldots a_k) &= u(a_1) \cdot_N \ldots \cdot_N u(a_k). \end{aligned}$$

Pak u je homomorfismus monoidů a platí $u(a) = f(a)$ pro všechna $a \in A$. Předpokládejme, že existuje morfismus $v : A^* \to N$, který také splňuje $v(a) = f(a)$ pro všechna $a \in A$. Pak pro všechna $a_1 \ldots a_k \in A^*$ platí:

$$\begin{aligned} v(a_1 \ldots a_k) &= v(a_1) \cdot_N \ldots \cdot_N v(a_k) \\ &= f(a_1) \cdot_N \ldots \cdot_N f(a_k) \\ &= u(a_1) \cdot_N \ldots \cdot_N u(a_k) \\ &= u(a_1 \ldots a_k). \end{aligned}$$

Tedy $v = u$. □

Poznámka 1.22. Jak víme, monoid je kategorie. Můžeme se proto ptát, co vznikne zobecněním volného monoidu. Dostaneme *volnou kategorii*, kterou si přiblížíme v následujících řádcích. Volný monoid je generován množinou, zatímco volná kategorie je generována orientovaným grafem. Připomeňme tedy nejprve tento pojem.

Orientovaný graf sestává z množiny vrcholů a množiny orientovaných hran.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "e"'] & B \arrow[d, "f"] & \\ C \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "h"'] & D \arrow[r, "i"'] & E \end{tikzcd}$$

Přesněji jej můžeme definovat tímto způsobem: orientovaný graf je čtveřice, obsahující množinu vrcholů V, množinu hran E a dvě zobrazení, $p : E \to V$ a $k : E \to V$. Zobrazení p přiřazuje hraně její počáteční vrchol a zobrazení k koncový vrchol.

Cesta v orientovaném grafu je konečná posloupnost hran $e_1, \ldots, e_n$ taková, že $k(e_i) = p(e_{i+1})$ pro $i = 1, \ldots, n-1$.

Každý orientovaný graf G generuje kategorii $\mathcal{K}(G)$ tímto způsobem: objekty jsou vrcholy grafu a morfismy jsou cesty v grafu. Morfismy budeme zapisovat ve tvaru $e_n e_{n-1} \ldots e_1$. Přičemž $e_n \ldots e_1$ je morfismus z $p(e_1)$ do $k(e_n)$. Pro každý vrchol v máme cestu délky nula, značenou id_v, která plní roli identického morfismu v kategorii. Skládání morfismů definujeme přirozeným způsobem:

$$f_m \ldots f_1 \circ e_n \ldots e_1 = f_m \ldots f_1 e_n \ldots e_1.$$

Kapitola 2

Součiny a součty

2.1 Součin

Definice 2.1. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie, $A, B \in ob(\mathcal{K})$. *Součin* objektů A, B je diagram

$$A \xleftarrow{p_1} A \times B \xrightarrow{p_2} B,$$

kde $A \times B \in ob(\mathcal{K})$ a $p_1, p_2 \in Hom(\mathcal{K})$, s univerzální vlastností: pro každý diagram

$$A \xleftarrow{f_1} X \xrightarrow{f_2} B$$

existuje jediný morfismus $u : X \to A \times B$ tak, že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Morfismy p_1, p_2 obyčejně nazýváme *projekce.*

Věta 2.2. *Součin objektů v kategorii je určen jednoznačně až na izomorfismus.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie a $A, B \in ob(\mathcal{K})$. Uvažme kategorii $\mathcal{D}_{AB}$, jejímiž objekty jsou diagramy tvaru $A \xleftarrow{f_1} X \xrightarrow{f_2} B$, kde X je libovolný objekt kategorie $\mathcal{K}$, a morfismus u z $A \xleftarrow{f_1} X \xrightarrow{f_2} B$ do $A \xleftarrow{g_1} Y \xrightarrow{g_2} B$ je morfismus $u : X \to Y$ takový, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & Y \arrow[l, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Snadno se ověří, že $\mathcal{D}_{AB}$ je skutečně kategorie. Z definice 2.1. ale plyne, že součin objektů v kategorii $\mathcal{K}$ je právě terminální objekt v kategorii $\mathcal{D}_{AB}$. A ten je podle věty 1.18. určen jednoznačně až na izomorfismus, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Definici součinu objektů v kategorii poprvé uvedl Saunders Mac Lane v roce 1950 a její aplikace na kategorii **Set**, tj. kartézský součin množin, je zřejmě první případ, kdy byl základní matematický pojem definován pomocí teorie kategorií.

Příklad 2.3.
1) Součin objektů v kategorii **Set** odpovídá kartézskému součinu množin. Pro množiny A, B dostáváme

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}.$$

Projekce $p_1 : A \times B \to A$ a $p_2 : A \times B \to B$ jsou definovány takto

$$p_1((a,b)) = a, \quad p_2((a,b)) = b.$$

Mějme morfismy f_1 a f_2 viz obrázek

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B \end{tikzcd}$$

pak morfismus $u : X \to A \times B$ definujeme takto:

$$u(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

Nyní stačí ověřit, že u je určen jednoznačně až na izomorfismus. Mějme morfismus $v : X \to A \times B$ takový, že výše uvedený diagram komutuje. Pak musí pro všechna $x \in X$ platit

$$p_1(v(x)) = f_1 = p_1(u(x)) \quad \text{a} \quad p_2(v(x)) = f_2 = p_2(u(x))$$

tedy $u(x)$ a $v(x)$ mají stejnou první i druhou složku, proto platí $u = v$.

2) Součin monoidů v kategorii **Mon** získáme jako kartézský součin nosných množin monoidů spolu s operací definovanou po složkách. Mějme monoidy $(M, *)$ a $(N, \diamond)$. Jejich součinem je monoid $(M \times N, \cdot)$ s operací $\cdot$ definovanou takto

$$(m,n) \cdot (m', n') = (m * m', n \diamond n')$$

a jednotkou

$$1_{M \times N} = (1_M, 1_N).$$

Projekce p_1, p_2

$$M \xleftarrow{p_1} M \times N \xrightarrow{p_2} N$$

jsou homomorfismy monoidů definované předpisem:

$$p_1((m,n)) = m, \quad p_2((m,n)) = n.$$

Platnost univerzální vlastnosti se ukáže stejně jako v **Set**.

Obdobně se postupuje při konstrukci součinu grup a jiných množin se strukturou.

3) Nechť P je uspořádáná množina, $p, q \in P$. Jak vypadá součin $p \times q$? Musíme mít projekce

$$p \times q \leq p, \quad p \times q \leq q$$

a univerzální vlastnost: jestliže existuje $x \in P$ takové, že

$$x \leq p \text{ a } x \leq q$$

pak

$$x \leq p \times q.$$

To jsou ale přesně vlastnosti největší dolní závory - infima. Vidíme tedy, že v uspořádáné množině je součinem dvou prvků jejich infimum.

2.2 Součet

Definice 2.4. Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie, $A, B \in ob(\mathcal{K})$. *Součet* objektů A, B je diagram

$$A \xrightarrow{i_1} A + B \xleftarrow{i_2} B$$

kde $A + B \in ob(\mathcal{K})$ a $i_1, i_2 \in Hom(\mathcal{K})$, splňující následující univerzální vlastnost: pro každý diagram

$$A \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} B$$

existuje jediný morfismus $u : A + B \to X$ tak, že následující diagram komutuje

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A + B \arrow[u, dotted, "u"'] & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

Morfismy i_1, i_2 většinou nazýváme *injekce.*

Poznámka 2.5. Pozorný čtenář jistě poznal, že jsme narazili na další dvojici duálních pojmů. Součet v $\mathcal{K}$ je přesně součin v $\mathcal{K}^{op}$.

Věta 2.6. *Součet objektů v kategorii je určen jednoznačně až na izomorfismus.*

Důkaz. Plyne z věty 2.2. využitím duality. □

Příklad 2.7.
1) Součet v kategorii **Set** představuje disjunktní sjednocení. Pro množiny A, B

$$A + B = \{(a, 1) | a \in A\} \cup \{(b, 2) | b \in B\}$$

Injekce i_1, i_2 jsou definovány předpisy:

$$i_1(a) = (a, 1), \quad i_2(b) = (b, 2).$$

Mějme morfismy f a g, viz obrázek:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, dotted, "u"] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

pak morfismus $u : A + B \to X$ definujeme takto:

$$u((x,\delta)) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } \delta = 1, \\ g(x) & \text{pro } \delta = 2. \end{cases}$$

Snadno se ověří, že u je určen jednoznačně až na izomorfismus.

2) Jak vypadá součet v kategorii **Mon**? Budeme jej konstruovat postupně.

Mějme monoidy A a B. Nejprve vezmeme jejich nosné množiny a sestrojíme jejich součet $A + B$, tedy disjunktní sjednocení. Uvažme monoid N a morfismy f, g viz obrázek.

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, dotted, "u"] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

V **Set** existuje právě jeden morfismus u tak, že tento diagram komutuje, jak víme z příkladu 2.7. 1), ale nic nám nezaručí, že zobrazení f, g a u jsou také morfismy v **Mon**. Musíme v naší konstrukci pokračovat.

V druhém kroku sestrojíme volný monoid generovaný množinou $A + B$.

$$\begin{tikzcd}
 & M(A+B) & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, dotted, "\eta"] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Ovšem zobrazení $\alpha = \eta \circ i_1$ a $\beta = \eta \circ i_2$ nejsou morfismy v kategorii **Mon**.

Posledním krokem je faktorizace sestrojeného volného monoidu podle ekvivalence $\sim$.

$$\begin{tikzcd}
 & M(A+B)/\sim & \\
 & M(A+B) \arrow[u, "k"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "j_1"] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i_1"'] & A+B \arrow[u, "\eta"] & B \arrow[l, "i_2"] \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[uul, bend right, "j_2"']
\end{tikzcd}$$

Vezmeme nejmenší ekvivalenci $\sim$ takovou, aby j_1 a j_2 byly morfismy a ukážeme, že pak diagram

$$A \xrightarrow[j_1]{} M(A+B)/\sim \xleftarrow[j_2]{} B$$

je hledaný součet monoidů A, B.

Hledaná ekvivalence $\sim$ na $M(A+B)$ je dána následujícími rovnostmi

$$\begin{aligned} u_A = \varepsilon &= u_B \\ \alpha(a_1)\cdot\alpha(a_2) &= \alpha(a_1\cdot a_2) \quad \forall a_1,a_2\in A \\ \beta(b_1)\cdot\beta(b_2) &= \beta(b_1\cdot b_2) \quad \forall b_1,b_2\in B \end{aligned}$$

kde u je jednotkový prvek monoidu, ε značí prázdné slovo a α, β jsou zobrazení viz obrázek.

Jednotkou monoidu $M(A+B)/\sim$ je $[\varepsilon]$, tj. třída rozkladu podle $\sim$, která obsahuje prázdné slovo. Operace na $M(A+B)/\sim$ je dána přirozeně takto:

$$[w]\cdot[w'] = [ww'] \quad \forall w,w'\in M(A+B).$$

A injekce

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_1"'] & M(A+B)/\sim & B \arrow[l, "j_2"] \end{tikzcd}$$

jsou zadány předpisem

$$\begin{aligned} j_1(a) &= [a] \quad \forall a\in A, \\ j_2(b) &= [b] \quad \forall b\in B. \end{aligned}$$

Mějme nyní homomorfismy $f : A \to N$ a $g : B \to N$ do libovolného monoidu N. Pak homomorfismus $u' : A+B \to N$ je jednoznačně definován takto: nejprve vezmeme zobrazení $u : A+B \to N$ a „převedeme je na třídy rozkladu“. (Tj. pro každé $x\in A+B$ definujeme $u'(x) = [u(x)]$.) A pak definujeme

$$w\sim w' \Rightarrow u'(w) = u'(w') \quad \forall w,w'\in M(A+B)/\sim$$

$$\begin{tikzcd} & N & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "j_1"'] & M(A+B)/\sim \arrow[u, dotted, "u'"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "j_2"] \end{tikzcd}$$

3) Nechť P je uspořádáná množina, $p,q\in P$. Součet $p+q$ musí mít tyto vlastnosti:

$$p\le p+q, \quad q\le p+q$$

a univerzální vlastnost: jestliže existuje $x\in P$ takové, že

$$p\le x \ \text{ a } \ q\le x$$

pak

$$p+q\le x.$$

Součet dvou prvků v uspořádané množině je tedy právě jejich supremum - nejmenší horní závora.

4) Nechť $M(A)$ a $M(B)$ jsou volné monoidy nad množinami A, B. Jejich součet v kategorii **Mon** je

$$M(A) + M(B) = M(A + B).$$

Proč tomu tak je můžeme vidět v následujícím diagramu.

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
M(A) \arrow[ur] \arrow[r] & M(A+B) \arrow[u, dotted] & M(B) \arrow[ul] \arrow[l] \\
A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r] & A+B \arrow[u, "\eta_{A+B}"'] & B \arrow[u, "\eta_B"'] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Univerzální vlastnost $A + B$ nám zajistí, že komutuje obdélník $A, B, M(B), M(A)$. Z univerzální vlastnosti monoidů $M(A)$ a $M(B)$ dostaneme, že komutují lichoběžníky $A, A + B, N, M(A)$ a $A + B, B, M(B), N$. Proto musí komutovat i trojúhelník $M(A), M(B), N$ a $M(A + B)$ má tedy požadovanou univerzální vlastnost součtu $M(A) + M(B)$.

Kapitola 3

Funktory a přirozené transformace

3.1 Funktor

Definice 3.1. *Funktor* $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ mezi kategoriemi $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ je zobrazení, které přiřazuje

- každému objektu A v $\mathcal{K}$ objekt $F(A)$ v $\mathcal{L}$
- každému morfismu $f : A \to B$ v $\mathcal{K}$ morfismus $F(f) : F(A) \to F(B)$ v $\mathcal{L}$

tak, že F zachovává identity a skládání:

$$\begin{aligned} F(id_A) &= id_{F(A)} & \forall A \in ob(\mathcal{K}) \\ F(g \circ f) &= F(g) \circ F(f) & \forall f, g : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C. \end{aligned}$$

Příklad 3.2.
1) Nechť $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ jsou uspořádané množiny. Funktor mezi kategoriemi $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ je izotonní zobrazení.

2) Nechť $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ jsou monoidy. Funktor mezi kategoriemi $\mathcal{K}$ a $\mathcal{L}$ je homomorfismus monoidů.

3) Funktor $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$, který každému monoidu přiřadí jeho nosnou množinu se nazývá *zapomínající*. (Jednoduše řečeno funktor zapomene strukturu danou operací monoidu.)

4) Další příklad zapomínajícího funktoru je $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ab}$, kde **Ring** je kategorie okruhů, **Ab** je kategorie komutativních grup. Fuktor U přiřadí okruhu $(R, +, \cdot)$ komutativní grupu $(R, +)$. (Zapomene strukturu danou operací $\cdot$.)

5) Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie a K její objekt. *Reprezentovatelný funktor* objektu K je funktor $Hom(K, -) : \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$, který

- každému objektu A v $\mathcal{K}$ přiřazuje objekt $Hom(K, A)$, tedy množinu všech morfismů z K do A,

- každému morfismu $f : A \to B$ v $\mathcal{K}$ přiřazuje morfismus $Hom(K, f) : Hom(K, A) \to Hom(K, B)$, definovaný předpisem

$$Hom(K, f)(h) = f \circ h \quad \text{pro každý morfismus } h : K \to A.$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f \circ h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ověřte si, že tento reprezentovatelný funktor zachovává identity a skládání.

Poznámka 3.3. Výše uvedený funktor se přesněji označuje jako kovariantní reprezentovatelný funktor. K němu duální je pak *kontravariantní reprezentovatelný funktor*

$$Hom(-, K) : \mathcal{K}^{op} \to \mathbf{Set}$$

kde $K \in \mathcal{K}$, který morfismu $f : A \to B$ přiřazuje morfismus $Hom(f, K) : Hom(B, K) \to Hom(A, K)$ tak, že platí

$$Hom(f, K)(g) = g \circ f \quad \text{pro každý morfismus } g : A \to K.$$

3.2 Kategorie malých kategorií

Funktory se přirozeným způsobem skládají. Pro každé dva funktory $F : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ a $G : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ vzniká složením funktor $G \circ F : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$, který definujeme takto:

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)) \quad \forall A \in ob(\mathcal{K})$$
$$(G \circ F)(f) = G(F(f)) \quad \forall f \in Hom(\mathcal{K}).$$

Snadno se ověří, že funktor $G \circ F$ zachovává skládání morfismů a zachovává identity. Dále je zřejmé, že skládání funktorů je asociativní a pro každou kategorii $\mathcal{K}$ existuje identický funktor $Id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$. Vidíme tedy, že funktory splňují podmínky kladené na morfismy v definici kategorie.

Nyní můžeme aplikovat teorii kategorií na sebe samu a zavést nový pojem - *kategorii malých kategorií*: **Cat** je kategorie, která má objekty malé kategorie a morfismy funktory. Proč pouze malé kategorie? Malá kategorie má množinu objektů a množinu morfismů. Všechny malé kategorie pak tvoří třídu. Ale všechny velké kategorie tvoří soubor všech tříd, což není třída.

Kategorie **Cat** nám ukazuje souvislost mezi součinem kategorií (definice 1.5.) a součinem objektů v kategorii (definice 2.1.). Součin kategorií dostaneme tak, že uvažujeme kategorii **Cat** a provedeme součin jejích objektů.

Poznámka 3.4. Osou základů teorie kategorií je trojice kategorie - funktor - přirozená transformace. Funktor je zobrazení mezi kategoriemi a přirozená transformace je zobrazení mezi funktory. Historicky ovšem tyto pojmy přicházely na svět v opačném pořadí. První bylo pozorování přirozených transformací, jako určitých paralel mezi různými oblastmi matematiky. Poté přišlo zavedení funktorů a kategorií.

3.3 Přirozená transformace

Definice 3.5. Nechť $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ jsou kategorie a $F, G : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktory. *Přirozená transformace* $\varphi : F \to G$ je soubor morfismů v $\mathcal{L}$

$$(\varphi_A : F(A) \to G(A))_{A \in \mathcal{K}}$$

takových, že $\forall f : A \to B$ v $\mathcal{K}$ komutuje následující diagram.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

Příklad 3.6.
1) Nechť id_{Set} : **Set** $\to$ **Set** je identický funktor a M : **Set** $\to$ **Set** je funktor, který každé množině X přiřadí nosnou množinu volného monoidu $M(X)$. Pak můžeme definovat přirozenou transformaci $\eta : id_{Set} \to M$ tak, že každá složka $\eta_X : X \to M(X)$ je vložení generátorů, tak jak je známe z definice 1.19. Morfismus $M(f)$ je totiž zcela určen tím, jak se chová morfismus f.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & M(A) \arrow[d, "M(f)"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"'] & M(B)
\end{tikzcd}$$

2) Mějme funktor $Hom(-, \mathbf{2})$: **Set** $\to$ **Set**, kde $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, a funktor P, který každé množině přiřadí množinu jejích podmnožin. Přirozenou transformaci φ mezi těmito funktory definujeme takto: φ_X je zobrazení, které funkci $g : X \to \mathbf{2}$ přiřadí množinu $\{x_1, \ldots, x_n\}$, kde $x_1, \ldots, x_n \in X$ takové, pro které platí

$$g(x_1) = 1, \ldots, g(x_n) = 1.$$

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, \mathbf{2}) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "Hom(f{,}\mathbf{2})"'] & P(A) \arrow[d, "P(f)"] \\
Hom(B, \mathbf{2}) \arrow[r, "\varphi_B"'] & P(B)
\end{tikzcd}$$

3) Mějme zapomínající funktor $U : \mathbf{Pos} \to \mathbf{Set}$ a reprezentovatelný funktor $Hom(\mathbf{1}, -) : \mathbf{Pos} \to \mathbf{Set}$, kde $\mathbf{1} = \{0\}$ je jednoprvková uspořádaná množina. Definujeme přirozenou transformaci $\varphi : U \to Hom(\mathbf{1}, -)$. Pro každou uspořádanou množinu A a každý prvek $x \in A$ definujeme morfismus $h_x : \mathbf{1} \to A$ předpisem $h_x(0) = x$.

Zobrazení φ_A definujeme takto:

$$\varphi_A(x) = h_x \quad \forall x \in A.$$

Ověříme, že pro každé izotonní zobrazení $f : A \to B$ komutuje diagram

$$\begin{tikzcd} U(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "U(f)"'] & Hom(\mathbf{1}, A) \arrow[d, "Hom(\mathbf{1},f)"] \\ U(B) \arrow[r, "\varphi_B"'] & Hom(\mathbf{1}, B) \end{tikzcd}$$

Pro libovolné $x \in U(A)$ platí:

$$Hom(\mathbf{1}, f)(\varphi_A(x)) = Hom(\mathbf{1}, f)(h_x) = f \circ h_x$$

a dále

$$\varphi_B(U(f)(x)) = \varphi_B(f(x)) = h_{f(x)}.$$

Ovšem $f \circ h_x$ a $h_{f(x)}$ jsou obě zobrazení z množiny $\{0\}$ taková, že $(f \circ h_x)(0) = f(x) = h_{f(x)}(0)$.

Kapitola 4

Limity

4.1 Ekvalizátor a koekvalizátor

V této části se nejprve seznámíme s pojmem ekvalizátor.

Definice 4.1. Mějme kategorii $\mathcal{K}$ a v ní dvojici morfismů f, g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Ekvalizátor morfismů f a g je objekt E s morfismem $e : E \to A$ takový, že

$$f \circ e = g \circ e,$$

s univerzální vlastností: pro každý morfismus $z : Z \to A$ takový, že $f \circ z = g \circ z$ existuje jediný morfismus $u : Z \to E$ tak, že $e \circ u = z$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

Příklad 4.2.
1) Mějme morfismy $f, g : A \to B$ v **Set**. Jejich ekvalizátorem je množina $I = \{x \in A | f(x) = g(x)\}$ a vnoření $i : I \to A$ dané předpisem $i(x) = x$ pro všechna $x \in I$.

Ukažme univerzální vlastnost. Nechť $z : Z \to A$ je zobrazení, pro které platí $f \circ z = g \circ z$. Pak $z(x) \in I$ pro všechna $x \in Z$, tudíž existuje zobrazení $z' : Z \to I$ takové, že $i \circ z' = z$. Ukážeme, že je jediné. Nechť $z'' : Z \to I$ je také zobrazení, pro které platí $i \circ z'' = z$. Pak platí $i \circ z' = i \circ z''$. Ale i je monomorfismus (viz věta 1.12.). Tedy $z'' = z'$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, dotted, shift left, "z'"] \arrow[u, dotted, shift right, "z''"'] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

2) Mějme morfismy $f, g : A \to B$ v kategorii **Mon**. Jak vypadá jejich ekvalizátor? Nejprve sestrojíme ekvalizátor $e : E \to A$ morfismů f, g v **Set**. Na množině $E \subseteq A$ definujeme operaci jako zúžení operace monoidu A. Snadno pak lze ověřit, že e je homomorfismus monoidů a tudíž ekvalizátor morfismů f, g v **Mon**.

Obdobně se postupuje při konstrukci ekvalizátoru například v **Pos** nebo v kategorii grup.

Předchozí příklad nám ukazuje, že v **Set** je ekvalizátor zároveň monomorfismus. Toto platí dokonce v libovolné kategorii.

Věta 4.3. *Nechť $e : E \to A$ je ekvalizátor v libovolné kategorii, pak e je monomorfismus.*

Důkaz. Uvažme diagram

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Z \arrow[u, shift left, "x"] \arrow[u, shift right, "y"'] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

kde e je ekvalizátor morfismů f a g. Předpokládáme, že $e \circ x = e \circ y$ a chceme dokázat, že pak $x = y$. Nechť $z = e \circ x = e \circ y$. Pak $f \circ z = f \circ (e \circ x) = g \circ (e \circ x) = g \circ z$, tudíž existuje jediný morfismus $u : Z \to E$ tak, že $e \circ u = z$. Ale z $e \circ x = e \circ y = z$ plyne $x = u = y$. □

Nyní uvedeme duální pojem k ekvalizátoru - koekvalizátor. Můžeme si jej představit jako zobecnění rozkladu podle ekvivalence.

Definice 4.4. Mějme kategorii $\mathcal{K}$ a v ní dvojici morfismů f, g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B. \end{tikzcd}$$

Koekvalizátor morfismů f a g je objekt Q s morfismem $q : B \to Q$ takový, že

$$q \circ f = q \circ g,$$

s univerzální vlastností: pro každý morfismus $z : B \to Z$ takový, že $z \circ f = z \circ g$ existuje jediný morfismus $u : Q \to Z$ tak, že $u \circ q = z$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "z"'] & Q \arrow[d, dotted, "u"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Koekvalizátor v kategorii $\mathcal{K}$ je tedy právě ekvalizátor v $\mathcal{K}^{op}$ a proto ihned dostáváme následující tvrzení.

Věta 4.5. *Nechť $e : E \to A$ je koekvalizátor v libovolné kategorii, pak e je epimorfismus.*

Příklad 4.6. Mějme morfismy $f, g : A \to B$ v **Set**. Jejich koekvalizátorem je množina Q a zobrazení $q : B \to Q$, které pro všechna $x \in A$ prvkům $f(x)$ a $g(x)$ přiřadí stejný obraz v Q - třídu $[f(x)]$. Zobrazení q tedy zadává rozklad podle ekvivalence $E = \{(f(x_1), g(x_1)), (f(x_2), g(x_2)), \dots\}$, kde $x_1, x_2, \dots$ jsou prvky A.

Pokud máme zobrazení $z : B \to Z$ splňující $z \circ f = z \circ g$, tak je to také rozklad množiny B podle nějaké ekvivalence E'. Přičemž jistě platí $E \subseteq E'$. Promyslete si, jak bude vypadat morfismus $u : Q \to Z$ a proč je jediný splňující $u \circ q = z$.

4.2 Pullback a pushout

Definice 4.7. Mějme kategorii $\mathcal{K}$ a v ní dvojici morfismů f, g

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Pullback morfismů f a g je objekt P s morfismy p_1 a p_2

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

takovými, že $f \circ p_1 = g \circ p_2$, s univerzální vlastností: Pro každé morfismy $z_1 : Z \to A$ a $z_2 : Z \to B$ splňující $f \circ z_1 = g \circ z_2$ existuje jediný morfismus $u : Z \to P$ takový, že $z_1 = p_1 \circ u$ a $z_2 = p_2 \circ u$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, "z_2"] \arrow[ddr, "z_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Poznámka 4.8. Tvrzením „kategorie $\mathcal{K}$ má součiny“ rozumíme, že pro každé dva objekty kategorie $\mathcal{K}$ existuje jejich součin. Analogicky je třeba chápat i výroky „kategorie má ekvalizátory“ apod.

Následující věta nám ukazuje, že pullback můžeme sestrojit pomocí součinu a ekvalizátoru.

Věta 4.9. *Nechť $\mathcal{K}$ je kategorie, která má součiny a ekvalizátory. Mějme morfismy f a g v $\mathcal{K}$*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

a uvažme následující diagram

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "e_2"] \arrow[ddr, "e_1"'] & & \\
& A \times B \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

kde e je ekvalizátor morfismů $f \circ p_1$ a $g \circ p_2$ a platí $e_1 = p_1 \circ e$, $e_2 = p_2 \circ e$. Pak E, e_1, e_2 je pullback morfismů f a g.

Důkaz. Podmínka $f \circ e_1 = g \circ e_2$ je zřejmě splněna. Mějme diagram

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "z_2"] \arrow[d, "z_1"'] & B \\
A &
\end{tikzcd}$$

splňující $f \circ z_1 = g \circ z_2$. Podle univerzální vlastnosti součinu $A \times B$ existuje jediný morfismus $v : Z \to A \times B$ tak, že platí $p_1 \circ v = z_1$, $p_2 \circ v = z_2$. Z toho plyne

$$f \circ (p_1 \circ v) = g \circ (p_2 \circ v).$$

Podle univerzální vlastnosti ekvalizátoru e zase existuje jediný morfismus $u : Z \to E$ tak, že

$$e \circ u = v.$$

Tudíž

$$e_1 \circ u = p_1 \circ e \circ u = p_1 \circ v = z_1,$$

$$e_2 \circ u = p_2 \circ e \circ u = p_2 \circ v = z_2.$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "u"] \arrow[drrr, bend left, "z_2"] \arrow[ddrr, bend right, "z_1"'] & & & \\
& E \arrow[dr, "e"] \arrow[drr, "e_2"] \arrow[ddr, "e_1"'] & & \\
& & A \times B \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& & A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Jestliže pro jiný morfismus $u' : Z \to E$ platí $e_1 \circ u' = z_1$ a $e_2 \circ u' = z_2$, pak rovněž platí

$$p_1 \circ e \circ u' = z_1$$

$$p_2 \circ e \circ u' = z_2$$

tedy $e \circ u' = v = e \circ u$ a z toho plyne $u = u'$, neboť e je monomorfismus. □

Příklad 4.10. Pullback morfismů f, g

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

v kategorii **Set** je množina

$$P = \{(x, y) \in A \times B | f(x) = g(y)\}$$

spolu s morfismy $p_1 : P \to A$ a $p_2 : P \to B$ definovanými pro všechny $(x, y) \in P$ předpisy $p_1((x, y)) = x$, $p_2((x, y)) = y$. Pro každý prvek $(x, y) \in P$ totiž platí

$$(f \circ p_1)((x, y)) = f(x) = g(y) = (g \circ p_g)((x, y))$$

a pro libovolný komutující čtverec $f \circ z_1 = g \circ z_2$ z množiny Z a pro každý prvek $z \in Z$ je dvojice $(z_1(z), z_2(z))$ prvkem množiny P. Proto existuje právě jedno zobrazení $u : Z \to P$ s vlastností $p_1 \circ u = z_1$ a $p_2 \circ u = z_2$, totiž $u(z) = (z_1(z), z_2(z))$ pro všechna $z \in Z$.

Duální pojem k pullbacku se nazývá pushout. Pro úplnost uvedeme i jeho definici.

Definice 4.11. Mějme kategorii $\mathcal{K}$ a v ní dvojici morfismů f, g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B & \end{tikzcd}$$

Pushout morfismů f a g je objekt Q s morfismy q_1 a q_2

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "q_2"] \\ B \arrow[r, "q_1"'] & Q \end{tikzcd}$$

takovými, že $q_1 \circ f = q_2 \circ g$, s univerzální vlastností: Pro každé morfismy $z_1 : B \to Z$ a $z_2 : C \to Z$ splňující $z_1 \circ f = z_2 \circ g$ existuje jediný morfismus $u : Q \to Z$ takový, že $u \circ q_1 = z_1$ a $u \circ q_2 = z_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "q_2"'] \arrow[ddr, "z_2"] & \\ B \arrow[r, "q_1"] \arrow[drr, "z_1"'] & Q \arrow[dr, dotted, "u"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

4.3 Diagram, kužel, limita

Terminální objekt, součin, ekvalizátor a pullback jsou všechno speciální případy limity, kterou si nyní definujeme. Nejdřív ale musíme zavést několik přípravných pojmů.

Diagram jako soubor objektů v kategorii spolu se souborem morfismů mezi nimi jsme už používali dříve. Nyní definujeme diagram formálně jako funktor.

Definice 4.12. Nechť $\mathcal{I}$ je malá kategorie a $\mathcal{K}$ je kategorie. *Diagram* typu $\mathcal{I} \to \mathcal{K}$ je funktor

$$D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}.$$

Objekty v indexové kategorii $\mathcal{I}$ budeme značit $i, j, \ldots$ a jejich obrazy v zobrazení D označíme $D_i, D_j, \ldots$

Definice 4.13. *Kužel* diagramu $D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ je objekt $A \in \mathcal{K}$ a soubor morfismů v $\mathcal{K}$

$$a_i : A \to D_i, \quad i \in \mathcal{I},$$

takových, že pro každý morfismus $\alpha : i \to j$ v $\mathcal{I}$ platí

$$D_\alpha \circ a_i = a_j.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "a_j"'] & D_j \\ D_i \arrow[ur, "D_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Definujme morfismus kuželů jako zobrazení

$$\vartheta : (A, a_i) \to (B, b_i)$$

takové, že trojúhelník

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[dr, "a_i"'] & B \arrow[d, "b_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

komutuje pro všechna $i \in \mathcal{I}$. Tím získáme kategorii $\mathbf{Cone}(D)$ kuželů diagramu D.

Poznámka 4.14. Diagram si představujeme jako rovinný obrazec. Kužel diagramu je pak jehlan, který má diagram za svou základnu. A morfismus kuželů je zobrazení mezi vrcholy jehlanů.

Definice 4.15. *Limita* diagramu $D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ je terminální objekt v kategorii $\mathbf{Cone}(D)$.

Příklad 4.16.
1) Nechť $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ je kategorie s dvěma objekty, která nemá žádné neidentické morfismy. Diagram $D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ je dvojice objektů $D_1, D_2 \in \mathcal{K}$. Kužel diagramu D je objekt $A \in \mathcal{K}$ spolu s morfismy

$$\begin{tikzcd} D_1 & A \arrow[l, "a_1"'] \arrow[r, "a_2"] & D_2 \end{tikzcd}.$$

Limita diagramu D je terminální objekt v kategorii těchto kuželů. To je ale právě součin objektů D_1 a D_2 v kategorii $\mathcal{K}$.

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "a'_1"'] \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dr, "a'_2"] & \\ D_1 & D_1 \times D_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & D_2 \end{tikzcd}$$

2) Nechť $\mathcal{I}$ je kategorie se dvěma objekty a dvěma morfismy

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2. \end{tikzcd}$$

Diagram typu $\mathcal{I} \to \mathcal{K}$ vypadá takto:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, shift left, "D_\alpha"] \arrow[r, shift right, "D_\beta"'] & D_2 \end{tikzcd}$$

a kužel je objekt s dvojicí morfismů

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, shift left, "D_\alpha"] \arrow[r, shift right, "D_\beta"'] & D_2 \\ A \arrow[u, "a_1"] \arrow[ur, "a_2"'] & \end{tikzcd}$$

takovou, že $D_\alpha \circ a_1 = a_2$ a $D_\beta \circ a_1 = a_2$ tedy $D_\alpha \circ a_1 = D_\beta \circ a_1$. Limita diagramu D je tedy v tomto případě ekvalizátor morfismů D_α, D_β.

3) Nechť $\mathcal{I}$ je prázdná kategorie, pak existuje pouze jeden diagram $D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ a tím je prázdné zobrazení. Kužely diagramu D jsou tedy právě objekty kategorie $\mathcal{K}$. Limita diagramu D je proto terminální objekt v $\mathcal{K}$.

4) Mějme kategorii $\mathcal{I}$ s objekty 1, 2, 3 a morfismy viz obrázek.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & 3 \end{tikzcd}$$

Limita diagramu

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

je pullback morfismů f a g.

Ke kuželům a limitám existují samozřejmě také duální pojmy - kokužely a kolimity. Příklady kolimit pak jsou iniciální objekt, součet objektů, koekvalizátor a pushout.

Ve větě 4.9. jsme ukázali, že pullback lze sestrojit pomocí ekvalizátorů a součinů. Nyní na závěr dokážeme, že tímto způsobem je možné konstruovat libovolnou limitu. Pro nekonečné limity potřebujeme nekonečné součiny, proto nejdřív definujeme je.

Definice 4.17. Součin objektů A_i, $i \in I$ v kategorii je objekt P a soubor morfismů $p_i : A \to A_i$, $i \in I$ s touto univerzální vlastností: Pro každý objekt X a každý soubor morfismů $f_i : X \to A_i$, $i \in I$, existuje jediný morfismus $f : B \to A$ tak, že $f_i = p_i \circ f$ pro všechna $i \in I$.

Pro součin používáme označení $\prod_{i \in I} A_i$.

Věta 4.18. *Kategorie má limity právě tehdy, když má součiny a ekvalizátory.*

Důkaz. V předchozím příkladu jsme ukázali, že součin i ekvalizátor lze zkonstruovat pomocí limity. Nyní zbývá dokázat, že naopak limitu můžeme sestrojit pomocí součinů a ekvalizátorů.

Mějme diagram $D : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ a uvažme následující součiny

$$\prod_{i \in ob(\mathcal{I})} D_i \quad , \qquad \prod_{(\alpha : i \to j) \in Hom(\mathcal{I})} D_j .$$

Definujeme morfismy φ, ψ

$$\prod_i D_i \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha : i \to j} D_j$$

tak, že jejich kompozice s projekcemi p_α z druhého součinu jsou

$$p_\alpha \circ \varphi = \varphi_\alpha = p_j$$

$$p_\alpha \circ \psi = \psi_\alpha = D_\alpha \circ p_i$$

kde p_j a p_i jsou projekce z prvního součinu a $\alpha : i \to j$.

Nyní uvažme ekvalizátor

$$E \xrightarrow{e} \prod_i D_i \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha : i \to j} D_j .$$

Dokážeme, že (E, e_i) je limita diagramu D, kde $e_i = p_i \circ e$. Vezmeme libovolný morfismus $c : C \to \prod_i D_i$ a označíme $c_i = p_i \circ c$. Všimněme si, že soubor morfismů $(c_i : C \to D_i)$ je kužel diagramu D právě tehdy, když $\varphi \circ c = \psi \circ c$. Platí totiž:

$$\varphi \circ c = \psi \circ c$$

právě tehdy, když pro všechna α

$$p_\alpha \circ \varphi \circ c = p_\alpha \circ \psi \circ c.$$

Ale

$$p_\alpha \circ \varphi \circ c = \varphi_\alpha \circ c = p_j \circ c = c_j$$

a

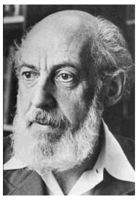
$$p_\alpha \circ \psi \circ c = \psi_\alpha \circ c = D_\alpha \circ p_i \circ c = D_\alpha \circ c_i.$$

Dostali jsme tedy, že $\varphi \circ c = \psi \circ c$ právě tehdy, když pro všechna $\alpha : i \to j$ platí $c_j = D_\alpha \circ c_i$, jinými slovy právě tehdy, když $(c_i : C \to D_i)$ je kužel.

Z toho plyne, že (E, e_i) je kužel a že každý kužel $(c_i : C \to D_i)$ určuje morfismus $c : C \to \prod_i D_i$ splňující $\varphi \circ c = \psi \circ c$. Tudíž existuje jediná faktorizace $u : C \to E$ zobrazení c podle E, která je zřejmě morfismem kuželů. $\square$

Biografie

Samuel Eilenberg (1913 – 1998)



Samuel Eilenberg se narodil ve Varšavě a studoval na místní univerzitě. Jeho zájem se brzy soustředil na obecnou topologii - oblast, která byla v té době předmětem bádání mnoha varšavských matematiků. V roce 1936 získal pod vedením Karola Borsuka doktorát disertační prací na téma topologie roviny.

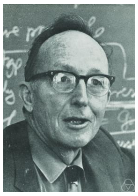
Roku 1939 Eilenberga jeho otec přesvědčil, aby emigroval do Spojených států. Nejprve krátce působil na univerzitě v Princetonu, poté začal vyučovat na Michiganské univerzitě a od roku 1947 až do konce kariéry působil v New Yorku na Columbia University.

Eilenberg byl velmi společenský člověk a to se také odrazilo ve způsobu jeho práce - většina jeho díla vznikla ve spolupráci s dalšími matematiky. Jedna z velice plodných spoluprácí byla také ta s Mac Lanem. Poprvé se setkali roku 1940 a do roku 1954 tato dvojice publikovala celkem 15 prací zabývajících se celou řadou témat - teorií kategorií, kohomologií grup, vztahy mezi homologií a homotopií atd.

Samuel Eilenberg byl také nadšeným sběratelem umění. Zajímal se obzvláště o umělecká díla z jihovýchodní Asie. Byl v tomto směru uznávaným odborníkem a majitelem jedné z nejvýznamějších světových sbírek.

Za své dílo obdržel řadu ocenění. Za všechny uveďme Wolfovu cenu, kterou získal roku 1986.

Saunders Mac Lane (1909 - 2005)



Saunders Mac Lane se narodil ve státě Connecticut v USA. Studoval na Yaleově univerzitě a univerzitě v Chicagu. Poté se vydal do Göttingenu v Německu (jedno z nejvýznamnějších center matematiky na světě). Zde získal doktorát, ale po nástupu nacistů k moci v roce 1933 se musel vrátit zpět. Po návratu působil na výše zmíněných univerzitách a také na Harvard university a Cornell university.

Mac Lane se zabýval širokým okruhem témat od algebry a topologie až po logiku a filozofii matematiky. Známá je kniha Survey of modern algebra, kterou napsal roku 1941 spolu s G. Birkhoffem a která měla velký vliv na výuku algebry. Další jeho významné dílo je práce Categories for the Working Mathematician (1971). Ta dodnes zůstává nejlepším úvodem do teorie kategorií.

Literatura

[1] AWODEY, Steve. *Category Theory.* New York : Oxford University Press, 2006. 256 s. ISBN 978-0-19-856861-2.

[2] ADÁMEK, Jiří. *Matematické struktury a kategorie.* Vydání první. Praha : SNTL, 1982. 272 s.

[3] BORCEUX, Francis. *Handbook of Categorical Algebra 1 : Basic Category Theory.* Cambridge : Cambridge University Press, 1994. xv, 345 s. ISBN 0-521-44178-1.

[4] O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund. *MacTutor History of Mathematics* [online]. 2004, April 2011 [cit. 2011-05-20]. Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>.