

令和元年6月24日現在

機関番号：21201

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2015～2018

課題番号：15K13446

研究課題名（和文）非可換確率論の基本構造 - 独立性概念の構成と分類

研究課題名（英文）Basic Structures in Noncommutative Probability Theory: Towards Construction and Classification of Notions of Independence

研究代表者

村木 尚文 (Muraki, Naofumi)

岩手県立大学・総合政策学部・教授

研究者番号：60229979

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：幾何学の領域において非ユークリッド幾何学の発見が「いろいろな幾何学たち」の存在という観点をもたらしたことはよく知られている。本研究では「非可換な世界」（物理的には量子論と関係する）という設定の下で、「確率論の領域においても『いろいろな確率論たち』が存在するであろうか、もし存在するのであればその具体例を構成せよ」という問題に対して、新しい独立性概念の構成という観点からアプローチした。その結果、 q 変形独立性、捻じれ独立性という新しい独立性に基づいた2つの新しい「確率論」の諸定理を得ることができた。また、相互作用フォック空間のパラメータの典型的な値に対して、独立性概念の存在の不可能性定理を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非可換な世界（物理的には量子論と関係する）においては、通常確率論の他に、それとはパラレルな関係にある複数の確率論たちが（数学的に）併存していることを、具体例（ q 変形確率論と捻じれ確率論）を構成することにより示した。特に、捻じれ確率論は、近年量子コンピュータの数学理論で注目を集めてるエニオンという仮想粒子と関係していると考えられる。純粋数学での成果ではあるが情報化社会の基盤的問題ともリンクしている。

研究成果の概要（英文）：We studied two examples of noncommutative probability theory. One is the extension, to the unbounded case, of the q -deformed probability theory which was previously studied in the bounded case by the author. The other is the twisted probability theory based on the twisted independence. Here the twisted independence for non-commutative random variables is based on the twisted canonical anti-commutation relations of W. Pusz. Besides these results we proved the no-go theorem for the existence of a notion of independence, to the case of the non-trivial values in the deformation parameter associated with the interacting Fock spaces of one-mode type.

研究分野：非可換確率論

キーワード：非可換確率論 量子確率論 独立性 自由独立性 q 変形独立性 捻じれ独立性 キュムラント 相互作用フォック空間

1. 研究開始当初の背景

ここ数十年の間に非可換確率論(量子確率論)と呼ばれる数学の1分野が発展してきている。特に、80年代にヴォイクレスクが自由確率論という自由独立性の概念に基づいた新種の確率論を発見し、そのランダム行列の理論との関係を見出して以来大きな注目を浴びている。ヴォイクレスクの理論においては、自由独立性という、古典確率論における確率変数の古典独立性の概念にパラレルなしかもそのある種の非可換類化になっている概念にすべての基礎がおかれている。ここで、古典独立性の概念を、自由独立性以外のさらに新たな独立性概念に取り替えることにより、古典確率論や自由確率論とパラレルなさらに新しい確率論を構成できる可能性があるというアイデアに自然に導かれる。筆者は、90年代に行った単調フォック空間の研究にも基づいて、2000年ごろに単調独立性という新しい非可換独立性の概念を発見し、単調確率論の展開を試み、単調中心極限定理、単調少数の法則、単調たたみこみ、単調レヴィ・ヒンチン公式等を得た。その後、2002年に、結合的な独立性概念についての分類定理を証明し、そのような独立性概念は、古典独立性、自由独立性、プール独立性、単調独立性、反単調独立性の5つに限ることを示した。しかし、この分類定理では、例えば、その存在が自然に期待される「フェルミ独立性」のような概念の存在が排除されている。そこで、筆者は、上記の分類定理における「独立性概念」の定式化を弱めることにより、さらに多くの独立性概念を構成できるのではないかとこの観点にたどりついた。

2. 研究の目的

背景の項に記したように、「独立性概念」の定式化を弱めることにより、新しい独立性を見出し、さらにはその独立性概念に基づいた「(非可換)確率論」を展開することが本研究の目的である。そもそも(非可換な舞台設定も含めた上での一般概念としての)「確率論」という言葉が何を指すかについて確立されているわけではないが、ここでは、非可換確率空間(C^* 確率空間や W^* 確率空間など)に対する普遍積としての(一般化された)テンソル積演算の存在と、それに対応する(確率変数の)混合モーメントの分解規則としての独立性概念の存在することを条件に「確率論」ということばを流用して用いる。実際、多くの場合、独立性の概念が存在してさえいれば、それに基づいて、中心極限定理、少数の法則、畳み込み、無限分解可能分布、レヴィ過程等の理論を展開できることが経験上わかっている。そこで、何はともあれ、新しい独立性の概念を構成することが問題となる。本研究においても、普遍積の存在と独立性概念(分解規則)の存在は結果的にほぼ等価になっている。

3. 研究の方法

古典確率論におけるもっとも基本的な確率過程であるブラウン運動(Wiener過程)は、量子論において生成消滅する粒子を記述するための空間であるボソンフォック空間と密接に関係している(Wiener-Ito-Segal同型)。また、ヴォイクレスクの自由確率論においては、自由ブラウン運動の概念は、自由フォック空間(全フォック空間)と密接に関係している。そこで、何らかの意味での新しいフォック空間の構造があれば、新しい非可換ブラウン運動が構成でき、それに基づいて新しい確率論を構成できるのではないかと期待するのは自然なことである。筆者は、ここ10数年近くの間、Bozejko-Speicherの q 変形フォック空間を取り上げ、これに付随する普遍積を構成する問題を手掛けてきた(q 変形フォック空間は、ボソンフォック空間と自由フォック空間を補間する空間である)。有界な確率空間(C^* 確率空間など)の場合には、普遍積を構成でき、中心極限定理等の確率論の基本定理をある程度展開できることを示してきた。そこで、まずは、これらの成果を非有界な状況も含めた形で一般的な形で定式化しその性質を探求する。また、Bozejko-Speicherの q 変形フォック空間とは別の概念として、Puszの捻じれフォック空間がある(これは、ボソンフォック空間とフェルミオンフォック空間を補間する空間であり、Woronowiczの量子群と関係している)。そこで、この捻じれフォック空間に基づいて、捻じれ独立性を定式化し、その性質を探求する。さらに、量子確率論の分野で知られているAccardi-Bozejkoの相互作用フォック空間に基づいて、新しい独立性概念の探求にアプローチする。

4. 研究成果

筆者は、2003年頃より長らく非結合的な独立性概念の構成の研究を行ってきた。科研費による本研究(平成27年度~30年度)も、その研究プログラムの実現の一部である。

本研究の成果は次の3つの項に分けられる。すなわち、(1) q 変形独立性に関するもの;(2)捻じれ独立性に関するもの;(3)相互作用フォック空間と普遍的独立性;の3つである。

(1) q 変形独立性 :

筆者は、近年、新しい独立性概念の候補として q 変形独立性の概念を見出し、その性質を主に有界作用素の出現する状況 (C^* 確率空間) を中心に調べてきた。この q 変形独立性の構成については、Speicher の定義による普遍計算規則という意味での独立性概念から結合法則の要請を落とした形で、この独立性概念を一般的に構成できたと考えていた。しかし、非可換確率変数が非有界である場合については、細部について詰めが甘い部分があったため、その細部について厳密な証明を与える作業を行った。今後も論理的に詰める作業を引き続き行う予定である。また、この q 変形独立性概念を出発点として、古典確率論の幾つかの基本概念を q 変形することを試み、特に、 q 変形畳み込みについて、結合法則や、レヴィ = ヒンチン型の表現定理、そして極限定理について一般的に探求した。これらの性質は、確率測度の台がコンパクトな場合には成立することが以前の研究ですでに分かっている。そこで確率測度の台が非コンパクトな場合について、これらの結果を拡張することを試みたものである。確率測度の台がコンパクトである場合には、モーメント問題が determinate となるため q 変形畳み込みを確率測度として定義できる。しかしながら、モーメント問題が determinate でない場合は、組合せ論的な方法では q 畳み込みを定義できないため別の方法を工夫する必要がある。この問題意識の元で、2 次のモーメントが有限な確率測度に対して q 畳み込みを定義することを試みた。この議論がうまくいくかどうか未知の部分もあるため、もう少し詳しく調べることが必要である。

(2) 捻じれ独立性 :

q 変形独立性に加えて、新たな独立性概念の例として、捻じれ独立性を構成した。捻じれ独立性は、Pusz の捻じれ正準反交換関係と捻じれフォック空間との概念を利用することにより構成できる。Pusz の捩れ正準反交換関係を利用することにより、 C^* 確率空間の任意の族に対して、ある種のテンソル積 (捩れ積) を構成することができる。この捩れ積は、通常のテンソル積をその特別な場合として含むものであり、テンソル積から通常の独立性概念を導くことができるように捩れ積から捩れ独立性の概念を導くことができる。この捩れ積と捩れ独立性の概念から導かれる確率論的な構造について研究を推し進め、その結果、有界な非可換確率変数たちに対して、捩れガウス分布と捩れ中心極限定理、捩れポアソン分布と捩れ少数の法則を見出した。また、数直線上のコンパクト台の確率測度に対して、捩れ畳み込み、捩れキュムラント等を構成できることを見出した。この捻じれ独立性の概念は、量子コンピュータの理論で注目を集めているエニオンという仮想粒子と関係があるものと期待している。

(3) 相互作用フォック空間と普遍積の関係 (no-go 定理) :

将来の独立性概念の一般論の構築を念頭に置き、上記の 1 径数変形 Fock 空間たちとは少し毛色の異なる空間として、Accardi-Bożejko の (1-モード型) 相互作用 Fock 空間を取り上げ、これがいつ独立性の概念を持つのかその条件について調べた。その結果、相互作用フォック空間は無限個のパラメータ持っているがそのほとんどの値について、相互作用フォック空間はどんな普遍積からの汎関数中心極限としても生じないことがわかった。このことは、相互作用 Fock 空間は一般には独立性を持ってないことを意味している。また、さらに研究を推し進めた結果、相互作用 Fock 空間は、普遍積の概念を弱め射に関する * 同型という条件を弱めてやれば、この弱い意味での独立性概念に関しては、その構成可能性についての肯定的な感触を得た。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 5 件)

N. Muraki, Monotone convolution, Probabilistic Operator Algebra Seminar, 2018 年 1 月 29 日 (Berkeley, アメリカ)

N. Muraki, Twisted independence for non-commutative random variables, Extended Probabilistic Operator Algebra Seminar, 2017 年 11 月 10 日 (Berkeley, アメリカ)

N. Muraki, Twisted canonical anti-commutation relations and twisted independence, Probabilistic Operator Algebra Seminar, 2017 年 9 月 18 日 (Berkeley, アメリカ)

N. Muraki, q -Deformation of free independence, The George Boole Mathematical Sciences (GBMS) Conference, 2015 年 8 月 19 日 (Cork, アイルランド)

N. Muraki, q -Convolution, its impossibility and possibility, Non-Commutative/Discrete Harmonic Analysis Seminar, 2015 年 4 月 2 日 (Wroclaw, ポ

ーランド)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。