Integral de línea

Apellidos, nombre	Martínez Molada Eulalia, (eumarti@mat.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada
Centro	Escuela Técnica Superior Ingenieros de Telecomunicación

1. Resumen de las ideas clave

En este artículo se presenta el tema Integral de línea como parte del análisis vectorial de la asignatuta de Matemáticas III que se imparte en el Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. El tema está estructurado como sigue:

Contenidos de este artículo
1. Introducción.
2. Objetivos.
3. Introducción teórica a las integrales de línea.
4. Ejercicios.
5. Cierre.

Tabla 1: Contenidos del artículo

2. Introducción

Una integral de línea o curvilínea es aquella integral cuya función es evaluada sobre una curva definida en el plano o en el espacio. Ejemplos prácticos de su utilización pueden ser:

1. El cálculo de la longitud de una curva en el plano o en el espacio.
2. El cálculo del trabajo que se realiza para mover un objeto a lo largo de una trayectoria teniendo en cuenta campos de fuerzas (descritos por campos vectoriales) que actúen sobre el mismo.
3. Cuando nos referimos a un sistema cuya masa está distribuida de forma continua en una región del plano, los conceptos de masa, centro de gravedad y momentos se definen mediante integrales en línea.

3. Objetivos

Un primer objetivo es que el alumno aprenda a parametrizar curvas, tanto en el plano como en el espacio tridimensional. En primer lugar se trata de identificar la gráfica de curvas clásicas como las parábolas, las circunferencias y elipses, las hipérbolas, así como las curvas dadas por intersección de distintas superficies.
A continuación se abordará el concepto de campo escalar definido sobre una curva e integral de este tipo de campos sobre curvas para obtener elementos físicos importantes como masa de varillas finas, centros de masas y distintos momentos.
Finalmente el cáculo de la integral de línea para el caso de un campo vectorial culminará el tema obteniendo resultados a cerca del trabajo necesario para despalzar un objeto sobre una trayectoria sometida a un campo de fuerzas. En este momento se abordará el concepto de campo vectorial conservativo y se darán todas las carecterizaciones sobre este resultado.
Los objetivos concretos son entender propiedades de los campos conservativos y aplicar los teoremas adecuados para resolver integrales de línea de un campo vectorial a lo largo de un curva así como interpretar geométricamente los datos del problema y los resultados.

4. Desarrollo

Para dar al articulo un énfasis práctico de cara a facilitar el seguimiento por parte del alumno, en primer lugar realizaremos un resumen de la teoría que servirá solo de guía para definir los conceptos y propiedades que los relacionen, pero que el alunmo tendrá que ampliar para profundizar en la materia. Nos centraremos a continuación en el desarrollo paso a paso de algunos problemas o ejercicicios representativos del tema que resolveremos en todos los casos suiguiendo los siguientes items:

1. **Planteamiento:** Organizamos los datos y calculamos la información necesaria para llevar a cabo la resolución del problema.

2. **Desarrollo:** Una vez tenemos todos los datos necesarios y con las propiedades de la integral de línea, procedemos a resolver la misma.

3. **Conclusión:** Observamos el resutado para comprovar que tiene sentido y extraemos conclusiones interpretando el mismo en el contexto en el que nos encontramos.

4.1. Resumen teórico

4.1.1. Curvas y longitud de curvas en R^2 o en R^3

Un *curva* en R^n, $n = 2, 3$ es una función $\alpha : [a, b] \to R^n$ continua. Los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman *extremos* de la curva. La imagen de α, $\alpha* = \alpha([a, b])$, se llama *trayectoria*. Si llamamos t a la variable, podemos imaginar t como el tiempo y $\alpha(t)$ como la posición de una partícula en movimiento en el tiempo t.
Si $\alpha(t)$ es derivable el vector $\alpha'(t)$ se denomina vector tangente a la curva en el punto $(t, \alpha(t))$ con $t \in [a, b]$, y va a proporcionar en todo momento valiosa informacion para trabajar con la curva.
Si $\alpha : [a, b] \to R^n$ es un curva derivable entonces su longitud, L, coincide con la integral de la norma del vector tangente en su intervalo de definición.

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt. \tag{1}$$

4.1.2. Integrales de línea

- **Integrales de línea de un campo escalar continuo**

  Sea $\alpha : [a, b] \to R^n$ una curva C^1 y $f : R^n \to R$ un campo escalar continuo, la integral de línea de f a lo largo de α se define como:

  $$\int_\alpha f \, d\alpha = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\| \, dt.$$

  Por lo tanto hemos de calcular la integral simple en el dominio de definición del parámetro que define la curva, $t \in [a, b]$, de la evaluación del campo escalar sobre la curva multiplicado por el módulo del vector tangente a la curva.

- **Integrales de línea de un campo vectorial continuo**

  Se define la integral de línea de un campo vectorial continuo $F : R^n \to R^n$ a lo largo de $\alpha : [a, b] \to R^n$, un curva C^1, como

$$\int_\alpha F\,d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt.$$

Por lo tanto hemos de calcular la integral simple en el dominio de definición del parámetro que define la curva, $t \in [a,b]$, del producto escalar del vector obtenido mediante la evaluación del campo vectorial sobre la curva por el vector tangente a la curva, por tanto la integral dará un escalar.

Otra notación común, que se usa sobretodo en física e ingeniería, para denotar la integral de línea sobre un campo vectorial F, definido en R^n como:

$$F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)),$$

viene dada por:

$$\int_\alpha F\,d\alpha = \int_a^b Mdx + Ndy + Pdz,$$

donde $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $dz = z'(t)dt$.

4.1.3. Campos conservativos

Dado un campo vectorial continuo $F : U \to R^n$, con $U \subseteq R^n$ abierto y simplemente conexo, se dice que es conservativo si existe $f : U \to R$ tal que

$$F = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Es decir, el campo vectorial F se puede expresar como el gradiente de un campo escalar f, que se denomina función potencial del campo F. En tal caso, las integrales de línea se evaluan fácilmente ya que sólo dependen de los extremos de la curva:

$$\int_\alpha F\,d\alpha = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

De este modo si tenemos en un curva α cerrada, su integral en línea sobre cualquier campo conservativo es nula. Además, como implicación contraria, F es un campo conservativo si la integral en línea sobre cualquier curva cerrada es nula.

Los campos conservativos son importantes en muchos problemas físicos, pues si $V = -f$ representa el potencial de energía, entonces F representa una fuerza. Los campos conservativos de clase C^1 en un abierto simplemente conexo (que no tenga agujeros) de R^3 se caracterízan fácilmente por la siguiente condición:

$$rot(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = (0,0,0).$$

Para un $U \subseteq R^n$ la condición sólo es necesaria. Los campos conservativos en un abierto U poseen una importante propiedad, que además también los caracteriza: si α_1 y α_2 son dos curvas C^1 en U, con los mismos puntos iniciales y finales, se tiene que:

$$\int_{\alpha_1} F\,ds = \int_{\alpha_2} F\,ds.$$

NOTA: Cualquier concepto relacionado con el resumen de teoría expuesto puede consultarse en las referencias bibliográficas que se citan al final de este artículo.

4.2. Ejercicios

Problema 1: Longitudes de curvas

(a) Calcula la longitud del arco de curva $y^2 = x^3$ que une los puntos $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

(b) Calcula la longitud del arco de curva parametrizada por:

$$\alpha(t) = t\vec{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\vec{j} + \frac{1}{2}t\vec{k} \text{ con } t \in [0, 2]$$

Solución (a)

Paso 1: Planteamiento

Ya que la curva es simétrica respecto al eje x, observemos su gráfica en la Figura 1, podemos calcular la longitud de una de las mitades simétricas y multiplicarla por 2. Una parametrización de la mitad es $\alpha(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$, con $t \in [0, 1]$ y, además el vector tangente viene dado por $\alpha'(t) = (1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})$.

Paso 2: Desarrollo

Aplicando la definición de longitud de una curva dada en (**??**) para este caso concreto, tenemos una integral inmediata, dada por:

$$L = 2\int_0^1 (1 + \frac{9}{4}t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{8}{9}\left[\frac{2(1 + \frac{9}{4}t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

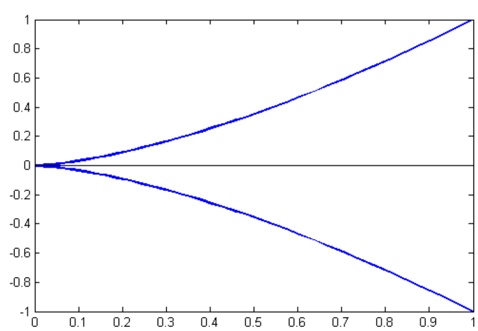

Figura 1: Representación gráfica de α

Paso 3: Conclusión

Utilizando la simetría de la curva se simplifica el planteamiento del problema. Finalmente podemos concluir que la longitud que buscábamos es $\frac{16}{27}\left(\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 2{,}879$.

Como podemos ver de la Figura 1, la curva se puede aproximar como las hipotenusas de dos triángulos rectángulos cuyos lados miden 1, en ambos casos. Entonces, cada hipotenusa mide $h = \sqrt{2}$, y por tanto, la suma de ambas da $2\sqrt{2} = 2{,}828$, que se aproxima al resultado de la longitud de la curva.

Solución (b)

Notemos que ahora la curva esta expresada con notación vectorial, pero del mismo obtendras su vector tangente $\alpha'(t)$ y aplicando la definición de longitud de una curva aplicada a este caso concreto, tendrás que la longitud del arco de curva es $\frac{1}{48}\left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right) \approx 4{,}4559$.

Problema 2: Integrales de línea sobre campos escalares

(a) Calcula $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})d\alpha$, siendo C la curva $y = \sqrt{x}$ de $(1,1)$ a $(4,2)$.

(b) Calcula $\int_C (x^2 + y^2)d\alpha$, siendo C la curva parametrizada por:

$$\boldsymbol{\alpha(t) = (2(cos(t) + tsin(t)), 2(sin(t) - tcos(t)),} \text{ con } \boldsymbol{t \in [0, 2\pi]}$$

Solución (a)

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

Se trata de una curva en el plano tendremos que evaluar el campo escalar sobre la curva por tanto en primer lugar es fundamental obtener la parametrizamos la curva C:

$$\alpha\colon \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [1,2]$$

Por tanto su vector tangente y la norma de éste viene dado por:

$$\alpha(t)' = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \end{cases} \implies \|\alpha(t)'\| = \sqrt{4t^2 + 1}$$

$\boxed{\textbf{Paso 2: Desarrollo}}$

Seguidamente aplicamos la definición de integral en línea sobre campos escalares para hacer el cálculo.

$$\int_1^2 \left(t^4t^3 - \sqrt{t^2}\right)\left(\sqrt{4t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^7 - t\right)\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$= \underbrace{\int_1^2 t^7\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t}_{(1)} - \underbrace{\int_1^2 t\sqrt{4t^2+1}}_{(2)}$$

En

$$(1)\colon \int t^7\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t =$$

Realizamos la primera integral como indefinida mediante un cambio de variable adecuado, y al finalizar desharemos el cambio de variable para calcular la integral definida.

$$\begin{cases} u = t^2 \\ \mathrm{d}v = 2t\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{2t} \end{cases}$$

Con lo cual

$$(1)\colon\ = \frac{1}{2}\int u^3\sqrt{4u+1}\mathrm{d}v =$$

de nuevo aplicando integración por sustitución

$$\begin{cases} v = 4u+1 \implies u = \frac{v-1}{4} \\ \mathrm{d}v = 4\mathrm{d}u \implies \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(1)\colon\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{4}(v-1)\right)^3\sqrt{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{64}\int (v-1)^3\sqrt{v}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{64}\int\left(v^{7/2} - 3v^{5/2} + 3v^{3/2} - \sqrt{v}\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{64}\left(\frac{2v^{9/2}}{9} - \frac{6v^{7/2}}{7} + \frac{6v^{5/2}}{5} - \frac{2v^{3/2}}{3}\right) =
\end{aligned}$$

deshaciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} v = 4u+1 \\ u = t^2 \end{cases}$$

$$(1)\colon\ = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{64}\left(\frac{2\left(4t^2+1\right)^{9/2}}{9} - \frac{6\left(4t^2+1\right)^{7/2}}{7} + \frac{6\left(4t^2+1\right)^{5/2}}{5} - \frac{2\left(4t^2+1\right)^{3/2}}{3}\right)$$

Por lo tanto la integral definida utilizando los límites tendríamos:

$$\int_1^2 t^7\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{144591\sqrt{17}}{5040} - \frac{115\sqrt{5}}{1908}$$

La segunda integral es inmediata y se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned}
(2)\colon\ -\int_1^2 t\sqrt{4t^2+1}dt &= -\left[\frac{2}{3}\frac{1}{8}\left(4t^2+1\right)^{3/2}\right]_1^2 \\
&= -\frac{2}{3}\frac{1}{8}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 17\sqrt{17}\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Paso 3: Conclusión}}$

Recopilamos todos los cáculos para obtener finalmente la integral en línea:

$$\int_1^2 t^7\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t - \int_1^2 t\sqrt{4t^2+1}\mathrm{d}t = \frac{305\sqrt{5}}{1008} + \frac{1648932\sqrt{17}}{60480}.$$

Notar que la integral (1) al realizar el cambio de variable pueden cambiarse directamente los límites de integración sin necesidad de tener que posteriormente deshacer el cambio de variable. Un ejercicio interesante para el lector consite en comprobar que de esta forma se obtiene el mismo resultado.

Solución (b)
En este apartado ya tenemos la curva parametrizada por tanto basta aplicar la definición y haciendo uso de las identidades trigonométricas, la integral en línea se simplifica notablemente y su valor final es $16\pi^2 + 32\pi^4$.

Problema 3: Integrales de línea sobre campos vectoriales

(a) **Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\boldsymbol{F(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo del segmento de recta de $\boldsymbol{(1,0,0)}$ a $\boldsymbol{(3,4,2)}$.**

(b) **Calcula la integral de línea sobre el campo vectorial, F sobre $\boldsymbol{C}$ la curva parametrizada por $\boldsymbol{\alpha(t) = (t^3, -t^2, t)}$, con $\boldsymbol{t \in [0,1]}$ y $\boldsymbol{F(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz)}$.**

(c) **Calcula la integral de línea $\int_C \boldsymbol{x^2 y dx + 2y dy + x dz}$ siendo $\boldsymbol{C}$ el arco de curva dado por la elipse $\boldsymbol{4x^2 + y^2 = 1}$ en $\boldsymbol{z = 0}$ con $\boldsymbol{x, y \geq 0}$.**

Solución (a)

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

F es un campo continuamente diferenciable en todo R^3, comprobamos que se trata de un campo conservativo:

$$(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (0,0,0)$$

ya que su rotacional es nulo. Por lo tanto podemos hallar su función potencial.

$\boxed{\textbf{Paso 2: Desarrollo}}$

El potencial de F ha de ser una función f tal que verifique:

$$F(x,y,z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (y+z, x+z, x+y)$$

Por lo tanto igualando componente a componente alculamos f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z \Rightarrow f(x,y,z) = \int y + z dx = (y+z)x + \phi(y,z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z$$

Sustituyendo la f de la primera ecuación en la segunda, nos queda:

$$x + \frac{\partial \phi(y,z)}{\partial y} = x + z \Rightarrow \phi(y,z) = zy + \varphi(z)$$

Por lo tanto $f(x,y,z) = (y+z)x + zy + \varphi(z)$, pero como $\frac{\partial f}{\partial z} = x + y$, $g(z) = cte$ necesariamente. Por lo tanto $f(x,y,z) = (y+z)x + zy + cte$.

$\boxed{\textbf{Paso 3: Conclusión}}$

Como el campo es conservativo se tiene que el trabajo será la diferencia de potencial en los dos extremos:

$$W = f(3,4,2) - f(1,0,0) = 26$$

Solución (b)

El trabajo para deplazar un objeto sobre esta curva sobre la que actúa el campo de fuerzas F es de $\frac{6}{5} - \cos(1) - \sin(1)$.
Solución (c)

La integral en línea da $1 - \frac{\pi}{128}$

Problema 4

Calcula la integral de línea sobre el campo vectorial, $\int_C (x+2)dx + 3zdy + y^2dz$ siendo C la curva intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2 = 1$ con $z = x-1$.

Solución

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

Comprobamos si el campo es conservativo sabiendo que $F(x,y,z) = (x+2, 3z, y^2)$:

$$rot(F)(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2 & 3z & y^2 \end{vmatrix} = (2y-3, 0, 0) \neq (0,0,0)$$

Por tanto, no es conservativo.
Sustituyendo $z = x-1$ en la ecuación de la primera superficie, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow 4(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1$$

Que se puede parametrizar de la forma:

$$\alpha(t) = (\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2})$$

Con vector tangente $\alpha'(t) = (-\frac{1}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), -\frac{1}{2}\sin(t))$
Y cuya representación gráfica dada por la Figura 3.

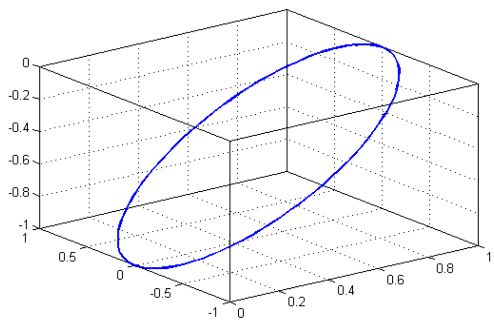

Figura 2: Curva α

Paso 2: Desarrollo

Para calcular la integral:

$$\int_C (x+2)dx + 3zdy + y^2 dz = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{5}{2})(-\frac{1}{2}\sin(t)) + (\frac{3}{2}\cos(t) - \frac{3}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)) + (\frac{1}{2}\sin^2(t))(-\frac{1}{2}\sin(t))dt$$

obtenemosla integral de cada sumando por separado:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{5}{2})(-\frac{1}{2}\sin(t))dt = \frac{-1}{8}\int_0^{2\pi} \sin(2t) + 10\sin(t)dt = 0$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2}\cos(t) - \frac{3}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t))dt = \frac{3\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt - \frac{3\sqrt{2}}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} cost(t)\, dt}_{=0}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}cos(2t)dt\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4}\sin^3(t)dt = 0$$

Paso 3: Conclusion

Finalmente recopilamos todos los cálculos:

$$\int_C (x+2)dx + 3zdy + y^2 dz = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

Además, observamos que como el campo no era conservativo hemos tenido que calcular la integral en línea por su definición.

Problema 5

(a) **Calcula el trabajo realizado por el campo $\boldsymbol{F(x,y,z) = (-\frac{y+z}{(x+z)^2}, \frac{1}{(x+z)}, \frac{x-y}{(x+z)^2})}$ al mover un objeto a lo largo de la trayectoria $\boldsymbol{\alpha(t) = (t, e^t, cos(t))}$, con $\boldsymbol{t \in [0,1]}$.**

(b) **Calcula el trabajo realizado por el campo $\boldsymbol{F(x,y) = (2y^{3/2}, 3x\sqrt{y})}$ al mover un objeto del punto $\boldsymbol{(1,1)}$ a $\boldsymbol{(2,4)}$.**

Solución (a)

$\boxed{\textbf{Paso 1: Planteamiento}}$

Eligiendo un dominio abierto y simplemente conexo donde el campo sea continuo y diferenciable y que contenga a los puntos dados, bastará con calcular las distintas derivadas parciales de las funciones coordenadas de F para ver si el campo es conservativo:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{1}{(x+z)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{2(y+z)(x+z)-(x+z)^2}{(x+z)^4} = \frac{(x+z)^2-2(x-y)(x+z)}{(x+z)^4} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{1}{(x+z)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Por tanto concluimos que F es un campo conservativo y procedemos a obtener su función potencial.

$\boxed{\textbf{Paso 2: Desarrollo}}$

Calculamos el potencial identificando componente a componente el gradiente de la función potencial con cada componente del campo y realizando los calculos oportunos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y+z}{(x+z)^2} \Rightarrow f = \int -\frac{y+z}{(x+z)^2}dx = -(y+z)\int \frac{dx}{(x+z)^2} = \frac{y+z}{x+z} + \varphi(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+z} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto, φ no depende de y.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(x+z)-(y+z)}{(x+z)^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Concluimos que $\varphi = C$.

$$f(x,y,z) = \frac{y+z}{x+z} + C$$

Y la evaluación de la función potencial sobre la curva es:

$$f(\alpha(t)) = \frac{e^t + \cos(t)}{t + \cos(t)} + C$$

$\boxed{\textbf{Paso 3: Conclusión}}$

Por trabajar en un campo conservativo el trabajo solo dependerá de los extremos de la curva.

$$W = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = \frac{e + \cos(1)}{1 + \cos(1)} - \frac{1 + \cos(0)}{\cos(0)} = \frac{e + \cos(1)}{1 + \cos(1)} - 2$$

Solución (b)

Como el campo es conservativo, se tiene que el trabajo será la diferencia del valor de f en los puntos $(2, 4)$ y $(1, 1)$:

$$W = f(2, 4) - f(1, 1) = 30$$

5. Cierre

En este tema se han obtenido longitudes de curvas en dominios finitos. Además hemos abordado el cálculo de integrales de linea sobre campos escalares . Por otra parte se ha calculado el trabajo necesario para despalzar un objeto sobre una trayectoria sometida a un campo de fuerzas. Si el campo vectorial es conservativo se han tenido en cuenta todas las carecterizaciones sobre este resultado.

6. Bibliografia

- Teoría y problemas de análisis vectorial (Néstor Javier Thome Coppo), ISBN: 9788483632291
- Cálculo vectorial (Jerrold E. Marsden.)
- Frank Ayres, Jr., Elliot Mendelson. Cálculo diferencial e integral. Editorial McGraww-Hill tercera edición. ISBN: 84-7615-560-3.
- J. Bonet, A. Peris, V. Calvo, F. Ródenas. Integració múltiple i vectorial. Editorial UPV. ISBN: 84-8363-048-6.
- James Stewart. Cálculo de varias variables. Conceptos y contextos, 4e. ISBN: 607-481-238-1.
- Calculus. Volumen II, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra líneal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades (Apostol, Tom M.)
- Div, grad, curl, and all that: an informal text on vector calculus (H. Schey.)