PROBLEMAS DE OLIMPIADA MATEMÁTICA

2019

SAEM THALES

Problemas de Olimpiada Matemática – 2019

AUTORES

Carmen María Aguilera Sillero

Gema de la Peña Domínguez Ponce

Francisco Miguel González Ternero

Dunia Lozano Méndez

Ricardo Ríos Collantes de Terán

Sagrario Panadero Ruiz

Inmaculada Romano Paguillo

Javier Ruiz Gómez

Ana Serradó Bayés

José Ignacio Tijeras Uclés

Iván Valero Terrón

EDITA:

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

c/ Tarfia s/n. (Facultad de Matemáticas)

41012 Sevilla

Correo electrónico: thales@cica.es thales.matematicas@uca.es

Página web: http://thales.cica.es

ISBN: 978-84-15641-02-5

Sevilla (España), 2020

Índice General

Prólogo

Un problema es una situación nueva, que requiere del análisis de la misma para obtener una respuesta válida que se ha creado, y que se pretende resolver. Durante todas las etapas educativas, tanto obligatorias como no, la finalidad de los contenidos, que se enseñan en los colegios, es la resolución de problemas, el planteamiento de situaciones reales donde se pretende averiguar algo, que en principio se desconoce.

La resolución de problemas es altamente motivadora, para esos alumnos que siempre se quedan con ganas de avanzar un poco más en matemáticas. El planteamiento de nuevas situaciones les anima a buscar estrategias para obtener la solución de los problemas. Cuando se logra resolver, se puede apreciar un alto grado de satisfacción en aquellos que lo consiguen.

A la hora de resolver un problema debemos reconocer, organizar, describir y analizar los elementos que tenemos del problema para poder obtener una solución aceptable al problema que se plantea. Concretamente, un problema matemático es una situación donde tras analizar los datos de los que se disponen, se ha de seguir unos ciertos pasos que puedan llevar a una respuesta coherente. En este recorrido, los pasos se pueden estandarizar, siendo a grandes rasgos los que siguen. La lectura y análisis del planteamiento. La elección del método para su resolución, como puede ser un método algebraico, gráfico, numérico, o una mezcla de varios a la vez. Un proceso escalonado de deducciones a partir de los datos del problema. La resolución matemática del problema, para así obtener una solución al mismo.

El análisis de la solución de un problema es muy interesante, quizás la clave para entender todo el proceso. A veces, el planteamiento del problema y la solución obtenida no se corresponden. No es lógico preguntar por la edad de mi hermano mayor, y que la solución obtenida sea 127. Si así fuera, habría que replantearse todo el procedimiento seguido hasta la obtención de la solución del problema.

Una finalidad de la resolución de problemas, es que los niños y niñas desarrollen la competencia, de ser capaces de reconstruir modelos mentales en sus esquemas de pensamiento. En el desarrollo de esta competencia, mejorarán la confianza en su propio pensamiento, en su capacidad para aprender, comprender y aplicar los conocimientos que desarrollarán.

El conjunto de problemas, que aquí se presentan, han formado parte de las pruebas individuales y de equipos de las Olimpiadas Matemáticas Thales, que ya ha celebrado su trigésimo quinta edición. La estructura que aquí se presenta es la siguiente:

- Un enunciado del problema, en el que se pretende que todo quede claramente expuesto, para que los competidores puedan afrontar el problema.
- Una resolución propuesta por el equipo de coordinación, que ha elaborado el libro.
- Un análisis del problema y sus resultados.
- Una relación de los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje a los que hace referencia los problemas planteados.

Es de destacar, que las soluciones propuestas en cada uno de los problemas no necesariamente son las únicas soluciones, ni tampoco la única vía de solución. Sería muy interesante que aquellos que tengan el libro en sus manos, fuesen capaces de encontrar soluciones y caminos diferentes para los problemas aquí planteados.

El libro que tienen en la mano consta de veinte problemas, es una segunda edición de un trabajo del equipo de coordinación de la Olimpiada Matemática Thales para alumnos de 2º curso de E.S.O.

Esperemos, y así es nuestro deseo, que el libro sirva de base y ayude a desarrollar la competencia matemática de los alumnos que se acerquen a él.

Francisco Haro Laguardia

Coordinador Regional OMTH

Contextualización

Vivimos tiempos de disrupción tecnológica como profesional. La formación continua es una realidad, y nuestra capacidad de adaptabilidad puesta a prueba constantemente.

El objetivo principal del aprendizaje es dotar de flexibilidad al individuo rígido y estereotipado frente a un entorno cambiante. Es irónico ver como el método actual del aprendizaje es en apariencia opuesto a su fin, dígase el obtener flexibilidad, adaptabilidad, recursos internos, y a la vez justificada como veremos a continuación.

Por un lado, vivimos una etapa de muy fácil acceso a ingentes cantidades de información y de directa aplicación, siendo los temarios de secundaria en oposición eminentemente teóricos. Justificado porque las enseñanzas de psicología del aprendizaje afirman fuertemente la idoneidad de un aprendizaje basado en la consecución palpable de objetivos.

No hacer partícipe al estudiante de la selección de los objetivos, es un paradigma en proceso de extinción, en el peor de los casos produce en los estudiantes grandes dosis de desmotivación, frustración, alienación y por supuesto fracaso.

Es nuestra obligación prestar atención a cualquier disciplina que pueda aportar un papel nuevo y novedoso en el desarrollo de metodologías, destacando la Lingüística Aplicada apoyándonos en su reciente formalización científica en lo teórico, e incipiente en lo práctico, reconociendo en general que las Matemáticas son un lenguaje.

A modo de sugerencia, realizar investigaciones conjuntas con entidades como AESLA (Asociación Española de Lingüística Aplicada) y AELCO (Asociación Española de Lingüística Cognitiva) puede abrir un paradigma metodológico nuevo. Es de vital importancia desarrollar desde pequeño el léxico matemático para mejorar las habilidades cognitivas de los estudiantes y acelerar en lo más posible los procesos de demostración matemática tanto en su versión deductiva como inductiva.

Saber definir, teoremas, demostraciones, hipótesis, suposiciones, aritmética, geometría, etc… va dotando al estudiante de una compresión de las reglas del juego matemático de las cuales muchos carecen, aunque sepan resolver con acierto la mayoría de las cuestiones que les plantee el temario.

Para dotar a nuestros estudiantes de amor propio, confianza, criterio, independencia, iniciativa para explorar lo desconocido, tenemos que aprender a ser menos dirigentes y más dirigidos, evitando sentimientos inútiles como lo son la frustración, la culpabilidad o la preocupación y poder transformarlo en motivación, pasión y curiosidad.

Como herramienta para este propósito destacar el papel simple, sencillo y de rapidísima aplicación que tiene la Programación Neurolingüística (PNL). La PNL se basa en el estudio de patrones del lenguaje y sirven para entender y modificar las creencias propias y las de los demás, cambiando el foco de atención general o marco.

Muchos estudiantes frustrados o desmotivados se encuentran en un "Marco Problema", en un "Marco Imposibilidad", o en un "Marco Fracaso". La PNL dota al docente de herramientas para transformar un "Marco Problema" en un "Marco Objetivo", un "Marco Imposibilidad" a un "Marco como si ya fuera realidad" y un "Marco Fracaso" en un "Marco Enseñanza" a través de sencillas preguntas que se realizan al estudiante examinando las creencias que podrían llegar a tener los estudiantes, nuestra misión como docentes es transformar las creencias limitadoras en creencias potenciadoras.

Es muy importante comprender como se desarrolla internamente el cambio natural de creencias no solo para ayudar a nuestros estudiantes sino para dotar a las Matemáticas de la reputación que se merece y no la que actualmente tiene a "pie de calle".

En general, las actividades seleccionadas en este compendio buscan la creatividad del alumnado, la identificación de patrones, el desarrollo de estrategias de resolución, el pensamiento, razonamiento y argumentación matemática. Estos son procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático y favorecen que el alumnado avance en la consecución de los siguientes objetivos del área de matemáticas para la Etapa de Educación Secundaria Obligatoria (Junta de Andalucía, 2016).

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo y crítico e incorporar al lenguaje y modos de argumentación, la racionalidad y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos, científicos y tecnológicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que encontramos en nuestro entorno; analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada las distintas herramientas tecnológicas (calculadora, ordenador, dispositivo móvil, pizarra digital interactiva, etc.), tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar información de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que surgen en la vida cotidiana de acuerdo con métodos científicos y propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en su propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito, adquiriendo un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos, prácticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

Sugerencias didácticas

Los problemas propuestos son un esfuerzo colectivo por desarrollar problemas originales que sirvan como fuente de motivación y aprendizaje al alumnado y de recursos al profesorado, tocando las áreas lectivas más relevantes del temario. Hay problemas que son manifiestamente específicos, otros implícitos en los contenidos.

Son problemas en general diferentes a los que aparecen en los libros de textos, quizás algo más largos y con un nivel de dificultad un poco superior a la media de los problemas que están acostumbrados a resolver en clase. Creemos que este tipo de material dota al docente para afianzar la habilidad de resolución de problemas en su alumnado, área muy menguada y que muchos centros no entrenan, o entrenan poco.

Desde esta perspectiva los problemas están destinados al alumnado de 2º de E.S.O, no excluye la posibilidad de utilizarlo como recurso didáctico en cualquier otro curso con independencia del nivel de la clase. Desde nuestra perspectiva siempre será recomendable enfrentarse a problemas en apariencia o en esencia un poco más difíciles; dependiendo del nivel de la clase será más o menos necesaria la intervención del docente.

Dependiendo de las características de la clase y del alumnado tendremos diferentes modalidades de presentación que focalizarán la atención general en el aspecto a destacar que quiera fomentar el docente a saber, repaso, refuerzo, motivación, dinámicas de grupo, etc.

Las posibilidades de presentación son infinitas ahora más que nunca con la posibilidad de recursos TIC, por ejemplo GeoGebra, que dotan la clase de dinamismo y novedad.

Algunos de los infinitos ejemplos de presentación se encuentran en el apartado Análisis de la Solución, que pueden hallarse tras la solución del problema.

Es muy interesante para el estudiante que el mismo docente no conozca la solución para que los mismos vean cómo se desarrolla el proceso mental de resolución en su maestro, ya que algunos problemas requieren tiempo e ingenio.

Cuanto más dinámica y menos magistral sean las presentaciones de los problemas con este material mejor será el ambiente general, creando espacios de disfrute con el aprendizaje de las matemáticas. La creatividad y la flexibilidad en el marco de las presentaciones harán la diferencia.

Una misma dinámica en grupos distintos puede tener resultados muy distintos, no existe una llave maestra, quizás la experiencia con las dinámicas en sí, y especialmente ser capaz de cambiar la metodología en el instante que se esté haciendo si vemos que manifiestamente no funciona, sea la clave del éxito.

Relación entre los estándares y competencias clave con los problemas

LEGISLACIÓN

- Orden de **14 de julio de 2016**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (28 de julio 2016 Boletín Oficial de la Junta de Andalucía)
- La numeración de los criterios de evaluación se corresponde exactamente con la establecida en el Real Decreto 1105/2014, donde aparecen también los estándares de aprendizaje evaluables de cada bloque.

COMPETENCIAS

Desde el área de Matemáticas se contribuye a la adquisición de las competencias clave desde los siguientes aspectos:

✓ **Comunicación lingüística (CCL)**

Comprensión lectora a través de textos y de enunciado de problemas. Comunicación de los resultados obtenidos usando el leguaje matemático adecuado. Transmisión de la información por diversos medios: escrito, oral, digital,...

✓ **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)**

Aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto.

Adquirir los conocimientos necesarios sobre números, medidas y estructuras, así como de las operaciones y las representaciones matemáticas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos.

Para el desarrollo de las competencias en ciencia y tecnología resulta necesario abordar los saberes o conocimientos científicos relativos a la física, la química, la biología, la geología, las matemáticas y la tecnología, los cuales se derivan de conceptos, procesos y situaciones interconectadas.

Para ello es necesario utilizar y manipular herramientas y máquinas tecnológicas, utilizar datos y procesos científicos, identificar preguntas, resolver problemas, llegar a una conclusión o tomar decisiones basadas en pruebas y argumentos.

- ✓ **Competencia digital (CD)**

Para su adquisición son necesarios los conocimientos relacionados con el lenguaje específico: textual, numérico, icónico, visual gráfico y sonoro. Supone el acceso a las fuentes y procesamiento de la información.

Precisa del desarrollo de diversas destrezas relacionadas con el acceso a la información, el procesamiento y uso para la comunicación, la creación de contenidos, la seguridad y la resolución de problemas.

- ✓ **Aprender a aprender (CAA)**

Esta competencia se caracteriza por la habilidad para iniciar, organizar y persistir en el aprendizaje. Esto exige la capacidad para motivarse por aprender, así como conocer y controlar los propios procesos de aprendizaje para ajustarlos a los tiempos y las demandas de las tareas y actividades que conducen al aprendizaje.

- ✓ **Competencias sociales y cívicas (CSC)**

Las competencias sociales y cívicas implican la habilidad y capacidad para utilizar los conocimientos y actitudes sobre la sociedad, entendida desde las diferentes perspectivas, en su concepción dinámica, cambiante y compleja, para interpretar fenómenos y problemas sociales en contextos cada vez más diversificados; para elaborar respuestas, tomar decisiones y resolver conflictos, así como para interactuar con otras personas y grupos conforme a normas basadas en el respeto mutuo y en convicciones democráticas. Además de incluir acciones a un nivel más cercano y mediato al individuo como parte de una implicación cívica y social.

- ✓ **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SEIP)**

La competencia sentido de iniciativa y espíritu emprendedor implica la capacidad de transformar las ideas en actos. Ello significa adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, destrezas o habilidades y actitudes necesarios con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto.

La adquisición de esta competencia es determinante en la formación de futuros ciudadanos emprendedores, contribuyendo así a la cultura del emprendimiento. En este sentido, su formación debe incluir conocimientos y destrezas relacionados con las oportunidades de carrera y el mundo del trabajo, la educación económica y financiera o el conocimiento de la organización y los procesos empresariales, así como el desarrollo de actitudes que conlleven un cambio de mentalidad que favorezca la iniciativa emprendedora, la capacidad de pensar de forma creativa, de gestionar el riesgo y de manejar la incertidumbre.

- ✓ **Conciencia y expresiones culturales (CEC)**

La competencia en conciencia y expresión cultural implica conocer, comprender, apreciar y valorar con espíritu crítico, con una actitud abierta y respetuosa, las diferentes manifestaciones culturales y artísticas, utilizarlas como fuente de enriquecimiento y disfrute personal y considerarlas como parte de la riqueza y patrimonio de los pueblos.

Esta competencia incorpora también un componente expresivo referido a la propia capacidad estética y creadora y al dominio de aquellas capacidades relacionadas con los diferentes códigos artísticos y culturales, para poder utilizarlas como medio de comunicación y expresión personal. Implica igualmente manifestar interés por la participación en la vida cultural y por contribuir a la conservación del patrimonio cultural y artístico, tanto de la propia comunidad como de otras comunidades.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

BLOQUE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES MATEMÁTICAS

Estándares de aprendizaje	Competencias Clave	Problemas
B1.C2.E1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).	CCL	1 al 20
B1.C2.E2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.	CMCT	
B1.C2.E3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.	CMCT	
B1.C2.E4. Utiliza estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas,	SIEP	

reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas.	
B1.C3.E1. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.	CMCT
B1.C3.E2. Utiliza las leyes matemáticas encontradas para realizar simulaciones y predicciones sobre los resultados esperables, valorando su eficacia e idoneidad.	CMCT, SIEP
B1.C4.E1. Profundiza en los problemas una vez resueltos: revisando el proceso de resolución y los pasos e ideas importantes, analizando la coherencia de la solución o buscando otras formas de resolución.	CAA
B1.C5.E1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.	CCL
B1.C6.E2. Establece conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él y los conocimientos matemáticos necesarios.	CMCT, CSC
B1.C6.E3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.	CMCT
B1.C6.E4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.	CMCT
B1.C7.E1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre él y sus resultados.	CAA
B1.C8.E2. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés, adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.	CAA
B1.C8.E4. Desarrolla actitudes de curiosidad e indagación, junto con hábitos de plantear/se preguntas y buscar respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.	SIEP

B1.C9.E1. Toma decisiones en los procesos de resolución de problemas, de investigación y de matematización o de modelización, valorando las consecuencias de las mismas y su conveniencia por su sencillez y utilidad.	CAA, SIEP	
B1.C11.E1. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.	CMCT, CD, CAA	
B1.C12.E3. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.	CMCT, CD, SIEP	

BLOQUE 2: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Nivel Educativo. Criterio de evaluación	Estándares	Contenidos	Problema
MAT 1 y 2. 1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.	1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.	Raíz cuadrada	8
		Operaciones con números naturales	9 12 13 17
MAT 1. 2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números naturales en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.	2.2. Aplica los criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 11 para descomponer en factores primos los números naturales y los emplea en ejercicios, actividades y problemas contextualizados	Divisibilidad	10 12
MAT 1 y 2. 5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un	5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.	Razón y proporción	4 19

problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.			
MAT 1 y 2. 6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con las expresiones algebraicas.	6.1. Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.	Patrones	6 14 17a
	6.3. Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas	Identidades notables	18
MAT 2. 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado, segundo grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	7.1 Comprueba, dada una ecuación, si un número es solución de la misma. 7.2. Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.	Solución y resolución de ecuaciones de primer grado	2 5 16 20
		Ecuaciones de segundo grado	18
MAT 3. 2. Obtener y manipular expresiones simbólicas que describan sucesiones numéricas, observando regularidades en casos sencillos que incluyan patrones recursivos.	2.3. Identifica progresiones aritméticas y geométricas, calcula la suma de los "n" primeros términos, y las emplea para resolver problemas.	Suma de una progresión aritmética	13
MAC 4. 4. Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando inecuaciones, ecuaciones y sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.	4.2. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante inecuaciones, ecuaciones o sistemas, e	Desigualdades	2

	interpreta los resultados obtenidos.		

BLOQUE 3: GEOMETRÍA			
Nivel Educativo. Criterio de evaluación	**Estándares**	**Contenidos**	**Problema**
MAT 1. 1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.	1.1 Reconoce y describe las propiedades características de los polígonos regulares: ángulos interiores, ángulos centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	Aristas, ángulos interiores	3 15
	1.3 Clasifica los cuadriláteros y paralelogramos atendiendo al paralelismo entre sus lados opuestos y conociendo sus propiedades referentes a ángulos, lados y diagonales.	Polígonos	1 8 17c 18
MAT 1 .2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas. Utilizando el lenguaje matemático adecuado para expresar el procedimiento seguido en la resolución	2.1 Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	Áreas	1 3 8 17c
		Longitud de una circunferencia	19
MAT 2. 3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras y el significado geométrico y emplearlo para resolver problemas	3.2 Aplica el Teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	Teorema de Pitágoras	8 18
MAT 2. 4 Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos	4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y	Semejanza de triángulos. Teorema de Tales.	20

	volúmenes de figuras semejantes.		
MAT 2. 5. Analizar distintos cuerpos geométricos (cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) e identificar sus elementos característicos (vértices, aristas, caras, desarrollos planos, secciones al cortar con planos, cuerpos obtenidos mediante secciones, simetrías, etc.)	5.3. Identifica los cuerpos geométricos a partir de sus desarrollos planos y recíprocamente	Desarrollo plano de un cubo	10
MAC 3. 4. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.	4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.	Movimientos	3 7 8 17b

BLOQUE 4: FUNCIONES

Nivel Educativo. Criterio de evaluación	Estándares	Contenidos	Problema
MAT 2. 2 Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.	2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.	Concepto de función. Variables dependiente e independiente.	11
MAT 2. 3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.	3.2 Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.	Monotonía. Extremos.	11
MAT 2. 4 Reconocer, representar y analizar las	4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la	Funciones lineales. Cálculo, interpretación	11

funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.	pendiente de la recta correspondiente.	e identificación de la pendiente.	

BLOQUE 5: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD			
Nivel Educativo. Criterio de evaluación	**Estándares**	**Contenidos**	**Problema**
MAT 2. 1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar los datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos	1.4. Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo modal), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.	Media aritmética	19
MAT 2. 3. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad	3.3 Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante experimentación	Conjeturas sobre fenómenos aleatorios	19
MAC 3. 1. Resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas.	1.1 Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación.	Combinatoria Permutaciones	6 7

Enunciados de los problemas

1. Parcelas inundadas.

El huerto urbano de Matelandia, es un cuadrado de dimensiones 70 m x 70 m, se ha inundado y hay que volver a señalar los límites de las parcelas que lo forman.

Sabemos cuántos metros cuadrados medía cada una, y que las parcelas son rectangulares o cuadradas.

Usa la siguiente cuadrícula para dibujar, de forma razonada, las quince parcelas. Cada parcela incluirá un solo número, que representará el área de la misma.

	200		300			
	300			300	600	200
		200	200			
			300			400
	400		300			
600	200					400

2. En la curiosa frutería.

En la frutería del barrio de las Matemáticas nunca te dicen lo que cuesta una pieza de fruta, pero si les dices el dinero que llevas y lo que quieres, te dicen si puedes llevarte lo que deseas.

María se quiere llevar una manzana, un plátano y una naranja y ha ido con dos euros a la frutería.

El frutero le dice: "Tienes bastante para las tres piezas e incluso tendrías justo para un plátano más".

Pero ella quiere saber el precio exacto y entonces le dice el frutero:

"Si decides llevarte solo un tipo de fruta, no puedes llegar a comprar cuatro plátanos, pero si un máximo de cuatro manzanas. Además, si compras cinco naranjas ya no puedes comprar ninguna más"

María hace sus cuentas y ve que hay varias posibilidades, entonces le vuelve a preguntar al frutero, y éste le dice: "Siete naranjas cuestan lo mismo que cinco manzanas".

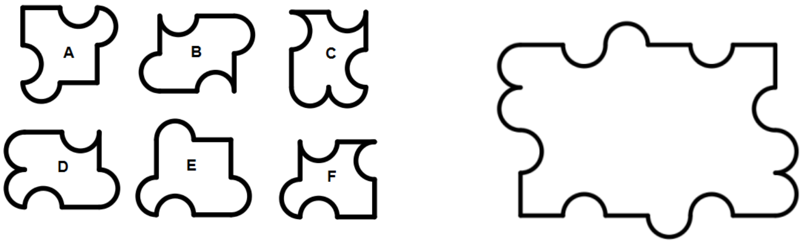
Encuentra razonadamente el precio máximo y mínimo de cada una de las piezas de fruta que ha pedido María y así poder averiguar el precio de cada una de ellas.

3. Puzle.

Para la nueva campaña de primavera se está diseñando un juego que las sociedades iberoamericanas van a poner a la venta. Se trata de un puzle muy curioso con sólo seis piezas que podremos girar para completar el panel.

No todas las piezas tienen el mismo área, y te pedimos que encuentres razonadamente la pieza de mayor área, al igual que nos digas, siempre de forma razonada, la pieza de menor área.

Además, te pedimos que completes el puzle teniendo en cuenta que las piezas se pueden girar.



4. ¡Una pechá de gente!

La escala de Jacobs para medir el número de manifestantes en una muchedumbre dice: una "multitud fluida" cuenta con una persona por cada 10 pies cuadrados y una "multitud densa" tiene una persona por cada 4,5 pies cuadrados y una "multitud muy densa" tendría una persona por cada 2,5 pies cuadrados.

El 14 de enero de 2017 hubo manifestaciones por la Salud Pública en toda Andalucía: en Granada se manifestaron 42.000 personas según la delegación de gobierno y 75.000 según la organización. El recorrido era de 850 metros con una anchura media de 20 metros. ¿Qué tipo de manifestación era según cada organización? (1 metro equivale a unos 3,28 pies)

5. Adivina la edad.

En Acertijolandia no hay forma de que te contesten de forma directa a lo que les preguntas, y siempre responden con un acertijo. El otro día le pregunté al jardinero de mi bloque por la edad de sus dos hijos y me dijo lo siguiente: "A finales del año 2017, la edad de cada uno de ellos coincidía con la suma de las cifras de su año de nacimiento. Debes saber que mis hijos no son mellizos ni gemelos". Encuentra de forma razonada las edades de los hijos del jardinero.

6. Mensajes secretos.

Alan Turing y Adi Shamir han decidido cifrar los mensajes que se envían para que sus enemigos no los entiendan. Para ello han ideado el siguiente método: Tomemos como ejemplo el mensaje: "NOS VEMOS LUEGO". Primero eligen una permutación, que será la clave, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Significa que el que está en la posición 1 pasa al 3, el que está en la 2 pasa a la 1, la 3 a la 4 y la 4 a la 2. A continuación, descomponen el mensaje en bloques de longitud la de la permutación (en este caso bloques de longitud 4). En los espacios se ponen asteriscos y también se completa con asteriscos los espacios en blanco que se añaden. Así el mensaje "NOS VEMOS LUEGO" queda:

NOS*   VEMO   S*LU   EGO*

Una vez hecho esto aplicamos la permutación a cada bloque, quedando:

O*NS   EOVM   *USL   G*EO

Con lo que el mensaje queda cifrado de la forma "O*NSEOVM*USLG*EO".

Contesta de forma razonada a los siguientes apartados:

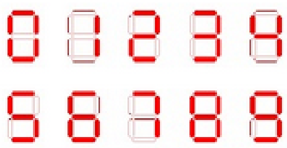
a) Alan Turing quiere mandarle a Adi Shamir el mensaje "DONDE NOS VEMOS" con la clave. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿Cómo se lo enviará cifrado?

b) La respuesta de Adi Shamir la ha enviado cifrada con la clave $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Dice así: "LE*NUAP*AETR**EDCT*U*AAS". Tradúcela.

c) El mensaje "LO PASAREMOS BIEN" se ha traducido por "P*LAOERSMAB*OIS**E*N". Sabemos que están utilizando una clave de longitud 5. Identifica la clave que han utilizado.

7. Simetría horaria.

Eulercín Vaguín se encuentra resolviendo unos aburridos ejercicios de ecuaciones. En un instante en el que ha levantado la vista del papel, a las 3 y 10 de la tarde, ha mirado el espejo que tiene al lado de un reloj digital y se ha dado cuenta que la hora que podía observarse en el espejo era una hora que podía leerse correctamente (las 01:21).

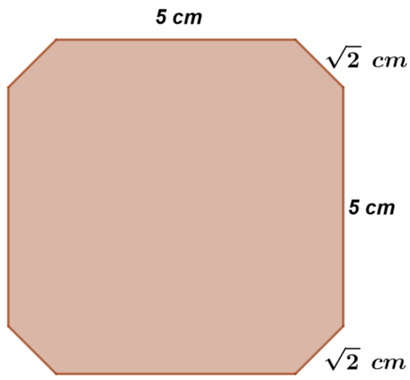


a) ¿Cuántas horas reflejadas en el espejo dan una hora que puede leerse correctamente?

b) ¿Cuántas horas reflejadas permanecen invariantes, es decir, se leen igual en el reloj y en el espejo?

Nota: *Todas las horas del reloj tienen el siguiente formato* □□:□□ *que no coincide con un reloj digital real.*

8. Insignias poligonales.



En Todolandia, con motivo del congreso anual de diseñadores, se están fabricando unas insignias ideadas por María Diseñalotodo, famosa por todas sus innovadoras realizaciones en joyería.

Como se puede apreciar en la imagen, la insignia tiene forma de octógono irregular con las siguientes dimensiones: todos sus lados mayores tienen una longitud de 5 cm y todos los pequeños de $\sqrt{2}$ cm.

Para su realización, María Diseñalotodo dispone en su taller de joyería de una docena de láminas cuadradas de plata de 12,25 dm^2 cada una. Podrías ayudarla, hallando la superficie que tiene una de estas insignias y así poder calcular cuántas se obtendrían con todas las láminas que posee. Razona tus respuestas.

9. Fichas numéricas.

En el siguiente tablero hay colocadas fichas, cada una con un número natural diferente de una sola cifra (puede ser cero). A los márgenes de la tabla hay pistas con la siguiente información:

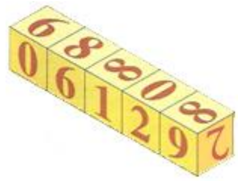
- A la izquierda aparece el número de fichas que hay en cada fila (horizontal) y en la parte superior las que hay en cada columna (vertical).
- A la derecha aparece el total de la suma de los números de cada fila y abajo está la suma de cada columna.

Coloca en el tablero de forma razonada las fichas con el número de cada una y completa razonadamente las pistas faltantes.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1 ficha						Suman 6
Hay 3 fichas						Suman 9
Hay 2 fichas						Suman 11
Hay 4 fichas						Suman ¿?
Hay ¿? fichas						Suman ¿?
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suman ¿?	Suman ¿?	

10. El dado raro.

Estos cinco dados puestos en fila son iguales.



a) Si ves el número de frente, leerás el: 06129 (seis mil ciento veintinueve). ¿Qué número leerás si los miras por el lado contrario?

Si ponemos en fila dos dados (como los de la imagen) podemos formar los números 10 y 11. El 10 tiene 4 divisores (1, 2, 5, 10): la mitad, son pares y la otra mitad son impares. El 11, como buen número primo, solo tiene dos divisores, el 1 y el 11 y los dos impares.

b) De los números que puedes leer al poner dos dados "raros" en fila, busca los que cumplen la propiedad del 10 (la mitad de sus divisores son pares y la otra mitad son impares).

c) ¿Hay algún número primo que puedas leer en los dados que cumpla dicha propiedad?

Razona todas tus respuestas.

11. Vuelta ciclista.

En la última vuelta ciclista a España en su etapa Alcalá la Real (845 m) - Alto Hoya de la Mora (Monachil, Sierra Nevada) los participantes tuvieron que recorrer 130 km y debieron superar varios puertos de montaña con diferentes pendientes. Utilizando la tabla siguiente dibuja el perfil de la etapa. Razona la respuesta.

Km	0	15	30	45	60	65	75	95	100	110	130
Pendiente	0%	0%	-2%	0.75%	0.75%	2%	6%	-4.5%	2%	8.4%	5%

Altitud (metros)

Distancia (km)

12. Trabajando con números.

En la clase de 2º ESO, el profesor de Matemáticas les dice a los alumnos:

- Que cada uno piense un número natural y lo ponga en una casilla A;
- Luego, que coja ese número, lo multiplique por 2 y al resultado le sume 2, y lo ponga en una casilla B;
- Que cojan otra vez el número de la casilla A y lo multiplique por 3 y lo ponga en una casilla C.
- Ahora que sumen los números de las casillas B y C, a esa suma la multipliquen por 5 y al resultado le reste 3, y ese es el resultado final.

Contesta de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) Si un alumno escogió el 7 en la casilla A, ¿cuál ha sido su resultado final?
b) Si un alumno obtuvo como resultado final, 57, ¿qué número escogió en la casilla A?
c) Un alumno dice que su resultado final fue 86, ¿puede ser posible?

13. Curiosa tradición.

Jimena ha seguido una curiosa tradición que ha repetido toda su vida: guarda en una caja las velas de todos sus pasteles de cumpleaños (cuando era muy pequeña las guardó su papá). Si Jimena tiene 59 años, ¿Cuántas velas hay en la caja?

14. El repique de las campanas.

La campana del campanario de la iglesia de Geometralia suena cada hora. Sin embargo, la velocidad con la que suenan las campanadas es extremadamente lenta. Cada campanada tarda en darse cinco segundos. La pregunta es la siguiente: ¿Cuánto tardarán en darse las campanadas de las 12 del mediodía?

15. Lío en el restaurante.

Un camarero, al llegar a su trabajo, recibe el encargo de colocar en un salón cuadrado 10 sillas que están desordenadas de la noche anterior, de modo que en cada una de las paredes queden situadas tres sillas. Además, no puede haber sillas que no estén al lado de una pared ¿Cómo resolverá el problema?

16. Problemas sistemáticos.

a) Manuel y María son hermanas:

Manuel: "Tengo tantas hermanas como hermanos."

María: "Tengo dos veces más hermanos que hermanas."

¿Cuántos hijos e hijas hay en la familia?

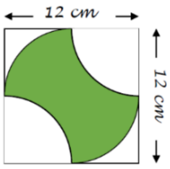
b) Abdallah se pasea por el desierto con sus camellos y sus dromedarios. En total hay 34 pies y 13 jorobas. ¿Abdallah tiene más dromedarios que camellos o más camellos que dromedarios?

17. Festival de cortos.

a) Andrea, Bea, Carmen, Dafne y Elena disputaron una carrera. Dafne aventajó a Elena en tres puestos y Carmen no llegó la última. Los puestos de Bea y Carmen sumaron ocho. ¿En qué orden llegaron?

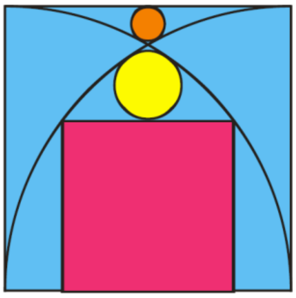
b) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

c) ¿Cuál es el área sombreada de este mosaico?



18. Sangakus.

En templos budistas de Japón, colgadas en sus aleros, se hallan tablillas de madera con exquisitos dibujos que hacían referencias a los logros artísticos alcanzados, ofrecidos por sus fieles. Entre ellos existen algunos con figuras geométricas que llamaron Sangakus, que significa "tablilla matemática" y en los que se plantean diversos retos matemáticos.



Sabiendo que el lado de cuadrado mayor mide 80 mm, ¿cuánto medirá el radio de ambos círculos y el lado del cuadrado?

19. El lirio de Santa Catalina.

En Jaén una de las torres del castillo de Santa Catalina es cilíndrica. Aunque no es muy ancha, tiene 8 metros de perímetro. Si subimos a la torre, en su planta superior, nos encontramos con la siguiente figura. Dos lirios de Santa Catalina, uno a escala del otro.

D. Manuel, ha subido hoy con dos de sus alumnos, Laura y Lucas, y les pide que calculen el área de la planta circular en la que se hallan. Además, les da 100 lentejas para que calculen el área de la flor grande. A Lucas se le ocurre lanzar dentro del círculo pequeño las 100 lentejas.

Hace 5 lanzamientos y quedan encima de la flor 18, 12, 16, 14 y 20 lentejas respectivamente.

a) Calcula, razonadamente, el área de toda la planta circular.

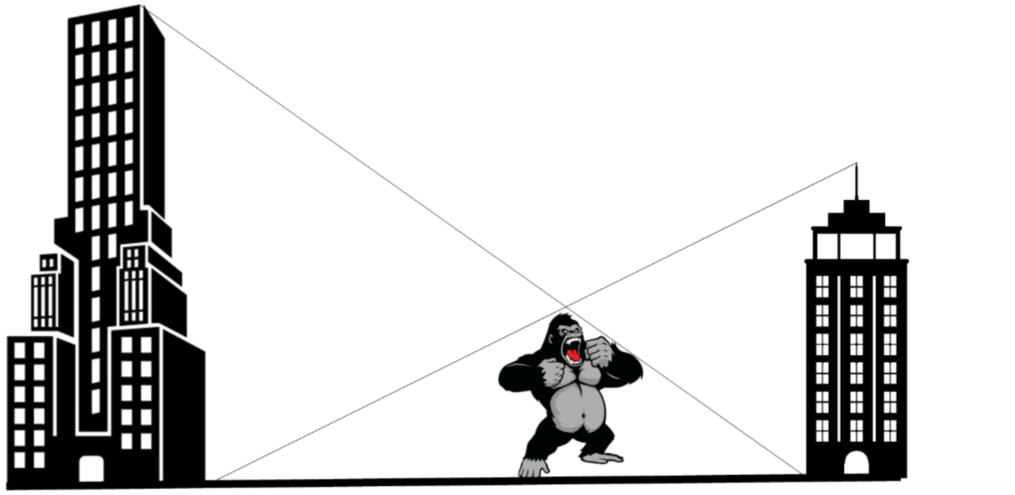
b) Calcula el área aproximada del Lirio grande de Santa Catalina, basándote en el experimento de las 100 lentejas lanzadas en la flor pequeña. Razona tus respuestas.

20. El primate gigante.

¡Oh, no! El gran Keng Kang está arrasando la Ciudad de Matelandia y los equipos de contención están estudiando al gran gorila para poder evitar la destrucción del distrito financiero.

En estos instantes se encuentra entre la Torre Hipatia, de una altura de 150 metros y la Noether Tower, de 30 metros.

¿Podrías decirnos razonadamente cuál es la altura de Keng Kang?



Soluciones a los problemas

1. Parcelas inundadas.

El huerto urbano de Matelandia, es un cuadrado de dimensiones 70 m x 70 m, se ha inundado y hay que volver a señalar los límites de las parcelas que lo forman.

Sabemos cuántos metros cuadrados medía cada una, y que las parcelas son rectangulares o cuadradas.

Usa la siguiente cuadrícula para dibujar, de forma razonada, las quince parcelas. Cada parcela incluirá un solo número, que representará el área de la misma.

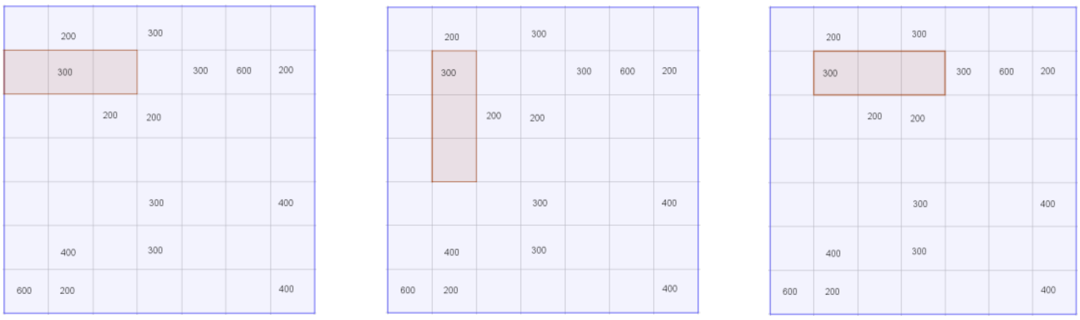
	200		300			
	300			300	600	200
		200	200			
			300			400
	400		300			
600	200					400

RESOLUCIÓN

Lo primero que tenemos en cuenta es que la cuadrícula mide 70 m x 70 m y hay 7 recuadros por cada lado, por lo que los lados de un cuadrado de la cuadrícula medirán 10 m.

Por tanto cada cuadrado medirá 100 m² de área. Así que de forma sencilla podremos contar cuadrados para calcular las áreas. Ahora nos fijamos en las parcelas, es importante recordar que las parcelas son rectangulares o cuadradas, no pueden hacer una forma de "L".

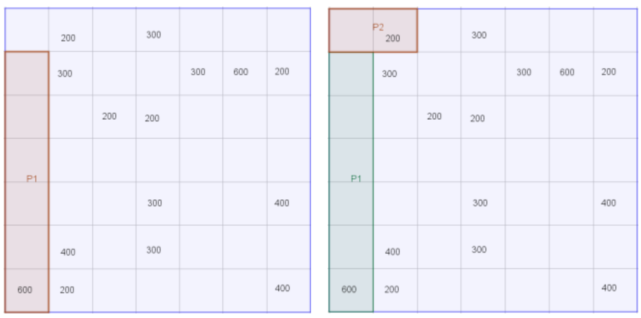
Por ejemplo, para la parcela de 300 m de la izquierda podemos tener varias opciones:



Pero claro, ponernos a probar todas las posibilidades sería muy lento. Tenemos que fijarnos en las parcelas y ver cuál es la que solo se puede colocar de una manera. Hay al menos dos.

Parcela 1 (P1): Como las parcelas con rectangulares o cuadradas, la parcela de 600 m² que está en la esquina inferior izquierda, sólo puede ser rectangular de 10 m x 60 m.

A partir de aquí el orden puede variar, pero siempre hay que asegurarse de que solo hay una solución para la parcela que vamos a dibujar.

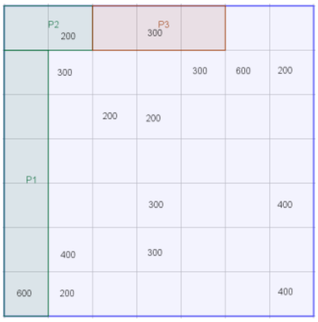


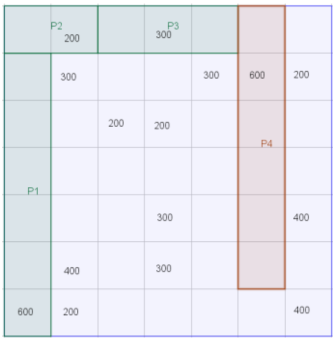
P2: Ahora podemos también dibujar la de 200 m² que está arriba.

Ya empiezan a encajar las piezas…

P3: La de 300 m² que está arriba, solo tiene una opción posible.

P4: Podemos también dibujar la otra parcela de 600 m².

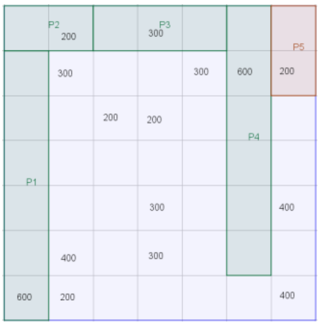


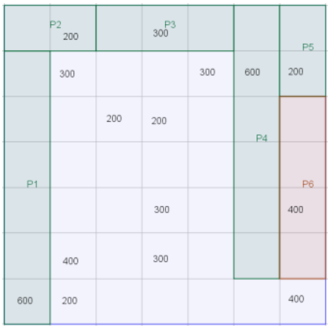


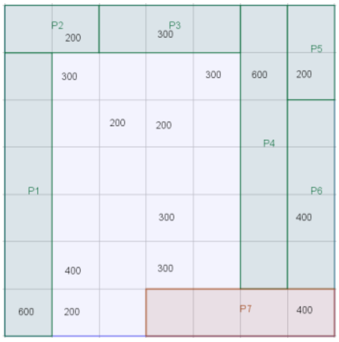
P5: la de 200 m² que está a su derecha en la esquina superior.

P6: la que está debajo de 400 m².

P7: la otra parcela de 400 m² que queda en la esquina inferior derecha.



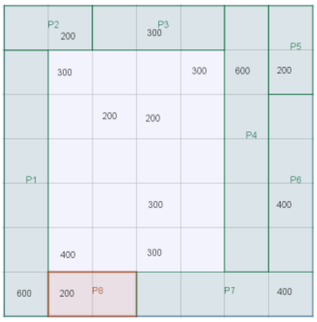


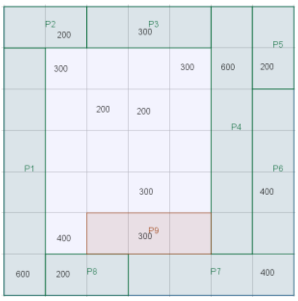


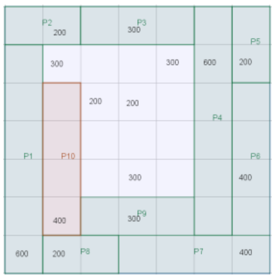
P8: la otra parcela de 200 m² que está abajo del todo.

P9: En el área que nos queda por cubrir, la parcela de 300 m² que queda abajo tiene que ser horizontal.

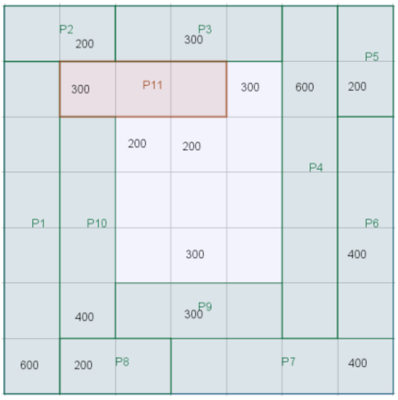
P10: La de 400 m² que está a su izquierda.



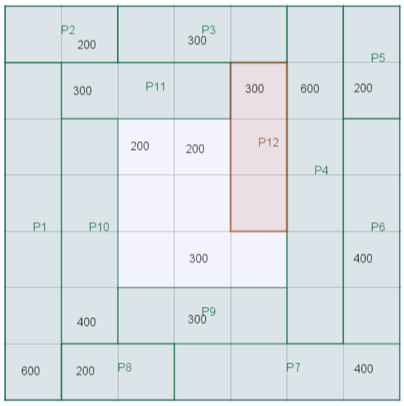




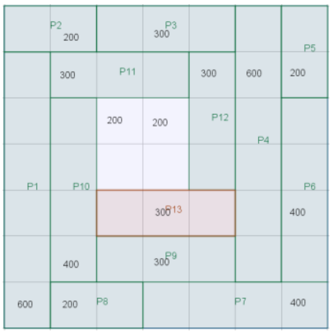
P11: la de 300 m² que queda encima de la anterior.



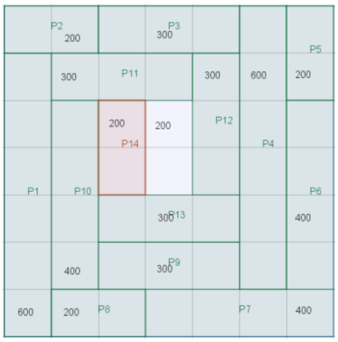
P12: la siguiente de 300 m² que está a su derecha.



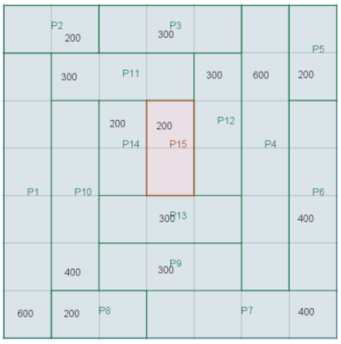
P13: la que queda de 300 m².



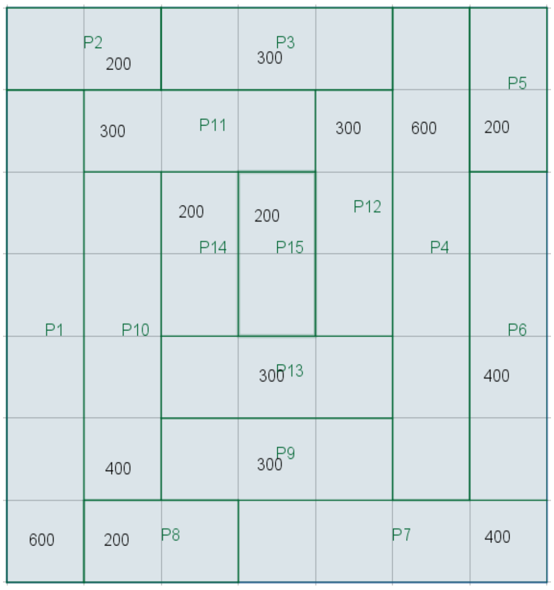
P14: una de las de 200 m².



P15: y la otra de 200 m².

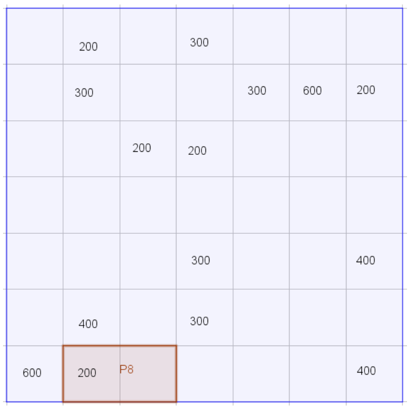


Ya tenemos todas las parcelas definidas, y pueden volver a cultivar cada uno su terreno.



OTRA FORMA DE RESOLVER

También se podría haber resuelto empezando por la que hemos llamado P8 de 200 m² y a continuación podríamos continuar señalando la de 400 m² que se encuentra a su derecha (P7) y seguir señalando parcelas, pero siempre asegurándose que solo hay una solución para la parcela que vamos a dibujar.



Análisis del problema.

En este problema trabajamos de forma básica las áreas, pero más allá de trabajar con este concepto, estamos usando la lógica.

Establecer un caso más sencillo, es una de las herramientas empleadas en la resolución de problemas y es a la que hemos recurrido en esta ocasión. El problema no presenta gran dificultad si se ejecuta de forma ordenada, aptitud también relacionada con la matemática.

Este problema se podría ubicar en el currículo de 2º curso de la ESO, pero también se puede abordar en 1º. La herramienta Geogebra podría ser útil si se desean emplear las tecnologías, o un geoplano si lo que queremos es material manipulativo.

2. En la curiosa frutería.

En la frutería del barrio de las Matemáticas nunca te dicen lo que cuesta una pieza de fruta, pero si les dices el dinero que llevas y lo que quieres, te dicen si puedes llevarte lo que deseas. María se quiere llevar una manzana, un plátano y una naranja y ha ido con dos euros a la frutería.

El frutero le dice: "Tienes bastante para las tres piezas e incluso tendrías justo para un plátano más".

Pero ella quiere saber el precio exacto y entonces le dice el frutero:

"Si decides llevarte solo un tipo de fruta, no puedes llegar a comprar cuatro plátanos, pero si un máximo de cuatro manzanas. Además, si compras cinco naranjas ya no puedes comprar ninguna más"

María hace sus cuentas y ve que hay varias posibilidades, entonces le vuelve a preguntar al frutero, y éste le dice: "Siete naranjas cuestan lo mismo que cinco manzanas".

Encuentra razonadamente el precio máximo y mínimo de cada una de las piezas de fruta que ha pedido María y así poder averiguar el precio de cada una de ellas.

RESOLUCIÓN

El problema nos dice que María se quiere llevar una manzana, un plátano y una naranja y ha ido con dos euros a la frutería.

m = precio de una manzana (céntimos) 

p = precio de un plátano (céntimos) 

n = precio de una naranja (céntimos) 

Empecemos viendo poco a poco la información que se nos proporciona. El frutero le dice: *"Tienes bastante para las tres piezas e incluso tendrías justo para un plátano más".* De lo que María deduce:

$$\mathbf{2p + 1m + 1n = 200 \text{ céntimos}}$$

Es claro que de esta ecuación no podemos deducir nada concreto.

Veamos cuál puede ser el precio de los plátanos.

Pero ella quiere saber el precio exacto y entonces le dice el frutero:

"Si decides llevarte solo un tipo de fruta, no puedes llegar a comprar cuatro plátanos"

Es decir: $\boldsymbol{4p > 200}$ y $\boldsymbol{3p \leq 200}$. Por lo que el precio del plátano cumple: $\boldsymbol{p > 50}$ y $\boldsymbol{p \leq 66}$. Esto es, el precio del plátano estará entre 51 céntimos de euro y 66 céntimos

"pero sí, un máximo de 4 manzanas."

Por lo tanto: $\boldsymbol{4m \leq 200}$ y $\boldsymbol{5m > 200}$. Por lo que el precio de la manzana cumple: $\boldsymbol{m \leq 50}$ y $\boldsymbol{m > 40}$. El precio de cada manzana está entre 41 céntimos y 50 céntimos de euro.

"Además si compras cinco naranjas ya no puedes comprar ninguna más".

Así: $\boldsymbol{5n \leq 200}$ y $\boldsymbol{6n > 200}$, por lo que el precio de la naranja cumple $\boldsymbol{n \leq 40}$ y $\boldsymbol{n > 33}$.Tenemos que el precio de la naranja está entre 34 céntimos y 40 céntimos de euro.

Resumiendo las conclusiones que tenemos hasta ahora*:*

- El precio del plátano está entre 51 céntimos y 66 céntimos
- El precio de la manzana está entre 41 céntimos y 50 céntimos
- El precio de la naranja está entre 34 céntimos y 40 céntimos

Como María ha visto varias posibilidades, para averiguar el precio exacto vuelve a preguntar al frutero, y éste le dice:

"Siete naranjas cuesta lo mismo que 5 manzanas".

Así pues, $\boldsymbol{7n = 5m}$, esto es, el precio de las naranjas tiene que ser múltiplo de 5, y como sabe que está entre 34 y 40 céntimos, sólo podría ser 35 o 40 céntimos.

- ✧ Si supone que *n = 35 céntimos:*

$$7 \cdot 35 = 5m \Rightarrow$$

$$245 = 5m$$

$m = 49$ céntimos, que sería el precio de una manzana

- ✧ Si supone que *n = 40 céntimos:*

$$7 \cdot 40 = 5m \Rightarrow$$

$$280 = 5m$$

m = 56 céntimos, que sería el precio de una manzana

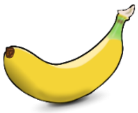
Esta última opción no es posible ya que el precio de la manzana no puede superar los 50 céntimos como hemos deducido antes. Por tanto, el precio de la naranja será de 35 céntimos y el de la manzana 49 céntimos la unidad.María ya conoce el precio de las manzanas y las naranjas y con ello ya puede calcular el precio de los plátanos:

$$2p + 1m + 1n = 200 \Rightarrow 2p + 49 + 35 = 200 \Rightarrow$$

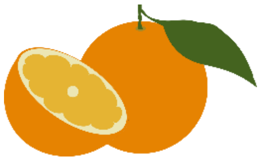
$$2p = 200 - 49 - 35 \Rightarrow 2p = 116 \Rightarrow$$

$$p = 58$$

Con lo cual los precios de cada pieza de fruta son:



0,58 €



0,35 €

0,49 €

Análisis del problema.

Este problema podemos enmarcarlo en un nivel de dificultad difícil. En primer lugar, el manejo de desigualdades puede hacer que el alumnado se encuentre un poco perdido, ya que en el segundo curso de secundaria el manejo de inecuaciones todavía no se ha tratado. Sin embargo, en cursos posteriores puede ser un buen ejercicio de clase. Sin embargo, las desigualdades a resolver no son descabelladas para un alumno de este nivel, ya que la propiedad que más diferencia la resolución de ecuaciones e inecuaciones no es utilizada en este problema:

$$\left.\begin{matrix} x < y \\ \lambda < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda x > \lambda y$$

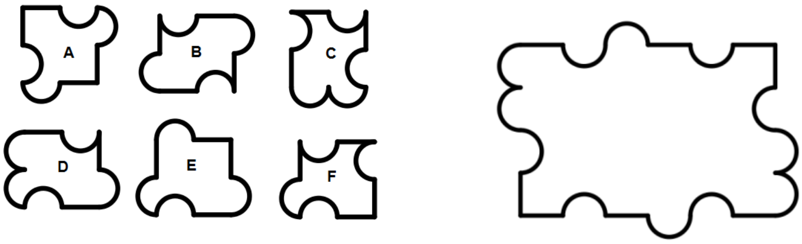
Aparecen asimismo conceptos de divisibilidad que ayudan a que el análisis de posibilidades de los valores de p, n y m se reduzca, aunque es perfectamente válido hacer un análisis combinatorio de todas las posibilidades (que en este caso serían 16 x 10 x 7 = 1120), aunque vemos que nos conviene pensar un poco más que hacer tal cantidad de operaciones.

3. Puzle.

Para la nueva campaña de primavera se está diseñando un juego que las sociedades iberoamericanas van a poner a la venta. Se trata de un puzle muy curioso con sólo seis piezas que podremos girar para completar el panel.

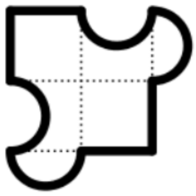
No todas las piezas tienen el mismo área, y te pedimos que encuentres razonadamente la pieza de mayor área, al igual que nos digas, siempre de forma razonada, la pieza de menor área.

Además, te pedimos que completes el puzle teniendo en cuenta que las piezas se pueden girar.

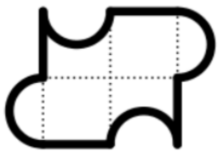


RESOLUCIÓN

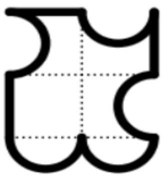
Comencemos cuadriculando las piezas, y así podremos ver de forma más clara, las dimensiones de las mismas:



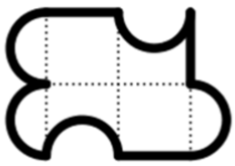
Teniendo en cuenta que la base de las piezas es un cuadrado, esta pieza A tiene 4 unidades cuadradas



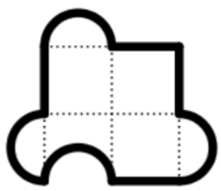
Con la pieza B ocurre lo mismo que con la A, tiene 4 unidades cuadradas de área.



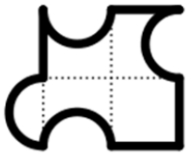
En este caso, la pieza C, tiene menos de cuatro unidades, le faltaría medio círculo para esas 4 unidades de área.



En el caso de la pieza D, ocurre al contrario de la pieza C, tendríamos más de 4 unidades cuadradas de área, concretamente, 4 más medio círculo.



La pieza E, tiene además de las cuatro unidades de área, un círculo más, es decir, dos medios círculos por encima del cuadrado.



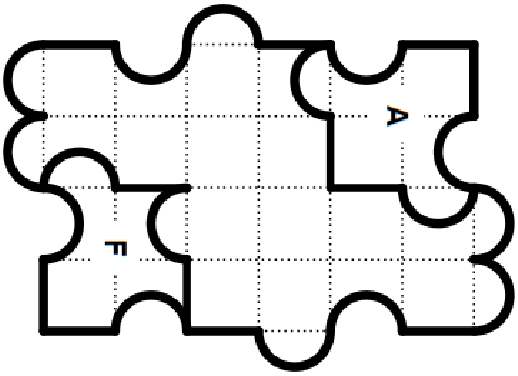
Y finalmente la pieza F es menos de 4 unidades, siendo más preciso, tiene un círculo menos.

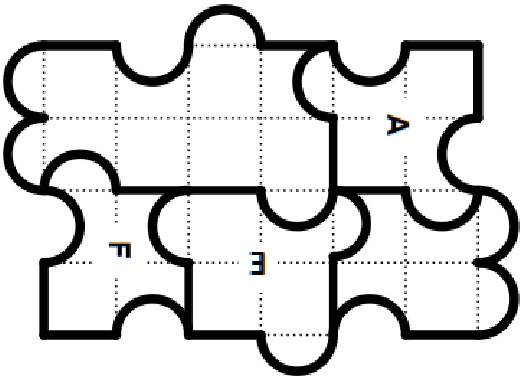
En consecuencia, tenemos que:

- Las piezas A y B tienen 4 *u* de área.
- La pieza C tiene 4 *u* de área menos medio círculo.
- La pieza D tienen 4 *u* de área más medio círculo.
- La pieza E tiene 4 *u* de área más un círculo.
- La pieza F tiene 4 *u* de área menos un círculo.

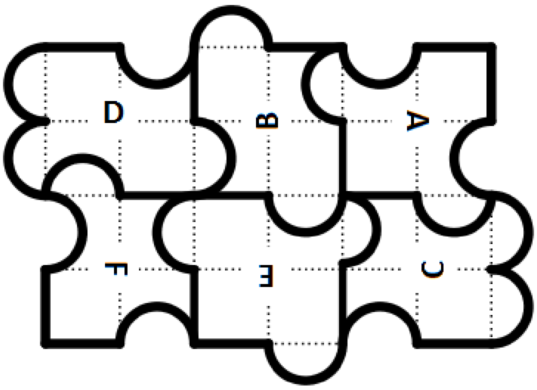
Por lo que el orden en área de las piezas sería: **F < C < A = B < D < E**

Vamos ahora a componer el puzle, y para ello, de nuevo vamos a utilizar la estrategia de cuadricular la plantilla. Comencemos a colocar las piezas por la parte superior derecha de la plantilla, para ello podríamos encajar las piezas A o F. Si la pieza A la colocamos en esa esquina superior derecha, la F iría a la parte inferior izquierda. Caso contrario, la F iría a la parte superior y la A en la inferior, más adelante veremos que esta decisión no influirá en la solución. Coloquemos pues la pieza A que giramos 90 grados en sentido horario, y la F en la parte inferior, girada igualmente en sentido horario. Probemos, a ver si podemos completar el puzle.



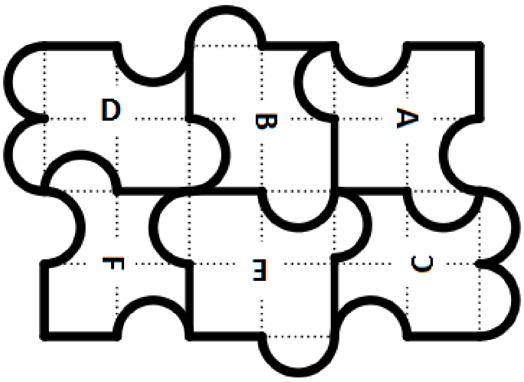


Ya nos quedan cuatro piezas, si volvemos a intentar las esquinas de la plantilla, volveremos a tener dudas con las piezas C y D, ya que ambas encajarían en la plantilla. Si nos vamos a las piezas centrales, la pieza central inferior es la pieza E, que se gira 180 grados.



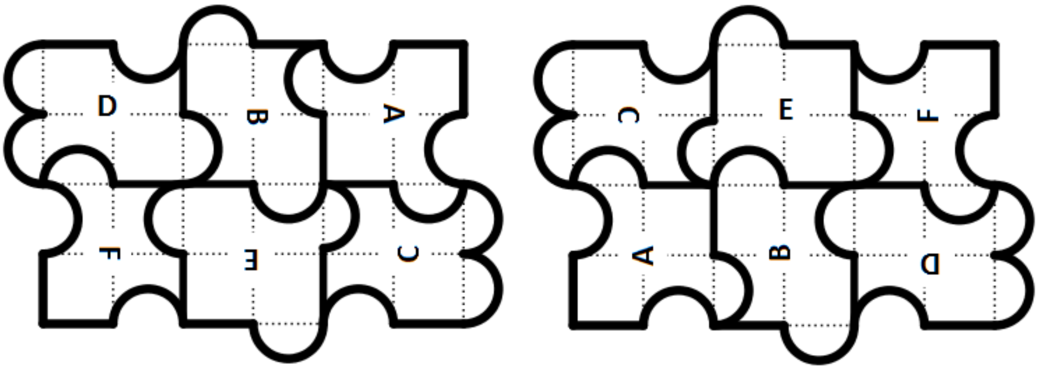
Ahora nos quedan tres piezas, de las cuales la pieza inferior derecha será la pieza C, que se gira 90 grados en sentido anti horario.

Y las dos últimas piezas, que nos llevan a completar el puzle. La pieza D, que se colocará sin girar, y la pieza B, que al ser simétrica, se podrá girar 90 grados, en cualquiera de los sentidos.



Al ser la pieza B simétrica, el puzle, aunque único, admite dos soluciones para la posición de la letra B, la anterior y la que se muestra al margen.

Al comienzo del puzle tomamos la decisión de colocar la pieza A en la parte superior derecha. Si la decisión hubiese sido la contraria, la solución del puzle sería la misma, ya que el tablero inicial es simétrico respecto del punto central del mismo, por lo que un giro de 180 grados del tablero, nos llevaría a la otra solución.



Análisis del problema.

La primera parte de este problema de dificultad baja, aparece muy a menudo en problemas de olimpiadas donde se pide calcular el área de figuras, que normalmente son más sencillas de encontrar descomponiendo y/o juntando sus partes, que calculando el área directamente. En este caso se ha partido de un cuadrado y se ha visto que se ha añadido o que se ha quitado.

La segunda parte del problema podemos destacar dos ideas. La primera es que se puede resolver de manera más sencilla recortando las piezas, ya que en este caso los alumnos no tienen que imaginar la forma de las figuras al girar. Y, por otro lado, es interesante estudiar todas las posibles soluciones del problema. Por tanto, se podría plantear este problema en tres niveles:

Nivel 1: Indicando que los alumnos recorten las piezas y formen el puzle.

Nivel 2: Sin recortar las piezas dar una solución.

Nivel 3: Dar todas las posibles soluciones de formar el puzle.

También se podría plantear una actividad por parejas en que cada uno diseñe el puzle y sus piezas y se intercambien los puzles para intentar resolverlos.

4. ¡Una pechá de gente!

La escala de Jacobs para medir el número de manifestantes en una muchedumbre dice: una "multitud fluida" cuenta con una persona por cada 10 pies cuadrados y una "multitud densa" tiene una persona por cada 4,5 pies cuadrados y una “multitud muy densa” tendría una persona por cada 2,5 pies cuadrados.

El 14 de enero de 2017 hubo manifestaciones por la Salud Pública en toda Andalucía: en Granada se manifestaron 42.000 personas según la delegación de gobierno y 75.000 según la organización. El recorrido era de 850 metros con una anchura media de 20 metros. ¿Qué tipo de manifestación era según cada organización? (1 metro equivale a unos 3,28 pies)

RESOLUCIÓN

En primer lugar, hacemos el cambio de unidades de las dimensiones del recorrido. El recorrido era de 850 metros con una anchura media de 20 metros:

$$850\ m \cdot \frac{3{,}28\ pies}{1\ m} = 2788\ pies$$

$$20\ m \cdot \frac{3{,}28\ pies}{1\ m} = 65{,}6\ pies$$

Vamos a suponer que este recorrido se ajusta a un rectángulo, porque necesitamos calcular su área:

$$A = B \cdot h = 2788 \cdot 65{,}6 = 182892{,}8\ pies^2$$

En Granada se manifestaron 42.000 personas según la delegación de gobierno, por lo que la densidad sería:

$$d_{delegacion} = \frac{personas}{área} = \frac{42000}{182892{,}8} = 0{,}23 \frac{personas}{pies^2}$$

Una "multitud fluida" cuenta con una persona por cada 10 pies cuadrados y una "multitud densa" tiene una persona por cada 4,5 pies cuadrados y una “multitud muy densa” tendría una persona por cada 2,5 pies cuadrados. Por lo tanto, las densidades correspondientes a estas magnitudes serían:

Magnitud	Densidad
Multitud fluida	$1 : 10 = 0{,}1$
Multitud densa	$1 : 4{,}5 = 0{,}222 \ldots$
Multitud muy densa	$1 : 2{,}5 = 0{,}4$

Como la densidad que hemos calculado 0,23 se acerca más a la calificación de la *multitud densa*, la cual es la densidad de la manifestación por la sanidad.

Por otro lado, según la organización hubo 75000 personas, por lo que su densidad sería:

$$d_{organizacion} = \frac{personas}{área} = \frac{75000}{182892{,}8} = 0{,}41\frac{personas}{pies^2}$$

Y este valor, según la Escala de Jacobs se acerca a una *multitud muy densa*.

OTRA FORMA DE RESOLVER.

Se calcula cuántos pies cuadrados corresponde a un metro cuadrado.

$$1\ m^2 = 3{,}28 \cdot 3{,}28 = 10{,}7584\ pies^2$$

Ahora calculamos la superficie del puente en metros cuadrados y a continuación las transformamos en pies cuadrados.

$$A = B \cdot h = 850 \cdot 20 = 17000\ m^2$$

$$17000\ m^2 \cdot \frac{10{,}7584\ pies^2}{1\ \ m^2} = 182892{,}8\ pies^2$$

Y por último calculamos cuántos pies cuadrados corresponde a una persona.

$$\frac{área}{personas} = \frac{182892{,}8}{42000} = 4{,}3545\frac{pies^2}{persona}$$

Este valor de 4,3545 se aproxima en la escala de Jacobs a 4,5 por lo que es una *multitud densa*.

$$\frac{área}{personas} = \frac{182892{,}8}{75000} = 2{,}4385\frac{pies^2}{persona}$$

Y este valor de 2,4385 se aproxima en la escala de Jacobs a 2,5 por lo que es una *multitud muy densa.*

Análisis del problema.

Tal y como podemos ver este problema lo podemos calificar como dificultad *baja*, en la que la dificultad del mismo reside en primer lugar, el cambio de unidades del Sistema Imperial al Sistema Internacional. Sin embargo, los alumnos de 2º de ESO dominan el ámbito de la proporcionalidad, por lo que este ítem no debería suponer mucho problema. La mayor complicación que encontrarán los alumnos es la del uso y manejo de números grandes que aparecen en el mismo, inconveniente que puede ser subsanado mediante un buen manejo de la calculadora.

El problema puede ser adaptado para que tenga más dificultad y pueda ser utilizado incluso en el tema de Estadística mediante características adicionales. Por ejemplo, se les da diferentes zonas de diferente tamaño, en la que el alumno tenga que hallar una media de densidades para determinar una densidad común a la manifestación. También se puede cambiar la forma de la calle para darle un sentido más geométrico a la situación.

5. Adivina la edad.

En Acertijolandia no hay forma de que te contesten de forma directa a lo que les preguntas, y siempre responden con un acertijo. El otro día le pregunté al jardinero de mi bloque por la edad de sus dos hijos y me dijo lo siguiente: "A finales del año 2017, la edad de cada uno de ellos coincidía con la suma de las cifras de su año de nacimiento. Debes saber que mis hijos no son mellizos ni gemelos". Encuentra de forma razonada las edades de los hijos del jardinero.

RESOLUCIÓN

Vamos a resolverlo distinguiendo casos:

Caso 1: Año de nacimiento ≥ 2000, por lo que el año de nacimiento es de la forma $\overline{20ab}$

Caso 2: Año de nacimiento < 2000, por lo que el año de nacimiento es de la forma $\overline{19ab}$

Abordemos el caso 1. Dentro de este caso, vamos a diferenciar también dos subcasos:

Subcaso 1.1 Año de nacimiento ≥ 2010. Así, el año de nacimiento es de la forma $\overline{201b}$ siendo $b \in \{0,1,2,3, \dots ,9\}$. La edad del hijo será $7 - b$, que es la diferencia que hay entre 2017 y $\overline{201b}$. Como la condición a imponer según el enunciado es "*edad de cada uno de ellos coincidía con la suma de las cifras de su año de nacimiento*", esto nos lleva a la igualdad $7 - b = 2 + 1 + b$:

$$7 - b = 2 + 1 + b \Rightarrow 7 - 2 - 1 = b + b \Rightarrow 4 = 2b \Rightarrow \frac{4}{2} = b \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbf{2}$$

Por lo tanto, el año de nacimiento de uno de los hijos sería el 2012, y por lo tanto, su edad será de 5 años.

Subcaso 1.2 Año de nacimiento < 2010. Por lo tanto, año de nacimiento es de la forma $\overline{200b}$ siendo $b \in \{0,1,2,3, \dots ,9\}$. En tal caso la edad del hijo sería $17 - b$. Imponemos la condición "edad igual a la suma de las cifras del año de nacimiento", y obtenemos la siguiente igualdad $17 - b = 2 + b$:

$$17 - b = 2 + b \Rightarrow 17 - 2 = b + b \Rightarrow 15 = 2b,$$

contradicción, ya que b es un número natural y por tanto $2b$ ha de ser un número par, ya que 15 no es par.

Abordemos el caso 2.- Año de nacimiento < 2000. Así, el año de nacimiento es de la forma $\overline{19ab}$. La edad del hijo será $2017 - \overline{19ab} = 2017 - 1900 - (10a + b) = 117 - 10a - b$

Por otro lado, tenemos la condición de que "*la edad es igual a la suma de las cifras del año de nacimiento*", por lo que podemos establecer la siguiente igualdad

$$117 - 10a - b = 1 + 9 + a + b \Rightarrow 117 - 1 - 9 = a + b + 10a + b \Rightarrow$$

$$107 = 11a + 2b \quad (1)$$

Donde $a, b \in C = \{0,1,2,3 \ldots..9\}$.

Como $2b$ es par, $11a + 2b$ será impar como el 107, por lo que $11a$ es impar (ya que par+ par = par). Además, como $11a$ es impar, a ha de ser necesariamente impar. Hagamos un análisis de casos sobre el valor de a, y usando (1) hallaremos los valores de b:

- $a = 1 \Rightarrow 107 = 11 + 2b \Rightarrow 2b = 96 \Rightarrow b = 48$, imposible, ya que $b \notin C$.
- $a = 3 \Rightarrow 107 = 33 + 2b \Rightarrow 2b = 74 \Rightarrow b = 37$, imposible, ya que $b \notin C$.
- $a = 5 \Rightarrow 107 = 55 + 2b \Rightarrow 2b = 52 \Rightarrow b = 26$, imposible, ya que $b \notin C$.
- $a = 7 \Rightarrow 107 = 77 + 2b \Rightarrow 2b = 30 \Rightarrow b = 15$, imposible, ya que $b \notin C$.
- $a = 9 \Rightarrow 107 = 99 + 2b \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Por lo tanto, la única posibilidad es que $a = 9$, en cuyo caso el año de nacimiento será el 1994, y la edad del hijo, 23 años. En conclusión, las edades de los dos hijos del jardinero son 23 años y 5 años.

OTRA FORMA DE RESOLVER.

Podemos pensar que los hijos del jardinero nacieron en este siglo o en el anterior. Si hubiesen nacido en el siglo pasado su año de nacimiento sería $\overline{19xy}$ donde x e y son las cifras de las decenas y las unidades del año respectivamente. Para poder trabajar de forma adecuada con esa cifra la expresaríamos en su descomposición polinómica:

$$\overline{\mathbf{19}\boldsymbol{xy}} = \mathbf{1000} + \mathbf{900} + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{1900} + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

En el año 2017 su edad sería:

$$\mathbf{2017} - (\mathbf{1900} + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathbf{117} - \mathbf{10}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$$

Como esta edad coincide con la suma de las cifras del año de nacimiento nos quedaría la ecuación:

$$\mathbf{117} - \mathbf{10}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{1} + \mathbf{9} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

De donde:

$$\mathbf{11}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y} = \mathbf{107}$$

Esta ecuación exige que x e y sean números naturales entre 0 y 9, por lo que la única solución válida sería:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{9}, \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{4}$$

Uno de los hijos habría nacido en 1994, con lo que la edad al acabar 2017 sería de 2017 – 1994= 23 años.

El otro debe haber nacido en este siglo por lo que el año de nacimiento sería:

$$\overline{\mathbf{20}\boldsymbol{xy}} = \mathbf{2000} + \mathbf{10}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$$

En este caso la ecuación quedaría:

$$\mathbf{2017 - (2000 + 10x + y) = 2 + x + y \Rightarrow}$$

$$\mathbf{17 - 10x - y = 2 + x + y \Rightarrow}$$

$$\mathbf{11x + 2y = 15}$$

Aquí la única solución factible sería, $\mathbf{x = 1}$ e $\mathbf{y = 2}$. Por lo que el año de nacimiento sería el 2012 y la edad sería 5 años.

Así pues, las edades de los hijos del jardinero serían 23 años el que nació en 1994 y 5 años el que nació en 2012

Análisis del problema.

En la solución hemos recurrido a:

- Uso del significado de "descomposición polinómica de un número".
- Resolución de ecuación de primer grado. (Cuando ha habido dos incógnitas, hemos resuelto por tanteo ya que las incógnitas eran números naturales del 0 al 9)

Por tanto, consideramos que es un problema que puede ser resuelto perfectamente de 2ºESO en adelante, incluso en 1º ESO si ya se han visto dichos contenidos.

En la segunda solución del problema aparecen ejemplos de *ecuaciones diofánticas*, y puede ser incluidas en sesiones de enriquecimiento curricular para alumnos con talento matemático.

6. Mensajes secretos.

Alan Turing y Adi Shamir han decidido cifrar los mensajes que se envían para que sus enemigos no los entiendan. Para ello han ideado el siguiente método: Tomemos como ejemplo el mensaje: "NOS VEMOS LUEGO". Primero eligen una permutación, que será la clave, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Significa que el que está en la posición 1 pasa al 3, el que está en la 2 pasa a la 1, la 3 a la 4 y la 4 a la 2. A continuación, descomponen el mensaje en bloques de longitud la de la permutación (en este caso bloques de longitud 4). En los espacios se ponen asteriscos y también se completa con asteriscos los espacios en blanco que se añaden. Así el mensaje "NOS VEMOS LUEGO" queda:

NOS* VEMO S*LU EGO*

Una vez hecho esto aplicamos la permutación a cada bloque, quedando:

O*NS EOVM *USL G*EO

Con lo que el mensaje queda cifrado de la forma "O*NSEOVM*USLG*EO".

Contesta de forma razonada a los siguientes apartados:

a) Alan Turing quiere mandarle a Adi Shamir el mensaje "DONDE NOS VEMOS" con la clave. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ¿Cómo se lo enviará cifrado?

b) La respuesta de Adi Shamir la ha enviado cifrada con la clave $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Dice así: "LE*NUAP*AETR**EDCT*U*AAS". Tradúcela.

c) El mensaje "LO PASAREMOS BIEN" se ha traducido por "P*LAOERSMAB*OIS**E*N". Sabemos que están utilizando una clave de longitud 5. Identifica la clave que han utilizado.

RESOLUCIÓN

Solución apartado a)

Como se ha explicado en el enunciado, se tiene que descomponer el mensaje en bloques de longitud 4 ocupando los espacios con asteriscos. Dimensión correspondiente al número de columna de la clave.

"DONDE NOS VEMOS" → "DOND E*NO S*VE MOS*"

Utilizando la clave, al realizar la permutación con $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (Significa que el que está en la posición 1 pasa al 4, el que está en la 2 pasa a la 3, la 3 a la 1 y la 4 a la 2) nos resulta:

D	O	N	D		E	*	N	O		S	*	V	E		M	O	S	*
N	D	O	D		N	O	*	E		V	E	*	S		S	*	O	M

Y al juntar las letras queda de la forma: **"NDODNO*EVE*SS*OM".**

Solución apartado b)

En primer lugar se tiene que descomponer el mensaje en bloques de longitud 4, tamaño de la matriz de clave y aplico la permutación de modo inverso con la clave:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Significa que el que está en la posición 1 pasa al 4, el que está en la 2 pasa a la 1, la 3 sigue en la 3 y la 4 va a la 2)

L	E	*	N		U	A	P	*		A	E	T	R		*	*	E	D		C	T	*	U		*	A	A	S
E	N	*	L		A	*	P	U		E	R	T	A		*	D	E	*		T	U	*	C		A	S	A	*

Con lo que la traducción sería: **"EN LA PUERTA DE TU CASA"**

Solución apartado c)

Como para el mensaje "LO PASAREMOS BIEN", la clave usada es de longitud 5 descompondré las palabras en bloques de 5.

L	O	*	P	A		S	A	R	E	M		O	S	*	B	I		E	N	*	*	*
P	*	L	A	O		E	R	S	M	A		B	*	O	I	S		*	*	E	*	N

Analizando por ejemplo el primer bloque observamos que la L que está en la primera posición ha ido a la tercera, la segunda posición (letra O) a la quinta, la tercera a la segunda, la cuarta a la primera y la quinta a la cuarta, con lo que la permutación queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que funciona con el resto de bloques.

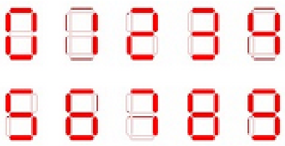
Análisis del problema.

Como podemos ver, el nivel de dificultad de este problema es medio y corresponde con el de la mayoría del resto de los problemas que se plantean en este libro.

A la hora de resolverlo es necesario usar los conocimientos que el alumnado posee y sobre todo su razonamiento lógico. El alumnado tiene que saber establecer el patrón a seguir en cada caso. Cada apartado tiene un patrón igual; pero, a la vez, una estrategia de resolución diferente para alcanzar la solución.

7. Simetría horaria.

Eulercín Vaguín se encuentra resolviendo unos aburridos ejercicios de ecuaciones. En un instante en el que ha levantado la vista del papel, a las 3 y 10 de la tarde, ha mirado el espejo que tiene al lado de un reloj digital y se ha dado cuenta que la hora que podía observarse en el espejo era una hora que podía leerse correctamente (las 01:21).



a) ¿Cuántas horas reflejadas en el espejo dan una hora que puede leerse correctamente?

b) ¿Cuántas horas reflejadas permanecen invariantes, , es decir, se leen igual en el reloj y en el espejo?

Nota: *Todas las horas del reloj tienen el siguiente formato* 00:00 *que no coincide con un reloj digital real.*

RESOLUCIÓN

Veamos en primer lugar qué cifras pueden intervenir en las horas a encontrar. Estas cifras reflejadas han de dar otra cifra. Veamos cuales pueden ser:

Solución apartado a)

Veamos qué condiciones han de cumplir los números correspondientes a las horas. Sea una hora $Hh\!:\!Mm$. Entonces: $00 \leq Hh \leq 23$ y $0 \leq Mm \leq 59$. Hagamos un análisis combinatorio correspondiente a la hora $Hh\!:\!Mm$ y a la hora reflejada $H'h'\!:\!M'm'$:

H=0	h=0	M'm'=00
	h=1	M'm'=10
	h=2	M'm'=50
	h=5	M'm'=20
	h=8	M'm'=80
H=1	h=0	M'm'=01
	h=1	M'm'=11
	h=2	M'm'=51
	h=5	M'm'=21
	h=8	M'm'=81
H=2	h=0	M'm'=05
	h=1	M'm'=15
	h=2	M'm'=55

Nótese que si $H = 2$, h no puede valer ni 5 ni 8, pues la máxima hora que aparece en el reloj son las 23:59. Desechamos los casos en rojo, pues producen minutos mayores que 59. Consideremos ahora los minutos. Consideremos ahora los minutos:

M=0 → m=0 H'h'=00
m=1 H'h'=10
m=2 H'h'=50
m=5 H'h'=20
m=8 H'h'=80

M=2 → m=0 H'h'=05
m=1 H'h'=15
m=2 H'h'=55
m=5 H'h'=25
m=8 H'h'=85

M=1 → m=0 H'h'=01
m=1 H'h'=11
m=2 H'h'=51
m=5 H'h'=21
m=8 H'h'=81

M=5 → m=0 H'h'=02
m=1 H'h'=12
m=2 H'h'=52
m=5 H'h'=22
m=8 H'h'=82

M=8 → m=0 H'h'=00
m=1 H'h'=18
m=2 H'h'=58
m=5 H'h'=28
m=8 H'h'=88

Como antes, hemos eliminado los números que no cumplen las condiciones. Así, tenemos 11 horas disponibles y 11 minutos, lo que hacen un total de **11·11=121 horas** que producen una hora simetría que es una hora.

00:00	00:01	00:05	00:10	00:11	00:15	00:20	00:21	00:50	00:51	00:55
01:00	01:01	01:05	01:10	01:11	01:15	01:20	01:21	01:50	01:51	01:55
02:00	02:01	02:05	02:10	02:11	02:15	02:20	02:21	02:50	02:51	02:55
05:00	05:01	05:05	05:10	05:11	05:15	05:20	05:21	05:50	05:51	05:55
10:00	10:01	10:05	10:10	10:11	10:15	10:20	10:21	10:50	10:51	10:55
11:00	11:01	11:05	11:10	11:11	11:15	11:20	11:21	11:50	11:51	11:55
12:00	12:01	12:05	12:10	12:11	12:15	12:20	12:21	12:50	12:51	12:55
15:00	15:01	15:05	15:10	15:11	15:15	15:20	15:21	15:50	15:51	15:55
20:00	20:01	20:05	20:10	20:11	20:15	20:20	20:21	20:50	20:51	20:55
21:00	21:01	21:05	21:10	21:11	21:15	21:20	21:21	21:50	21:51	21:55
22:00	22:01	22:05	22:10	22:11	22:15	22:20	22:21	22:50	22:51	22:55

Solución apartado b)

Para la segunda parte notemos que para que en el espejo se pueda leer la misma hora que en el reloj, la hora debe ser simétrica respecto de la recta que separa las horas de los minutos. Así, para resolver esta parte del problema basta fijar el número de la hora y aplicar la transformación:

Hora	Simétrico	
00	00	00:00
01	10	01:10
02	50	02:50
05	20	05:20
10	01	10:01
11	11	11:11
12	51	12:51
15	21	15:21

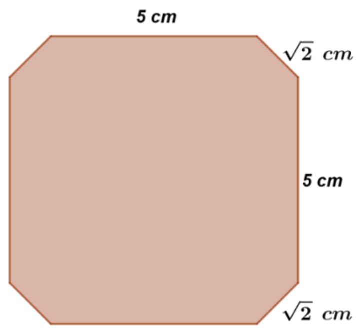
20	05	20:05
21	15	21:15
22	55	22:55

Análisis del problema.

Podríamos analizar la dificultad de este problema según el método resolutivo que hemos seguido. En primer lugar, analizar qué cifras digitales vuelven a ser cifras tras aplicarles la simetría es un problema de nivel bajo. El siguiente paso es realizar el análisis combinatorio del problema, que puede entrañar algunos problemas a los alumnos, ya que en 2º de ESO la combinatoria no forma parte del currículo. Además, el estudio de las transformaciones de números (del 2 al 5 y viceversa) provocan que el estudio de condiciones horarias sea un poco más difícil.

Por último, el uso de la propiedad de las simetrías axiales nos permite resolver el último apartado de una forma rápida y sencilla.

8. Insignias poligonales.

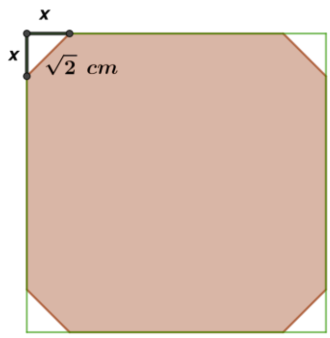


En Todolandia, con motivo del congreso anual de diseñadores, se están fabricando unas insignias ideadas por María Diseñalotodo, famosa por todas sus innovadoras realizaciones en joyería.

Como se puede apreciar en la imagen, la insignia tiene forma de octógono irregular con las siguientes dimensiones: todos sus lados mayores tienen una longitud de 5 cm y todos los pequeños de $\sqrt{2}$ cm.

Para su realización, María Diseñalotodo dispone en su taller de joyería de una docena de láminas cuadradas de plata de 12,25 dm² cada una. Podrías ayudarla, hallando la superficie que tiene una de estas insignias y así poder calcular cuántas se obtendrían con todas las láminas que posee. Razona tus respuestas.

RESOLUCIÓN



Para calcular la superficie de una insignia tendremos que calcular en primer lugar la superficie de un cuadrado al que a continuación le sustraeremos las 4 esquinas, como se observa en la figura.

Área Insignia = Área cuadrado – 4 · Área esquina

Como observamos para ello necesitamos saber la longitud de los segmentos que forman las esquinas del cuadrado y ésta se calcula empleando el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

Por lo tanto el lado del cuadrado medirá 5 + 1 + 1 = 7 cm. Calculemos las áreas de cada polígono:

- Área del cuadrado: $A_C = l^2 = 7^2 = 49\ cm^2$
- Área de una esquina: $A_E = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0{,}5\ cm^2$
- Área de la insignia:

$$A_i = A_C - 4A_E = 49 - 4 \cdot 0.5 = 49 - 2 = 47\ cm^2$$

Calculemos ahora cuántas insignias podrá fabricar María Diseñalotodo. En primer lugar pondremos la superficie de las láminas en las mismas unidades que las insignias:

$$12{,}25\ dm^2 = 12{,}25\ dm^2 \cdot \frac{100\ cm^2}{1\ dm^2} = 1225\ cm^2$$

A continuación, hallamos cuántas se pueden fabricar con 1 lámina, para ello hay que tener en cuenta que al fabricar cada insignia hay algunos trozos de lámina (las cuatro esquinas que se recortan del cuadrado) que no se pueden aprovechar.

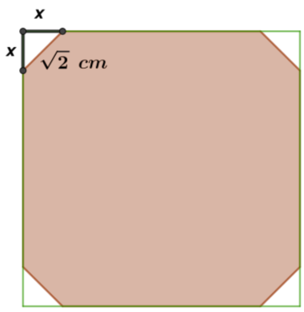
$$1225\frac{cm^2}{lámina} : 49\frac{cm^2}{insignia} = 25\ insignias/lámina$$

Por último, averiguamos el total de insignias con las 12 láminas:

$$25\frac{insignias}{lámina} \cdot 12\ láminas = 300\ insignias$$

Resumiendo, la superficie de cada una de las insignias es de 47 cm^2 y con las 12 láminas se podrán fabricar un total de 300 insignias.

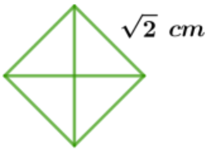
OTRA FORMA DE RESOLVER LA PRIMERA CUESTIÓN DEL PROBLEMA:



Para calcular la superficie de una insignia como hemos dicho anteriormente hay que calcular en primer lugar la superficie de un cuadrado y a continuación le quitamos las 4 esquinas, como se observa en la figura.

Área Insignia = Área cuadrado – 4 · Área esquina

Pero podemos observar que uniendo los cuatros triángulos que forman las esquinas se puede formar un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm**,** y el área de este cuadrado será:



$$A_{4\ esquinas} = l^2 = (\sqrt{2})^2 = 2\ cm^2$$

Tenemos que el área del cuadrado grande: $A = l^2 = 7^2 = 49\ cm^2$, y por lo tanto, el área de la insignia será: $A_i = 49\ cm^2 - 2cm^2 = 47\ cm^2$

Análisis del problema.

Este problema lo podemos clasificar en un nivel de dificultad "medio", ya que a la hora de resolverlo es necesario poner en común tanto conocimientos de geometría (áreas de polígonos, teorema de Pitágoras) como de aritmética (operaciones y trabajo con radicales), además del manejo del cambio de unidades.

Podemos incluso apreciar en la segunda forma de resolución una estrategia en este tipo de problemas geométricos, trabajando con la representación gráfica y componiendo figuras, que facilitan el cálculo, uniendo, quitando o desplazando trozos de la imagen original.

9. Fichas numéricas.

En el siguiente tablero hay colocadas fichas, cada una con un número natural diferente de una sola cifra (puede ser cero). A los márgenes de la tabla hay pistas con la siguiente información:

1ª) A la izquierda aparece el número de fichas que hay en cada fila (horizontal) y en la parte superior las que hay en cada columna (vertical).

2ª) A la derecha aparece el total de la suma de los números de cada fila y abajo está la suma de cada columna.

Coloca en el tablero de forma razonada las fichas con el número de cada una y completa razonadamente las pistas faltantes.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1 ficha						Suman 6
Hay 3 fichas						Suman 9
Hay 2 fichas						Suman 11
Hay 4 fichas						Suman ¿?
Hay ¿? fichas						Suman ¿?
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suman ¿?	Suman ¿?	

RESOLUCIÓN

1º Completar la información de las pistas faltantes.

Completamos los huecos faltantes en las condiciones "suman…" sabiendo que hay 10 fichas (formadas por los números 0, 1, 2, …, 8, 9), juntas suman 45 y hay una columna y una fila sin fichas.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1						Suma 6
Hay 3						Suman 9
Hay 2						Suman 11
Hay 4						Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

2º Deducimos dónde han de ir colocadas las 10 fichas.

En este caso, nos basamos en la información de que hay 0 fichas en la fila y columna correspondientes.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1				NO		Suma 6
Hay 3				NO		Suman 9
Hay 2				NO		Suman 11
Hay 4				NO		Suman 19
Hay 0	NO	NO	NO	NO	NO	Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

En este caso, dado que quedan 4 huecos libres que coinciden con los necesarios, justificamos que la fila y columna correspondiente a "hay 4 fichas" están ocupadas por fichas.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			SÍ	NO		Suma 6
Hay 3			SÍ	NO		Suman 9
Hay 2			SÍ	NO		Suman 11
Hay 4	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	Suman 19
Hay 0	NO	NO	NO	NO	NO	Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Ahora a partir de la información de que sólo hay 1 ficha completamos fila y columna correspondientes con "NO".

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1	NO	NO	SÍ	NO	NO	Suma 6
Hay 3		NO	SÍ	NO		Suman 9
Hay 2		NO	SÍ	NO		Suman 11
Hay 4	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	Suman 19
Hay 0	NO	NO	NO	NO	NO	Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Análogamente con la información de que sólo hay 3 fichas y la disponibilidad del mismo número de huecos libres, estos han de estar ocupados por fichas. Y, por último, en el tercer casillero de la primera columna consecuentemente no puede haber ficha.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1	NO	NO	SÍ	NO	NO	Suma 6
Hay 3	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ	Suman 9
Hay 2	NO	NO	SÍ	NO	SÍ	Suman 11
Hay 4	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	Suman 19
Hay 0	NO	NO	NO	NO	NO	Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

3º Deducimos el valor de las fichas.

Para ir deduciendo el valor de las fichas las llamamos: F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			F1			Suma 6
Hay 3	F2		F3		F4	Suman 9
Hay 2			F5		F6	Suman 11
Hay 4	F7	F8	F9		F10	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Las fichas F1 y F8 son respectivamente 6 y 5 al ser únicas y sumar la cantidad correspondiente que marca la fila y la columna.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			F1=6			Suma 6
Hay 3	F2		F3		F4	Suman 9
Hay 2			F5		F6	Suman 11
Hay 4	F7	F8=5	F9		F10	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Quedan los siguientes números por colocar: 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9.

Las fichas F2 y F7 han de ser 0 ó 1; para sumar 9 las fichas F4, F6 y F10 han de ser 2, 3 ó 4. Y por lo tanto las fichas $F3$, $F5$ y $F9$ han de ser 7, 8 ó 9.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			6			Suma 6
Hay 3	F2→ 0,1		F3→ 7,8,9		F4→ 2,3,4	Suman 9
Hay 2			F5→ 7,8,9		F6→ 2,3,4	Suman 11
Hay 4	F7→ 0,1	5	F9→ 7,8,9		F10→ 2,3,4	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Como las fichas $F7$, $F9$ y $F10$ han de sumar 14 ($19 - 5 = 14$), la única forma posible sería siendo $F7 = 1$; $F9 = 9$ y $F10 = 4$. Tras lo cual deducimos también $F2 = 0$.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			6			Suma 6
Hay 3	0		F3→ 7,8,9		F4→ 2,3,4	Suman 9
Hay 2			F5→ 7,8,9		F6→ 2,3,4	Suman 11
Hay 4	1	5	9		4	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Descartamos el 9 como posible valor de las fichas F3 y F5. Y descartamos también el 4 como valor de las fichas F4 y F6, ya que las fichas deben ser diferentes, es decir, los valores no se pueden repetir.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			6			Suma 6
Hay 3	0		F3→ 7,8		F4→ 2,3	Suman 9
Hay 2			F5→ 7,8		F6→ 2,3	Suman 11
Hay 4	1	5	9		4	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Ahora como $F3 + F4 = 9$, obtenemos necesariamente que $F3 = 7$ y $F4 = 2$; y como $F5 + F6 = 11$ entonces $F5 = 8$ y $F6 = 3$.

4º Completamos la tabla.

	Hay 2	Hay 1	Hay 4	Hay 0	Hay 3	
Hay 1			6			Suma 6
Hay 3	0		7		2	Suman 9
Hay 2			8		3	Suman 11
Hay 4	1	5	9		4	Suman 19
Hay 0						Suma 0
	Suman 1	Suman 5	Suman 30	Suma 0	Suman 9	

Análisis del problema.

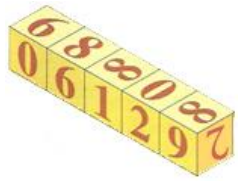
Podemos ver que el nivel de dificultad de este problema es medio. Los alumnos tienen que usar un razonamiento lógico para ir desgranando las "pistas" que indica el problema.

El problema no presenta gran dificultad si se ejecuta de forma ordenada, numerando las celdas que tienen una ficha. El paso más difícil sería organizarse y numerarlas. A partir de ahí es cuestión de ir viendo las distintas posibilidades hasta llegar a la única solución posible.

Puede que la dificultad que entrañe el problema sea el de explicar exhaustivamente los razonamientos seguidos para deducir el número de fichas de cada fila y columna y el valor de las mismas, que es un proceso al cual han de acostumbrase el alumnado.

10. El dado raro.

Estos cinco dados puestos en fila son iguales.



a) Si ves el número de frente, leerás el: 06129 (seis mil ciento veintinueve). ¿Qué número leerás si los miras por el lado contrario?

Si ponemos en fila dos dados (como los de la imagen) podemos formar los números 10 y 11. El 10 tiene 4 divisores (1, 2, 5, 10): la mitad, son pares y la otra mitad son impares. El 11, como buen número primo, solo tiene dos divisores, el 1 y el 11 y los dos impares.

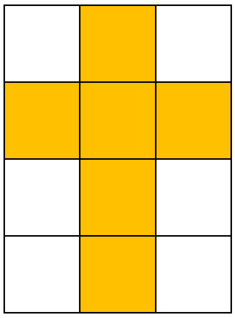
b) De los números que puedes leer al poner dos dados “raros” en fila, busca los que cumplen la propiedad del 10 (la mitad de sus divisores son pares y la otra mitad son impares).

c) ¿Hay algún número primo que puedas leer en los dados que cumpla dicha propiedad?

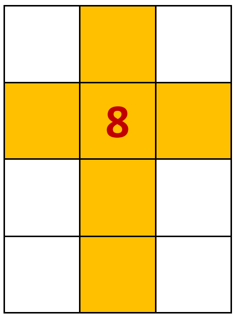
Razona todas tus respuestas.

RESOLUCIÓN

Lo primero que habría que plantearse es qué números contiene el dado y en qué posición están colocados. Para ello se utilizará el desarrollo del cubo.



Como el número 8 es el que más aparece en la imagen. Lo colocamos en la posición central.



Hay que diferenciar las dos formas de “mirar” el 8: horizontal o vertical. Las dos caras que están en contacto con el 8 de manera horizontal contienen el 9 y el 1. Por lo que ya se pueden colocar en el dado.

9	8	1

Nos fijamos ahora en las dos caras que están en contacto con el 8 de manera vertical. Éstas contienen el 2 y el 6. Por lo que ya se pueden colocar en el dado.

	2	
9	8	1
	6	

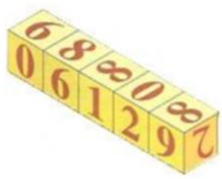
Ya solo nos queda por ubicar el o que lo colocamos en la cara restante.

	2	
9	8	1
	6	
	0	

Comenzamos a hora a resolver la primera cuestión que plantea el problema:

a) Si ves el número de frente, leerás el: 06129 (seis mil ciento veintinueve). ¿Qué número leerás si los miras por el lado contrario?

Ya que hay que leerlo por el lado contrario hay que empezar por el primer dado de la derecha:



- Como aparece un 9 al lado del 8 horizontal en la cara posterior debe estar el 1.
- Como aparece un 2 al lado del 0 en la cara posterior debe estar el 6.
- Como aparece un 1 al lado del 8 horizontal en la cara posterior debe estar el 9.

- Como aparece un 6 al lado del 8 vertical en la cara posterior debe estar el 2.
- Como aparece un 0 al lado del 6 en la cara posterior debe estar el 8.

Colocándolos todos en este orden, el número que resulta es el:

1	**6**	**9**	**2**	**8**

Continuamos ahora con la segunda parte del problema: Si ponemos en fila dos dados (como los de la imagen) podemos formar los números 10 y 11. El 10 tiene 4 divisores (1, 2, 5, 10): la mitad, son pares y la otra mitad son impares. El 11, como buen número primo, solo tiene dos divisores, el 1 y el 11 y los dos impares.

b) De los números que puedes leer al poner dos dados "raros" en fila, busca los que cumplen la propiedad del 10 (la mitad de sus divisores son pares y la otra mitad son impares).

Formamos una tabla con los números de dos cifras que pueden formarse al poner dos "dados raros" en fila:

00	01	02	06	08	09
10	11	12	16	18	19
20	21	22	26	28	29
60	61	62	66	68	69
80	81	82	86	88	89
90	91	92	96	98	99

De la tabla empecemos a descartar números. Para que cumplan la propiedad del 10 podemos eliminar todos los números impares ya que no tienen divisores pares.

00		02	06	08	
10		12	16	18	
20		22	26	28	
60		62	66	68	
80		82	86	88	
90		92	96	98	

Eliminamos ahora el 00 por no cumplir la propiedad.

		02	06	08	
10		12	16	18	
20		22	26	28	
60		62	66	68	
80		82	86	88	
90		92	96	98	

De los números que quedan vamos eliminando los que **solo** tengan divisores pares y el 1: el 08 y el 16.

		02	06		
10		12		18	
20		22	26	28	
60		62	66	68	
80		82	86	88	
90		92	96	98	

Eliminamos el 20 y el 80 ya que todos sus divisores son pares excepto el 1 y 5.

		02	06		
10		12		18	
		22	26	28	
60		62	66	68	
		82	86	88	
90		92	96	98	

Con los números restantes vamos a ir escribiendo sus divisores y seleccionando aquellos que cumplan "la propiedad del 10" (Igual número de divisores pares e impares).

	Divisores	¿Cumple la propiedad?
02	1, 2	SI
06	1, 2, 3, 6	SI
10	1, 2, 5, 10	SI
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	NO
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	NO
22	1, 2, 11, 22	SI
26	1, 2, 13, 26	SI
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	NO
60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60	NO
62	1, 2, 31, 62	SI
66	1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66	SI
68	1, 2, 4, 17, 34, 68	NO
82	1, 2, 41, 82	SI
86	1, 2, 43, 86	SI
88	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88	NO
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90	SI
92	1, 2, 4, 23, 46, 92	NO
96	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96	NO
98	1, 2, 7, 14, 49, 98	SI

		02	06		
10		12		18	
		22	26	28	
60		62	66	68	
		82	86	88	
90		92	96	98	

Los números que cumplen la "propiedad del 10" son:

02 – 06 – 10 – 22 – 26 – 62 – 66 – 82 – 86 – 90 – 98

c) ¿Hay algún número primo que puedas leer en los dados que cumpla dicha propiedad?

Como se puede observar en la tabla, entre todos los números que cumplen "la propiedad del 10", el único número primo es el **02.**

Análisis del problema.

Como podemos ver, el nivel de dificultad de este problema es medio y corresponde con el de la mayoría del resto de los problemas que se plantean en este libro.

A la hora de resolverlo es necesario usar los conocimientos que posee el alumnado sobre divisibilidad: números primos y compuestos, múltiplos y divisores, así como los criterios de divisibilidad.

La mayor dificultad a la hora de resolver el problema es hallar todos los divisores de los números, ya que hay que ser muy ordenado para que no se nos pase ningún número. Presentamos un método para hallar todos los divisores:

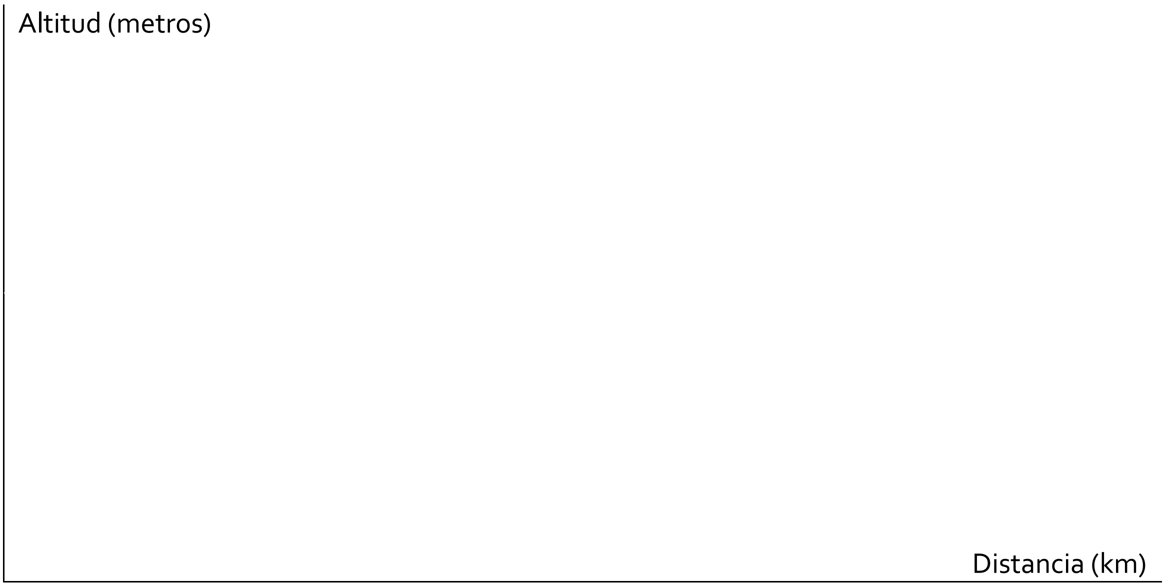
Sea $m = p^a \cdot q^b \cdots r^c$, con $p, q, \dots, r$ primos y $a, b, \dots, c$ enteros positivos. Todo divisor de m será de la forma $n = p^{a'} \cdot q^{b'} \cdots r^{c'}$, donde $0 \le a' \le a$, $0 \le b' \le b$,..., $0 \le c' \le c$. Por lo tanto, dando valores ordenadamente a cada exponente podremos hallar todos los divisores. Por ejemplo si $m = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, tenemos:

a	b	c	n
0	0	0	1
0	0	1	5
0	1	0	3
0	1	1	15
0	2	0	9
0	2	1	45
1	0	0	2
1	0	1	10
1	1	0	6
1	1	1	30
1	2	0	18
1	2	1	90
2	0	0	4
2	0	1	20
2	1	0	12
2	1	1	60
2	2	0	36
2	2	1	180
3	0	0	8
3	0	1	40
3	1	0	24
3	1	1	120
3	2	0	72
3	2	1	360

11. Vuelta ciclista.

En la última vuelta ciclista a España en su etapa Alcalá la Real (845 m) - Alto Hoya de la Mora (Monachil, Sierra Nevada) los participantes tuvieron que recorrer 130 km y debieron superar varios puertos de montaña con diferentes pendientes. Utilizando la tabla siguiente dibuja el perfil de la etapa. Razona la respuesta.

Km	0	15	30	45	60	65	75	95	100	110	130
Pendiente	0%	0%	-2%	0.75%	0.75%	2%	6%	-4.5%	2%	8.4%	5%

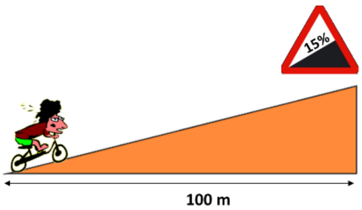


RESOLUCIÓN

PRIMERA INTERPRETACIÓN.

Comenzamos aclarando el significado de "pendiente":

Magnitud que indica el desnivel de una carreta con respecto a la horizontal, indicando como un porcentaje el desnivel en "m" que existe entre dos puntos cuya distancia medida horizontalmente es de 100 m.



Por tanto, vamos a necesitar conocer la altitud que supera en función de la distancia horizontal que se ha desplazado, para ello, probamos por ejemplo con 20 m: Si en 100 metros sube 15, en 20 metros, subirá x. Usando la regla de tres simple directa:

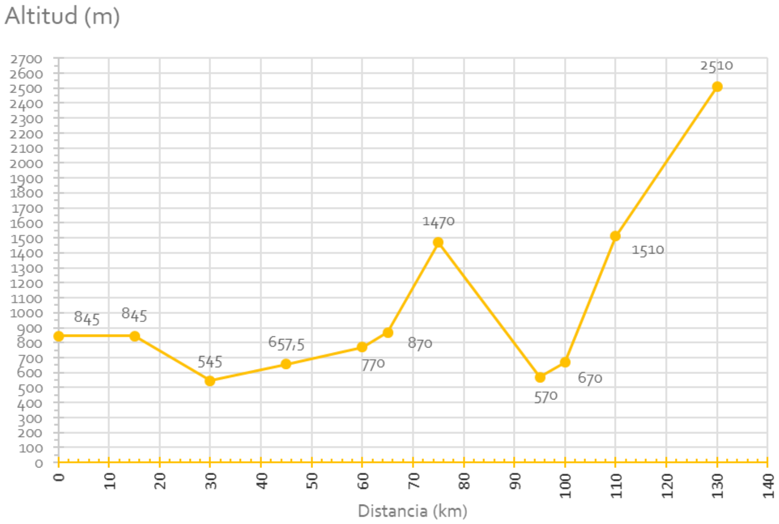
100 m ⟶ 15 m
20 m ⟶ x

$$x = \frac{20 \cdot 15}{100} = 3$$

Por lo tanto, en 20 metros, subirá 3 metros. Vamos a completar la tabla que nos indica la distancia recorrida, la pendiente existente en cada punto y las distintas variaciones en la altitud.

Distancia (km)	Pendiente %	Variación (m)	Altitud (m)
0	0%	0	845
15	0%	0	845
30	-2%	-300	545
45	0,75%	112,5	657,5
60	0,75%	112,5	770
65	2%	100	870
75	6%	600	1470
95	-4,50%	-900	570
100	2,00%	100	670
110	8,40%	840	1510
130	5,00%	1000	2510

Y con estos datos podemos dibujar el perfil de la etapa:



SEGUNDA INTERPRETACIÓN.

Los datos principales de este problema se refieren a la función que asocia a cada kilómetro la pendiente correspondiente en %. Esta función se presenta en forma de tabla, una de las cuatro maneras en que pueden expresarse las funciones. Recordemos que las otras tres son mediante un enunciado verbal o escrito, mediante una expresión algebraica y mediante una gráfica. De hecho, este problema nos pide que dibujemos la gráfica de otra función, aquella que asocia la distancia a la meta de la etapa ciclista en kilómetros, con su altitud en metros

Además de los datos de la tabla, tenemos la altitud del punto de partida de la etapa, es decir en el kilómetro 0. Por tanto, ya tenemos el primer punto de la gráfica de la función que nos piden, el punto (0,845)

Distancia (Km)	0											
Altitud (m)	845											

Con los datos que tenemos no podemos representar de forma exacta el perfil de la etapa, ya que necesitaríamos el porcentaje en cada kilómetro. Pero podemos hacer una aproximación suponiendo que la pendiente se mantiene constante alrededor de cada kilómetro. Así supondremos que entre el kilómetro 0 y el kilómetro 7,5 la pendiente es del 0%. Es decir, vamos a considerar que la pendiente cambia en los puntos medios de los kilómetros donde conocemos el porcentaje de la pendiente. Esos puntos son

$$\frac{0+15}{2}=7{,}5\ km \quad \frac{15+30}{2}=22{,}5\ km \quad \frac{30+45}{2}=37{,}5\ km \quad \frac{45+60}{2}=52{,}5\ km \quad \ldots$$

Y así tenemos los valores de nuestra variable independiente:

Distancia (Km)	0	7,5	22,5	37,5	52,5	62,5	70	85	97,5	105	120	130
Altitud (m)	845											

Para calcular los valores de la variable dependiente correspondientes, recordemos que significa un pendiente del 37% por ejemplo. Este porcentaje en forma de fracción es 37/100, que significa que cada vez que avanza 100 metros sube 37. Por proporcionalidad cuando se avanza 1 Km se sube 370 m. Si la pendiente fuera negativa, bajaría.

Completemos la tabla de la función que nos piden: en los dos primeros trozos como la pendiente es 0%, se mantiene la altitud que ya sabemos que inicialmente en Álcala la Real es de 845 m.

Distancia (Km)	0	7,5	22,5	37,5	52,5	62,5	70	85	97,5	105	120	130
Altitud (m)	845	845	845									

Para calcula la altitud en resto de kilómetros, aplicamos el método de reducción a la unidad de magnitudes proporcionales. Al suponer que la pendiente permanece constante en cada trozo, hay una relación de proporcionalidad directa entre la distancia y la altitud en que se encuentra.

Así, del kilómetro 22,5 al 37,5 estamos suponiendo que la pendiente es -2%, por tanto, por cada 100 m baja 2. Por reducción a la unidad, cada kilómetro baja 20 m, y por tanto en el intervalo 37,5 - 22,5 = 15 km, baja 20 · 15 = 300 m. En el kilómetro 37,5 está a 845 - 300 = 545 m.

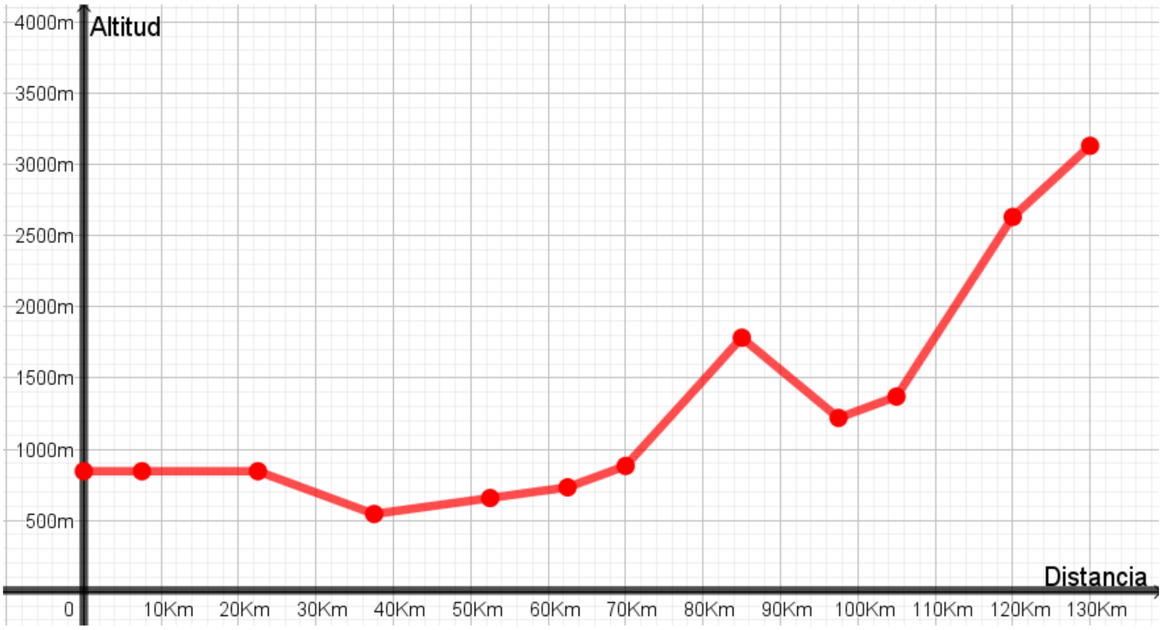
Distancia (Km)	0	7,5	22,5	37,5	52,5	62,5	70	85	97,5	105	120	130
Altitud (m)	845	845	845	545								

De la misma forma entre el kilómetro 37,5 al 52,5 estamos suponiendo que la pendiente es 0,75%, por tanto, por cada 100 m sube 0,75. Por reducción a la unidad, cada kilómetro sube 7,5 m, y por tanto en 52,5 - 37,5 = 15 km, sube 7,5 · 15 = 112,5 m. En el kilómetro 52,5 está a 545 + 112,5 = 657,5 m de altitud.

Realizamos el resto de cálculos de forma similar con la calculadora CASIO y completamos la tabla:

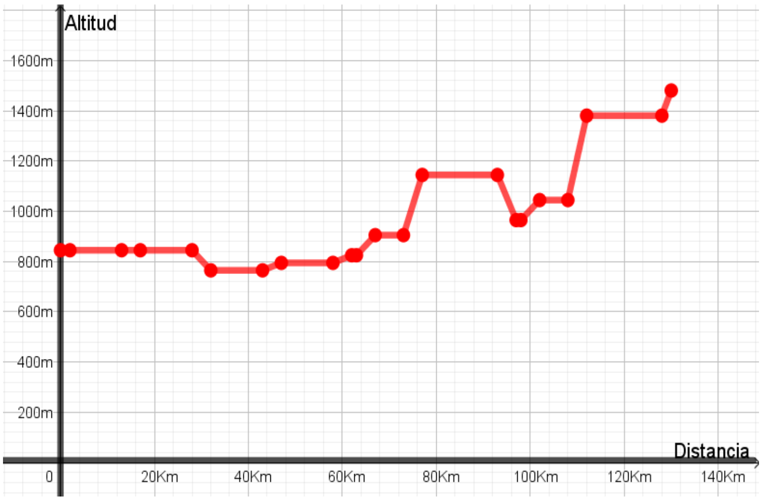
Distancia (Km)	0	7,5	22,5	37,5	52,5	62,5	70	85	97,5	105	120	130
Altitud (m)	845	845	845	545	657,5	732,5	882,5	1782,5	1220	1370	2630	3130

Una vez que tenemos la tabla, hacemos su representación. En el eje de abscisas situaremos la distancia en Km con una escala en que cada segmento son 10 Km. Y en el eje Y, para la altitud en metros utilizaremos la escala de un segmento son 500 m. Representamos los puntos y los unimos, obteniendo un posible perfil de la etapa:

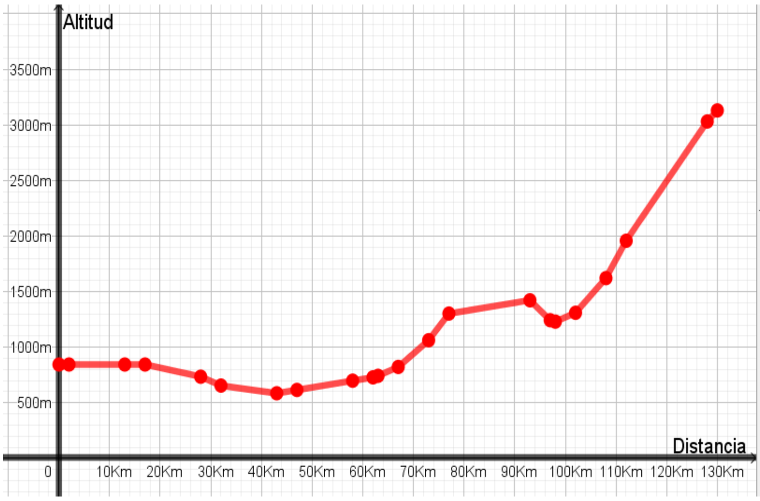


Análisis del problema.

Este problema de dificultad alta, requiere que el alumno conozca muy bien los conceptos de pendiente y de función. Además, el alumno se enfrenta a la necesidad de completar los datos para poder dar alguna solución al problema. En la resolución hemos visto dos planteamientos de los datos que nos proporcionan. Otra opción podría ser que el porcentaje se mantiene constante durante 4 km alrededor del punto y el resto sería de pendiente nula:



O que en el resto tuviera la pendiente media entre el anterior y el posterior:



Este interesante problema, se podría trabajar para que toda la clase lo resolviera conjuntamente de la siguiente manera, suponiendo que lo vamos a resolver según se ha planteado en la solución:

INCLUSIÓN EN CLASE

Se divide la clase en 10 grupos, cada grupo se centra en dos kilometrajes consecutivos de la tabla: el 1º y el 2º, el 2º y el 3º, el 3º y el 4º... Para cada uno de ellos se calcula el punto medio anterior y el posterior, así como, los metros que sube o baje entre esos kilómetros.

Una vez que los tiene, van contrastando sus datos con el grupo anterior y con el posterior, primero por ejemplo los grupos impares con el par consecutivo superior y después con los grupos pares con el impar consecutivo superior.

Finalmente, en la pizarra y todos en su cuaderno, se va completando la tabla y dibujando la gráfica según los datos que va aportando cada uno.

También, se podría plantear el problema buscando los datos reales de una etapa de alguna vuelta ciclista en Internet y comprobar que el perfil de la etapa es el correcto.

12. Trabajando con números.

En la clase de 2º ESO, el profesor de Matemáticas les dice a los alumnos:

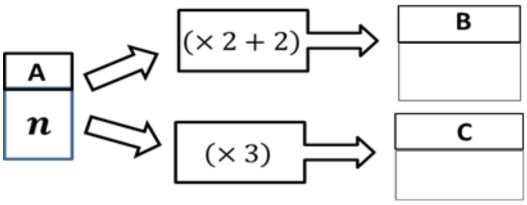
- Que cada uno piense un número natural y lo ponga en una casilla A;
- Luego, que coja ese número, lo multiplique por 2 y al resultado le sume 2, y lo ponga en una casilla B;
- Que cojan otra vez el número de la casilla A y lo multiplique por 3 y lo ponga en una casilla C.
- Ahora que sumen los números de las casillas B y C, a esa suma la multipliquen por 5 y al resultado le reste 3, y ese es el resultado final.

Contesta de forma razonada a las siguientes cuestiones:

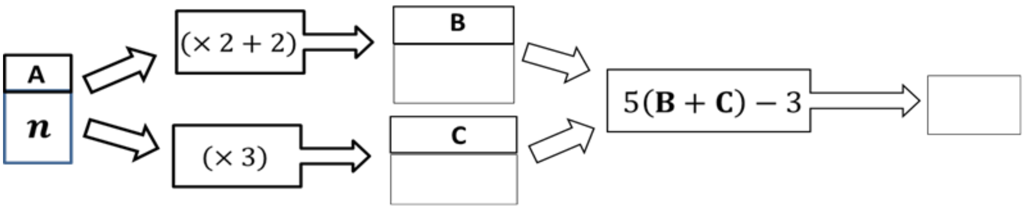
a) Si un alumno escogió el 7 en la casilla A, ¿cuál ha sido su resultado final?
b) Si un alumno obtuvo como resultado final, 57, ¿qué número escogió en la casilla A?
c) Un alumno dice que su resultado final fue 86, ¿puede ser posible?

RESOLUCIÓN

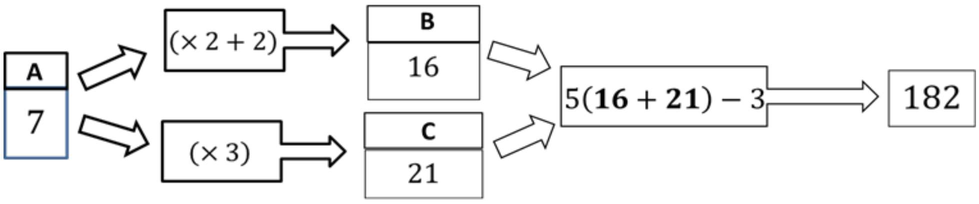
Pensamos un número natural y lo colocamos en la casilla A. A continuación, lo multiplicamos por 2 y al resultado le sumamos 2, y lo ponemos en la casilla **B.** Volvemos a tomar el número de la casilla **A**, lo multiplicamos por 3 y lo colocamos en la casilla **C.**



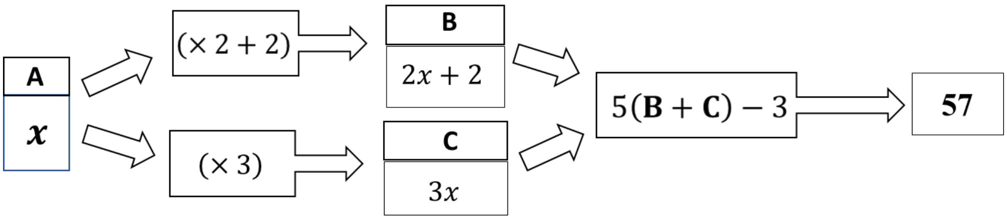
Ahora sumamos los números de las casillas **B** y **C**, a esa suma la multiplicamos por **5** y al resultado se le resta **3**. Ese es el resultado final.



a) Si un alumno escogió el 7 en la casilla A, ¿cuál ha sido su resultado final?



b) Si un alumno obtuvo como resultado final, 57, ¿qué número escogió en la casilla A?

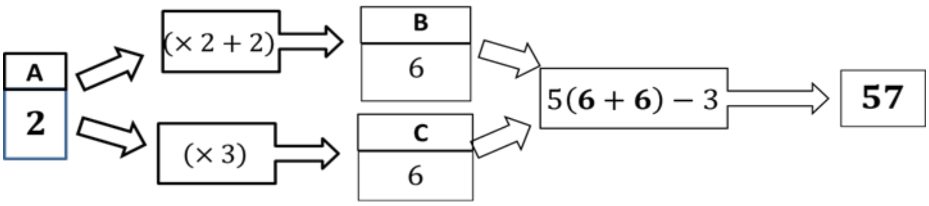


$$5\cdot[(2x+2)+3x]-3=5\cdot(5x+2)-3=25x+10-3=25x+7$$

Por tanto:

$$25x+7=57\Rightarrow 25x=57-7\Rightarrow 25x=50\Rightarrow x=\frac{50}{25}=2$$

Comprobemos si es cierto:



c) Un alumno dice que su resultado final fue 86, ¿puede ser posible?

Fijémonos en las últimas operaciones:

- ✭ El resultado de $5\cdot(5x+2)$ tiene que ser múltiplo de 5, por lo cual solo puede terminar en 0 ó 5.
- ✭ Pero le tenemos que restar 3, con lo cual los resultados posibles solamente pueden acabar en 7 ó 2.
- ✭ El enunciado nos dice que $5\cdot(5x+2)-3=86$, lo cual es imposible ya que no termina ni en 7 ni en 2, en este caso lo hace en 6.

Comprobemos haciendo los cálculos como en el apartado b):

$$5\cdot[(2x+2)+3x]-3=5\cdot(5x+2)-3=25x+10-3=25x+7$$

$$25x+7=86$$

$$25x = 79$$

$$x = \frac{79}{25} = 3.16$$

Como el número obtenido no es un número natural, no se cumple la primera premisa del problema, lo que nos confirma que nunca podría obtenerse como resultado final 86.

Análisis del problema.

Como podemos observar, el nivel de dificultad de este problema es medio y corresponde con el de la mayoría del resto de los problemas que se plantean en este libro.

A la hora de resolverlo es necesario usar los conocimientos que posee el alumnado sobre las operaciones aritméticas (uso de paréntesis y prioridad en su ejecución) y de álgebra (al tener que plantear y resolver pequeñas ecuaciones).

Podemos incluso apreciar en el último apartado el conocimiento y uso de las reglas de divisibilidad (múltiplos de 5) y el razonamiento lógico para una más fácil y rápida resolución.

13. Curiosa tradición.

Jimena ha seguido una curiosa tradición que ha repetido toda su vida: guarda en una caja las velas de todos sus pasteles de cumpleaños (cuando era muy pequeña las guardó su papá). Si Jimena tiene 59 años, ¿Cuántas velas hay en la caja?

RESOLUCIÓN

La resolución de este problema es muy sencilla: bastaría con ir sumando consecutivamente todos los números desde el 1 al 59, ya que cada año se cumple un año más que el anterior:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 57 + 58 + 59 = 1 770 velas

Lo interesante en este problema es darse cuenta de que si emparejamos los números de la siguiente forma:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... + 53 + 54 + 55 +56 +57 + 58 + 59

Todas las parejas suman 60 y como tenemos un total de (59 : 2) parejas de números tomados de esta forma, la suma de todos ellos dará como resultado:

60 · 29,5 = 1 770

Otra forma de resolverlo es teniendo en cuenta que se trata de una progresión aritmética, donde el primer término es 1 y la diferencia (número que se suma al pasar de un término al siguiente) también es 1:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 1 = 2$$
$$a_3 = a_2 + 1 = (a_1 + 1) + 1 = a_1 + 2 \cdot 1 = 3$$
$$a_4 = a_3 + 1 = (a_2 + 1) + 1 = a_2 + 3 \cdot 1 = 4$$
$$\vdots$$
$$a_{59} = a_{58} + 1 = a_1 + 58 \cdot 1 = 59$$

Para sumar los términos de una progresión aritmética escribimos todos los términos de la sucesión de forma ascendente y descendente y los sumamos de esta forma:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 57 + 58 + 59$$
$$\underline{S = 59 + 58 + 57 + 56 + 55 + \cdots + 3 + 2 + 1}$$
$$2S = 60 + 60 + 60 + 60 + 60 + \cdots + 60 + 60 + 60$$

De esta forma, la suma de todas las parejas es 60. Como son 59 parejas, el total de la suma es:

$$2S = 59 \cdot 60 = 3\,540$$

Como hemos sumado dos series, habría que dividir el resultado entre 2:

$$S = 3540 : 2 = 1\,770$$

Análisis del problema.

La dificultad de este problema es bastante fácil, comparado con otros de este libro, aunque lo que se pretende ver con el mismo es precisamente la forma de resolverlo.

Aunque en 2º de la ESO, todavía no se han estudiado las progresiones aritméticas, por lo que no dispone de estos conocimientos, si es bastante adecuado para ver cómo se desenvuelve el alumnado a la hora de resolverlo: qué estrategias adopta.

14. El repique de las campanas.

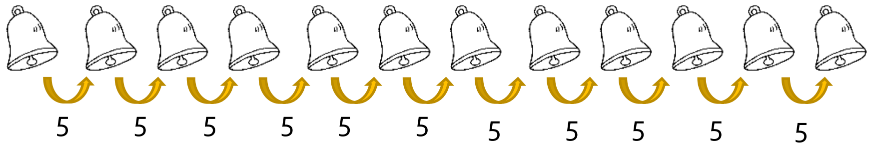
La campana del campanario de la iglesia de Geometralia suena cada hora. Sin embargo, la velocidad con la que suenan las campanadas es extremadamente lenta. Cada campanada tarda en darse cinco segundos. La pregunta es la siguiente: ¿Cuánto tardarán en darse las campanadas de las 12 del mediodía?

RESOLUCIÓN

Tenemos que tener en cuenta que varias cosas:

A las 12 del medio día el reloj dará 12 campanadas, pero entre campanada y campanada pasan 5 segundos por lo tanto solo tendremos que multiplicar por 11 (5·11) para hallar el tiempo transcurrido.

Veamos una ilustración:



Así, serán un total de 55 segundos.

Análisis del problema.

Este problema tiene un nivel de dificultad bajo, aunque si no nos paramos a pensar detenidamente la situación, podemos equivocarnos con facilidad. Este tipo de problemas pueden englobarse como *problemas de ingenio* o *problemas de pensamiento lateral* que hacen que tengamos que mirar desde otra perspectiva la situación. Añadimos otro problema similar que incluso puede hacer que los alumnos "caigan con mayor facilidad":

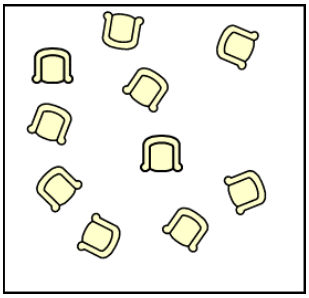
En una casa encantada vive Fantasmón, un fantasma muy especial. Aparece cuando el reloj comienza a dar las campanadas de la medianoche, y desaparece con la última campanada. El reloj tarda 30 segundos en dar las seis campanadas de las seis de la tarde. ¿Cuánto tiempo dura la aparición de Fantasmón?

15. Lío en el restaurante.

Un camarero, al llegar a su trabajo, recibe el encargo de colocar en un salón cuadrado 10 sillas que están desordenadas de la noche anterior, de modo que en cada una de las paredes queden situadas tres sillas. Además, no puede haber sillas que no estén al lado de una pared ¿Cómo resolverá el problema?

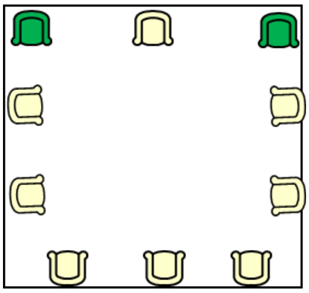
RESOLUCIÓN

En primer lugar, establecemos la situación inicial del problema; es decir, un salón cuadrado y 10 sillas desordenadas.



Se quiere situar en cada pared 3 sillas y, tenemos 4 paredes, por lo que necesitaríamos 12 sillas.

Solamente existen 10 sillas, eso quiere decir que tenemos dos sillas que tienen que estar situadas en dos paredes a la vez, si observamos la ilustración las sillas de color verde, estarían en dos paredes al mismo tiempo.

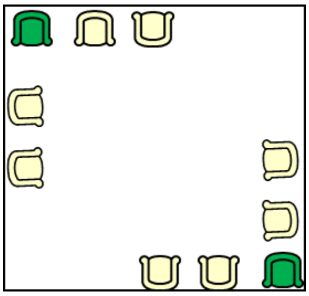


La solución sería que estuviera en las esquinas para que pertenezcan a las dos paredes y cuente en cada una de ellas. Se puede apreciar en la ilustración que tenemos las 10 sillas colocadas de tal forma que en cada pared haya tres.

Análisis del problema.

El nivel de dificultad de este problema es bastante baja, comparado con otros de este libro. Este problema está planteado para evaluar las estrategias lógico-geométricas de resolución que aplica el alumnado de 2º de E.S.O.

Podemos incluso hallar otra solución. Nuestro razonamiento ha consistido en deducir que necesariamente dos sillas han de estar compartiendo pared, esto es, han de estar en una esquina. Por lo tanto, otra solución es:



En este tipo de problemas de colocación de objetos de forma que cumplan determinadas condiciones, es recomendable que los alumnos manipulen algún tipo de objeto (monedas, piedrecitas…) para que les sea más fácil resolver el problema. Añadimos un problema más de este tipo para que sean practicados en clase.

Forma con estos 10 bombones que aparecen en el dibujo, cinco líneas con cuatro bombones en cada una. ¿Lo has logrado? Entonces mereces un premio. Cómete tres bombones y trata de agrupar los siete restantes en seis líneas con tres bombones cada una.

16. Problemas sistemáticos.

a) Manuel y María son hermanas:

Manuel: "Tengo tantas hermanas como hermanos."

María: "Tengo dos veces más hermanos que hermanas."

¿Cuántos hijos e hijas hay en la familia?

b) Abdallah se pasea por el desierto con sus camellos y sus dromedarios. En total hay 34 pies y 13 jorobas. ¿Abdallah tiene más dromedarios que camellos o más camellos que dromedarios?

RESOLUCIÓN

Solución apartado a)

Llamamos **x** al número de hermanos varones que hay en la familia. Manuel tendrá **x - 1** hermanos (él no cuenta). Como el número de hermanas es igual al número de hermanos, habrá **x - 1** chicas.

Como María afirma que tiene dos veces más hermanos que hermanas, María tiene **(x - 1) - 1** hermanas y **x** hermanos. Como el número de hermanos es el doble que el de hermanas:

$$x = 2(x - 1 - 1) \Rightarrow x = 2x - 2 - 2 \Rightarrow x - 2x = -4 \Rightarrow$$

$$-x = -4 \Rightarrow x = 4$$

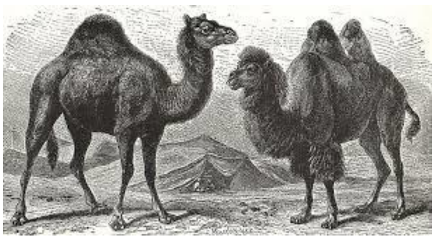
Por tanto, **x = 4** Así podemos decir que hay 4 chicos en la familia y como hay una chica menos, habrá 3 chicas.

La familia está formada por 4 hermanos y 3 hermanas.

Solución apartado b)

Empecemos contando pies. Cada animal tiene 4 pies, pero si divido **34 : 4** no sale exacto, sale decimal. ¡Claro!, tenemos que contar los pies de Abdallah. **34 – 2 = 32** hay 32 pies de animales.

32 : 4 = 8



Dromedario Camello

Eso significa que hay 8 animales. Vamos a llamar **x** al número de camellos, entonces habrá**8 – x** dromedarios. Ahora contemos las jorobas.

Recordemos que los camellos tienen 2 jorobas y los dromedarios solamente 1. Por tanto:

$$2x + (8 - x) = 13 \Rightarrow 2x + 8 - x = 13 \Rightarrow x = 13 - 8 = 5$$

Por tanto hay **5 dromedarios** y habrá **8 – x = 8 – 5 = 3 camellos**.

Abdallah tiene más dromedarios que camellos.

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES.

a) Sea *x* el número de hombres e *y* el número de mujeres. La primera condición implica que

$$x - 1 = y$$

La segunda, nos dice que:

$$2(y - 1) = x$$

Tal y como está planteado el sistema, éste nos invita a resolverlo por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x - 1 = y \\ 2(y - 1) = x \end{cases} \Rightarrow 2\big((x - 1) - 1\big) = x \Rightarrow 2(x - 2) = x \Rightarrow$$

$$2x - 4 = x \Rightarrow 2x - x = 4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 4 - 1 = 3$$

Por lo tanto, en la familia hay 4 hermanos y 3 hermanas.

b) Llamemos *x* al número de camellos e *y* al número de dromedarios. Si hay 34 pies, entonces:

$$4x + 4y + 2 = 32$$

Contando jorobas:

$$2x + y = 13$$

Resolvamos el sistema por el método de reducción, multiplicando la segunda ecuación por -2:

$$\begin{cases} 4x + 4y + 2 = 32 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 30 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 32 \\ -4x - 2y = -26 \end{cases} \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

Sustituyendo en la segunda ecuación, $2x + (3) = 13 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$, por lo que hay 5 camellos y 3 dromedarios, y por lo tanto, Abdallah tiene más dromedarios que camellos.

Análisis del problema.

Este problema se puede abordar en segundo curso de la E.S.O. al trabajar las ecuaciones, aunque también se podría abordar como sistema de ecuaciones.

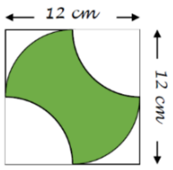
La dificultad del ejercicio reside en la dificultad inherente al alumnado para traducir al lenguaje algebraico, herramienta que empiezan a conocer en secundaria y con la que no están familiarizados.

17. Festival de cortos.

a) Andrea, Bea, Carmen, Dafne y Elena disputaron una carrera. Dafne aventajó a Elena en tres puestos y Carmen no llegó la última. Los puestos de Bea y Carmen sumaron ocho. ¿En qué orden llegaron?

b) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

c) ¿Cuál es el área sombreada de este mosaico?



RESOLUCIÓN

a) “1º corto”

Para abreviar nombraremos a cada una de las chicas con la inicial de su nombre:
Analizamos las diferentes pistas:

- *Dafne aventajó a Elena en tres puestos*: Sólo hay dos posibilidades Dafne llegó la 1ª y por tanto Elena la 4ª, o Dafne llegó la 2ª y Elena la 5ª.

  D=1ª y E=4ª o D=2ª y E=5ª

- *Carmen no llegó la última*:

  C=1ª o C=2ª o C=3ª o C=4ª

- *Los puestos de Bea y Carmen sumaron ocho*: Sólo hay dos posibilidades que sumen 8:

  B=3ª y C=5ª o B=5ª y C=3ª

Pero como Carmen no llegó la última, sabemos que Bea llegó 5ª y Carmen la 3ª

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
		CARMEN		BEA

Como ya tenemos ocupada la 5ª posición, sabemos entonces que Elena no llegó en dicha posición, por lo que Elena llegó la 4ª y Dafne la 1ª

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
DAFNE		CARMEN	ELENA	BEA

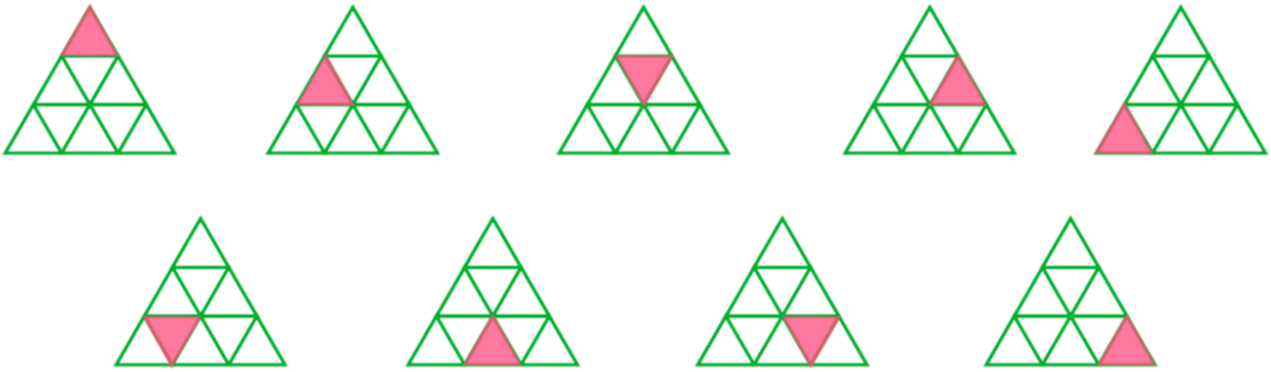
Así, por eliminación, está claro que Andrea llegó la 2ª.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª

DAFNE ANDREA CARMEN ELENA BEA

b) “2º corto”

- Contamos los triángulos pequeños:



- Contamos los triángulos medianos:

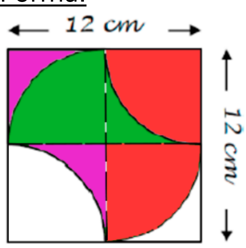
- Contamos el triángulo grande:

Por tanto, hay 9 + 3 + 1 = 13 triángulos.

c) “3º corto”

Podemos calcular el área del “recinto verde” de varias maneras:

<u>1ª Forma:</u>

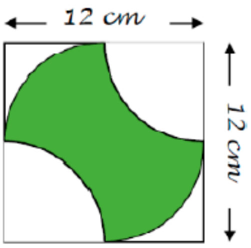


Dado que las dos áreas rosas son iguales y las dos áreas rojas también son iguales. El área del recinto verde se reduce a calcular el área del rectángulo de base 12 y altura 6.

$$A_{recinto} = 6 \cdot 12 = 72\ cm^2$$

<u>2ª Forma:</u>

$$A_{\underline{esquina}\atop blanca} = \frac{A_{\underline{cuadrado}\atop blanco}}{4} - \frac{A_{\underline{círculo}\atop verde}}{4} = 6^2 - \frac{\pi \cdot 6^2}{4}\ cm^2$$



$$A_{\underline{esquina}\atop verde} = A_{\underline{esquina}\atop blanca} = 6^2 - \frac{\pi \cdot 6^2}{4}\ cm^2$$

$$A_{recinto} = A_{\underline{semi\ círculo}\atop verde} + 2A_{\underline{esquina}\atop verde} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + 2\left(6^2 - \frac{\pi \cdot 6^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = \frac{\pi \cdot 6^2}{2} + 2 \cdot 36 - \frac{\pi \cdot 6^2}{2} = 72\ cm^2$$

Análisis del problema.

Al estar este problema subdividido en tres, habría que analizar cada "problema" por separado.

a) "1º corto"

El nivel de dificultad de este problema es bajo. Los alumnos tienen que usar un razonamiento lógico para ir desgranando las "pistas" que indica el problema.

b) "2º corto"

El nivel de dificultad de este problema es bajo. Los alumnos solo tienen que contar los triángulos de diferentes tamaños que se pueden observar en la figura.

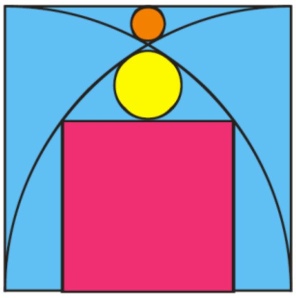
c) "3º corto"

El nivel de dificultad de este problema es medio. A la hora de resolverlo es necesario conocer las áreas del círculo y del cuadrado.

Si se emplea la primera forma de resolverlo, desplazando trozos de la imagen original para componer una más sencilla, el problema se reduce al cálculo del área de un rectángulo.

18. Sangakus.

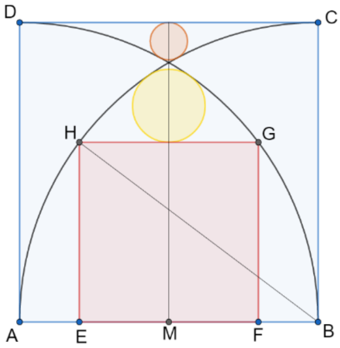
En templos budistas de Japón, colgadas en sus aleros, se hallan tablillas de madera con exquisitos dibujos que hacían referencias a los logros artísticos alcanzados, ofrecidos por sus fieles. Entre ellos existen algunos con figuras geométricas que llamaron Sangakus, que significa "tablilla matemática" y en los que se plantean diversos retos matemáticos.



Sabiendo que el lado de cuadrado mayor mide 80 mm, ¿cuánto medirá el radio de ambos círculos y el lado del cuadrado?

RESOLUCIÓN

Consideremos la configuración de la *Figura 1*, donde M es el punto medio del lado AB, E y F son los vértices del cuadrado sobre el lado AB. Llamando l a la medida del lado del cuadrado interior, se tiene que



$$AE + EF + FB = 80.$$

Además, como $AE = FB$ debido a la simetría de la figura, deducimos que

$$AE + l + AE = 80 \Rightarrow AE = \frac{80 - l}{2} = 40 - \frac{l}{2}.$$

Ahora, aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo ΔEBH:

$$EB^2 + EH^2 = BH^2$$

$$\Rightarrow \left(l + 40 - \frac{l}{2}\right)^2 + l^2 = 80^2$$

donde hemos utilizado que $EB = EF + FB$.

$$\left(\frac{l}{2} + 40\right)^2 + l^2 = 80^2 \Rightarrow\Rightarrow \frac{l^2}{4} + 40l + 1600 + l^2 = 640 \Rightarrow$$

$$l^2 + 160l + 6400 + 4l^2 = 25600$$

$$\Rightarrow 5l^2 + 160l - 19200 = 0$$

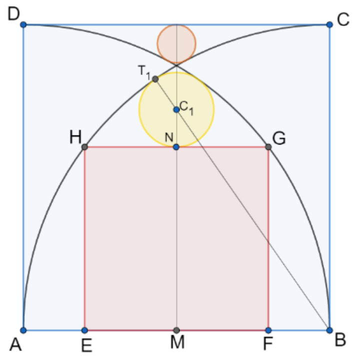
$$\Rightarrow \quad l^2 + 32l - 3840 = 0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado

$$l = \frac{-(32) \pm \sqrt{32^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3840)}}{2 \cdot 1} = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 15360}}{2} = \frac{-32 \pm 128}{2}$$

Obteniendo que l puede ser, o bien -80 o bien 48. Desechando la solución negativa tenemos que $\boldsymbol{l = 48\ mm}$.

Nuestro siguiente objetivo será calcular el valor del radio de la circunferencia amarilla, que denotaremos por R. En la figura, C_1 es el centro de dicha circunferencia y T_1 es el punto de tangencia de dicha circunferencia con el arco AC.



Se tiene que el triángulo ΔMBC_1 es rectángulo, por lo que podremos aplicar de nuevo el Teorema de Pitágoras. Veamos cuánto mide cada uno de sus lados:

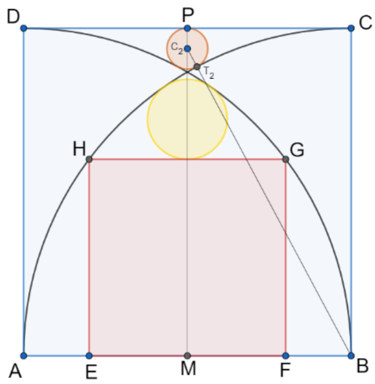
- $MB = 40$, por ser la mitad del cuadrado inicial.
- $MC_1 = MN + NC_1 = 48 + R$.
- $BC_1 = BT_1 - T_1C_1 = 80 - R$.

Así:

$$MB^2 + MC_1^2 = BC_1^2 \quad \Rightarrow \quad 40^2 + (48 + R)^2 = (80 - R)^2 \Rightarrow$$
$$1600 + 2304 + 96R + R^2 = 6400 - 160R + R^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 96R + 160R + R^2 - R^2 = 600 - 1600 - 2304 \Rightarrow$$
$$256R = 2496 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2496}{256} = \frac{39}{4} = 9.75$$

La longitud del radio de la circunferencia mayor (amarilla) es $\boldsymbol{R = 9.75\ mm}$.

Por último, calcularemos el radio de la circunferencia naranja, al que llamaremos r. Así, C_2 es el centro de dicha circunferencia y T_2 es el punto de tangencia de dicha circunferencia con el arco AC.



Se tiene que el triángulo ΔMBC_2 es rectángulo, por lo que podremos aplicar de nuevo el Teorema de Pitágoras. Veamos cuánto mide cada uno de sus lados:

- $MB = 40$, por ser la mitad del cuadrado inicial.
- $MC_2 = MP - PC_2 = 80 - r$.
- $BC_2 = CT_2 + T_2B = 80 + r$

Así:

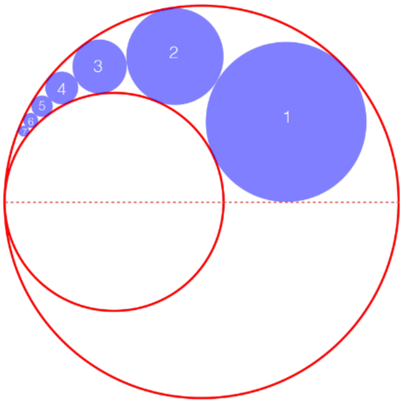
$$MB^2 + MC_2^2 = BC_2^2 \quad \Rightarrow \quad 40^2 + (80 - r)^2 = (80 + r)^2$$
$$1600 + 6400 - 160r + r^2 = 6400 + 160r + r^2 \ \Rightarrow$$
$$r^2 - r^2 - 160r - 160r = 6400 - 1600 - 6400 \Rightarrow$$
$$-320r = -1600 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-1600}{-320} = 5$$

La longitud del radio de la circunferencia pequeña (naranja) es $\boldsymbol{r = 5\ mm}$.

Análisis del problema.

Como podemos apreciar, el nivel de dificultad de este problema es más alto respecto al resto de situaciones que se plantean en este libro, ya que a la hora de resolverlo es necesario poner en común tanto conocimientos de geometría como de álgebra. Sin embargo, este problema puede ser planteado en una sesión de enriquecimiento curricular para alumnos con talento matemático. Cabe destacar que este tipo de problemas (sangakus o problemas de tangencias) suelen ser habituales en competiciones matemáticas de alto nivel (Olimpiada Matemática Española o la Olimpiada Matemática Internacional) e incluso en concurso de oposición para profesorado de matemáticas.

Podemos incluso apreciar una pequeña estrategia la hora de resolver este tipo de problemas de tangencias: al unir los centros de dos circunferencias tangentes aparecen relaciones métricas entre los radios mediante operaciones de resta (si son tangentes interiores) y de suma (si son tangentes exteriores). Esto unido a la propiedad de que la tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de esta que pasa por el punto de tangencia, puede ayudarnos a sacar a flote al Teorema de Pitágoras para terminar la resolución.



Cabe destacar que una gran cantidad de problemas de este tipo pueden ser resueltos utilizando inversión de circunferencias, como el que aparece al margen de estas líneas. ¿Se atreve el lector a demostrar que $\frac{7}{r_4} = \frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1}$?

19. El lirio de Santa Catalina.

En Jaén una de las torres del castillo de Santa Catalina es cilíndrica. Aunque no es muy ancha, tiene 8 metros de perímetro. Si subimos a la torre, en su planta superior, nos encontramos con la siguiente figura. Dos lirios de Santa Catalina, uno a escala del otro.

D. Manuel, ha subido hoy con dos de sus alumnos, Laura y Lucas, y les pide que calculen el área de la planta circular en la que se hallan. Además, les da 100 lentejas para que calculen el área de la flor grande. A Lucas se le ocurre lanzar dentro del círculo pequeño las 100 lentejas.

Hace 5 lanzamientos y quedan encima de la flor 18, 12, 16, 14 y 20 lentejas respectivamente.

a) Calcula, razonadamente, el área de toda la planta circular.

b) Calcula el área aproximada del Lirio grande de Santa Catalina, basándote en el experimento de las 100 lentejas lanzadas en la flor pequeña. Razona tus respuestas.

RESOLUCIÓN

Solución apartado a)

Calculemos, en primer lugar, el área de la planta circular a partir del perímetro, esto es, de la longitud de la circunferencia:

$$L = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}. \qquad A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi} = \frac{8^2}{4\pi} \approx 5{,}092\ m^2$$

Solución apartado b)

Hallemos la media de lentejas que caen sobre el lirio pequeño:

$$\bar{x} = \frac{18 + 12 + 16 + 14 + 20}{5} = 16$$

Ahora bien, de las 100 lentejas que Lucas lanza a la planta circular, una media de 16 lentejas recae sobre el lirio pequeño. Así, las áreas de los círculos seguirán también esta proporción. Haciendo una regla de tres simple directa:

$$\begin{array}{lcl} 100 \text{ lentejas} & \longrightarrow & 5{,}092 \text{ m}^2 \\ 16 \text{ lentejas} & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{16 \cdot 5{,}092}{100} = 0{,}81472\ m^2$$

Por lo tanto, el área del lirio pequeño es de 0,81472 m^2.

Análisis del problema.

Este problema tiene una dificultad *baja*, en la que podemos diferenciar las complicaciones inherentes al área de cada apartado. En el apartado (a), el uso del número π sigue siendo un "estorbo" para algunos alumnos de 2º, por lo que se recomienda que se maneje mediante una aproximación. El uso de aproximaciones con mayor o menor error absoluto darán lugar a soluciones más o menos dispares.

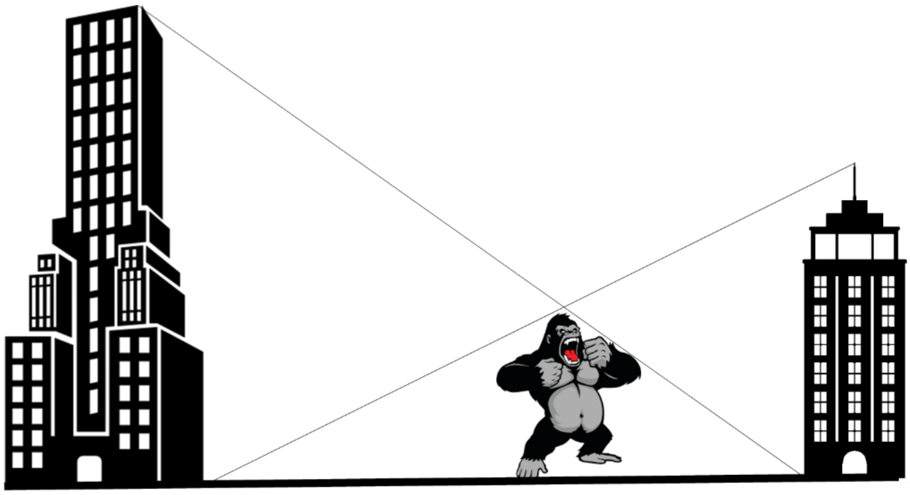
Después, en el apartado (b) el uso de la regla de 3 (o de un porcentaje como es este caso) no suele entrañar dificultades a los alumnos. Los errores del tipo conceptual (la distinción entre proporcionalidad directa e inversa en su mayoría) hacen que los estudiantes cometan errores. Es interesante, asimismo, el uso de la media como dato representativo de varios y la similitud de esta situación con la definición frecuentista de la probabilidad, que nos hace recordar la famosa Aguja de Buffon.

20. El primate gigante.

¡Oh, no! El gran Keng Kang está arrasando la Ciudad de Matelandia y los equipos de contención están estudiando al gran gorila para poder evitar la destrucción del distrito financiero.

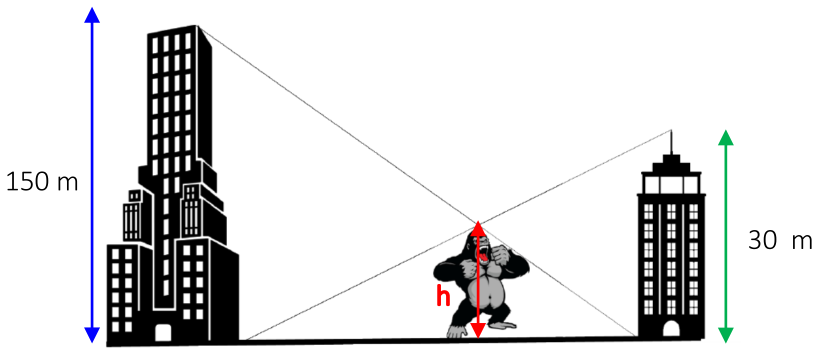
En estos instantes se encuentra entre la Torre Hipatia, de una altura de 150 metros y la Noether Tower, de 30 metros.

¿Podrías decirnos razonadamente cuál es la altura de Keng Kang?

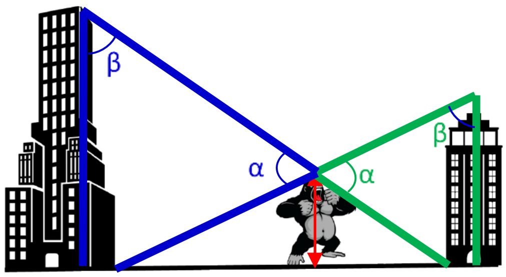


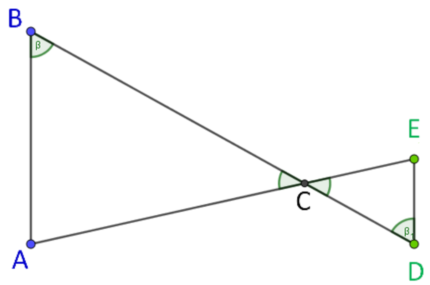
RESOLUCIÓN

La situación con datos sería



Siendo *h* (incógnita del problema), la altura del primate. En primer lugar en la situación que tenemos, observamos o somos capaces de diferenciar, dos triángulos que son semejantes. Vamos a demostrarlo:





Comenzamos estudiando los ángulos de los triángulos:

- α= α, por ser ángulos opuestos por el vértice.
- β= β, por ser ángulos alternos internos.

Tenemos entonces dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales y aplicando el primer criterio de semejanza de triángulos, podemos decir que los triángulos son semejantes.

Esto es, el triángulo ABC es semejante con el triángulo CDE, siendo el lado ED el lado homólogo del lado AB. Para calcular la razón de semejanza dividimos las longitudes de estos dos lados homólogos:

$$k = \frac{150}{30} \rightarrow k = 5$$

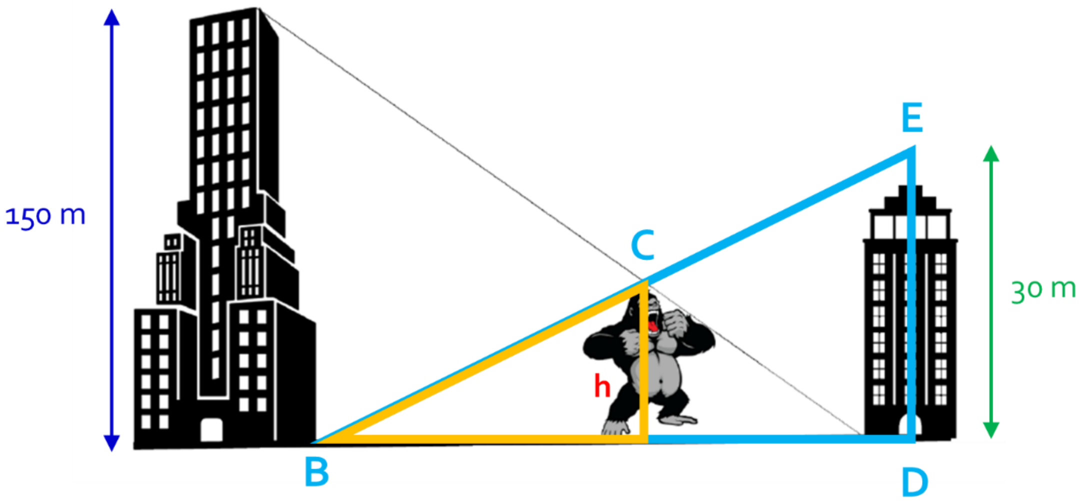
Una vez conocida la razón de semejanza entre los dos triángulos, se la aplicamos a los lados homólogos $\overline{BC}$ y $\overline{CE}$:

$$\overline{BC} = k \cdot \overline{CE} = 5 \cdot \overline{CE}$$

Además, como $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE}$, se tiene que

$$\overline{BE} = 5 \cdot \overline{CE} + \overline{CE} = 6\,\overline{CE}$$

Nos fijamos ahora en la siguiente situación:



El triángulo azul y el amarillo están en posición de Thales, así que podemos afirmar que:

$$\frac{\overline{DE}}{h} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}}$$

Sustituyendo lo que sabemos, obtenemos que

$$\frac{30}{h} = \frac{6\,\overline{CE}}{5\,\overline{CE}} \rightarrow \frac{30}{h} = \frac{6}{5} \rightarrow h = \frac{30 \cdot 5}{6} = 25.$$

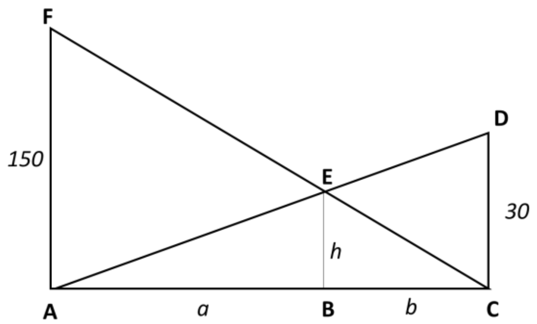
Por lo tanto, la altura de Keng Kang es de 25 metros.

OTRA FORMA DE RESOLVER.

En la figura al margen los triángulos ACF y BCE están en posición de Thales, y por tanto, son semejantes. Análogamente, los triángulos ACD y ABE también lo son. Por lo tanto, aplicando las relaciones de semejanza:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{150}{a+b} = \frac{h}{b} \qquad (1)$$

$$\frac{DC}{AC} = \frac{EB}{AB} \Rightarrow \frac{30}{a+b} = \frac{h}{a} \qquad (2)$$



De (1) se deduce que $a+b=\frac{150b}{h}$ y de (2) se deduce que $a+b=\frac{30a}{h}$. Por lo tanto, igualando ambas expresiones:

$$\frac{150b}{h} = \frac{30a}{h} \Rightarrow 150b = 30a \Rightarrow 5b = a$$

De donde, sustituyendo en (1):

$$\frac{150}{6b} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = \frac{150b}{6b} = 25\ m$$

Por lo tanto, el gigante Keng Kang mide 25 metros de altura.

Análisis del problema.

Problema geométrico que hemos resuelto a través del concepto y propiedades de "semejanza entre triángulos". Importante también ha sido el manejo de las relaciones de ángulos que aparecen en la intersección de rectas.

Es un problema donde no sólo se debe tener la habilidad de encontrar el camino o fases para obtener lo requerido, sino que también se ha de disponer de un conocimiento teórico específico sobre elementos del plano y sus relaciones. Por eso mismo podríamos catalogarlo con una dificultad media en un alumnado de 2º ESO.

Hacemos notar la importancia de que el alumno empiece a razonar y a demostrar las propiedades geométricas correspondientes para aplicar teoremas. En este caso, el alumnado deberá demostrar que, en efecto, los triángulos son semejantes. Para aplicar resultados las hipótesis han de cumplirse. Aplicado a la cocina, no podremos realizar una receta de manera exacta si no tenemos todos y cada uno de los ingredientes.

Referencias bibliográficas

Junta de Andalucía (2016). *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación del proceso de aprendizaje del alumnado.* En BOJA número 144 de 28 de julio de 2016, págs. 108-396.

MEC (2015a). *Real Decreto 105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* En BOE número 3 del sábado 3 de enero de 2015, págs. 169-546.

MEC (2015b). *Orden ECD/65/2015, 21 enero, por el que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria y el bachillerato*. En BOE, núm 25, de 29 de enero de 2019. BOE-A-2015-738.