PROBLEMAS DE
OLIMPIADA MATEMÁTICA

2020

SAEM THALES

Problemas de la Olimpiada Matemática THALES 2020

AUTORES

Carmen María Aguilera Sillero
Dolores Ariza Cabrera
José Antonio Fernández Plaza
Francisco Miguel González Ternero
Francisco Haro Laguardia
José Francisco Miras Ruiz
Sagrario Panadero Ruiz
Alejandro Sáez Martínez
Ana Serradó Vallés
Iván Valero Terrón

EDITA:

SOCIEDAD ANDALULA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

c/ Tarfia s/n. (Facultad de Matemáticas)

41012 Sevilla

Correo electrónico: thales@cica.es thales.matematicas@uca.es

Página web: http://thales.cica.es

ISBN: 978-84-15641-05-6

Sevilla (España), 2020

ÍNDICE

PRÓLOGO

Desde el año 1981 en que se pone en marcha la Sociedad de Educación Matemática Thales se han celebrado 35 ediciones de las Olimpiadas Matemáticas. Estas Olimpiadas movilizan, solo en Andalucía a unos 3.500 alumnos de los que pasan a la final cuarenta, cinco por provincia, más dos invitados de la Sociedad Melillense de Profesores de Matemáticas.

Este interés que suscita en toda la Comunidad Educativa y que hace que exista esta cantidad de alumnos participantes, nos obliga a esforzarnos cada año en mejorar la organización de las mismas. Para todos nosotros y nosotras la enseñanza de las Matemáticas supone un reto importante, ya que muchas veces va asociada a la dificultad de su aprendizaje y a la mala fama que lleva asociada. Nuestro reto es dar sentido a esa enseñanza y hacer que todo el alumnado comprenda la importancia de su aprendizaje y la utilidad que tiene en la vida diaria, cosa que muchas veces no queda suficientemente claro para una gran parte del alumnado y de la propia comunidad educativa. Lo mismo ocurre con las capacidades que potencia el aprendizaje de las matemáticas, capacidades que luego son de aplicación en otros ámbitos de aprendizaje y en el desarrollo de la vida cotidiana.

Al plantear nuestra Olimpiada nos propusimos llevar a la mente de nuestros alumnos y alumnas algo más que lo meramente establecido en currículo de los mismos, aportando un intento de conseguir que no todo sea el mero aprendizaje de técnicas, teoremas, fórmulas ya establecidas, sino que cada uno de ellos pusiera en marcha sus propias capacidades y aportara algo más a nuestra ciencia y a nuestra comunidad.

La vida está llena de problemas, algunos tienen una solución ya estudiada por otras personas, para los demás tenemos que buscar nosotros la solución. Para esta búsqueda de soluciones debemos ser creativos, imaginativos, no cerrar nuestra mente a ninguna posible solución por extraña que nos parezca. Una vez que tengamos una posible solución, nos debemos cuestionar si es válida o no lo es, si se puede mejorar, generalizar y buscar una manera de automatizar el proceso; es decir, ser mucho más ágiles y rápidos. Para esta búsqueda de soluciones lógico-matemáticas, y basándonos en la teoría de las Inteligencias Múltiples de Howard Gardner (1995) tenemos que abrir nuestra mente utilizando herramientas que nos proporcionan desde otros ámbitos o inteligencias como la cinética, la lingüística, intra e interpersonal y espacial o visual.

Este libro, tercera recopilación de problemas de la Olimpiada Matemáticas Thales para el alumnado de 2º de la ESO, pretende proporcionar a nuestro alumnado estrategias que les permitan ser individuos creativos, imaginativos y abiertos de mente con el fin de llegar a ser futuros científicos, ingenieros y matemáticos de forma que puedan contribuir al desarrollo social, científico e investigador.

Esperamos que esta recopilación de los problemas planteados sirva a todas las personas que lo utilicen: alumnado, profesorado y familias. Por ello, los veinte problemas seleccionados son un reto intelectual para que el alumnado pueda desarrollar sus capacidades intelectuales, su pensamiento creativo y lógico matemático, descubrir nuevas estrategias de resolución de problemas y expresar de forma razonada dichos procesos de resolución. Cada uno de los problemas presenta además una o varias propuestas de resolución para poder ser contrastadas, corroboradas o discutidas en familia. Además, de un análisis didáctico que facilitará que el profesorado integre dichos problemas en el currículo de matemáticas de segundo de ESO a partir de las evidencias de los contenidos, criterios de evaluación y dificultades que pueden surgir durante su implementación.

CONTEXTUALIZACIÓN

La preocupación por los procesos de resolución de problemas nace en la década de los años 50 de la mano de los trabajos de Pólya (1949). Pólya parte de la reflexión sobre su propia práctica como matemático para identificar las fases de la resolución de problemas y los heurísticos que pueden ayudar a resolverlo. Posteriormente, los investigadores del campo de la heurística en la resolución de problemas han analizado las tareas realizadas en programas de detección y promoción del talento matemático que muy a menudo tienen su base en las competiciones matemáticas. Como curiosidad nombrar que, en la década de los años 50, las primeras olimpiadas de matemáticas de bachillerato nacen a la par que las investigaciones sobre los heurísticos.

Pero es en la década de los años 80 cuando en Europa y Estados Unidos se promueve el uso de los heurísticos como sugerencias didácticas para la resolución de problemas en clase de matemáticas (Liljedahl et al., 2016). Pasando de ser la resolución de problemas una mera actividad de los matemáticos profesionales a un enfoque escolar (NCTM, 1980). Y, por lo tanto, las olimpiadas matemáticas que se habían restringido en sus inicios a bachillerato abren sus puertas al alumnado de secundaria. La Sociedad Andaluza de Educación Matemática, editora de este libro, puso en marcha su primera Olimpiada Matemática en el curso 1984/1985 para alumnado de 8º de Educación General Básica, en su momento, y 2º de Educación Secundaria Obligatoria, en la actualidad.

De entre los seis objetivos principales de estas olimpiadas matemáticas para alumnado de 2º de secundaria, detallados en el segundo libro de problemas (Aguilera et al. 2018), destacamos el desarrollo de la capacidad de pensar y elaborar estrategias de resolución. Ante este objetivo cabe cuestionarse si la resolución de los problemas propuestos depende de los antecedentes educativos del alumnado participante. Es decir, mientras que un problema puede ser un verdadero rompecabezas para una persona, para otra puede ser un ejercicio mundano o una cuestión de recordar para otro con más experiencia (Barbeau & Taylor, 2009).

Detrás de estas diferencias personales subyacen las diferencias innatas de puesta en juego de la actividad mental, tanto de contenidos como de procesos. El contenido en los problemas de las olimpiadas matemáticas corresponde a los establecidos para el currículo de Matemáticas de 1º y 2º de ESO (Junta de Andalucía, 2016) relativo a ciertos conceptos, conexiones y métodos. Por el contrario, los procesos están relacionados con los procesos psicológicos que se ponen en juego al resolver los problemas. Procesos como la planificación, independencia, precisión, actividad y agilidad. El alumnado participante en las olimpiadas se caracteriza por poseer una alta agilidad mental y una gran motivación intrínseca que les permite conjugar intuiciones y conocimientos previos para crear nuevas estrategias. Esta flexibilidad de pensamiento se expresa como la capacidad de cambiar de forma más o menos fácil de un enfoque a otro o integrar un conocimiento dentro de otro (Liljedahl et al., 2016).

Por ello, esta perspectiva de la resolución de problemas conjuga tres vertientes de la misma: el disfrute de la resolución de problemas como reto intelectual, el aprendizaje de la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas a partir de su resolución. Diferentes usos y niveles de lectura del libro permitirán acercarse a las tres perspectivas. En primer lugar, una lectura para el disfrute ante el reto de resolver los veinte problemas propuestos. En segundo lugar, el reto del profesorado de la inclusión de dichas propuestas en el aula para aprender a resolver problemas. Y, en tercer lugar, la extensión del aprendizaje a otros contextos o contenidos para iniciar su construcción y fomentar el aprendizaje de las matemáticas.

La presentación de estas tres perspectivas se realiza a lo largo de las diferentes secciones. En la segunda sección, desde una perspectiva globalizadora de la resolución de problemas se analizan los principios pedagógicos que permiten evaluar los heurísticos que ponen en juego en su globalidad el alumnado, el pensamiento creativo y lógico-matemático que desarrollan y los procesos de comunicación de los razonamientos que llevan a la solución. En la tercera sección se clasifican los problemas según los contenidos puestos en juego en cada problema, los criterios de evaluación y estándares correspondientes según la legislación vigente (Junta de Andalucía, 2016) y (MEC, 2015). Finalmente, en la cuarta sección, se presentan una selección de veinte problemas de las últimas ediciones de la olimpiada matemática. Cada problema incluye una o varias estrategias de resolución, un análisis didáctico concreto de los principios pedagógicos, los criterios de evaluación y estándares que pone en juego y las dificultades a la que se enfrentan los resolutores.

PERSPECTIVA GLOBALIZADORA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: CREATIVIDAD, AGILIDAD MENTAL, RAZONAMIENTO Y COMUNICACIÓN

En la sección de contextualización se ha argumentado la influencia de la NCTM en la introducción de la resolución de problemas en el contexto escolar y sus documentos en la guía de los procesos de resolución y selección, en algunos casos, de problemas para la olimpiada (números 5 y 8 de NCTM y S.A.E.M. Thales, 2003). Sin embargo, a nivel regional y nacional, en los últimos años la resolución de problemas a nivel curricular se ha visto influenciada por los marcos teóricos de las evaluaciones PISA. Dichos marcos teóricos, que evalúan el nivel de desempeño individual a nivel de la alfabetización matemática, ponen el foco de atención en la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación (OECD, 2018) como habilidades básicas para el futuro de la educación en 2030. Dicho proyecto identifica a partir del trabajo previo sobre competencias claves, otras tres categorías de competencias, las "competencias transformadoras", que aborden la creciente necesidad de educar al alumnado para que sea creativo, reconciliador y responsable (Schleicher, 2018).

La resolución de problemas y la creatividad

En la intersección entre las competencias claves y las competencias transformadoras se encuentra la resolución de problemas. Ambas, creatividad y resolución de problemas requiere de la capacidad de considerar las consecuencias futuras de las propias acciones y aceptar la responsabilidad del producto desarrollado (Schleicher, 2018). Esta consideración abre una nueva perspectiva a la resolución de problemas.

Aunque no entrarían en esta nueva perspectiva de problemas creativos, los problemas de lógica y razonamiento deductivo son representativos de la resolución de problemas matemáticos, en general, y de la Olimpiada Matemática de 2º de ESO, en particular. La realización de dichos problemas son una oportunidad para mejorar y evaluar la comprensión del enunciado de un problema, la identificación de restricciones y suposiciones subyacentes, el reconocimiento de la existencia de una estructura o patrón o la interpretación de la adecuación de la solución matemática al contexto real del problema. Ejemplos de este tipo de problemas son los números 1, 6, 13 y 18 de la sección cuarta de este libro.

Los problemas creativos, entonces, son tareas que no pueden ser resueltas con un esfuerzo directo y que requerirán de alguna intuición para resolverlos (Liljedahl et. al, 2016). El resto de los problemas incluidos en la sección cuarta son creativos ya que para su resolución necesitan del eureka, de la agilidad mental, de la intuición o de la flexibilidad de pensamiento para conectar diferentes conocimientos.

A la hora de seleccionar o diseñar un problema para la olimpiada matemática no asumimos una perspectiva absolutista que asume que la creatividad de los procesos es exclusivamente del dominio de un genio, del alumnado de altas capacidades o con un gran talento matemático (Liljedahl y Sriraman, 2006). Por el contrario, tomamos una posición relativista que concibe que cada alumno tiene momentos de creatividad que pueden, o no, producir un producto único y útil. Por ello, cada edición de la Olimpiada matemática se elige la resolución de problema más creativa y se le concede el Premio Paco Anillo. Se entiende, pues, que cada problema puede tener más de una forma de llegar a la solución correspondiente. Ejemplos de problemas con varios acercamientos a su resolución son los números 2 y 18.

La comparación de los diferentes acercamientos aportados por el alumnado es la que permite valorar la excelencia del producto. Sin embargo, la creatividad reside en la fase de elaboración del producto, que es cuando la inspiración se transforma en transpiración de las ideas que ha estado incubando. En consecuencia, la realización en clase de problemas con diferentes estrategias de resolución promueve la creatividad del alumnado. Es más, son una oportunidad para evaluar la capacidad del alumnado de *reflexionar sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves, aprendiendo para situaciones futuras similares* (Estándar de evaluación 10.1 del bloque 1 de procesos, métodos y actitudes, MEC, 2015).

A nivel didáctico supone ir más allá de la aportación de una solución. Significa completar todo el proceso de resolución hasta la fase de generalización (Mason, Burton & Stacey, 1982). La generalización es el proceso por el cual las especificidades de las soluciones son examinadas y las cuestiones planteadas son investigadas para ver su coherencia. Los problemas número 1, 11, 17, 19 de la sección cuarta de este libro necesitan de esta fase de generalización para aportar un producto terminado.

Agilidad mental en la resolución de problemas

La fase de generalización introducida por Mason et al. (1982) es similar con la de examinar la solución obtenida de Pólya (1949). Ambos autores presentan en sus trabajos diferentes heurísticos que usa el alumnado en esta fase. Las investigaciones sobre el uso de heurísticos en la resolución de problemas las conciben como una expresión de la agilidad mental del alumnado. Bruder (2000) describe cuatro manifestaciones típicas de la agilidad mental del alumnado al poner en juego diferentes heurísticos que permiten al alumnado resolver problemas.

- La reducción a los elementos esenciales que de forma intuitiva realiza el alumnado a través de visualizaciones, figuras, tablas o gráficos. El problema número 20 de la sección 4 reduce el estudio de la superficie de un puente a un metro cuadrado del mismo. Además, la resolución de dicho problema es una oportunidad para que el alumno use y aplique modelos estadísticos en la resolución de situaciones cotidianas.
- La reversibilidad de las cadenas de pensamiento o la reproducción inversa del proceso de resolución. Un problema de la sección cuarta que necesita revertir el proceso para su resolución es el número 7. Además, la resolución del problema es una oportunidad para evaluar la capacidad de utilizar estrategias heurísticas y procesos de razonamiento en la resolución de problemas, reflexionando sobre el proceso de resolución de problemas (Estándar de evaluación 10.1 del bloque 1 de procesos, métodos y actitudes, MEC, 2015).
- Los aspectos mentales de un problema y el reconocimiento de la dependencia de los elementos favorecen el uso de heurísticos que relacionen diferentes hechos. Problemas de la sección cuatro que utilizan este principio de descomposición son el número 12 y 15. Ambos problemas geométricos reducen el cálculo de ciertas áreas a partir de la descomposición de figuras planas en figuras elementales como son la circunferencia y el triángulo rectángulo.
- El cambio de aspectos es un proceso mental que permite cambiar los supuestos, criterios o aspectos considerados para encontrar una solución. El problema número 11 necesita ir cambiando los posibles supuestos de las ofertas para la compra de ciertos productos y el problema número 14 para compra de entradas. Ambos problemas permiten evaluar la capacidad del alumnado de plantear casos particulares o más generales de interés, estableciendo conexiones entre el problema y la realidad (Estándar de evaluación 4.2 del bloque 1 de procesos, métodos y actitudes, MEC, 2015).
- La transferencia de un proceso conocido a otro en otro contexto diferente. Para la resolución del problema número 5 de geometría el alumnado debe transferir el conocimiento sobre ecuaciones de segundo grado y sus conocimientos sobre los números irracionales. En el problema número 10 el alumnado debe transferir el conocimiento sobre los modelos uniformes de Física y Química de segundo de ESO para determinar la relación entre distancia y tiempo en un contexto de comparación de las distancias recorridas por dos nadadores.

Podríamos opinar que un amplio conjunto del alumnado de segundo de secundaria carece de suficiente agilidad mental para poner en juego dichos procesos; sin embargo, la resolución de problemas sistemática en el aula favorece la activación mental del alumnado (Serradó, 2020). Para mejorar esta situación a nivel de aula se han realizado diferentes propuestas basadas en el uso de heurísticos para fomentar el proceso de aprendizaje y evaluación de las competencias puestas en juego durante la resolución de problemas (Serradó, 2009). Los marcos teóricos de las evaluaciones competenciales que proponen los documentos PISA (OECD, 2018) presentan solo heurísticos para tres procesos de resolución de problemas que relacionan con el razonamiento matemático.

La resolución de problemas y el razonamiento matemático

En este marco teórico, la relación entre el razonamiento matemático y la resolución de problemas se configura como un modelo cíclico con tres procesos (Figura 1): a) la formulación de situaciones matemáticamente; b) el empleo de conceptos matemáticos, hechos, procesos y razonamientos; y, c) la interpretación, aplicación y evaluación de resultados matemáticos.

Figura 1Relación entre el razonamiento matemático y el modelo cíclico de resolución de problemas (Traducción de la página 8, OCDE, 2018)

El razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) implica la evaluación de situaciones, la selección de estrategias, la descripción de conclusiones lógicas, el desarrollo y descripción de soluciones y el reconocimiento de cómo estas soluciones se pueden aplicar. La evaluación de todas estas situaciones se realiza en la propuesta de problemas de olimpiada matemática, ya que cada uno de ellos pide el razonamiento matemático de la resolución del problema. Sin embargo, la evaluación de dicho razonamiento supone la valoración de cómo el alumnado identifica, reconoce, organiza, conecta y representa la información del enunciado en la fase de formulación de la situación matemáticamente.

Todos los problemas permiten valorar esta primera fase de la resolución del problema y que están relacionados con el estándar 2.1. del bloque 1, analiza y comprende el enunciado de los problemas (MEC, 2015). En la fase de empleo de conceptos matemáticos, hechos y procesos el alumnado construye gráficos, abstrae (patrones y regularidades), evalúa (propiedades numéricas), deduce (expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas), justifica (la aplicación del teorema de Thales o Pitágoras), explica y defiende las estrategias y heurísticos que utiliza. Finalmente, en la fase de interpretación, aplicación y evaluación de los resultados matemáticos obtenidos el alumnado hace juicios, critica las limitaciones de las soluciones y refuta las no adecuadas al contexto. La evaluación de dichas capacidades está relacionada con los estándares 6.4, 6.5 y 10.1 del bloque 1 (MEC, 2018).

Destacamos como problemas significativos de esta última fase de resolución los problemas de la sección 4: nº1 por el estudio de la razonabilidad numérica; nº 5 por la razonabilidad de las infinitas soluciones del problema; nº 8 por la razonabilidad de las propiedades de los pentágonos; nº 11 y 13 por el juicio y critica de la verosimilitud de la solución en el contexto real; y, el nº 14 y 19 por la crítica a la limitación de las soluciones y la refutación de las no adecuadas al contexto.

A su vez, estas capacidades están relacionadas con la capacidad de comunicación de las ideas del alumnado.

La comunicación en la resolución de problemas

La comunicación en la resolución de problemas puede tener diferentes niveles de sofisticación según sea su objetivo: razonar, argumentar o probar. Ninguno de los problemas propuestos pide al alumnado probar una conjetura –ya que este no es el objetivo de la Olimpiada Matemática. Sin embargo, dos de ellos van más allá del simple razonamiento de los procesos de resolución tal y como indica el estándar 1.1 del bloque 1 (MEC, 2018) y piden que el alumnado argumente el proceso de resolución. El problema número 8 pide que el alumnado argumente cuántos ángulos rectos puede llegar a tener un pentágono y permite que el alumno formule e investigue conjeturas matemáticas. El problema número 9 pide argumentar cuántas circunferencias se puede representar que pasen por dos puntos, por tres puntos no alineados y que estén a la misma distancia de cuatro puntos. En dicho problema el alumnado debe realizar simulaciones y predicciones gráficas que le permitirán argumentar el número posible de soluciones en cada caso.

Aunque estos dos últimos problemas pongan solo en juego conocimientos, hechos y procesos geométricos, encontramos en la selección de la sección 4 problemas referidos a los bloques de contenido de números y álgebra y estadística y probabilidad.

CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS según el nivel educativo, criterio de evaluación, estándar y contenido que ponen en juego

En esta sección los veinte problemas están clasificados según el bloque de contenidos, el nivel educativo, el criterio de evaluación, estándar y contenido que ponen en juego de acuerdo con el currículo actual (MEC, 2015; Junta de Andalucía, 2016).

Bloque 2: Números y álgebra				
Nivel educativo y criterio de evaluación	**Estándares**		**Contenidos**	**Problemas**
MAT 1 y 2. 1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.	1.1	Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios, y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.	Números naturales, decimales, y fraccionarios.	1, 3, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20
	1.2	Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.	Operaciones con números naturales, decimales y fraccionarios.	1, 5, 7, 10, 11, 16, 18, 20
	1.3	Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados,	Operaciones con números naturales, decimales y fraccionarios. Porcentajes.	3, 5, 7, 11, 13, 14, 18, 19, 20

	representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.		
MAT1. 2. Conocer y utilizar propiedades y nuevos significados de los números naturales en contextos de paridad, divisibilidad y operaciones elementales, mejorando así la comprensión del concepto y de los tipos de números.	2.1 Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.		1, 4, 7, 5, 12, 15, 17
	2.6 Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos.	Redondeo y truncamiento.	3, 10, 20
	2.7 Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo a la resolución de problemas.	Conversión de decimales a fraccionarios y viceversa.	3
	2.8 Utiliza la notación científica, valora su uso para simplificar cálculos y representar números grandes.	Notación científica.	8
MAT1 y 2.3. Desarrollar en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas	3.1 Realiza operaciones combinadas entre números enteros,	Operaciones combinadas.	3, 5, 10, 11, 12, 15, 18, 19

como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de operaciones o estrategias de cálculo mental.	decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.		
MAT1 y 2. 4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental o escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.	4.1 Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.	Cálculo mental.	5, 11, 19
	4.2 Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.	Uso de calculadora en operaciones con números naturales, fraccionarios y decimales.	3, 5, 7, 11, 14, 18, 19, 20
MAT1 y 2. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y	5.1 Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.	Proporcionalidad numérica.	3, 10, 12, 14, 19

magnitudes directa o inversamente proporcionales.			
MAT 2. 6. Analizar procesos numéricos cambiantes, identificando los patrones y leyes generales que los rigen, utilizando el lenguaje algebraico para expresarlos, comunicarlos, y realizar predicciones sobre su comportamiento al modificar las variables, y operar con expresiones algebraicas.	6.1 Describe situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables o desconocidas y secuencias lógicas o regularidades, mediante expresiones algebraicas, y opera con ellas.	Variables. Secuencias de números.	1, 4, 5, 7, 8, 9, 13
	6.2 Identifica propiedades y leyes generales a partir del estudio de procesos numéricos recurrentes o cambiantes, las expresa mediante el lenguaje algebraico y las utiliza para hacer predicciones.	Patrones. Lenguaje algebraico.	4, 5, 7, 8, 14, 16
	6.3 Utiliza las identidades algebraicas notables y las propiedades de las operaciones para transformar expresiones algebraicas.	Identidades notables.	5, 16
MAT 2. 7. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.	7.1 Comprueba, dada una ecuación (o un sistema), si un número (o números) es (son) solución de la misma.	Ecuaciones.	5
	7.2 Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante ecuaciones de primer y segundo grado, y sistemas de ecuaciones lineales con	Ecuación de primer grado.	1, 2

	dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.		

Bloque 3: Geometría			
Nivel educativo y criterio de evaluación	**Estándares**	**Contenidos**	**Problemas**
MAT1. 1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones, describir el contexto físico, y abordar problemas de la vida cotidiana.	1.1 Reconoce y describe las propiedades de los polígonos regulares: ángulos interiores y centrales, diagonales, apotema, simetrías, etc.	Pentágonos y ángulos.	8, 15
	1.4 Identifica las propiedades geométricas que caracterizan los puntos de la circunferencia y el círculo.	Puntos interiores y exteriores. Circunferencia Círculo Circuncentro.	9, 12
MAT 1 y 2. Utilizar estrategias, herramientas tecnológicas y técnicas simples de la geometría analítica plana para la resolución de problemas de perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando el lenguaje matemático adecuado expresar el procedimiento seguido en la resolución.	2.1 Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.	Ángulo, área de un triángulo.	2, 5, 8, 12, 15, 20
	2.2 Calcula la longitud de la circunferencia, el área del círculo, la longitud de un arco y el área de un sector	Perímetro y área de sectores circulares.	12, 15

		circular, y las aplica para resolver problemas geométricos.		
MAT 2.3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.	3.2	Aplica el Teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.	Teorema de Pitágoras.	12, 15
MAT2. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	4.1	Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza de triángulos y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.	Triángulos semejantes. Teorema de Thales. Razón de proporción de superficies.	2

Bloque 5: Estadística y probabilidad				
Nivel educativo y criterio de evaluación	**Estándares**		**Contenidos**	**Problemas**
MAT1 y 2. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar los datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas,	1.3	Organiza los datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas, y los representa gráficamente.	Organización de datos en tablas.	17

organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando parámetros relevantes y obteniendo las conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos.	1.4	Calcula la media aritmética, la mediana (intervalo mediano), la moda (intervalo modal), y el rango, y los emplea para resolver problemas.	Media aritmética.	20
MAT1. 3. Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios, valorando la posibilidad que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los aleatorios a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria o el cálculo de su probabilidad.	3.3	Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación.	Predicciones de fenómenos.	6
MAT1. 4. Inducir la noción de probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación.	4.1	Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos.	Análisis de experimentos aleatorios sencillos.	6

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS

1. La Contraseña

A Miguel le regalaron una tableta por su cumpleaños y para evitar que nadie pueda usarla se inventó una contraseña de cinco cifras. Por si acaso se olvidaba de ella, escribió las siguientes pistas en un WhatsApp que le envió a Sagrario su amiga de confianza:

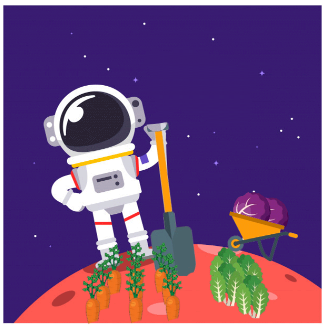
- Todas sus cifras son números impares.
- La suma de sus cifras es 25.
- La primera cifra es la diferencia entre el doble de la quinta cifra menos la cuarta cifra.
- La cuarta cifra es un múltiplo de tres.
- El m.c.m. de la segunda y la quinta cifra es 15.
- La contraseña es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

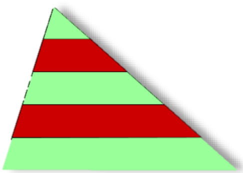
Lo peor ha ocurrido, se olvidó de la contraseña. Ayuda a Miguel recuperando su contraseña.

Razona tu respuesta.

2. Cosecha Interestelar

Darrow es un agricultor que está intentando hacerse un hueco en el mercado de productos exóticos en Marte. Hace poco compró una finca triangular cerca del Monte Olimpo (que es el mayor volcán del Sistema Solar) y la plantó como muestra la figura. La finca la dividió en cinco bandas paralelas con la misma anchura. La parte más oscura la ha plantado con hemantos de Mercurio y la parte





más clara, con la acelga plutoniana. Sabiendo que el área total de la finca es de 145 metros cuadrados, contesta de forma razonada ¿cuál es el área que ha plantado con hemantos?

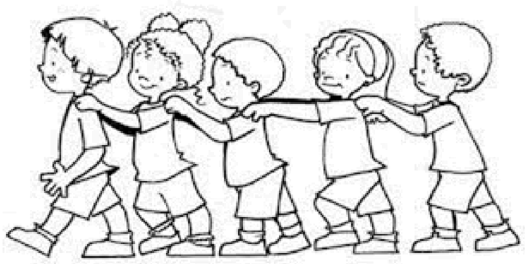
3. El planeta cercano

Acaba de aterrizar en la Tierra un alumno de intercambio del planeta cercano Próxima C5. Este planeta tarda en girar alrededor de su estrella, Próxima Centauri, el mismo tiempo que la Tierra en girar alrededor del Sol, pero cada año consta de 500 días, cada mes de 50 días, cada día de 50 horas, cada hora de 50 minutos y cada minuto de 50 segundos.

Marta, para integrar al nuevo chico, le pregunta: "¿Dónde duran más los segundos en tu planeta o en el mío? Y si me voy a tu planeta los meses de julio y agosto, ¿cuánto tiempo estoy (contando los días, las horas, los minutos y los segundos) realmente en el tuyo?

Ayuda al sorprendido visitante dando las respuestas de **forma razonada.**

4. Orden en la fila



Cinco amigos, Antonio, Belén, Carmen, Darío y Eugenia, se colocan en "fila india", pero tú no sabes el orden en que están colocados.

Están contando de 5 en 5: el 1º dice 5, el 2º dice 10, el 3º dice 15, el 4º dice 20,

el 5º dice 25, el 1º sigue con 30,... y siguen contando de 5 en 5. Antonio ha dicho 140; Belén 160; Carmen 130; Darío 170.

¿En qué orden se encuentran colocados los amigos en la fila? ¿Quién de ellos diría 1.755?

Razona las respuestas.

5. Geometría y elegancia

Enrique es un buen matemático que le gusta la geometría. Quiere partir un cuadrado de lado 1 en tres partes con la misma área como se muestra en la figura 1. ¿Qué valor debe dar a x para conseguirlo?

Pero además le gusta la decoración y no encuentra elegante su construcción. Decide suprimir la zona triangular inferior derecha, como indica la figura 2. ¿Podrá encontrar el valor de y que haga que en este caso los tres triángulos obtenidos tengan la misma área? En caso afirmativo calcula ese valor de y.

Razona las respuestas.

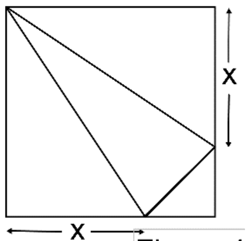


Figura 1

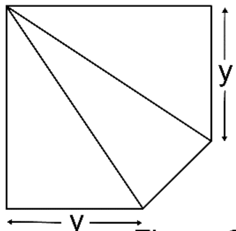


Figura 2

6. Las baldosas trampa

En la Casa de los Misterios, que es una novedosa atracción de feria, hay una pequeña habitación con 25 baldosas y las inscripciones que aparecen en la imagen. Las inscripciones constan de un número del 1 al 4 y una letra N, S, E y O, que indican las direcciones norte, sur, este y oeste.

1E	2S	4S	1O	2S
4E	3S	1E	2S	3S
1N	1O	1S	2S	2O
3E	2N	1O	1E	3N
4N	última baldosa	3N	4N	1O

La atracción consiste en pisar las baldosas en un orden adecuado y para ello es fundamental la inscripción de cada una de ellas. Por ejemplo, la baldosa 2S de la esquina superior derecha nos dice que la próxima baldosa que debe pisarse, está dos baldosas en dirección sur, es decir la baldosa 2O.

Si se quiere salir triunfante de la atracción se deben pisar el máximo número de baldosas siguiendo la secuencia correcta. Hay dos dificultades, una es que no sabemos cuál es la primera baldosa que hay que pisar, sólo la última, y otra que hay dos baldosas trampa que harán que caigas en un túnel sin salida. Debes encontrar **de forma razonada** la primera baldosa que debes pisar para poder así iniciar el recorrido y señalar aquellas baldosas trampa que te harán perder automáticamente el juego.

7. El Califa de Medina Azahara

Cuenta la leyenda que era tanto el amor del Califa Abderramán III hacia su amada Azahara que prometió construirle la más magnífica ciudad que los ojos hubieran visto, Medina Azahara.

Además del Califa, su hijo Alhakén II y Azahara, también vivían en la ciudad, el ministro Jafar, el guardián del Salón Rico, el poeta Almutamid y el maestro alarife Abdallah.

El ministro y Azahara suman veintidós lustros y el ministro supera a Azahara en el único primo par.

Azahara y el guardián danzan los números de sus edades cambiando estos de orden.

Tras el guardián vienen el poeta y el maestro. El primero difiere del guardián un primo impar de un solo dígito, y el otro, con dos primaveras menos, difiere un cuadrado perfecto.

El hijo del Califa dista del poeta y el maestro los mismos números que ellos distan del guardián, pero obviamente siendo bailados.

En menos de una Luna el doble de la nueva edad del hijo será la actual del Califa. ¿Cuál es la edad del Califa?

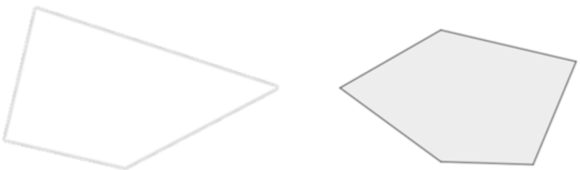
Razona la respuesta.

8. Ángulos de los pentágonos

Sabemos que un triángulo solo puede tener un ángulo recto, pero un cuadrilátero puede tener hasta cuatro ángulos rectos (los rectángulos).

Parece razonable que a medida que aumenta el número de lados en los polígonos, aumente también el posible número de ángulos rectos en los mismos.

Contesta de forma razonada, ¿cuántos ángulos rectos puede llegar a tener un pentágono?

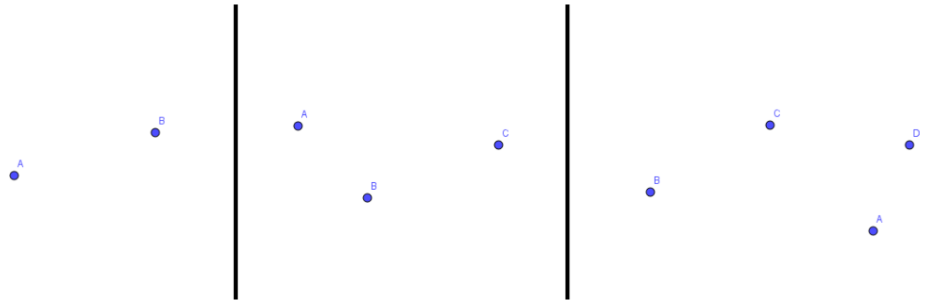


9. Circunferencias

Traza cada una de las siguientes circunferencias en las situaciones que te planteamos:

a) Circunferencia que pasa por dos puntos.
b) Circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.
c) Circunferencia que está a la misma distancia de cuatro puntos.

Contesta de forma razonada: ¿cuántas circunferencias se pueden representar en cada uno de los casos anteriores?



10. ¡A nadar!

Ada va a nadar a una piscina de 25 m de largo.

Cuando llega a la piscina saluda de lejos a su amigo Carlos que está haciendo una parada de 2 minutos en el lado opuesto de la piscina, él llevaba recorridos 10 largos.

A las 10:00 empiezan a nadar cada uno desde su lado de la piscina.

Ada nada 1500m en 40 minutos y ha adelantado a Carlos 7 veces.

Si los dos terminan a la vez, **responde de forma razonada:** ¿qué distancia ha recorrido Carlos? y ¿a qué hora empezó a nadar?

11. La tienda del todo a múltiplo de 5

¡Qué tienda más curiosa! Todos los precios de los artículos son múltiplos de 5. Además, durante esta semana hay una oferta de 3x2 (te llevas tres artículos, pagando dos, obviamente los dos de más valor en caso de no ser iguales). Se conoce que no se acumulan promociones.

En la cola de la caja una clienta tiene una tarjeta descuento del 30% y quiere utilizarla.

Viendo su mercancía le aconsejo que se acoja a la oferta de esta semana y guarde la tarjeta descuento para otra ocasión.

¿Cuáles son todos los posibles precios de los 3 artículos elegidos por la clienta sabiendo que pagó menos de 60€ en su ticket de compra?

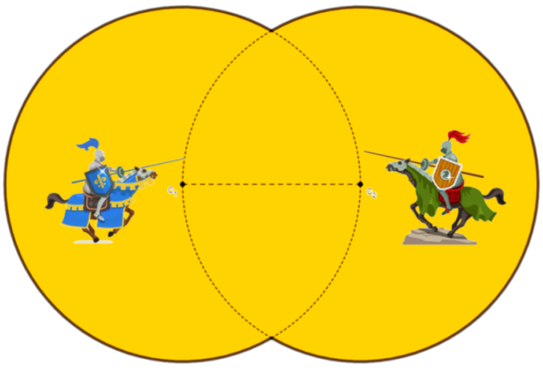
Razona las respuestas.

12. La batalla final

La grabación de la batalla final de la serie de éxito *Juego de Mates* va a ser grabada en Ciudad Épsilon, en Matelandia. Dicha batalla, que enfrentará a los habitantes de Geometralia y Derivando del Rey, trascurrirá en un coso como el que muestra la figura, formado por dos círculos superpuestos de radio 136,64 metros.

a) ¿Cuál es el perímetro del recinto de la batalla final?
b) ¿Qué porcentaje del área del círculo de la izquierda es solapada por el círculo de la derecha?

Razona las respuestas.



13. Cubos de basura

Rosa saca la basura orgánica todos los días de lunes a viernes, los envases y plásticos los lunes, miércoles y viernes. Tira los vidrios cada 13 días. Saca el papel y el cartón una vez a la semana, pero si una semana lo hace en martes la siguiente en miércoles y la siguiente en jueves y así sucesivamente.

Como en su pueblo los sábados y los domingos no se puede sacar la basura, si le toca en uno de esos días, la saca el lunes siguiente.

Rosa, el pasado lunes 2 de mayo de 2016, sacó todas las basuras a la vez, ¿cuándo volvería a sacar otra vez las cuatro?

Cuando acabe el 2016 ¿cuántas veces habrá sacado las cuatro a la vez este año?

14. Visita al Museo

Un grupo de 42 olímpicos desean ir a la Casa de la Ciencia, para ello piden información sobre los precios y obtienen la siguiente información:

Nº de entradas	**Precio**
Entradas individuales (máximo 60)	
1 entrada	25 €
2 entradas	Descuento de un 2 % del total
3 entradas	Descuento de un 3 % del total
n entradas	Descuento de un n % del total
Ofertas de grupo	
10 entradas	220 €
15 entradas	315 €
20 entradas	410 €

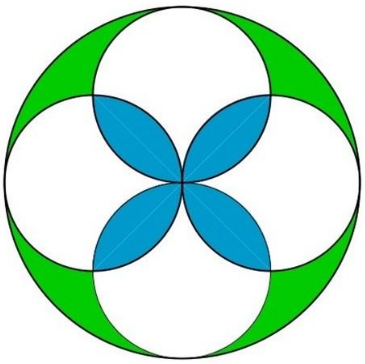
Nota: Además les informan que por cada 15 entradas compradas les regalan una.

De todas las formas posibles de comprar las entradas para los 42 olímpicos, ¿cuál sería la más económica para el grupo?

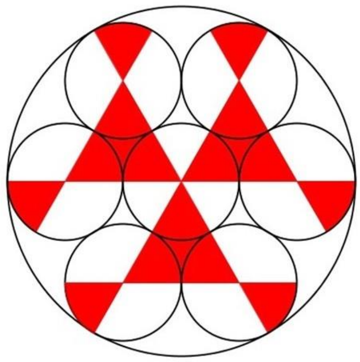
Razona la respuesta.

15. Rosetas

En el próximo aniversario de su fundación, la Junta Directiva del Real Club Recreativo Thales quiere adornar la fachada con dos tipos de rosetas, que están inscritas en circunferencias de 3 cm de radio, como las que aparecen dibujadas en las figuras adjuntas:



ROSETA 1



ROSETA 2

Si se han utilizado $10'27$ cm² de azulejos, entre azul y verde, en la primera roseta.

¿Cuál de las zonas coloreadas en ambas rosetas saldría más económica si el precio es el mismo sea cual sea el color?

Razona la respuesta.

16. Números

A Isa y Pepe le siguen gustando los números y se proponen uno al otro los siguientes cálculos:

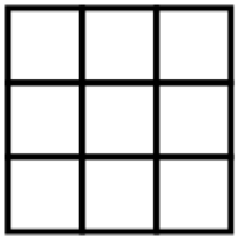
Isa: "¿Cuál es el resultado de

$(2^{2016} - 2^{2015} + 2^{2014} - 2^{2013} + 2^{2012} - 2^{2011} + 2^{2010} - 2^{2009}) : 2^{2008}$?"

Pepe: "Como sabes que la suma de los 59 primeros números naturales es 1770, ¿cuál es el resultado de $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \cdots - 58^2 + 59^2$?"

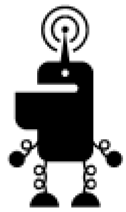
Estamos convencidos que tardaréis menos tiempo vosotros en resolverlos. ¡Ánimo y da **de forma razonada** l*a*s respuestas correctas!

17. El robot



En la empresa del profesor Thayton se fabrican 3 clases de robots, los alfa (α), los beta (β) y los gamma (γ) y de cada uno de ellos existen tres modelos, el 1, el 2 y el 3. En la empresa los tienen almacenados, sin mezclar, en nueve habitaciones, como la que se muestra en el plano de la figura.

El profesor Thayton tiene escrito en su cuaderno de anotaciones los siguientes datos:



- En cada fila y en cada columna hay un modelo 1, 2 y 3.
- Todos los modelos 2 están en una diagonal del plano.
- Todas las habitaciones donde están los robots de la clase alfa tienen al menos en común un punto de contacto.
- Las habitaciones de los robots de la clase gamma no están en contacto unas con otras.
- La clase beta tiene dos modelos de robots en dos habitaciones que están en contacto y el otro está en una habitación que no tiene nada en común con las otras.
- A la derecha de la habitación del modelo 2 de la clase gamma se encuentra la habitación del modelo 1 de la clase beta.

Coloca **de forma razonada** cada modelo de robot en su habitación correspondiente.

18. Guardando monedas

Dª Elvira Guardalotodo decide conservar toda su fortuna repartiéndola en los siete cofres que posee.

En el primer cofre guarda los 2/3 del total de sus monedas; en el segundo cofre mete los 2/3 del resto y así sucesivamente hasta el séptimo cofre. Cuando hubo terminado le quedaba a Dª Elvira en las manos una única moneda que se la guardó en su monedero.

¿Cuál es el total de monedas que compone la fortuna de Dª Elvira Guardalotodo?

¿Cuántas monedas ha guardado en cada cofre?

Razona tus respuestas.

19. Señales en la carretera

En la autovía Sevilla–Córdoba nos encontramos la señal de tráfico de la figura donde las distancias están en kilómetros.

Si nos fijamos en esta señal observaremos que los números (39 y 93) tienen los mismos dígitos, pero cambiando el orden. A este tipo de señal la llamaremos "señal clave".

¿Qué otras "señales clave" (Écija-Córdoba) podremos encontrar después de la anterior antes de llegar a Écija?

En la misma autovía se encuentra la población de La Carlota, cuya distancia a Córdoba es de 31 Km. ¿Podremos encontrar "señales clave" (La Carlota-Córdoba) antes de llegar a la Carlota?

Quiero hacer un viaje de Bailen a Córdoba (100 Km), la carretera pasa por Alcolea, la distancia de Alcolea a Córdoba es de 18 Km. ¿Es posible encontrar "señales clave" (Alcolea-Córdoba)? ¿Cuáles serían?

Razona todas las respuestas.

20. Puente de Triana

Observa la aglomeración de personas que se encontraron la pasada Semana Santa en el Puente de Triana.

Sabemos que el puente tiene una altura sobre la rasante de 12 m, su longitud total es de 154,5 m y su ancho de tablero es de 15,9 m.

Estima de forma razonada el número de personas que se encontraron ese día en el Puente de Triana, si al contar el número de personas que hay en varios cuadrados de 2 metros de lado en dicho puente se han obtenido los siguientes datos: 23, 14, 22, 20, 19, 20 y 22.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1. La Contraseña

A Miguel le regalaron una tableta por su cumpleaños y para evitar que nadie pueda usarla se inventó una contraseña de cinco cifras. Por si acaso se olvidaba de ella, escribió las siguientes pistas en un WhatsApp que le envió a Sagrario su amiga de confianza:

- Todas sus cifras son números impares.
- La suma de sus cifras es 25.
- La primera cifra es la diferencia entre el doble de la quinta cifra menos la cuarta cifra.
- La cuarta cifra es un múltiplo de tres.
- El m.c.m. de la segunda y la quinta cifra es 15.
- La contraseña es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

Lo peor ha ocurrido, se olvidó de la contraseña. Ayuda a Miguel recuperando su contraseña.

Razona tu respuesta.

RESOLUCIÓN

Como buscamos un número de 5 cifras, asignamos una incógnita a cada una de ellas: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{e}$

Continuamos analizando todas las pistas:

- Todas sus cifras son números impares

  Eso excluye al $2, 4, 6, 8$ y 0

- La suma de sus cifras es 25.

$$a + b + c + d + e = 25$$

- La primera cifra es la diferencia entre el doble de la quinta cifra menos la cuarta cifra.

$$a = 2e - d$$

- La cuarta cifra es un múltiplo de tres.

  $\boldsymbol{d} = \mathbf{3}\ o\ \boldsymbol{d} = \mathbf{9}$ ya que 6 es par

- El m.c.m. de la segunda y la quinta cifra es 15.

  Hay dos posibilidades:

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{3}\ y\ \boldsymbol{e} = \mathbf{5} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{b} = \mathbf{5}\ y\ \boldsymbol{e} = \mathbf{3}$$

- La contraseña es el menor número que cumple las condiciones anteriores.

  Esta pista nos servirá para descartar si hay más de una posibilidad

Resumiendo:

- Se excluye al 2, 4, 6, 8 y 0
- a + b + c + d + e = 25
- a = 2e – d
- d = 3 o d = 9
- b = 3 y e = 5 o b = 5 y e = 3

1ª Posibilidad: **7 3 7 3 5**

	a	b	c	d	e
b = 3 y e = 5		3			5
Supongamos que **d = 3**		3		3	5
a = 2e – d a = 2 · 5 – 3 = 10 – 3 = 7	7	3		3	5
a + b + c + d + e = 25 7 + 3 + c + 3 + 5 = 25 → c = 7	7	3	7	3	5

2ª Posibilidad: **1 3 7 9 5**

	a	b	c	d	e
b = 3 y e = 5		3			5
Supongamos que **d = 9**		3		9	5

	a	b	c	d	e
a = 2e – d a = 2 · 5 – 9 = 10 – 9 = 1	1	3		9	5
a + b + c + d + e = 25 1 + 3 + c + 9 + 5 = 25 → c = 7	1	3	7	9	5

3ª Posibilidad:

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
b = 5 y e = 3		5			3
Supongamos que **d = 3**		5		3	3
a = 2e – d a = 2 · 3 – 3 = 6 – 3 = 3	3	5		3	3
a + b + c + d + e = 25 3 + 5 + c + 3 + 3 = 25 → c = 11					

IMPOSIBLE porque c tiene más de 1 dígito

4ª Posibilidad:

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
b = 5 y e = 3		5			3
Supongamos que **d = 9**		5		9	3
a = 2e – d a = 2 · 3 – 9 = 6 – 9 = -3	3	5		9	3

IMPOSIBLE porque un dígito no puede ser un número negativo

Hemos encontrado dos posibles contraseñas

7 3 7 3 5 y 1 3 7 9 5

Como la última pista decía que la contraseña era el menos número que cumplía todas las condiciones

La contraseña de Miguel es **1 3 7 9 5**

Análisis del problema

Este problema presenta poca dificultad si se va siguiendo ordenadamente las indicaciones que nos ofrece los datos del enunciado y se emplea un buen razonamiento lógico. Aunque puede resultar algo más dificultoso al alumnado que no tenga una buena comprensión lectora.

La dificultad en la fase de comprensión lectora surgirá al identificar todas las restricciones y suposiciones subyacentes en el enunciado referentes a las propiedades aritméticas que deben cumplir los números candidatos a ser la contraseña de Miguel.

Posteriormente, el alumnado deberá matematizar el problema al traducirlo a su forma algebraica, usando variables apropiadas (que pueden ser diferentes a las propuestas en el texto) y reconocer la estructura algebraica que subyace en cada una de las sentencias. La ejecución del problema supondrá la manipulación de expresiones algebraicas. Para finalmente, interpretar y evaluar la razonabilidad de los valores obtenidos y cuál de las soluciones numéricas obtenidas tiene significado en el contexto real del problema.

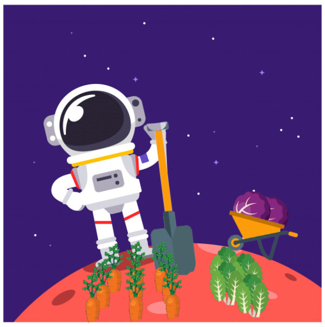
Los conocimientos matemáticos a emplear en su resolución deben ser conocidos por el alumnado desde el último curso de Primaria. A nivel numérico el problema permitirá al alumnado reconocer los significados numéricos en situaciones de paridad y multiplicidad. A nivel algebraico deberá integrar estos conocimientos numéricos para establecer cantidades variables, traducirlas algebraicamente y operar con las mismas.

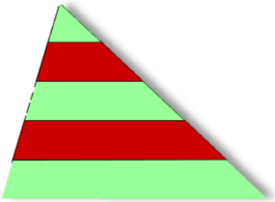
Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E2. B2.C2.E1. B2.C6.E1. B2.C7.E2.			

2. Cosecha Interestelar

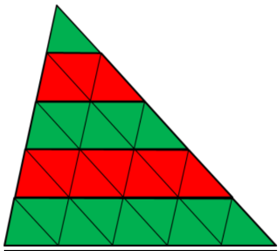
Darrow es un agricultor que está intentando hacerse un hueco en el mercado de productos exóticos en Marte. Hace poco compró una finca triangular cerca del Monte Olimpo (que es el mayor volcán del Sistema Solar) y la plantó como muestra la figura. La finca la dividió en cinco bandas paralelas con la misma anchura. La parte más oscura la ha plantado con hemantos de Mercurio y la parte





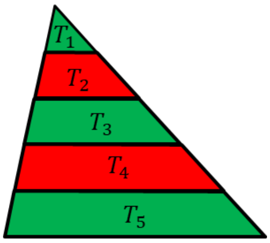
más clara, con la acelga plutoniana. Sabiendo que el área total de la finca es de 145 metros cuadrados, contesta de forma razonada ¿cuál es el área que ha plantado con hemantos?

RESOLUCIÓN



PRIMERA SOLUCIÓN: La figura la podemos descomponer como aparece en la figura adjunta. Como vemos, la parte roja representa $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$ de la figura. Por lo tanto, el área en rojo es

$$\frac{2}{5} \cdot 145 = 58 \text{ m}^2$$



SEGUNDA SOLUCIÓN: En la imagen podemos ver cinco triángulos que se encuentran en "Posición de Thales", esto es, tienen un ángulo en común (el superior) y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos. Por lo tanto, los cinco triángulos son *semejantes*. Denotemos por T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 los triángulos sucesivos (empezando por el vértice superior). Al ser la anchura de las bandas constante, deducimos que la altura de T_2 es el doble que la de T_1, la altura de T_3 es el triple que la de T_1… (Hemos considerado la altura desde los lados paralelos hasta el vértice superior)

Además, sabemos que, si dos polígonos P y P' son semejantes con razón de semejanza k, sus áreas se relacionan mediante:

$$Area(P') = k^2 Area(P)$$

Así:

$$Area(T_2) = 4 \cdot Area(T_1)$$

$$Area(T_3) = 9 \cdot Area(T_1)$$

$$Area(T_4) = 16 \cdot Area(T_1)$$

$$Area(T_5) = 25 \cdot Area(T_1)$$

Por lo tanto, llamando $a = Area(T_1)$:

$$\textit{Area roja} = Area(ABCD) + Area(EFGH) =$$

$$= Area(T_2) - Area(T_1) + Area(T_4) - Area\ (T_3) =$$

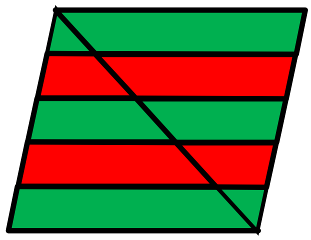
$$= 4a - a + 16a - 9a = 10a$$

Por otro lado, sabemos que

$$Area(T_5) = 145 = 25a \Rightarrow a = 5'8 \text{ m}^2$$

Así, $Area\ roja = 10 \cdot 5'8 = 58\text{m}^2$

<u>**TERCERA SOLUCIÓN**</u>: Podemos girar el triángulo y colocarlo como en la figura. Como vemos, la parte roja representa las dos quintas partes de la figura, que ahora ha doblado su área. Sin embargo, al tratarse de figuras iguales, en nuestra figura original siguen representando las dos quintas partes del total. Por lo tanto, el área buscada es $\frac{2}{5} \cdot 145 = 58\text{ m}^2$.



Análisis del problema

En este problema podemos apreciar un enunciado relativo al ámbito de medidas de áreas no estándar, en el sentido de que no se dispone de medidas relativas a distancias explícitas, como pueden ser las longitudes de lados, alturas, ángulos…, sino que solamente se dispone de la equidistancia entre los lados paralelos, hecho que hace que el alumno tenga que poner en juego más estrategias de pensamiento a la hora de buscar la resolución del mismo. Por lo tanto, el problema puede tiene un nivel de complejidad de conexión¸ ya que consiste en la resolución de problemas no rutinarios, que incluye una situación familiar.

Dicha conexión es una oportunidad para introducir al alumnado en el proceso de geometrización de situaciones cotidianas. Proceso consistente en la formulación de la situación matemáticamente, su simplificación para reducir el análisis al cálculo de superficies de polígonos al usar modelos geométricos más sencillos, triángulos y cuadriláteros, manipular la información aritmética. Y, finalmente, interpretar la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

A nivel didáctico se puede solicitar al alumnado que resuelva el problema de tres formas diferentes favoreciendo así, por una parte, su creatividad. Y, por otra, el desarrollo de procesos de profundización en problemas ya resueltos planteando pequeñas variaciones en la descomposición en triángulos dónde se pueda aplicar el Teorema de Thales y composición de figuras geométricas para crear cuadriláteros.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C7.E2.	B3.C2.E1. B3.C4.E1.		

3. El planeta cercano

Acaba de aterrizar en la Tierra un alumno de intercambio del planeta cercano Próxima C5. Este planeta tarda en girar alrededor de su estrella, Próxima Centauri, el mismo tiempo que la Tierra en girar alrededor del Sol, pero cada año consta de 500 días, cada mes de 50 días, cada día de 50 horas, cada hora de 50 minutos y cada minuto de 50 segundos.

Marta, para integrar al nuevo chico, le pregunta: “¿Dónde duran más los segundos en tu planeta o en el mío? Y si me voy a tu planeta los meses de julio y agosto, ¿cuánto tiempo estoy (contando los días, las horas, los minutos y los segundos) realmente en el tuyo?

Ayuda al sorprendido visitante dando las respuestas de **forma razonada.**

RESOLUCIÓN

En primer lugar, vamos a calcular la equivalencia entre las diferentes unidades de tiempo en la Tierra y en Próxima C5. Codificamos las unidades en primer lugar Año (A), Mes (Ms), día (D), hora (H), minuto (Mi), segundo (S) y colocamos un subíndice para identificar el planeta Tierra (T) y Próxima C5 (C5).

Como ambos planetas tardan el mismo tiempo en completar “su año” en su giro alrededor de su estrella, por tanto, $AT = AC5$. Aplicando las equivalencias en días, $365\ DT = 500\ DC5$. A partir de esta igualdad. Vamos a obtener la equivalencia de horas, minutos y segundos:

$$365x24\ H_T = 500x50\ H_{C5};$$

$$365x24x60\ Mi_T = 500x50x50\ Mi_{C5};$$

$$365x24x60x60\ S_T = 500x50x50x50\ S_{C5}$$

Calculamos y obtenemos la siguiente proporción: $31.536.000\ S_T = 62.500.000\ S_{C5}$; dividimos por 1000 y obtenemos la proporción simplificada $31.536\ S_T = 62.500\ S_{C5}$, de donde obtenemos que $1\ S_T$ equivale a $62.500/31.536\ S_{C5} \approx 1{,}98\ S_{C5}$, tras lo cual deducimos, que los segundos en la Tierra duran más que en Próxima C5.

Los segundos en la Tierra duran más que en Próxima C5.

Ahora vamos a responder a la segunda pregunta, ¿cuál es la equivalencia de 62 días terrestres correspondientes a los meses de Julio y Agosto en el planeta Próxima C5?

A partir de la equivalencia $365\ D_T = 500\ DC5$, extraemos que $1\ D_T = 500/365\ D_{C5}$, por tanto:

$62\ D_T = 62x500/365\ D_{C5} = 84\ DC5 + 340/365\ D_{C5}$.

La fracción de día restante la tenemos que pasar a horas:

$340/365\ D_{C5} = 50x340/365\ H_{C5} = 46\ H_{C5} + 210/365\ H_{C5}$.

Análogamente, transformamos la fracción de hora sobrante en minutos:

$210/365\ H_{C5} = 50x210/365\ Mi_{C5} = 28\ Mi_{C5} + 280/365\ Mi_{C5}$.

Finalmente, expresamos la fracción de minuto sobrante en segundos:

$280/365\ Mi_{C5} = 50x280/365\ S_{C5} = 38\ S_{C5} + 130/365\ S_{C5}$.

En conclusión, hemos permanecido en el planeta Próxima C5,

$$\mathbf{84\ D_{C5}, 46\ H_{C5}, 28\ Mi_{C5}, 38 + 130/365\ S_{C5}} \quad \mathbf{o}$$

$$\mathbf{1\ M_{C5}, 34\ D_{C5}, 46\ H_{C5}, 28\ Mi_{C5}, 38 + 130/365\ S_{C5}}$$

Análisis del problema

Este problema presenta poca dificultad si se va siguiendo ordenadamente las indicaciones que nos ofrece los datos del enunciado y se emplean adecuadamente las equivalencias entre las diferentes unidades de tiempo. La búsqueda de dichas estrategias favorece que el alumnado ponga en procesos de formulación de situaciones matemáticamente, que a continuación deberá manipular matemáticamente.

En el segundo apartado, hay que tener en cuenta el significado de la fracción impropia y su forma mixta para evitar errores debidos al redondeo. No se recomienda la transformación inversa de segundos a horas, por complicarse excesivamente el cálculo.

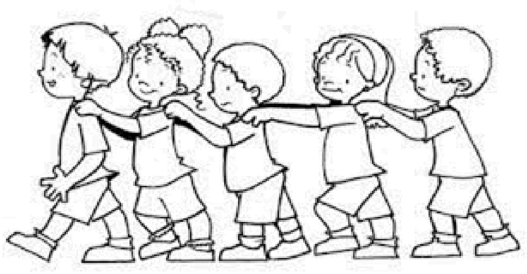
A nivel didáctico, aunque los conocimientos matemáticos a emplear en su resolución deben ser conocidos por el alumnado desde el último curso de Primaria, la dificultad del mismo radica en la necesidad de integrar conocimientos de fracciones propias e impropias, decimales y proporcionalidad para realizar cálculos exactos y buscar la estrategia para tener la mayor precisión posible.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E3. B2.C2.E6. B2.C2.E7.			

B2.C3.E1. B2.C4.E2. B2.C5.E1.			

4. Orden en la fila



Cinco amigos, Antonio, Belén, Carmen, Darío y Eugenia, se colocan en "fila india", pero tú no sabes el orden en que están colocados.

Están contando de 5 en 5: el 1º dice 5, el 2º dice 10, el 3º dice 15, el 4º dice 20, el 5º dice 25, el 1º sigue con 30,... y siguen contando de 5 en 5. Antonio ha dicho 140; Belén 160; Carmen 130; Darío 170.

¿En qué orden se encuentran colocados los amigos en la fila? ¿Quién de ellos diría 1.755?

Razona las respuestas.

RESOLUCIÓN

Vamos a comenzar en primer lugar a reproducir algunos términos de la secuencia que se describe en el problema:

5, 10, 15, 20, 25 / 30, 35, 40, 45, 50 / 55, 60, 65, 70, 75 / 80, 85, 90, 95, 100/…

Podemos darnos cuenta que cada amigo añade 25 al número anterior en cada repetición, es decir, que el primero de la fila va diciendo los números 5 + 25N, el segundo los 10 + 25N, el tercero los 15 + 25N, el cuarto los 20 + 25N, y el quinto los 25(N+1), siendo N el número de repeticiones.

Por tanto, vamos a dividir los números que ha dicho en algún momento por 25 y nos quedamos con el resto.

Número	Resto al dividir por 25	Lugar que debe ocupar
Antonio (140)	15	3º
Belén (160)	10	2º
Carmen (130)	5	1º
Darío (170)	20	4º
Eugenia (Desconocido)	0	5º por descarte

Para averiguar quién dijo el número 1755, dividimos 1755 entre 25 y nos quedamos con el resto, que es 5, y éste corresponde, según la tabla anterior, a Carmen.

El orden de los amigos es Carmen, Belén, Antonio, Darío y Eugenia.

Carmen dijo el número 1755.

Análisis del problema

Es un problema de dificultad media en el sentido en que el estudiante debe aplicar procesos de matematización de las situaciones a partir de la identificación de patrones. En este caso, no está interpretando un patrón del tipo múltiplos de cinco, *"5N"*, sino que tiene que percibir que todos los números que dice un determinado amigo sigue la secuencia *"a + 25N"*, donde *"a"* es el número de la lista 5, 10, 15, 20, 25 que dijo en la primera vuelta. Una vez identificado el patrón que siguen al contar las posiciones en las filas, deben aplicar el concepto de cociente entero para descubrir que todos los números que corresponden al mismo sujeto tienen el mismo resto al dividirlo por 25.

Sobre restos de la división el estudiante tiene conocimiento desde el último ciclo de la Educación Primaria, pero quizás las propiedades que comparten números que tienen el mismo resto es un conocimiento más avanzado que se puede adquirir a partir del primer curso de ESO.

A nivel, didáctico el problema es una oportunidad para comprender las limitaciones de los patrones múltiplos de cinco y reconocer nuevos patrones *"25N+a"*, donde *"a"* es el resto del cociente entero. Y, en consecuencia, extender los límites de la identificación de patrones numéricos a expresiones algebraicas y valorar la adecuación de dicho modelo algebraico.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C2.E1. B2.C6.E1. B2.C6.E2.			

5. Geometría y elegancia

Enrique es un buen matemático que le gusta la geometría. Quiere partir un cuadrado de lado 1 en tres partes con la misma área como se muestra en la figura 1. ¿Qué valor debe dar a x para conseguirlo?

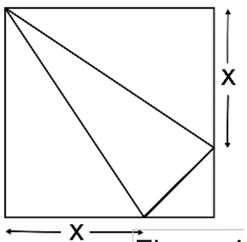


Figura 1

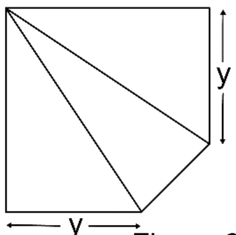


Figura 2

Pero además le gusta la decoración y no encuentra elegante su construcción. Decide suprimir la zona triangular inferior derecha, como indica la figura 2. ¿Podrá encontrar el valor de y que haga que en este caso los tres triángulos obtenidos tengan la misma área? En caso afirmativo calcula ese valor de y.

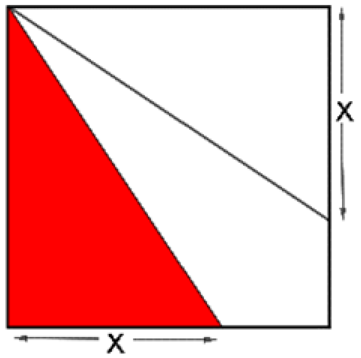
Razona las respuestas.

RESOLUCIÓN

- **1ª parte**

Como el cuadrado es de lado 1. Su área será $1^2 = 1$

De la figura 1, consideremos, por ejemplo, este triángulo rojo.



$$\acute{A}rea = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{x\ \times 1}{2} = \frac{x}{2}$$

Y como debían ser las tres áreas iguales, el área del triángulo rojo debe ser la tercera parte del área del cuadrado, es decir:

$$\acute{A}rea\ del\ tri\acute{a}ngulo\ rojo\ = \frac{x}{2} \qquad \acute{A}rea\ del\ cuadrado\ = 1 \times 1\ = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

- **2ª parte**

Pero además le gusta la decoración y no encuentra elegante su construcción. Por ello decide suprimir la zona triangular inferior derecha, como indica la figura 2.

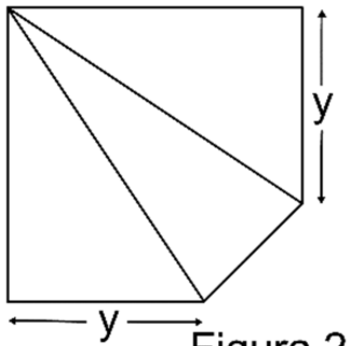


Figura 2

¿Podrá encontrar el valor de *y* que haga que en este caso los tres triángulos obtenidos tengan la misma área? En caso afirmativo, calcula ese valor *y*.

Definimos la variable *x* que completa el lado del cuadrado *y* obtenemos la primera ecuación:

$$x + y\ = 1 \qquad (1)$$

Como en el problema anterior, cada triángulo tiene un tercio por área.

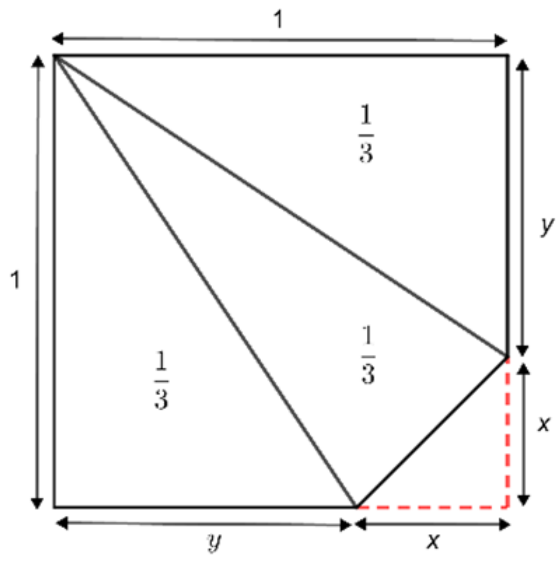


Figura 2

El cuadrado que sabemos que tiene área 1, le restamos el área del triángulo que le falta a la figura.

$$\text{Área del triángulo que falta } = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\,x^2$$

Luego, el área de la figura 2 es:

$$\text{Área figura 2} = 1 - \frac{1}{2}\,x^2$$

Por tanto, el área de cada triángulo es:

$$a = \frac{1 - \frac{1}{2}\,x^2}{3} \quad (2)$$

Por otro lado, de la fórmula del área del triángulo obtenemos que el área es:

$$a = \frac{1 \times y}{2} = \frac{y}{2} \quad (3)$$

Hemos obtenido el área de dos maneras distintas y podemos igualar (2) con (3)

$$\frac{y}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\,x^2}{3}$$

Obtenemos una ecuación con dos incognitas que, vamos a simplificar

$$3y = 2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 2\left(\frac{2 - x^2}{2}\right) = 2 - x^2$$

También sabemos que (1)

$$x = 1 - y$$

Nos encontramos con:

$$3y = 2 - x^2$$

$$x = 1 - y$$

Si resolvemos este sistema nos encontramos con que la ecuación resultante será:

$$3\,y = 2 - (1 - y)^{\,2}$$

$$3\,y = 2 - (1 - 2y - y^2)$$

Tras eliminar los paréntesis y transponer los términos conseguimos:

$$y^2 + y - 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado, obteniendo los siguientes valores

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0'618$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1'618$$

Solo podemos aceptar el valor positivo, porque las longitudes solo pueden ser positivas, siendo el primer valor la solución del problema.

Por lo tanto, el valor de *y* en la Figura 2 es:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0'618$$

En resumen:

En el primer caso, el valor de *x* es:

$$x = \frac{2}{3}$$

Si queremos obtener una figura más elegante, entonces el valor de *y* debe ser:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0'618$$

Análisis del problema

Problema que nos plantea la relación entre longitud de lados y superficie, que establece dos partes bien diferenciadas, tanto en conocimientos iniciales como dificultad o complejidad para su resolución.

Así en la primera parte, solo necesitaríamos conocer el cálculo del área de dos figuras básicas como son el cuadrado y el triángulo y una pequeña idea del concepto de fracción.

La segunda parte añade un plus de complejidad, al tener que relacionar dos variables, derivadas del corte del pequeño triángulo, relacionando las variables longitud y sus consecuencias en el área de los triángulos resultantes del corte.

Esto nos lleva a utilizar una nueva herramienta o conocimiento como es la resolución de un sistema de dos ecuaciones con las dos variables (incógnitas), lo que nos conduce a una ecuación de segundo grado en la que nos encontramos con soluciones que requieren un profundo análisis, tanto por encontrar una solución negativa que, tenemos que desechar, como por ser un número irracional, obligando a tener solamente una aproximación del resultado.

Esta actividad nos puede ayudar a facilitar la comprensión del significado de número, trabajando con flexibilidad con fracciones y números decimales, así como el reconocimiento del uso adecuado y apropiado de la calculadora y el desarrollo y uso de estrategias para estimar los resultados de los cálculos con números racionales, y juzgar si dichos resultados son razonables.

Igualmente nos puede ayudar a comprender, representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos para representar y comprender relaciones cuantitativas.

En los aspectos más "geométricos", nos puede ayudar a comprender los atributos mensurables de los objetos, en nuestro caso de longitud y área y tiempo, comparando objetos según estos atributos, desarrollando referentes comunes para medir y para realizar comparaciones.

Destacable también el uso de representaciones de datos mediante objetos concretos y dibujos.

Desde el ámbito de la resolución de problemas, esta actividad, al igual que las presentadas en este manual, nos ayuda a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas que surgen en muy diversos contextos, aplicando diversas estrategias que, ayuden a controlar y reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas.

Nos ayuda a reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, así como a desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones matemáticas; usando el lenguaje matemático para expresar ideas, creando representaciones matemáticas para resolver problemas.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C2.E1.	B3.C2.E1.		
B2.C1.E2.	B3.C6.E1.		
B2.C1.E3.			
B2.E2.C6.			
B2.C3.E1.			
B2.C4.E1.			
B2.C4.E2.			
B2.C6.E1.			
B2.C6.E3.			
B2.C7.E1.			
B2.C7.E2.			

6. Las baldosas trampa

En la Casa de los Misterios, que es una novedosa atracción de feria, hay una pequeña habitación con 25 baldosas y las inscripciones que aparecen en la imagen. Las inscripciones constan de un número del 1 al 4 y una letra N, S, E y O, que indican las direcciones norte, sur, este y oeste.

1E	2S	4S	1O	2S
4E	3S	1E	2S	3S
1N	1O	1S	2S	2O
3E	2N	1O	1E	3N
4N	última baldosa	3N	4N	1O

La atracción consiste en pisar las baldosas en un orden adecuado y para ello es fundamental la inscripción de cada una de ellas. Por ejemplo, la baldosa 2S de la esquina superior derecha nos dice que la próxima baldosa que debe pisarse, está dos baldosas en dirección sur, es decir la baldosa 2O.

Si se quiere salir triunfante de la atracción se deben pisar el máximo número de baldosas siguiendo la secuencia correcta. Hay dos dificultades, una es que no sabemos cuál es la primera baldosa que hay que pisar, sólo la última, y otra que hay dos baldosas trampa que harán que caigas en un túnel sin salida. Debes encontrar **de forma razonada** la primera baldosa que debes pisar para poder así iniciar el recorrido y señalar aquellas baldosas trampa que te harán perder automáticamente el juego.

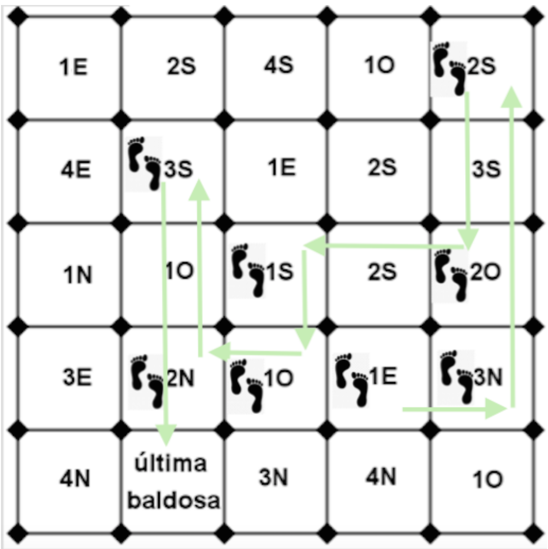
RESOLUCIÓN

Vamos a comenzar el recorrido al revés, por la última baldosa y analizando cuál es la única posible procedencia. Es decir, si queremos llegar a la última baldosa, el movimiento norte no es posible, ni el movimiento este, ni oeste. Por tanto, la única casilla sería 3S:

Última baldosa ← 3S

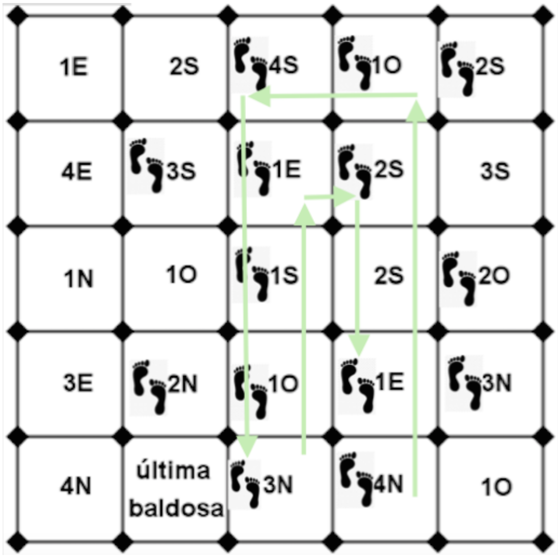
Procedemos de la misma forma para llegar a la baldosa 3S:

3S ← 2N ← 1O ← 1S ← 2O ← 2S ← 3N ← 1E



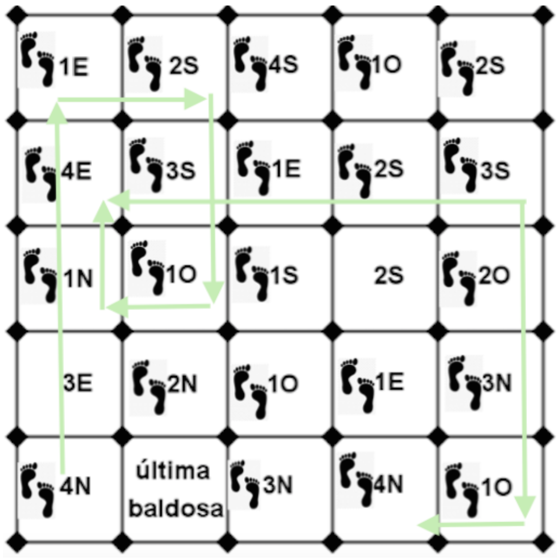
A la baldosa 1E podemos llegar desde la baldosa 3E o 2S. La baldosa de la cuarta fila y primera columna es UNA BALDOSA TRAMPA, ya que a ella no se puede llegar desde ninguna baldosa. Por tanto seguimos con la baldosa 2S:

1E ← 2S ← 1E ← 3N ← 4S ← 1O ← 4N

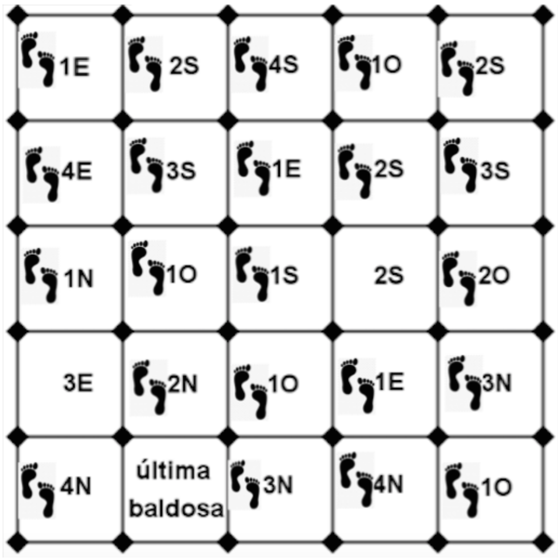


Finalmente nos encontramos en la casilla 4N de la cuarta columna y quinta fila, con dos posibles orígenes, 2S y 1O, pero la baldosa 2S no se puede llegar a ella y por tanto es BALDOSA TRAMPA. Por tanto, seguimos con la baldosa 1O:

4N ← 1O ← 3S ← 4E ← 1N ← 1O ← 2S ← 1E ← 4N



Por tanto, la primera baldosa donde se debe empezar el recorrido es 4N de la primera columna y quinta fila. Las baldosas trampas son las no pisadas:



Análisis del problema

Este problema se caracteriza por la habilidad para organizar los datos gráficamente. Por ello, su resolución debe partir de la comprensión del lenguaje de las coordenadas geográficas y su uso en el contexto de una tabla de coordenadas. A continuación, se favorece el uso de estrategias heurísticas y procesos de razonamiento que le permitan diferenciar los diferentes casos para hacer las suposiciones apropiadas sobre las baldosas que serán trampa. Para resolverlo partiendo de la casilla final para ejecutar el camino inverso. Finalmente, el alumnado debe comprobar y valorar la idoneidad de su propuesta a partir de realizar el camino directo.

Así pues, se pretende que el alumnado aprenda a diferenciar los diferentes casos, valorando las posibilidades que ofrece el juego y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de las baldosas.

A nivel didáctico, el problema ofrece una oportunidad para que el alumnado realice predicciones sobre un fenómeno aleatorio apoyándose en el uso de tablas. Sin llegar a pedirles el cálculo de probabilidades de caer en las casillas trampa ni de llegar a la casilla final.

Además, el problema permite extender las representaciones gráficas de los movimientos sobre las baldosas para construir el significado del movimiento de traslación y el uso de vectores para su descripción.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5

			B5.C3.E3. B5.C4.E1.

7. El Califa de Medina Azahara

Cuenta la leyenda que era tanto el amor del Califa Abderramán III hacia su amada Azahara que prometió construirle la más magnífica ciudad que los ojos hubieran visto, Medina Azahara.

Además del Califa, su hijo Alhakén II y Azahara, también vivían en la ciudad, el ministro Jafar, el guardián del Salón Rico, el poeta Almutamid y el maestro alarife Abdallah.

El ministro y Azahara suman veintidós lustros y el ministro supera a Azahara en el único primo par.

Azahara y el guardián danzan los números de sus edades cambiando estos de orden.

Tras el guardián vienen el poeta y el maestro. El primero difiere del guardián un primo impar de un solo dígito, y el otro, con dos primaveras menos, difiere un cuadrado perfecto.

El hijo del Califa dista del poeta y el maestro los mismos números que ellos distan del guardián, pero obviamente siendo bailados.

En menos de una Luna el doble de la nueva edad del hijo será la actual del Califa. ¿Cuál es la edad del Califa?

Razona la respuesta.

RESOLUCIÓN

Comencemos con Azahara y con el ministro Jafar.

Entre los dos tienen 22 lustros y como cada lustro son 5 años tendremos que entre ambos suman $22 \cdot 5 = 110$ años.

La diferencia entre ambos es del único número primo par, por lo tanto, sus edades difieren en 2 años.

$$110 - 2 = 108$$

$$108 : 2 = 54$$

$$54 + 2 = 56$$

Azahara tiene 54 años y el ministro Jafar 56 años.

Como el guardián y Azahara danzan los dígitos de sus edades cambiando éstos de orden, ¿cuál será la edad del guardián?

Si Azahara tiene 54 años entonces el guardián tendrá 45 años.

El poeta difiere del guardián un primo impar de un solo dígito y el maestro, con dos primaveras menos, difiere un cuadrado perfecto.

Si Llamamos x al primo impar que difiere el poeta del guardián, entonces el maestro diferirá $x + 2 = n^2$ del guardián.

$$poeta = 45 - x \qquad\qquad maestro = 45 - (x + 2) = 45 - n^2$$

Los primos de un solo digito impares son 3, 5 y 7.

Comprobemos: $3 + 2 = 5$ $\qquad 5 + 2 = 7$ $\qquad 7 + 2 = 9 = 32$

Por lo tanto, el poeta tendrá: $45 - 7 = 38$

Y el maestro: $45 - (7 + 2) = 36$

El poeta tiene 38 años y el maestro 36 años.

El hijo del Califa, Alhakén II, dista del poeta y el maestro los mismos números que ellos distan del guardián, pero obviamente siendo bailados.

Esto quiere decir que el hijo del Califa tendrá 9 años menos que el poeta y siete años menos que el maestro.

$$38 - 9 = 29 \qquad \text{y} \qquad 36 - 7 = 29$$

Por lo cual la edad Alhakén II es 29 años.

En menos de una Luna el doble de la nueva edad del hijo será la actual del Califa. ¿Qué nos quiere informar esta frase?

Que el hijo del Califa en menos de un mes tendrá un año más, es decir, habrá cumplido 30 años $(29 + 1 = 30)$.

Y, por lo tanto, la edad actual del Califa será: $30 \cdot 2 = 60$

El Califa Abderramán III tiene 60 años.

Análisis del problema

Este problema presenta poca dificultad si se va siguiendo ordenadamente las indicaciones que nos ofrece los datos del enunciado y se emplea un buen razonamiento lógico. Aunque puede resultar algo más dificultoso al alumnado que no tenga una buena comprensión lectora.

Los conocimientos matemáticos a emplear en su resolución deben ser conocidos por el alumnado desde el último curso de Primaria, como son números primos, múltiplos, etc. Y, serán una oportunidad para reconocer nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.

La dificultad en la fase de comprensión lectora surgirá al identificar todas las restricciones y suposiciones subyacentes en el enunciado referentes a las propiedades aritméticas que deben cumplir los números primo pares e impares.

Posteriormente, el alumnado tendrá la oportunidad de describir ciertas situaciones del enunciado como la diferencia entre el poeta y el guardián a través de establecer la relación algebraica con el maestro. Y, en consecuencia, operar con esta expresión algebraica. Una vez, determinada la edad del maestro, podrá analizar y aplicar de nuevo las restricciones a las variables de la edad del poeta, el guardián, el hijo y el califa.

A nivel numérico el problema permitirá al alumnado reconocer los significados numéricos en situaciones de paridad y multiplicidad. A nivel algebraico deberá integrar estos conocimientos numéricos para establecer cantidades variables, traducirlas algebraicamente y operar con las mismas.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5

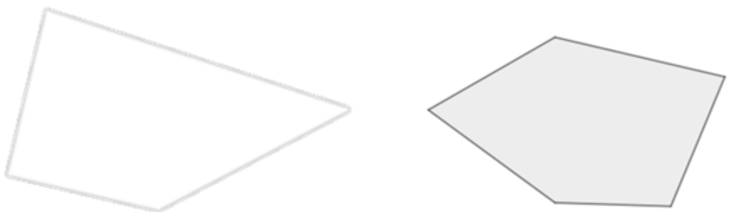
B2.C1.E2. B2.C1.E3. B2.C2.E1. B2.C4.E2. B2.C6.E1. B2.C6.E2.			

8. Ángulos de los pentágonos

Sabemos que un triángulo solo puede tener un ángulo recto, pero un cuadrilátero puede tener hasta cuatro ángulos rectos (los rectángulos).

Parece razonable que a medida que aumenta el número de lados en los polígonos, aumente también el posible número de ángulos rectos en los mismos.

Contesta de forma razonada, ¿cuántos ángulos rectos puede llegar a tener un pentágono?



RESOLUCIÓN

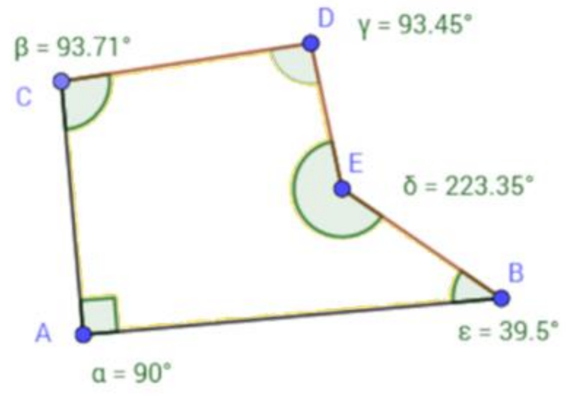
Sabemos que:

- Un triángulo rectángulo solo puede tener un ángulo recto.
- La suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es 180°.
- La suma de los ángulos internos de un polígono es $S = 180 \times (x-2)$.
- En nuestro caso un pentágono:

$$S = 180 \times (x-2) = 540$$

Vamos a ver los diferentes casos de ángulo recto que nos podemos encontrar:

- **Un ángulo recto:**

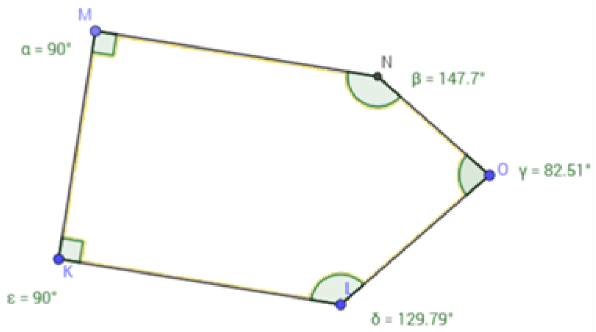


$$540° - 90° = 450°$$

Un ángulo recto y 450° a repartir entre los otros cuatro ángulos interiores.

$$S = 90° + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 540°$$

- **Dos ángulos rectos:**

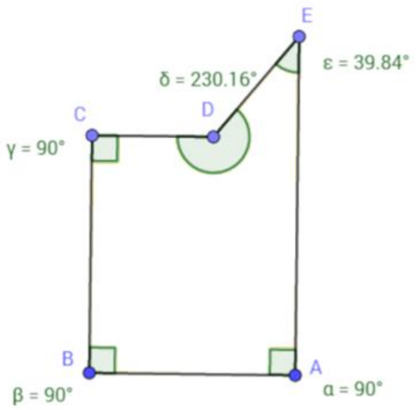


$$540° - 180° = 360°$$

Dos ángulos rectos y 360° a repartir entre los otros tres ángulos interiores.

$$S = 90° + \beta + \gamma + \delta + 90° = 540°$$

- **Tres ángulos rectos:**

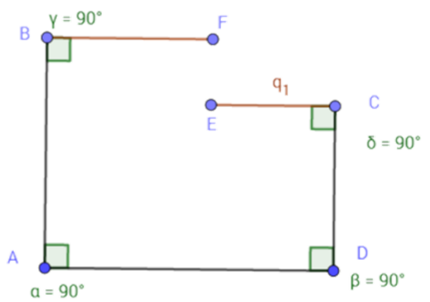


$$540° - 270° = 270°$$

Tres ángulos rectos y 270° a repartir entre los otros dos ángulos interiores.

$$S = 90° + 90° + 90° + \delta + \varepsilon = 540°$$

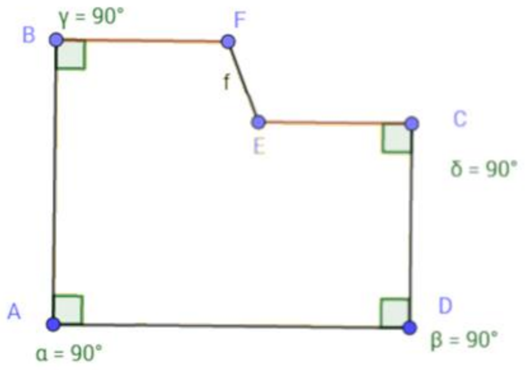
- **Cuatro ángulos rectos:**

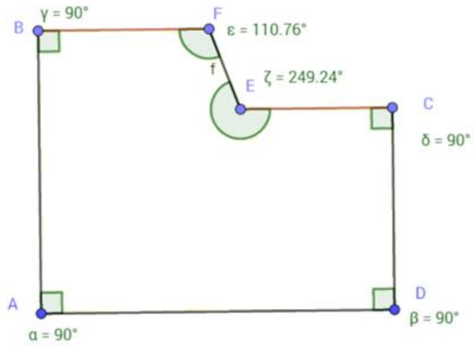


$$540° - 360° = 180°$$

Cuatro ángulos rectos y un ángulo de 180° formado por los otros lados.

$$S = 90° + 90° + 90° + 90° + \varepsilon$$
$$= 540°$$



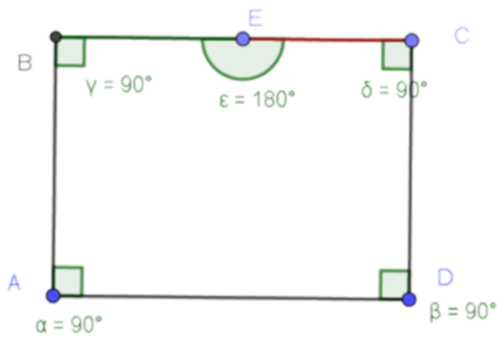


Al unir los puntos F y E obtenemos un sexto lado, el segmento “f”

$$S = 90° + "90° + 90° + 90° + \varepsilon = 540°$$

El segmento *“f”* nos da lugar a dos ángulos internos $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\zeta}$ (seis ángulos internos imposible un pentágono).

$$S = 90° + 90° + "90° + "90° + \varepsilon + \zeta \neq 540°$$



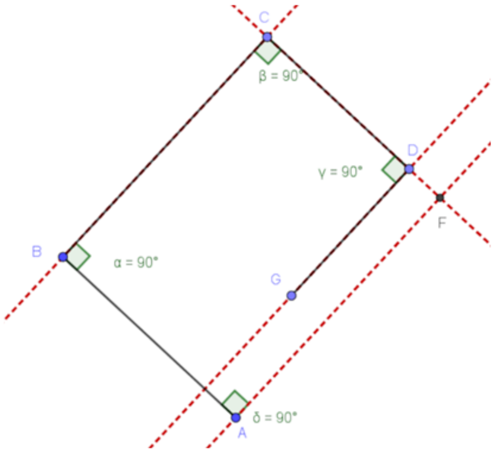
Al hacer coincidir los puntos F y E obtenemos un nuevo lado BC, siendo el quinto vértice el punto E.

Obteniendo por tanto una figura “cuadrangular”.

Hemos podido comprobar que cualquier pentágono puede tener 1, 2 o 3 ángulos recto, ya que el cuarto recto daría lugar a dos nuevos ángulos, dando lugar a un nuevo polígono de seis lados o bien es un ángulo llano (180°) dando lugar a un polígono de cuatro lados.

También sabemos que:

- Dos rectas perpendiculares forman un ángulo de 90°.
- La perpendicularidad de rectas cumple la propiedad simétrica, es decir, si la recta a es perpendicular a la recta b, la recta b es perpendicular a la recta a.
- Dos rectas perpendiculares a una dada son paralelas.



El segmento AB ⊥ BC= 90°

El segmento BC ⊥ CD= 90°

El segmento CD ⊥ DG= 90°

El segmento DG ⊥ AB= 90°

Por tanto:

AB || CD

BC || DG

Nos encontramos con:

cuatro ángulos rectos y lados paralelos dos a dos.

Luego para mantener los cuatro ángulos rectos la única solución es obtener una figura cuadrangular, un paralelogramo.

Análisis del problema

Nos encontramos ante una situación, que podemos considerar, más que como “problema clásico”, como una situación abierta que posibilite una posterior investigación sobre la relación entre lados de un polígono, sus ángulos interiores y, en este caso en particular con la consideración de que algunos de sus ángulos interiores puedan ser rectos.

No requiere demasiados conocimientos iniciales para poder comenzar, ya que éstos son básicos (polígono y sus elementos, ángulos y sus medidas, suma de los ángulos interiores…), en un desarrollo posterior pueden ser necesarios algunos conocimientos como paralelismo y perpendicularidad y sus relaciones entre ellos.

Esta actividad nos puede ayudar a que el alumnado sea capaz de analizar de forma relevante la información suministrada por el enunciado de la actividad, ordenando y organizando los atributos que nos indica mediante dibujos. Así como a modelizar mediante representaciones gráficas y evaluar como cada una de ellas nos muestra aspectos importantes de los datos suministrados, proponiendo y justificando conclusiones basadas en éstos.

En resumen, utilizaremos modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, en nuestro caso particular número de lados y máximo número de ángulos rectos posibles en un polígono, polígonos cóncavos-convexos,…

Construiremos nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas, aplicando y adaptando una variedad de estrategias para resolver problemas y, controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él. Usando el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión y comprendiendo como las ideas matemáticas se interconexionan unas con otras.

Por último, nos ayudará a formular e investigar conjeturas matemáticas, en nuestro caso, ampliando a otros tipos de polígonos.

Estándares de aprendizaje

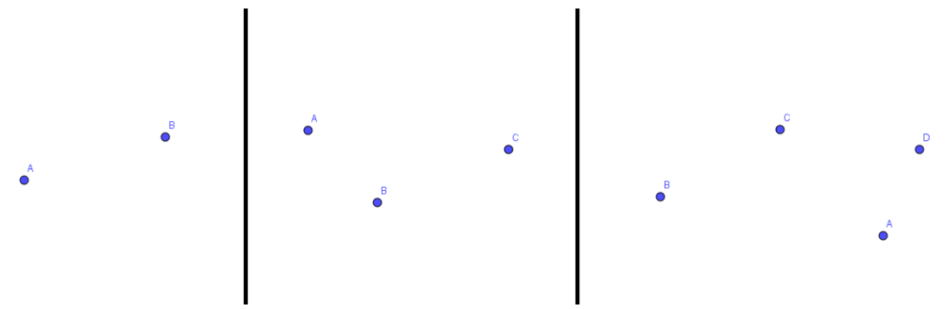
Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C2.E8 B2.C6.E1 B2.C6.E2	B3.C1.E1 B3.C2.E1		B5.C1.E3

9. Circunferencias

Traza cada una de las siguientes circunferencias en las situaciones que te planteamos:

a) Circunferencia que pasa por dos puntos.
b) Circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.
c) Circunferencia que está a la misma distancia de cuatro puntos.

Contesta de forma razonada: ¿cuántas circunferencias se pueden representar en cada uno de los casos anteriores?

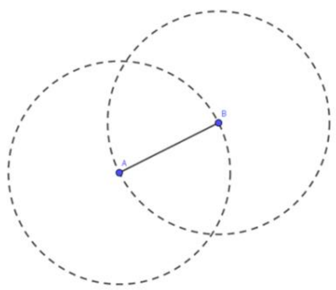


RESOLUCIÓN

A) Comenzamos por la primera situación, veamos la circunferencia que podremos trazar que pase por dos puntos.

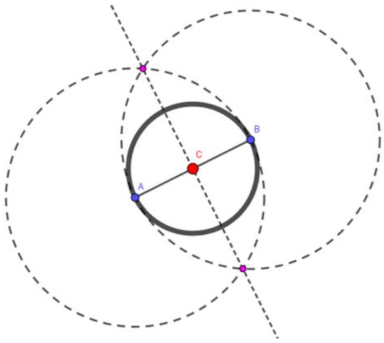
Unimos ambos puntos para construir el segmento que nos permitirá hallar gráficamente su punto medio.

Para hallar ese punto medio con el compás trazamos dos circunferencias de centros A y radio AB y otra de centro B y el mismo radio, el segmento AB.



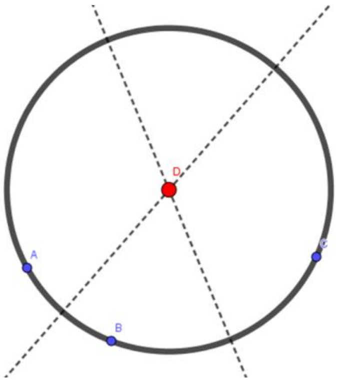
Ahora vamos a buscar los puntos donde se cortan ambas circunferencias y al unirlos construimos lo que se conoce como la mediatriz del segmento AB, que cortará al segmento AB en el punto medio C.

Con centro en ese punto C y radio AC, trazamos la circunferencia que nos piden.



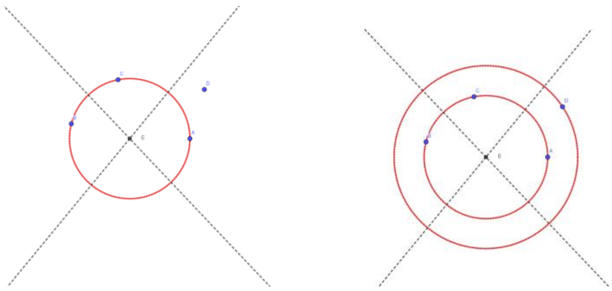
B) Vamos a la segunda situación, construir la circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.

Necesitamos encontrar el centro de la circunferencia que pasará por esos tres puntos. Para ello vamos a tener que construir las rectas perpendiculares a los segmentos AB y BC que pasan por sus puntos medios, son las que hemos llamado mediatrices de los segmentos. Para ello haremos igual que en la primera situación, siendo el punto de corte que llamaremos D, el centro de la circunferencia que estamos buscando.



C) Veamos la tercera situación, circunferencia que está a la misma distancia de cuatro puntos.

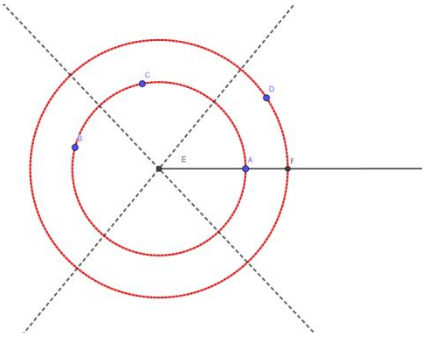
Vamos a construir una circunferencia que pase por A, B y C, como hicimos anteriormente y desde ese centro que en este caso será el punto E, trazaremos otra circunferencia de centro E que pase por D.

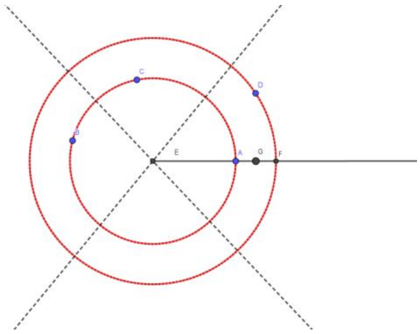


En esta situación se conseguirán dos circunferencias concéntricas con el mismo centro.

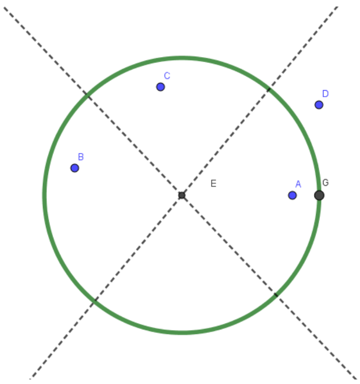
La circunferencia que estamos buscando es la que está entre las dos que hemos construido, a la misma distancia de una que de otra.

Para buscarla trazamos la semirrecta EA, o EB, o EC o ED, cualquiera de ellas nos vale. Por ejemplo, EA, que cortará a una circunferencia en A y a la otra en otro punto F. Construimos el punto medio de A y F, que definimos como punto G.

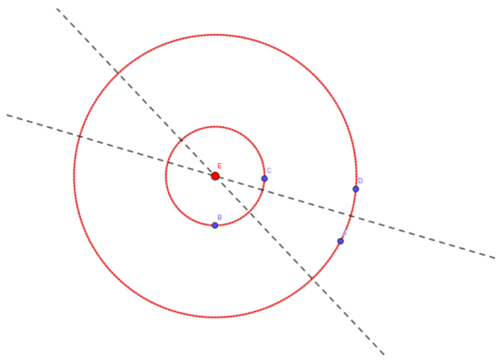




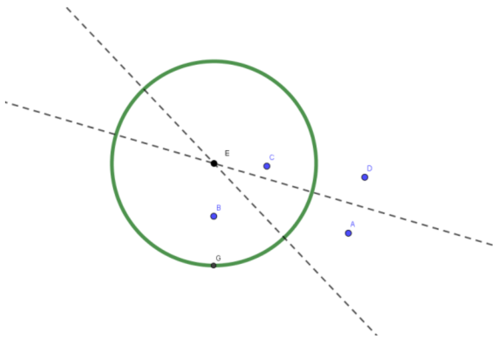
Este punto G es el que nos va a definir la circunferencia que buscamos (circunferencia de centro E y radio EG), una circunferencia que dejará tres puntos A, B y C dentro de la circunferencia, y un punto D, fuera de ella. Los cuatro puntos están a la misma distancia de la circunferencia construida.



Para este tercer apartado hay otra forma de resolver el problema. Se trata de tomar dos puntos A y D, y trazar su mediatriz. De igual manera se traza la mediatriz del segmento que define B y C. El punto de corte de ambas mediatrices será el centro de las dos circunferencias concéntricas, una que pasa por A y D, y la otra por B y C.

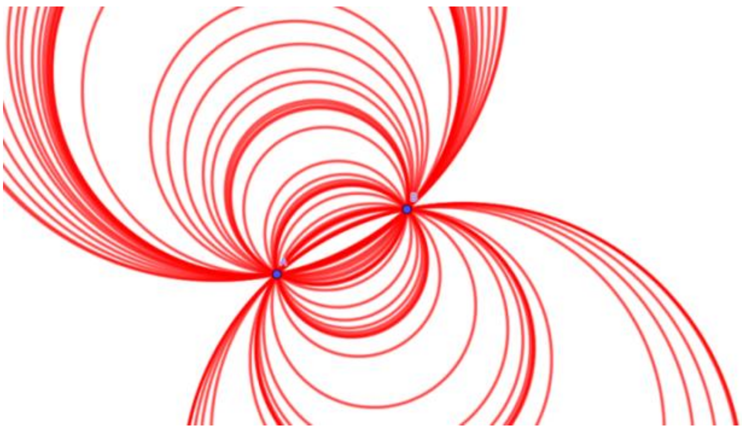


Al igual que hicimos anteriormente, se trataría de buscar la circunferencia que está entre estas dos, a la misma distancia de ambas, que dejará dos puntos dentro de ella, B y C, y otros dos puntos fuera A y D, pero ambos a la misma distancia de la circunferencia pedida.



Para acabar nos preguntan **cuántas soluciones distintas se pueden dar en cada caso**, para ello debemos vamos a ir caso a caso:

A) En el primer caso, el número de soluciones es infinito, ya que cualquier punto de la mediatriz del segmento AB nos serviría como centro de la misma, y se podría construir infinitas circunferencias.

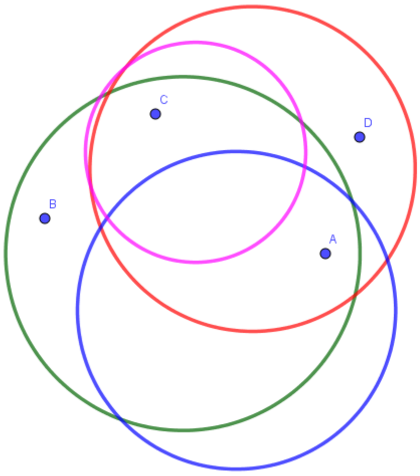


B) En el segundo caso, la solución es única, ya que, por tres puntos no alineados, como es el caso, solo pasa una única circunferencia.

C) En el tercer caso vamos a analizar por separado si tres puntos se quedan interiores y uno exterior, o si dos puntos se quedan dentro de la circunferencia y otros dos fuera de ella.

Para tres puntos interiores y uno exterior, elegimos A, B y C para construir la circunferencia base, pero esta elección podría haber sido A, C y D; o A, B y D; o también B, C y D.

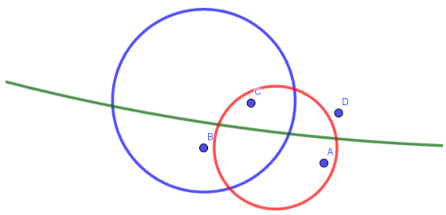
Lo cual nos lleva a la conclusión de que habría cuatro circunferencias con esas condiciones, dejando A, B, C dentro y D fuera; o dejando A, C, D dentro y B fuera; o dejando A, B, D fuera y C dentro; o dejando B, C, D fuera y A dentro de la circunferencia.



En esta segunda situación, hemos elegido dos a dos los puntos para hallar las respectivas mediatrices de los segmentos AD y BC.

Pero podríamos haber elegido los puntos para trazar las mediatrices de AB y CD, o también de AC y BD.

Esto nos lleva a poder construir tres circunferencias, la que hemos expuesto anteriormente y estas dos más.



Análisis del problema

El problema que aquí hemos planteado es un problema geométrico en el que se estudian dos de los principales lugares geométricos, que es la mediatriz de un segmento y la circunferencia. Una mediatriz es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otros dos, o también se define como la recta perpendicular al segmento que define A y B, extremos del intervalo, que pasa por su punto medio. La circunferencia se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de otro punto llamado centro.

Al combinar ambos lugares geométricos aparecen estos ejercicios de representación de circunferencias que cumplen una cierta propiedad. En este sentido, el proceso de resolución parte de conjeturar las posiciones relativas de las circunferencias en función de los puntos y mediatrices que se construyan y de recordar el hecho de que por tres puntos solo pasa la circunferencia circunscrita. Posteriormente, el alumnado debe conjeturar y valorar los hechos matemáticos usados para construir las circunferencias para realizar simulaciones y predicciones gráficas que le permitan deducir el número de soluciones posibles en cada caso.

Existen numerosas aplicaciones a este tipo de problemas. Si deseamos poner una antena que cubra a tres poblaciones, necesariamente deberemos pasar por la búsqueda del centro de una circunferencia donde situar la antena.

Si se desea crear una canal de concentración de desagües que pase a la misma distancia de cuatro casas, se tratará de buscar esas circunferencias que dejen dos casas a un lado y otras dos al otro lado del canal, o como se ha planteado, que tres casas queden a un lado, y la cuarta al otro lado del mismo.

El problema es un problema gráfico que se resuelve con instrumentos básicos de dibujo lineal como son la escuadra, el cartabón y el compás.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2. C6. E1.	B3. C1. E4.		

10. ¡A nadar!

Ada va a nadar a una piscina de 25 m de largo.

Cuando llega a la piscina saluda de lejos a su amigo Carlos que está haciendo una parada de 2 minutos en el lado opuesto de la piscina, él llevaba recorridos 10 largos.

A las 10:00 empiezan a nadar cada uno desde su lado de la piscina.

Ada nada 1500m en 40 minutos y ha adelantado a Carlos 7 veces.

Si los dos terminan a la vez, **responde de forma razonada:** ¿qué distancia ha recorrido Carlos? y ¿a qué hora empezó a nadar?

RESOLUCIÓN

La primera vez que Ada adelanta a Carlos es porque ha recorrido 25 m más que él, ya que estaban en lados opuestos de la piscina.

Las otras 6 veces que lo adelanta es que va recorriendo cada vez 50 m más (dos largos).

$$25\,m\ +\ 6\ \cdot\ 50\,m\ =\ 25\,m\ +\ 300\,m\ =\ 325\,m$$

Carlos ha recorrido 325 m menos que Ada desde que nadan juntos, es decir desde las 10:00 a las 10:40.

Por lo que Carlos habrá nadado en ese tiempo: $1500\,m - 325\,m\ =\ 1175\,m.$

Pero como Carlos llevaba 10 largos cuando llegó Ana habrá que añadirle: $10 \cdot 25\,m\ =\ 250\,m.$

La distancia total que ha recorrido Carlos será: $1175\,m\ +\ 250\,m\ =\ 1425\,m.$

Calculemos ahora en qué momento empezó Carlos a nadar.

En primer lugar, vamos a calcular a qué velocidad nada Carlos:

$$velocidad = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado} = \frac{1175\ m}{40\ min} = 29'375\ m/min$$

Calculemos ahora el tiempo que empleó en hacer los 10 largos que llevaba recorridos:

$$tiempo\ empleado = \frac{distancia\ recorrida}{velocidad} = \frac{250\ m}{29'375\ m/min} = 8{,}51\ min$$
$$\approx 8 \min\ y\ 30\ seg$$

Carlos estuvo descansando durante 2 min, por lo que cuando llegó Ada ya llevaba en la piscina: $2\,min + 8 \min y\ 30\ seg = 10 \min y\ 30\ seg$

En consecuencia, Carlos llegó a la piscina:

$$10\ h - (10 \min y\ 30\ seg) = 9\ h, 49 \min y\ 30\ seg.$$

Resumiendo: Carlos nadó una distancia de $\mathbf{1425\ m}$ y empezó a nadar a las $\mathbf{9h, 49\ min\ y\ 30seg.}$

Análisis del problema

En la primera parte del problema el alumnado tiene que emplear un pensamiento lógico para poder averiguar la distancia que nada uno más que otro, es decir, que distancia le aventaja, ya que Ada adelanta 7 veces a Carlos, pero se ha de tener en cuenta que éstos no salen del mismo lado de la piscina si no que lo hacen de lados opuestos. Pensamiento lógico que le guiará en la formulación de la situación matemáticamente y la identificación de las variables distancia y tiempo. En primer lugar, establecerá relaciones aritméticas entre las mismas a partir de la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje aritmético. Para en la segunda parte, usar las relaciones entre estas variables.

Así pues, en la segunda parte del problema se tiene que usar las fórmulas de velocidad y tiempo en un movimiento rectilíneo y uniforme que el alumnado debe conocer de cursos anteriores y que se estudian también en 2º de ESO en el área de Ciencias de la Naturaleza (sección de Física). Así mismo debe tener cuidado al operar con las unidades de tiempo (sistema sexagesimal) a la hora de realizar los cálculos con el fin de dar la solución con la mayor exactitud posible.

Resumiendo: este problema tiene para el alumnado una dificultad media a la hora de resolverlo asociada a tener que relacionar dos variables, tiempo y velocidad, y tres estrategias de resolución de la aplicación de operaciones aritméticas, de la velocidad como proporción entre distancia y tiempo, y la conversión de las unidades de tiempo.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E2. B2.C2.E6. B2.C3.E1. B2.C5.E1.			

11. La tienda del todo a múltiplo de 5

¡Qué tienda más curiosa! Todos los precios de los artículos son múltiplos de 5. Además, durante esta semana hay una oferta de 3x2 (te llevas tres artículos, pagando dos, obviamente los dos de más valor en caso de no ser iguales). Se conoce que no se acumulan promociones.

En la cola de la caja una clienta tiene una tarjeta descuento del 30% y quiere utilizarla.

Viendo su mercancía le aconsejo que se acoja a la oferta de esta semana y guarde la tarjeta descuento para otra ocasión.

¿Cuáles son todos los posibles precios de los 3 artículos elegidos por la clienta sabiendo que pagó menos de 60€ en su ticket de compra?

Razona las respuestas.

RESOLUCIÓN

Se sabe que sigue la oferta del 3x2, gracias a mi consejo, por tanto, sabemos que ha pagado entre 10 € y 55 € (la mínima compra es tres artículos de 5 €).

Analicemos todos los casos posibles:

1º) Los tres artículos tienen el mismo precio:

5-5-5 10-10-10 15-15-15 20-20-20 25-25-25

En todos ellos es mejor la oferta 3x2, puesto que solo pagaríamos un $66'6\%$ (los 2/3 del valor) y con el 30% de rebaja de la tarjeta descuento se tendría que pagar el 70%.

2º) Dos artículos con el mismo precio y éste es más alto que el del tercer artículo:

25-25-20 20-20-15 15-15-10 10-10-5

25-25-20 Con la oferta 50 € y con la tarjeta 70 % de 70 = 49 €

20-20-15 Con la oferta 40 € y con la tarjeta 70 % de 55 = 38'50 €

15-15-10 Con la oferta 30 € y con la tarjeta 70 % de 40 = 28 €

10-10-5 Con la oferta 20 € y con la tarjeta 70 % de 25 = 17'50 €

¿Tendríamos que seguir probando con otro tercer precio más bajo?

No hace falta, porque cuánto más bajo fuese el tercer precio más nos favorece el uso de la tarjeta descuento.

3º) Dos artículos con el mismo precio y éste es más bajo que el del tercer artículo:

5-5-10 10-10-15 15-15-20 20-20-25 25-25-30

5-5-10 Con la oferta 15 € y con la tarjeta 70 % de 20 = 14 €

5-5-15 Con la oferta 20 € y con la tarjeta 70 % de 25 = 17'50 €

Conforme aumenta el precio del artículo desigual, lo más favorable es la tarjeta descuento.

10-10-15 Con la oferta 25 € y con la tarjeta 70 % de 35 = 24'50 €

10-10-20 Con la oferta 30 € y con la tarjeta 70 % de 40 = 28 €

Conforme aumenta el precio del artículo desigual, lo más favorable es la tarjeta descuento.

15-15-20 Con la oferta 35 € y con la tarjeta 70 % de 50 = 35 €

En este caso como habría que pagar igual, aprovecho la oferta 3x2 y guardo la tarjeta para otra ocasión.

15-15-25 Con la oferta 40 € y con la tarjeta 70 % de 55 = 38’50 €

Pero observamos que si se aumenta el precio del artículo desigual es más favorable el pago con la tarjeta descuento.

20-20-25 Con la oferta 45 € y con la tarjeta 70 % de 65 = 45’50 €

En este caso es más ventajoso aprovechar la oferta 3x2.

20-20-30 Con la oferta 50 € y con la tarjeta 70 % de 70 = 49 €

Como se observa si se aumenta el precio del artículo desigual es más favorable el pago con la tarjeta descuento.

25-25-30 Con la oferta 55 € y con la tarjeta 70 % de 80 = 56 €

En este caso es más ventajoso aprovechar la oferta 3x2.

4º) Los tres artículos tienen precios distintos:

Probemos con los artículos de precios más altos y a continuación seguiremos probando con los artículos de un precio inferior.

30-25-20 Con la oferta 55 y con la tarjeta 70 % de 75 = 52’50 €

30-25-15 Con la oferta 55 y con la tarjeta 70 % de 70 = 49 €

Como se puede apreciar al bajar el precio menor se hace más ventajoso el uso de la tarjeta descuento.

30-20-15 Con la oferta 50 € y con la tarjeta 70 % de 65 = 45’50 €

Si bajamos el precio menor observamos de nuevo que es mucho más ventajoso el uso de la tarjeta descuento y eso mismo va a suceder en los demás casos.

30-20-10 Con la oferta 50 € y con la tarjeta 70 % de 60 = 42 €

30-15-10 Con la oferta 45 € y con la tarjeta 70 % de 55 = 38’50 €

30-10-5 Con la oferta 40 € y con la tarjeta 70 % de 45 = 31’50 €

25-20-15 Con la oferta 45 € y con la tarjeta 70 % de 60 = 42 €

25-15-10 Con la oferta 40 € y con la tarjeta 70 % de 50 = 35 €

25-10-5   Con la oferta 35 € y con la tarjeta 70 % de 40 = 28 €

20-15-10 Con la oferta 35 € y con la tarjeta 70 % de 45 = 31’50 €

20-10-5   Con la oferta 30 € y con la tarjeta 70 % de 35 = 24’50 €

15-10-5   Con la oferta 25 € y con la tarjeta 70 % de 30 = 21 €

Los posibles precios de los artículos comprados por la clienta son:

25-25-25 **20-20-20** **15-15-15** **10-10-10** **5-5-5** **30-25-25** **25-20-20** **y** **20-15-15** (si se guarda el uso de la tarjeta para otra ocasión ya que con la oferta le costaría igual).

Análisis del problema

La dificultad del problema para el alumnado radica en que hay que ir probando con todas las combinaciones de precios posibles, aunque si se es perspicaz se dará cuenta que hay gran cantidad de combinaciones que no son necesarias realizar ya que según van aumentando o disminuyendo los precios, según los casos, resulta más ventajoso el uso de la tarjeta descuento que la oferta ofrecida por la tienda.

Por ello, aunque a nivel conceptual solo utiliza conocimientos de números naturales, decimales y su escritura porcentual, el problema permite aplicar varias estrategias de formulación y empleo de estos conceptos.

A nivel de formulación de las situaciones matemáticamente el alumnado debe identificar los aspectos del problema asociados a un contexto de compra venta. A continuación, el alumnado debe establecer conjeturas sobre todos los posibles casos para simplificar el problema y hacer más fácil su cálculo. Finalmente, el alumnado debe interpretar las soluciones matemáticas obtenidas en el contexto de compra y venta, que le permitirá comprender los límites que supone la condición “guarde la tarjeta descuento para otra ocasión” a la hora de indicar las soluciones finales.

En este problema se puede aumentar o reducir la dificultad de su resolución variando el importe total de la compra realizada por la clienta. A nivel didáctico, la posibilidad de aumentar o reducir la dificultad es una oportunidad para que el alumnado reflexione sobre los problemas resueltos y los procesos desarrollados, valorando la potencia y sencillez de las ideas claves que han guiado la resolución, aprendiendo para situaciones futuras similares. O, proponerles que planteen ellos y ellas nuevos precios, estableciendo casos particulares de la situación.

Estándares de aprendizaje

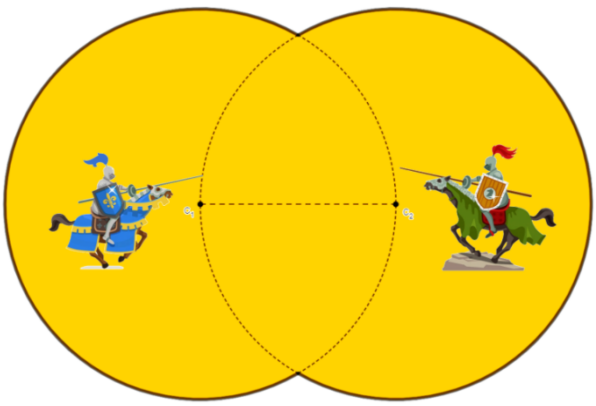
Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E2. B2.C1.E3. B2.C3.E1. B2.C4.E1. B2.C4.E2. B2.C5.E1.			

12. La batalla final

La grabación de la batalla final de la serie de éxito *Juego de Mates* va a ser grabada en Ciudad Épsilon, en Matelandia. Dicha batalla, que enfrentará a los habitantes de Geometralia y Derivando del Rey, trascurrirá en un coso como el que muestra la figura, formado por dos círculos superpuestos de radio 136,64 metros.

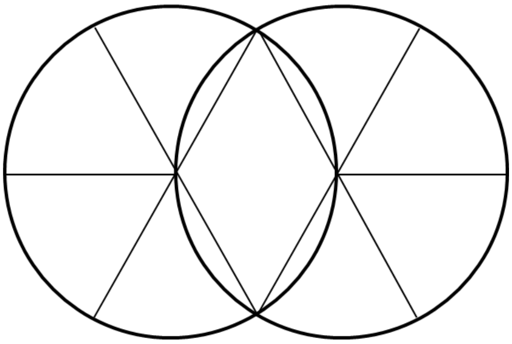
a) ¿Cuál es el perímetro del recinto de la batalla final?
b) ¿Qué porcentaje del área del círculo de la izquierda es solapada por el círculo de la derecha?

Razona las respuestas.



RESOLUCIÓN

Realicemos, en primer lugar, la siguiente construcción que nos ayudará a hallar el perímetro de nuestra figura:

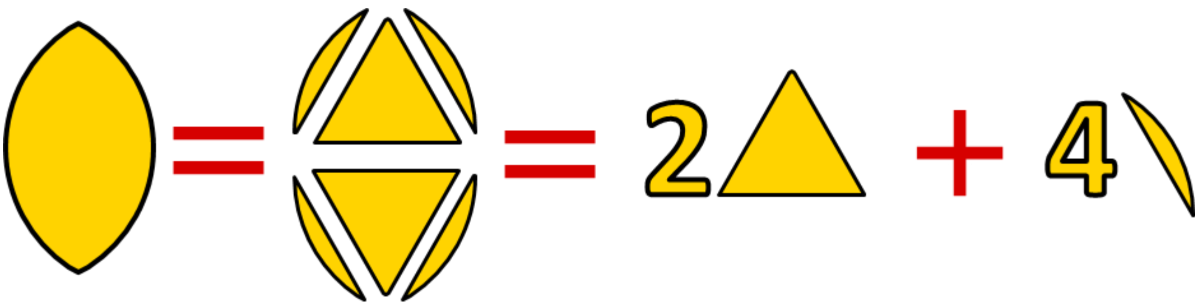


Como podemos apreciar, el perímetro de la figura está formado por ocho arcos de circunferencia cuyo ángulo central mide 60°.

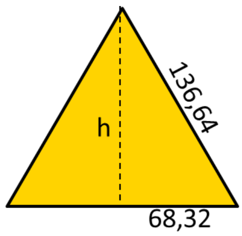
Por lo tanto, la longitud de la curva es la misma que los ocho sextos de una de las circunferencias que lo forman, ya que $360° : 60° = 6$. Así:

$$P = \frac{8}{6} \cdot L = \frac{8}{6} \cdot 2\pi r = \frac{8}{6} \cdot 2 \cdot 3'14 \cdot 136'64 = 1.144'71\ m$$

Para hallar el porcentaje del área del círculo de la izquierda es solapada por el círculo de la derecha, deberemos hallar cuánto mide esta área. Descompongamos la figura y hallemos la superficie de cada parte:



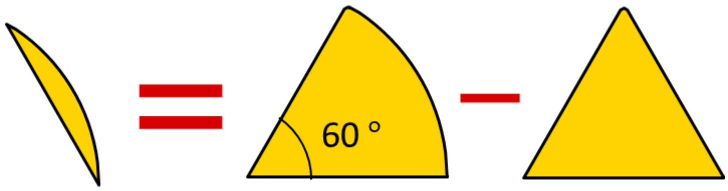
Triángulo: Usaremos el Teorema de Pitágoras para hallar la altura del triángulo, para posteriormente hallar su área.



$$h = \sqrt{136'64^2 - 68'32^2} = 118'334\ m$$

$$A_{triángulo} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{136'64 \cdot 118'334}{2} = 8.084'58\ m^2$$

Segmento circular: Se tiene que:



Por lo tanto:

$$A_{segmento} = \frac{\pi r^2}{6} - A_{triángulo} = \frac{3'1416 \cdot 136'64^2}{6} - 8084'58 = 1691'27\ m^2$$

Área solapada:

$$A_{solapada} = 2 \cdot A_{triángulo} + 4 \cdot A_{sector} = 22934'24\ m^2.$$

Y el porcentaje solapado del círculo es:

$$\frac{A_{solapada}}{A_{círculo}} = \frac{22934'24}{3'1416 \cdot 136'64^2} = 0'3910 = 39'10\%.$$

Análisis del problema

El proceso de resolución del problema parte de formular matemáticamente la situación determinada a partir de la intersección de las dos circunferencias y simplificarla a partir de representar en la misma los sectores circulares correspondientes.

Por una parte, una de las principales dificultades del problema reside en el hecho del cálculo de los ángulos que forman los centros de las circunferencias con los puntos de intersección de las mismas. La deducción de la amplitud de dichos ángulos se basa en la construcción con regla y compás del hexágono regular.

Por otra parte, la descomposición de las regiones de las que hay que hallar el área puede entrañar algunos problemas, ya que en la formulación matemática de los elementos que intervienen supone la descomposición del sector circular en un triángulo rectángulo y el segmento circular correspondiente. Así como el cálculo del área de un triángulo equilátero conociendo únicamente su lado, debe emplearse el Teorema de Pitágoras.

Finalmente, para calcular el porcentaje solapado debe emplearse la razón de proporción entre el área solapada y el área del círculo.

Por lo tanto, podemos establecer la complejidad del problema como conexión, en dos sentidos: a) la conexión de los diferentes elementos producto de su descomposición en figuras simples a las que calcular el perímetro y área; b) la conexión entre elementos geométricos y numéricos a partir de la razón de proporción de sus áreas expresadas mediante porcentajes.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C5.E1.	B3.C1.E1. B3.C1.E4. B3.C2.E1. B3.C3.E2.		

13. Cubos de basura

Rosa saca la basura orgánica todos los días de lunes a viernes, los envases y plásticos los lunes, miércoles y viernes. Tira los vidrios cada 13 días. Saca el papel y el cartón una vez a la semana, pero si una semana lo hace en martes la siguiente en miércoles y la siguiente en jueves y así sucesivamente.

Como en su pueblo los sábados y los domingos no se puede sacar la basura, si le toca en uno de esos días, la saca el lunes siguiente.

Rosa, el pasado lunes 2 de mayo de 2016, sacó todas las basuras a la vez, ¿cuándo volvería a sacar otra vez las cuatro?

Cuando acabe el 2016 ¿cuántas veces habrá sacado las cuatro a la vez este año?

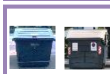
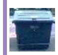
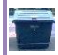
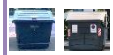
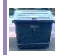
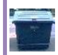
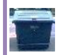
RESOLUCIÓN

	MATERIA ORGÁNICA	Todos los días de lunes a viernes
	ENVASES Y PLÁSTICOS	Todos los lunes, miércoles y viernes
	VIDRIOS	Cada trece días

PAPEL Y CARTÓN

Cada semana un día distinto.

La próxima en martes, la siguiente en miércoles, luego en jueves, después en viernes y la siguiente sería en sábado, por lo que pasaría al lunes de la siguiente semana.

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1ª semana					
2ª semana					
3ª semana					
4ª semana					
5ª semana					
6ª semana					
7ª semana					

Coincidirán en un lunes, ya que todos los lunes saca la orgánica y los envases y plásticos y cada 2 lunes los vidrios.

El lunes de la semana 7ª sacaría los cartones del sábado de la semana 6ª. Por tanto, coincidirán todas cada 6 lunes.

La próxima vez que Rosa sacaría todas las basuras a la vez sería el lunes 13 de junio de 2016.

Como un año tiene 52 semanas y unos días. Según en qué semana ocurra la primera vez coincidirán 8 ó 9 veces en un año.

Por ejemplo, si coinciden en la 1ª semana volverán a coincidir en las semanas 7ª, 13ª, 19ª, 25ª, 31ª, 43ª y 49ª. En total 9 veces. Pero si la primera vez es la semana 5ª ó 6ª, sólo coincidirán 8 veces.

Al finalizar el año 2016 habrá sacado las cuatro basuras a la vez 8 veces, ya que la 1ª vez que coincidió fue el 6º lunes del año (8 de febrero).

Análisis del problema

El objetivo del problema es matematizar una situación cotidiana para darle respuesta a las dos preguntas que guían la formulación y empleo de procesos matemáticos. Para ello se inicia su resolución a partir de la identificación de la variable principal que es el día de la semana y su representación mediante una tabla. Dicha tabla que permite inicialmente organizar la información, posteriormente permite identificar las regularidades de cada uno de los productos a reciclar. Para poder determinar que el patrón es cada seis semanas. Este patrón se aplica en la interpretación del número de veces en un año que procede a reciclar los cuatro tipos de materiales y concluir sobre el día que coincidió.

A nivel didáctico, el problema aporta una oportunidad de organizar la información mediante tablas y construir el significado gráfico de regularidades para introducir progresiones aritméticas.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E3. B2.C6.E1.			

14. Visita al museo

Un grupo de 42 olímpicos desean ir a la Casa de la Ciencia, para ello piden información sobre los precios y obtienen la siguiente información:

Nota: Además les informan que por cada 15 entradas compradas les regalan una.

Nº de entradas	Precio
Entradas individuales (máximo 60)	
1 entrada	25 €
2 entradas	Descuento de un 2 % del total
3 entradas	Descuento de un 3 % del total
n entradas	Descuento de un n % del total
Ofertas de grupo	
10 entradas	220 €
15 entradas	315 €
20 entradas	410 €

De todas las formas posibles de comprar las entradas para los 42 olímpicos, ¿cuál sería la más económica para el grupo?

Razona la respuesta.

RESOLUCIÓN

Comenzamos analizando la compra de las entradas sin considerar los descuentos.

De las 42 entradas podremos hacer dos grupos de 15, por lo que tendríamos dos entradas de regalo. En este caso pagaríamos únicamente 40 entradas, que a 25 € cada una harían un total de 1000 euros.

Si utilizamos los descuentos de grupo, podríamos comprar dos lotes de 20 entradas, y dos entradas individuales.

En este caso pagaríamos:

$$2 \cdot 410 + 2 \cdot 25 = 820 + 50 = 870 \text{ €}.$$

Veamos ahora si compramos las 42 entradas y pedimos el 42 % de descuento.

En este caso tendríamos que pagar:

$$42 \cdot 25 - 0'42 \cdot (42 \cdot 25) = 0'58 \cdot 42 \cdot 25 = 609 \text{ €}.$$

Realicemos una tabla de las cantidades a pagar, teniendo en cuenta los descuentos que podemos obtener comprando las entradas con la oferta del porcentaje de descuento aplicado al número de entradas.

La fórmula para el cálculo del precio para n entradas sería la siguiente:

$$n \quad \Rightarrow \; 25n - \frac{25n^2}{100}$$

Entradas	Precio Unidad	Total
1	24’75	24’75
2	24’5	49
3	24’25	72’75
4	24	96
5	23’75	118’75
6	23’5	141
7	23’25	162’75
8	23	184
9	22’75	204’75
10	22’5	225
11	22’25	244’75
12	22	264
13	21’75	282’75
14	21’5	301
15	21’25	318’75

Entradas	Precio Unidad	Total
31	17’25	534’75
32	17	544
33	16’75	552’75
34	16’5	561
35	16’25	568’75
36	16	576
37	15’75	582’75
38	15’5	589
39	15’25	594’75
40	15	600
41	14’75	604’75
42	14’5	609
43	14’25	612’75
44	14	616
45	13’75	618’75

16	21	336
17	20’75	352’75
18	20’5	369
19	20’25	384’75
20	20	400
21	19’75	414’75
22	19’5	429
23	19’25	442’75
24	19	456
25	18’75	468’75
26	18’5	481
27	18’25	492’75
28	18	504
29	17’75	514’75
30	17’5	525

46	13’5	621
47	13’25	622’75
48	13	624
49	12’75	624’75
50	12’5	625
51	12’25	624’75
52	12	624
53	11’75	622’75
54	11’5	621
55	11’25	618’75
56	11	616
57	10’75	612’75
58	10’5	609
59	10’25	604’75
60	10	600

Si observamos la tabla, nos damos cuenta que comprar una entrada de grupo para 10 personas nos sale más económica que comprar las 10 entradas individuales con el 10 % de descuento, 5 € más barata. Aun así, saldría más cara que la solución del problema.

Analicemos ahora al comprar entradas para un grupo de 15 personas (315 €) y si la compramos 15 individuales (318’75 €) vemos que de este modo sale 3’75 € más caras, pero aquí debemos tener en cuenta que nos regalarían una entrada. En cualquier caso, siempre saldrían más caras que la solución del problema.

Sin embargo, si compramos 20 entradas y les pedimos que nos apliquen el descuento, nos saldrían 10 € más económica que si las compramos en grupo. Aun así, saldrían más caras que la solución del problema.

La mejor opción será comprar 40 entradas, a las que nos aplicarían un 40 % de descuento, con lo que solo habría que pagar un total de 600 €, y sabiendo que, al haber comprado dos lotes de 15 entradas, nos regalarían las 2 entradas, tendríamos las 42 entradas necesaria para el grupo de olímpicos.

Otra opción sería:

Comprar 60 entradas con un 60 % de descuento, lo cual nos llevaría a que nos regalaran 4 entradas y obtendríamos por 600 euros un total de 64 entradas para el museo.

Análisis del problema

El cálculo de porcentajes, los precios de grupos, la conveniencia o no de una determinada oferta…, son elementos con los que se convive día a día.

Este problema es aplicable siempre a la vida real. En numerosas ocasiones nos preguntamos cuál es la mejor opción al comprar varios artículos. Los supermercados están repletos de ofertas del tipo 3x2 o llévese 3 y le hacemos un 20 % de descuento, y otras múltiples variedades de opciones.

Hay combinaciones de muchos tipos. En los tiempos que nos ha tocado vivir este 2020 se ha multiplicado en número de ventas de artículos por internet. En esas opciones podremos encontrar situaciones como la que se describe a continuación.

Un proveedor publicita lo siguiente: si se compran dos artículos se hará un porcentaje de descuento, el que sea, al total de la compra. No así para más de dos artículos iguales. Sin embargo, al comprar los tres artículos iguales, no se cobrarían los gastos de envío, porque superaría el mínimo exigido por el proveedor.

No es fácil tomar decisiones cuando se presentan varias opciones, como no es fácil para el grupo de olímpicos decidir cómo realizar la compra de entradas.

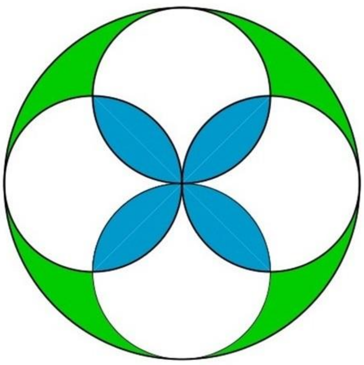
Por lo tanto, el problema planteado permite que el alumnado establezca conexiones entre un problema del mundo real como es la compra y venta, para aplicar diferentes estrategias para encontrar las soluciones. Finalmente, el alumnado debe interpretar las diferentes soluciones matemáticas del problema y tomar la decisión de cuál de ellas es la adecuada y razonable considerando la opción más económica.

Estándares de aprendizaje

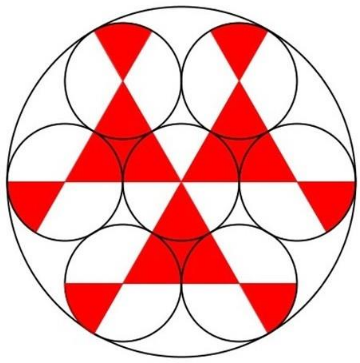
Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E3. B2.C4.E2. B2.C5.E1. B2.C6.E2.			

15. Rosetas

En el próximo aniversario de su fundación, la Junta Directiva del Real Club Recreativo Thales quiere adornar la fachada con dos tipos de rosetas, que están inscritas en circunferencias de 3 cm de radio, como las que aparecen dibujadas en las figuras adjuntas:



ROSETA 1



ROSETA 2

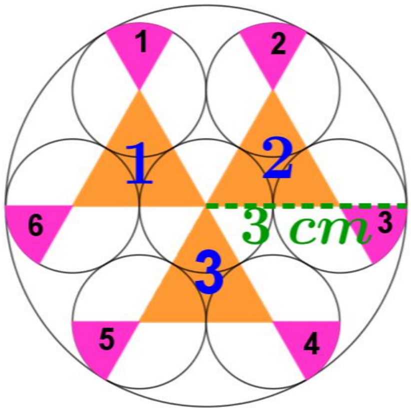
Si se han utilizado $10'27$ cm^2 de azulejos, entre azul y verde, en la primera roseta.

¿Cuál de las zonas coloreadas en ambas rosetas saldría más económica si el precio es el mismo sea cual sea el color?

Razona la respuesta.

RESOLUCIÓN

Tenemos que calcular el área de los azulejos coloreados en la roseta 2. Para ello la dividimos del siguiente modo:



Observamos que obtenemos tres triángulos equiláteros de lado 2 cm y seis sectores circulares de ángulo $60°$ y radio 1 cm.

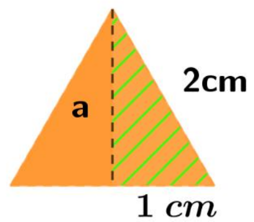
Para calcular el área de los triángulos hay que calcular la altura de los mismos. Lo haremos con Pitágoras:

$$2^2 = a^2 + 1^2$$

$$4 = a^2 + 1$$

$$a^2 = 3$$

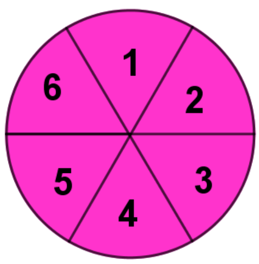
$$a = \sqrt{3} \approx 1'73\ cm$$



Área de los triángulos:

$$A = 3 \cdot \frac{b \cdot a}{2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 1'73}{2} = 5'19\ cm^2$$

Para el área de los seis sectores puedo considerar que si junto los seis se obtiene un círculo de radio 1 cm , ya que el ángulo de cada uno es $60°$ y $6 \cdot 60° = 360°$.



Su área es de:

$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 1^2 \approx 3'14\ cm^2$$

Finalmente, el área total será de:

$$A = 5'19 + 3'14 = 8'33\ cm^2$$

Sería más económica la zona coloreada de la roseta 2 pues tiene menor superficie $(10'27\ cm^2\ >\ 8'34\ cm^2)$.

Análisis del problema

El proceso de resolución del problema parte de formular matemáticamente la situación. La clave está en descomponer y juntar las zonas coloreadas para hacer la resolución más sencilla. Una vez teniendo claras las figuras en que se descompone la resolución es sencilla. El alumnado debe aplicar las fórmulas elementales de cálculo de las áreas de circunferencias y de triángulos equiláteros. Para calcular dicha área del triángulo equilátero debe aplicar el Teorema de Pitágoras.

Se enmarcaría dentro de segundo de la ESO; pues, aunque el cálculo de áreas se aborda sin problema en 1º de ESO, el conocimiento y aplicación del teorema de Pitágoras es un criterio correspondiente al segundo curso.

Por lo tanto, podemos establecer un nivel mínimo de complexidad debido a la necesidad de conectar los diferentes elementos producto de la descomposición de los mosaicos en una circunferencia y triángulos equiláteros y la conexión entre la altura del triángulo a calcular y el cateto a determinar mediante el teorema de Pitágoras.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
	B3.C1.E1. B3.C2.E1. B3.C3.E2.		

16. Números

A Isa y Pepe le siguen gustando los números y se proponen uno al otro los siguientes cálculos:

Isa: "¿Cuál es el resultado de

$(2^{2016} - 2^{2015} + 2^{2014} - 2^{2013} + 2^{2012} - 2^{2011} + 2^{2010} - 2^{2009}) : 2^{2008}$?"

Pepe: "Como sabes que la suma de los 59 primeros números naturales es 1770, ¿cuál es el resultado de $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - \cdots - 58^2 + 59^2$?"

Estamos convencidos que tardaréis menos tiempo vosotros en resolverlos. ¡Ánimo y da **de forma razonada** las respuestas correctas!

RESOLUCIÓN

Para responder a la primera pregunta tendremos que cuenta que para dividir potencias de igual base ésta se deja igual y se restan los exponentes junto que si 2^{2008} está dividiendo a varios sumandos divide a cada uno de ellos.

Así, la operación:

$$(2^{2016}-2^{2015}+2^{2014}-2^{2013}+2^{2012}-2^{2011}+2^{2010}-2^{2009}):2^{2008}$$

queda de la forma:

$$2^8-2^7+2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2$$

Estas potencias ya son más fáciles de operar. Si opero directamente quedaría:

$$256-128+64-32+16-8+4-2=170$$

Observar que esta operación también la podría haber calculado sacando factores comunes de la forma:

$$2^7(2-1)+2^5(2-1)+2^3(2-1)+2(2-1)=$$

$$2^7+2^5+2^3+2=2\cdot(2^6+2^4+2^2+1)$$

$$=2\cdot(64+16+4+1)=2\cdot 85=170$$

La segunda pregunta es más complicada y para resolverlo utilizaremos la identidad notable que dice que:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Para aplicarla reordenaré la operación:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-\cdots-58^2+59^2$$

del siguiente modo:

$$1^2+3^2-2^2+5^2-4^2+7^2-6^2-\cdots+59^2-58^2=$$

$$=1+(3+2)(3-2)+(5+4)(5-4)+\cdots+(59+58)(59-58)=$$

$$=1+(2+3)\cdot(1)+(4+5)\cdot(1)+(6+7)\cdot(1)+\cdots+(58+59)\cdot(1)=$$

$$=1+2+3+4+5+6+7+\cdots+58+59=1770$$

Tal y como dice el enunciado.

Análisis del problema

Este es un problema con una primera parte sencilla, donde los conocimientos exigidos son de operaciones con potencias y una segunda parte más exigente.

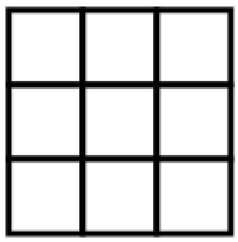
En esta segunda parte hay que caer en que se puede utilizar la identidad notable indicada en la resolución, para simplificar los cálculos y expresar la operación de manera que pueda utilizar el dato suministrado por el enunciado. Es un problema que por la dificultad del segundo apartado se ubicaría en 2º ESO, donde se estudian por vez primera las identidades notables.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E2. B2.C6.E1. B2.C6.E2.			

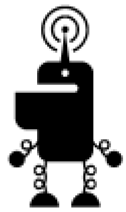
17. El robot

En la empresa del profesor Thayton se fabrican 3 clases de robots, los alfa (α), los beta (β) y los gamma (γ) y de cada uno de ellos existen tres modelos, el 1, el 2 y el 3. En la empresa los tienen almacenados, sin mezclar, en nueve habitaciones, como la que se muestra en el plano de la figura.



El profesor Thayton tiene escrito en su cuaderno de anotaciones los siguientes datos:

- En cada fila y en cada columna hay un modelo 1, 2 y 3.
- Todos los modelos 2 están en una diagonal del plano.
- Todas las habitaciones donde están los robots de la clase alfa tienen al menos en común un punto de contacto.



- Las habitaciones de los robots de la clase gamma no están en contacto unas con otras.
- La clase beta tiene dos modelos de robots en dos habitaciones que están en contacto y el otro está en una habitación que no tiene nada en común con las otras.
- A la derecha de la habitación del modelo 2 de la clase gamma se encuentra la habitación del modelo 1 de la clase beta.

Coloca **de forma razonada** cada modelo de robot en su habitación correspondiente.

RESOLUCIÓN

Vamos a comenzar analizando cada una de las anotaciones del profesor Thayton.

Empecemos con la segunda condición: “Todos los modelos 2 están en una diagonal del plano“; esto nos lleva a la siguiente situación:

α_2 β_2 γ_2		α_2 β_2 γ_2
	α_2 β_2 γ_2	
α_2 β_2 γ_2		α_2 β_2 γ_2

Ahora nos fijamos en la sexta anotación del profesor: “A la derecha de la habitación del modelo 2 de la clase gamma se encuentra la habitación del modelo 1 de la clase beta”; esto nos lleva a que a eliminar de las casillas de la última columna el modelo γ_2:

$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$		$\alpha_2\ \beta_2$
	$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$	
$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$		$\alpha_2\ \beta_2$

Ahora toca fijarnos en la cuarta anotación del profesor que nos dice: "Las habitaciones de los robots de la clase gamma no están en contacto unas con otras"; en consecuencia, el robot modelo γ_2 no puede estar en la casilla central, ya que esta habitación está en contacto con las otras ocho habitaciones, siendo esta la situación en la que nos encontramos:

$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$		$\alpha_2\ \beta_2$
	$\alpha_2\ \beta_2$	
$\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$		$\alpha_2\ \beta_2$

Esto nos lleva a dos situaciones posibles para el modelo γ_2:

γ_2		$\alpha_2\ \beta_2$
	$\alpha_2\ \beta_2$	
$\alpha_2\ \beta_2$		$\alpha_2\ \beta_2$

$\alpha_2\ \beta_2$		$\alpha_2\ \beta_2$
	$\alpha_2\ \beta_2$	
γ_2		$\alpha_2\ \beta_2$

Vamos a suponer que el modelo γ_2 se encuentra situado en la parte superior izquierda, esto nos llevaría según la sexta anotación del profesor: "A la derecha de la habitación del modelo 2 de la clase gamma se encuentra la habitación del modelo 1 de la clase beta"; a situar el modelo β_1 a su derecha, y a eliminar los modelos α_2 y β_2 de la otra diagonal, siendo la situación en estos momentos la siguiente:

γ_2	β_1	
	$\alpha_2\ \beta_2$	
		$\alpha_2\ \beta_2$

Si atendemos a la primera de las anotaciones del profesor, a saber: “En cada fila y en cada columna hay un modelo 1, 2 y 3”; podremos saber el número del modelo que corresponderá a cada una de las casillas:

γ_2	β_1	Modelo 3
Modelo 3	$\alpha_2\ \beta_2$	Modelo 1
Modelo 1	Modelo 3	$\alpha_2\ \beta_2$

Volviendo a la cuarta anotación del profesor en la que nos dice que los modelos de la clase γ, no se encuentran en contacto, nos lleva a una única posición para los modelos γ_1 y el modelo γ_3 en las habitaciones de las “esquinas”, ya que cualquier otra posición nos llevaría a que en algún momento algunos modelos γ estarían en contacto. Esta es la situación en la que nos encontraríamos:

γ_2	β_1	γ_3
Modelo 3	$\alpha_2\ \beta_2$	Modelo 1
γ_1	Modelo 3	$\alpha_2\ \beta_2$

Toca repasar la quinta anotación del profesor Thayton que nos dice: “La clase beta tiene dos modelos de robots en dos habitaciones que están en contacto y el otro está en una habitación que no tiene nada en común con las otras". Esto nos lleva a que en la casilla central no puede haber ningún modelo β", lo que nos obliga a colocar el modelo α_2 en la casilla central y el modelo β_2 en la esquina inferior derecha. Así está nuestra solución parcial:

γ_2	β_1	γ_3
Modelo 3	α_2	Modelo 1
γ_1	Modelo 3	β_2

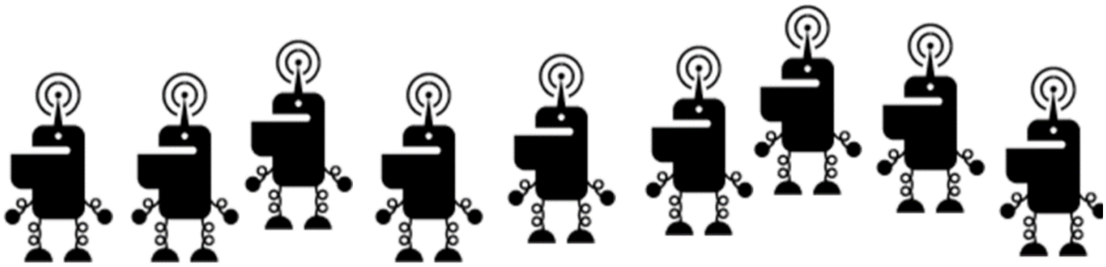
Nos quedan solo tres modelos de robots por colocar: α_1, que está claro donde lo colocaríamos, y los modelos α_3 y β_3. Para poder decidir dónde irán cada uno de estos dos últimos modelos veamos la tercera anotación del profesor: "Todas las habitaciones donde están los robots de la clase alfa tienen al menos en común un punto de contacto"; en esta circunstancia, si colocáramos el modelo α_3 en la segunda fila dejaríamos a α_3 y al modelo α_1 sin ningún punto de contacto, lo cual nos obliga a colocarlo en la tercera fila entre los modelos γ_1 y β_2. Hemos encontrado la solución que cumple las seis anotaciones del profesor Thayton.

γ_2	β_1	γ_3
β_3	α_2	α_1
γ_1	α_3	β_2

Si hubiésemos tomado la opción de colocar el modelo γ_2, en la parte inferior izquierda, en lugar de la parte superior, y siguiendo el mismo razonamiento que hemos hecho hasta completar el cuadro con los robots colocados en sus habitaciones correspondientes, habríamos conseguido esta otra situación:

γ_1	α_3	β_2
β_3	α_2	α_1
γ_2	β_1	γ_3

Si comparamos ambas soluciones, veremos que son simétricas, la primera fila se intercambia con la tercera, permaneciendo la segunda fila invariable. ¿Es o no es la misma solución?



Análisis del problema

Se trata de un problema de lógica en el que se exponen algunas de las anotaciones matemáticas como son los subíndices. También se plantea el uso de las letras del alfabeto griego, que generalmente se usan en ángulos, pero que para un problema de "robótica" está perfectamente justificado.

Este tipo de problemas pone de manifiesto una de las capacidades fundamentales de una mente matemática, como es una mente estructurada.

Cuando se les plantea a los alumnos la resolución de problemas, se les suele insistir en importancia de la lectura del problema. Un problema se debe leer tantas veces como sean necesarias. En este tipo de problemas de lógica en la que los enunciados nos van marcando las soluciones parciales, la lectura del mismo es imprescindible, y más de una vez, y más de dos veces.

Al finalizar estos problemas siempre se debe hacer un recuento de las diferentes condiciones del problema para asegurarnos que se cumplen todas. Son problemas matemáticos y a su vez problemas para cualquier mente pensante.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C2.E1.	B3.C5.E1.		B5.C1.E3.

18. Guardando monedas

Dª Elvira Guardalotodo decide conservar toda su fortuna repartiéndola en los siete cofres que posee.

En el primer cofre guarda los 2/3 del total de sus monedas; en el segundo cofre mete los 2/3 del resto y así sucesivamente hasta el séptimo cofre. Cuando hubo terminado le quedaba a Dª Elvira en las manos una única moneda que se la guardó en su monedero.

¿Cuál es el total de monedas que compone la fortuna de Dª Elvira Guardalotodo?

¿Cuántas monedas ha guardado en cada cofre?

Razona tus respuestas.

RESOLUCIÓN

Empecemos calculando cuántas monedas ha ido guardando en cada cofre y para ello comenzaremos por el último cofre, es decir, el séptimo.

Dª Elvira metió en su monedero 1 moneda que le sobraba y esta moneda era 1/3 de lo que tenía antes de guardar en el 7º cofre, por lo que es fácil deducir cuántas guardó en este cofre y cuántas tenía antes de guardar.

Efectivamente **guardó 2 monedas en el 7º cofre** (como 1/3 es 1, los 2/3 son 2) y antes tenía 3 monedas.

Como después de guardar las monedas en el 6º cofre le quedaban 3 monedas a Dª Elvira, quiere esto decir que éstas sería 1/3 de lo que tenía antes de guardarlas, de aquí se deduce fácilmente cuál era el número de monedas que introduce en el 6º cofre y cuántas tenía antes.

Con toda certeza habrá deducido que **en el 6º cofre introdujo 6 monedas** (porque si 1/3 son 3, los 2/3 serán 6) y que antes de hacerlo tenía 9 monedas.

Estas 9 monedas son las que le sobraban después de haber guardado las del 5º cofre y que son 1/3 de las que tenía antes de guardarlas, por lo que rápidamente deducimos cuántas tenía antes y cuántas se guardaron en este cofre.

Fácilmente habrá averiguado que **en el 5º cofre guardó 18 monedas** (ya que, si 1/3 son 9, los 2/3 serían 18) y antes de guardarla disponía de 27 monedas.

Siguiendo con el mismo razonamiento se puede ir calculando cuántas monedas hay en el resto de los cofres.

En el 4º cofre metió 54 monedas (porque si 1/3 son 27, los 2/3 serán 54) y antes disponía de 81 monedas.

Dentro del 3º cofre reservó 162 monedas (ya que, si 1/3 son 81, los 2/3 serían 162) y antes poseía 243 monedas.

En el interior de 2º cofre introdujo 486 monedas (porque si 1/3 son 243, los 2/3 serán 486) y antes de introducirla tenía 729 monedas.

Y **en el 1º cofre guardó 1458 monedas** (ya que, si 1/3 son 729, los 2/3 sería 1458).

Ahora averigüemos cuál es el total de monedas que constituye la fortuna de Dª Elvira Guardalotodo.

Lo podemos calcular de varias formas:

- Sumando a la moneda que le sobró las que se han guardado en cada cofre,

$$1 + 2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 = \boldsymbol{2187\,monedas}.$$

- Y también, si 1458 monedas son los 2/3 del total de la fortuna, entonces ésta estará formada por $1458 \cdot 3 : 2 = \mathbf{2187\ monedas.}$

Análisis del problema

Para resolver un problema se puede utilizar múltiples métodos o estrategias; una de ellas es el estudio del mismo de atrás hacia adelante y partiendo de lo que nos queda al final llegar a lo que teníamos al inicio. Es así como hemos abordado la resolución de este problema.

El problema "Guardando monedas" está basado en el problema de los ladrillos de Robert Recorde, creador del signo (∞) con el que actualmente representamos infinito, y a lo largo del tiempo se han hecho gran variedad de versiones sobre el mismo, con distintos grados de dificultad.

Este en particular, no presenta mucha dificultad su resolución si se usa un razonamiento lógico y se es ordenado en los diferentes pasos a seguir y ésta puede surgir en el operar con fracciones.

Este problema también sería apropiado para el alumnado de 1º de E.S.O. ya que los conocimientos a aplicar de números son propios de ambos niveles.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E2. B2.C1.E3. B2.C3.E1. B2.C4.E2.			

19. Señales clave en las carreteras

En la autovía Sevilla–Córdoba nos encontramos la señal de tráfico de la figura donde las distancias están en kilómetros.

Si nos fijamos en esta señal observaremos que los números (39 y 93) tienen los mismos dígitos, pero

cambiando el orden. A este tipo de señal la llamaremos “señal clave”.

¿Qué otras “señales clave” (Écija-Córdoba) podremos encontrar después de la anterior antes de llegar a Écija?

En la misma autovía se encuentra la población de La Carlota, cuya distancia a Córdoba es de 31 Km. ¿Podremos encontrar “señales clave” (La Carlota-Córdoba) antes de llegar a la Carlota?

Quiero hacer un viaje de Bailen a Córdoba (100 Km), la carretera pasa por Alcolea, la distancia de Alcolea a Córdoba es de 18 Km. ¿Es posible encontrar “señales clave” (Alcolea-Córdoba)? ¿Cuáles serían?

Razona todas las respuestas.

RESOLUCIÓN

Si restamos los dos números de la señal se obtiene la distancia que hay entre las dos ciudades. En este caso de Écija a Córdoba hay: $93 - 39 = 54\ km$

Además, en una “SEÑAL CLAVE”, si llamamos "ab" o "ba" a las parejas de números, siempre se cumple:

$$(10b + a) - (10a + b) = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a = 9(b - a)$$

Es decir, la diferencia entre los dos números de la señal es múltiplo de 9, por lo que, para que entre dos ciudades existan SEÑALES CLAVES, la distancia entre las mismas debe ser múltiplo de 9.

En el caso que estamos estudiando como la distancia entre Écija y Córdoba es de 54 km entonces tenemos que:

$9(b - a) = 54$ por lo que $b - a = 6$

Como $b - a = 6$, para encontrar otras señales clave hay que buscar parejas de números que se diferencien en 6.

Dicho esto, tenemos las siguientes posibilidades:

Esta señal no sería válida por no tener dos dígitos.

Continuamos con la segunda parte del problema:

En la misma autovía se encuentra la población de La Carlota, cuya distancia a Córdoba es de 31 Km. ¿Podremos encontrar "señales clave" (La Carlota-Córdoba) antes de llegar a la Carlota?

Para responder a la segunda parte solo hay que fijarse en que la distancia entre La Carlota y Córdoba es 31 km, número que no es múltiplo de 9, por lo que no habrá señales clave para ambas ciudades.

El tercer caso es entre Alcolea y Córdoba en la que la distancia de separación es 18 km tendremos:

$$9(b - a) = 18 \text{ por lo que } b - a = 2$$

Como $b - a = 2$ entonces habrá que buscar señales cuyos dígitos se diferencien en 2. Así encontramos las siguientes posibles respuestas:

Esta señal no sería válida por no tener dos dígitos

Análisis del problema

La dificultad del problema para el alumnado radica en que hay que ir probando con parejas de números de forma que se mantengan las distancias entre las dos localidades, aunque si se es perspicaz, se dará cuenta que cuando se permuta el orden de los dos números y los restamos, se obtiene un múltiplo de nueve. De esta forma, hay gran cantidad de combinaciones que no son necesarias realizar y se llega antes a la solución, lo cual se pone más de manifiesto en el tercer supuesto, donde existen muchas más posibilidades.

Por lo tanto, la dificultad de este problema radica más en darse cuenta de esta propiedad numérica, esto se facilita si domina la descomposición polinómica de un número y tiene soltura en el uso del lenguaje algebraico para deducirla.

A nivel de estrategias de resolución de problemas el análisis y comprensión del enunciado del problema facilita la identificación de las restricciones y suposiciones subyacentes a la distancia entre dos ciudades con el fin de comprender que las relaciones entre las mismas son múltiples de nueve. Además, la resolución del problema es una oportunidad para desarrollar estrategias de interpretación y evaluación de resultados al analizar los límites de las soluciones obtenidas.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1. B2.C1.E2. B2.C1.E3. B2.C3.E1. B2.C4.E1.			

B2.C4.E2. B2.C5.E1			

20. Puente de Triana

Observa la aglomeración de personas que se encontraron la pasada Semana Santa en el Puente de Triana.

Sabemos que el puente tiene una altura sobre la rasante de 12 m, su longitud total es de $154'5$ m y su ancho de tablero es de $15'9$ m.

Estima de forma razonada el número de personas que se encontraron ese día en el Puente de Triana, si al contar el número de personas que hay en varios cuadrados de 2 metros de lado en dicho puente se han obtenido los siguientes datos: 23, 14, 22, 20, 19, 20 y 22.

RESOLUCIÓN

Para hacer la estimación de las personas que se encuentran en el puente de Triana, podemos calcular cuántas hay de media en un metro cuadrado. Y multiplicar dicha media por la superficie en metros cuadrados del puente.

Para calcular la media sumamos las 7 medidas hechas, lo dividimos entre 7, y a continuación lo dividimos entre la superficie de un cuadrado 2 m de lado.

$$\bar{x} = \frac{23+14+22+20+19+20+22}{7} = \frac{140}{7} = 20\, personas$$

$$A_{cuadrado} = l^2 = 2^2 = 4\, m^2$$

$$\frac{\bar{x}}{m^2} = \frac{20}{4} = 5\, personas/m^2$$

Para hallar la superficie del Puente de Triana, suponemos que es un rectángulo y a partir de sus dimensiones:

$$S_{puente} = b \cdot h = 154'5 \cdot 15'9 = 2456'55\, m^2$$

$$2456'55 \cdot 5 = 12282'75 \cong 12.283\, personas$$

En el puente de Triana se encontraron aproximadamente 12.283 personas.

Análisis del problema

Problema fácil con una única dificultad, la que el alumnado se diese cuenta que la media no correspondía a una superficie de 1 m^2 si no a la de un cuadrado de 4 m^2.

Además, en el enunciado se da más datos de los necesarios (la altura del puente) para la resolución del mismo y de esta forma se visualiza la comprensión por parte del alumnado en la elección entre los datos necesarios y los superfluos.

Es un problema adecuado para repaso de los contenidos de segundo de ESO, ya que en la resolución del mismo debe usar conocimientos básicos de diferentes áreas de las matemáticas (números, geometría y estadística). Pero, a su vez, es una oportunidad para establecer conexiones entre un problema del mundo real y el mundo matemático, identificando los diferentes conocimientos matemáticos que integran los tres sub-problemas a solucionar: en media cuántos alumnos hay en un cuadrado de lado 2 cm, cuál es dicha superficie, qué proporción de personas hay por metro cuadrado, cuál es la superficie del puente, cuántas personas aproximadamente había.

Estándares de aprendizaje

Bloque 2	Bloque 3	Bloque 4	Bloque 5
B2.C1.E1.	B3.C2.E1.		B5.C1.E4.
B2.C1.E2.			
B2.C1.E3.			
B2.C2.E6.			
B2.C4.E2.			

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilera, C. M., Peña Domínguez, G., González, F. M., Lozano, D., Ríos, R, Panadero, S., y otros (2019). *Problemas de Olimpiada Matemática. Estudio y análisis.*

Barbeau, E., & Taylor, P. (2009). *Challenging mathematics in and beyond the classroom, Study Volume of ICMI Study 16. New York, NY: Sp.*

Bruder, R. (2000). Akzentuirte Aufgaben un heuristische Erfauhrungen. En W. Herget & L. Flade (Edtis.), *Mathematike kehren an lernen nach TIMSS. Anregungenfür di Sekundarstufen* (pág. 69.78). Berlin: Volk und Wissen.

Gadner, H. (1995). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica.* Barcelona: Paidós.

Junta de Andalucía (2016). *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establecen la ordenación del proceso de aprendizaje del alumnado*. En BOJA número 144 de 28 de julio de 2016.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musing on mathematical creativity. *For the learning of Mthematics, 26 (1), 20-23.*

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys.*

Mason, J., Burton, L., &Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* Harlow: Pearson Prentice Hall.

MEC. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.*

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics y S.A.E.M. Thales (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Granada/Sevilla: Publicaciones SAEM Thales.

OECD. (2018). *PISA 2021 Mathematics framework (draft), EDU/PISA/GB (2018)4, 45 th meeting of the PISA Governing Board, Directorate for Education and Skills, Programme for International Student Assessment, https://www.upc.smm.lt/naujienos/smm/penkiolikmeciumatematinis-rastingumas/GB-2018-4-PISA-2021-Mathematics-Framework-First-Draft.pdf (accessed on 30 January 2019).*

Pólya, G. (1949). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University.

Schleicher, A. (2018). *"The Future of Education and Skills:Education 2030." Retrieved 30 April 2019, from http://www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf.*

Serradó, A. (2009). *El desarollo de las ocho competencias básicas a través de la resolución de problemas.* Epsilón, 26(2), 7-22.

Serradó, A. (2020). Mental acts a activated when making connections to understand the complexity of the stochastic thinking. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), Número speciale(7), 277-284.*