数理解析研究所講究録
第 1565 巻 2007 年 1-12

量子エンタングルメントの数理

東京理科大学・理工　大矢雅則（Masanori Ohya）
Department of Information Science
Tokyo University of Science
諏訪東京理科大学・経営情報　松岡隆志（Takashi Matsuoka）
Department of Business Administration and Information
Tokyo University of Science, Suwa

1. 始めに

二つ以上の系の間に存在する、量子系特有の強い干渉性を有する状態は、量子エンタングルド状態と呼ばれる。EPR（Einstein・Podolosky・Rosen）論文に端を発する量子エンタングルメントの研究は、Bell の不等式の導出とその実験的検証によって、エンタングルド状態の存在が広く認められることとなり、量子コンピュータや量子テレポテーションなどの量子情報分野の中核的な役割を担うものとして、近年頓にその重要性が指摘されるようになっている。

量子エンタングルド状態の数学的な定義は、合成系の可分割（分離可能）な状態を定義することで、可分割ではない状態として与えられる [1]。いま、二つの部分系からなる量子合成系を考え、その合成状態が可分割であるとは、Hilbert 空間 h 、k 上の密度作用素 ρ_k、σ_k $(k=1,2,\cdots)$ が存在して、

$$\sum p_k \rho_k \otimes \sigma_k、\ p_k \geq 0、\ \sum p_k = 1 \tag{1.1}$$

と分解できることをいう。この可分割な状態は古典的な干渉性を有する状態に対応し、よって可分割ではない状態（エンタングルド状態）が量子系特有の強い干渉性を示す状態に対応する。このとき、任意に与えられた状態が可分割であるか否かを判定することはかなり難しく、合成系が低次元の Hilbert 空間のテンソル積で与えられるときに限り、その必要十分条件が Horodecki 達によって与えられている [2]。

ところで、量子エンタングルメントに関する結果は有限次元に関するものが多く、無限次元の系において、エンタングルド状態の性質を厳密に解明し、特徴付けることはまだあまりできていない。Belavkin と Ohya は従来のエンタングルド状態の定義（i.e., (1.1)式による定義）とは別に、無限次元 Hilbert 空間上の量子合成系において、エンタングルド状態の特徴を解明すべく、Hilbert-Schmidt 作用素の手法を用いたアプローチの方向を示した [3,4]。

いま、ω が $\mathrm{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{k})$（$\mathsf{h}\otimes\mathsf{k}$ 上の有界線形作用素の全体）上の正規状態であれば、ある密度作用素 θ が存在して、

$$\omega(A\otimes B)=tr_{\mathsf{h}\otimes\mathsf{k}}(A\otimes B)\theta,\quad A\in\mathrm{B}(\mathsf{h}),B\in\mathrm{B}(\mathsf{k}) \tag{1.2}$$

と書ける。このとき、合成状態ωは、

$$\omega(A\otimes B)=tr_{\mathsf{h}}A\phi(B)=tr_{\mathsf{k}}\phi^*(A)B \tag{1.3}$$

と書くことが出来て、ϕ、ϕ^*は

$$\phi(B)=tr_{\mathsf{k}}\theta(I\otimes B),\ \phi^*(A)=tr_{\mathsf{h}}\theta(A\otimes I) \tag{1.4}$$

と与えられる。ここで、ϕは、$\mathrm{B}(\mathsf{k})$から$\mathrm{B}(\mathsf{h})_*$ $\left(=\left\{A\in\mathrm{B}(\mathsf{h});tr\sqrt{A^*A}<\infty\right\}\right)$ への線形写像とみなすことができ、ϕの共役写像ϕ^*は$\mathrm{B}(\mathsf{h})$から$\mathrm{B}(\mathsf{k})_*$への線形写像となる。ϕ、ϕ^*を**エンタングルメント写像**、あるいは単に**エンタングルメント**と呼ぶ。Belavkin と Ohya は、ϕ、ϕ^*が Hilbert-Schmidt 作用素で構成されることを明らかにし、一般に、ϕ、ϕ^*は常に正写像ではあるが、完全正写像になるとは限らず、次が成立することを示した。

補題1.1 正規状態ωが可分割。⇒ エンタングルメントϕ、ϕ^*は完全正写像。

本稿では、彼らの手法を振り返り、ϕ、ϕ^*による状態の分類と Horodecki 達によって与えられた低次元における可分割な状態の特徴付けとの関連を述べる[5]。また、合成状態のエンタングルメントの度合いを測る指標［3,4,6］を、量子マルコフのあるクラス[7]に適用した結果［8,9］を紹介する。

2．エンタングリング作用素と合成状態の分類

最初に、純粋状態にある合成系が Hilbert-Schmidt 作用素を用いて、どのように表現されるかを説明する。そのために、我々は、部分系の状態から議論を始める。

kを可分な Hilbert 空間、φを$\mathrm{B}(\mathsf{k})$上の正規状態とすると、ある可分な Hilbert 空間hからkへの Hilbert-Schmidt 作用素H (i.e., hの任意の完全正規直交系（以下、CONS と略）$\{|x_k\rangle\}\subset\mathsf{h}$に対して、$\left\|H|x_k\rangle\right\|^2<\infty$。）が存在して、$\varphi$は次式のように表現され得る。

$$\varphi(B)=tr_{\mathsf{h}}H^*BH=tr_{\mathsf{k}}B\sigma,B\in\mathrm{B}(\mathsf{k}) \tag{2.1}$$

ここで、σは正規状態φに対応する密度作用素であり、$\sigma=HH^*$と与えられる。この作用素Hを、我々は**振幅作用素**と呼び、$\mathsf{h}=\mathsf{k}$とすれば$H=\sqrt{\sigma}$とすることが出来て、作用素Hの存在は常に保証される。また、$\dim\mathsf{h}=1$の時は、φが純粋状態であることを意味し、すなわち、ベクトル$H=|\zeta\rangle\in\mathsf{h}$ ($\||\zeta\rangle\|^2=1$) を用いて、$\varphi(B)=\langle\zeta|B|\zeta\rangle$と書けることになる。

さて、この補助空間hを、$\mathsf{h}=\overline{\{E_\sigma\mathsf{k}\}}^{H}$ (E_σはσの台への射影)と取れば、ユニタリー同値の意味で、振幅作用素Hは一意となる。このとき、密度作用素σの Schatten 分解を$\sigma=\sum_n|h_n\rangle\langle h_n|$ (i.e., $|h_n\rangle\in\mathsf{k}$、$\langle h_n|h_m\rangle=\mu_n\delta_{n,m}$、$\mu_n$は$\sigma$の固有値。）と与えれば、$H$は、

$$H=\sum|h_n\rangle\langle e_n| \tag{2.2}$$

と書ける。ここで、$\{|e_n\rangle\}$ は $\mathfrak{h}$ のある CONS である。例えば、$\mathfrak{h}\subseteq l^2$ として、$\{|e_n\rangle\}$ を標準基底 $\{|n\rangle\}$ として選べば、古典·量子コーディングなどの文脈にも対応する。

補助空間 $\mathfrak{h}$ 上の作用素 $A\in B(\mathfrak{h})$ に対して、行列の転置および複素共役になぞらえた無限次元版のオペレーションを定義するために、(2. 2)式の $\{|e_n\rangle\}$ (i.e., H^*H の固有ベクトルの集合) 上で定義される反ユニタリー作用素 J を導入しよう。すなわち、J は、任意の $x, y\in\mathfrak{h}$ に対して $\langle Jx\,|\,Jy\rangle=\langle y\,|\,x\rangle$ を満たし、$J:|x\rangle=\sum c_n|e_n\rangle\mapsto J|x\rangle=\sum\overline{c_n}|e_n\rangle$ ($c_n\in\mathbf{C}$) なる性質を持つ作用素である。この J を用いると、$A\in B(\mathfrak{h})$ の $\mathfrak{h}$ -転置 $\widetilde{A}\equiv JA^*J$ と $\mathfrak{h}$ -複素共役 $\overline{A}\equiv JAJ$ が定義できて、$\langle x|Jy\rangle=\langle y|Jx\rangle$ が成立するから、簡単な計算で

$$\langle e_m|\widetilde{A}|e_n\rangle=\langle e_n|A|e_m\rangle、\langle e_m|\overline{A}|e_n\rangle=\overline{\langle e_m|A|e_n\rangle}$$

となることが分かる。

以上の準備の下で、振幅作用素 H が合成系の純粋状態を与えることを見ていこう。

いま、$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{k}$ への振幅作用素 H が与えられると、$B(\mathfrak{k})$ 上の状態 φ に加えて、$B(\mathfrak{h})$ 上の正規状態 ψ を次のように定義できる。

$$\psi(A)=tr_{\mathfrak{k}}H\widetilde{A}H^*\equiv tr_{\mathfrak{h}}A\rho、A\in B(\mathfrak{h}) \tag{2. 3}$$

ここで、ψ に対応する密度作用素 ρ は、$\rho\equiv\widetilde{H^*H}$ と与えられているが、$\mathfrak{h}$ -転置および $\mathfrak{h}$ -複素共役が H^*H の固有ベクトル上で定義されているので、$\rho=\widetilde{\rho}=\overline{\rho}$ となることに注意しておく。この意味で、ρ は実作用素とみなすことができる。このとき、φ と ψ は、次式で定義される $B(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k})$ 上の合成状態 ω の部分系の状態となる。

$$\omega(A\otimes B)=tr_{\mathfrak{h}}\widetilde{A}H^*BH=tr_{\mathfrak{k}}BH\widetilde{A}H^* \tag{2.4}$$

実際、$\omega(I\otimes I)=1$ かつ $\omega(C^*C)\geq 0$ ($C=\sum\alpha_kA_k\otimes B_k$) が成立するから、$\omega$ は $B(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k})$ 上の状態であり、また、定義より $\omega(A\otimes I)=\psi(A)$、$\omega(I\otimes B)=\varphi(B)$ も成立する。実は、この ω は、次式で定義されるベクトル $|\Omega\rangle\in\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}$ によって一意に表現される純粋状態とみなされる。

$$\langle\zeta\otimes\eta|\Omega\rangle\equiv\langle\eta|HJ\zeta\rangle\quad(\forall|\zeta\rangle\in\mathfrak{h},|\eta\rangle\in\mathfrak{k}) \tag{2.5}$$

ベクトル $|\Omega\rangle$ は、例えば H の分解(2.2)を用いると、

$$\langle\eta|HJ\zeta\rangle=\sum\langle\eta|h_n\rangle\langle e_n|J\zeta\rangle=\sum\langle\zeta|Je_n\rangle\langle\eta|h_n\rangle=\sum\langle\zeta\otimes\eta|e_n\otimes h_n\rangle$$

となるから、$|\Omega\rangle=\sum|h_n\otimes e_n\rangle$ と書けて、確かに

$$\begin{aligned}\omega(A\otimes B)=tr_{\mathfrak{h}}\widetilde{A}H^*BH&=\sum_{m,n,k}\langle e_m|\widetilde{A}|e_n\rangle\langle h_n|B|h_k\rangle\langle e_k|e_m\rangle\\&=\sum_{m,n,k}\langle e_n|A|e_m\rangle\langle h_n|B|h_m\rangle=\langle\Omega|A\otimes B|\Omega\rangle\end{aligned}$$

が成立する。ベクトル $|\Omega\rangle$ を、“密度作用素 σ の純粋化” と呼ぶ。

上記の純粋合成状態に対する議論を、混合合成状態に拡張しよう。ωをB$(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k})$上の正規状態とすれば、$\omega$はある可分なHilbert空間 $\mathfrak{f}$ から$\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}$への振幅作用素$V$を用いて、

$$\omega(A\otimes B)=tr_{\mathfrak{f}}V(A\otimes B)V\equiv tr_{\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}}(A\otimes B)\theta \tag{2.6}$$

と書ける。ここで、θはωに対応する密度作用素である。いま、$\mathfrak{f}$ を $\mathfrak{f}\equiv\overline{\{E_\theta(\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k})\}}^{\|\cdot\|}$ と取り、$\mathfrak{f}$ のある固定したCONS$\{|f_n\rangle\}\subset\mathfrak{f}$ 上に反-ユニタリー作用素$J_{\mathfrak{f}}$を導入しておく。また、$\mathfrak{h}$ 上の状態$\rho=tr_{\mathfrak{k}}\theta$の規格化された固有ベクトルを含む$\mathfrak{h}$ のCONS$\{|e_n\rangle\}\subset\mathfrak{h}$ 上にも、同様に、反-ユニタリー作用素$J_{\mathfrak{h}}$が定義されているものとする。このとき、我々は“密度作用θの純粋化”を介して、$\mathfrak{h}$ から $\mathfrak{f}\otimes\mathfrak{k}$ への振幅作用素Hを次のように定義出来る。

$$\langle\xi\otimes\eta|HJ\zeta\rangle=\langle\zeta\otimes\eta|\widetilde{H}J\xi\rangle \quad \left(\forall|\zeta\rangle\in\mathfrak{h},|\eta\rangle\in\mathfrak{k},|\xi\rangle\in\mathfrak{f}\right) \tag{2.7}$$

ここで、$\widetilde{H}$は$\widetilde{H}U=V$と与えられていて、UはV^*Vの規格化された固有ベクトル$\{|v_k\rangle\}$に対して、$U=\sum|f_k\rangle\langle v_k|$とするユニタリー変換である。いま、$\mathfrak{k}$ 上の恒等作用素を$I_{\mathfrak{k}}$とすれば、CONS$\{|e_n\rangle\}$、$\{|v_k\rangle\}$によるVの行列要素的表現は、

$$V=\left(\sum_n|e_n\rangle\langle e_n|\otimes I_{\mathfrak{k}}\right)\widetilde{H}U=\sum_{n,k}|e_n\otimes h_k(n)\rangle\langle v_k|$$

となる。$|h_k(n)\rangle\in\mathfrak{k}$ は$I_{\mathfrak{k}}$をあるCONS$\{|d_n\rangle\}\subset\mathfrak{k}$を用いて$I_{\mathfrak{k}}=\sum|d_m\rangle\langle d_m|$と表せば、

$$|h_k(n)\rangle=(\langle e_n|\otimes I_{\mathfrak{k}})\widetilde{H}|f_k\rangle=\sum_m|d_m\rangle\langle e_n\otimes d_m|\widetilde{H}|f_k\rangle$$

と展開される。すなわち、$\widetilde{H}$は

$$\widetilde{H}=VU^*=\sum_{n,k}|e_n\otimes h_k(n)\rangle\langle f_k| \tag{2.8}$$

と表すことができる。よって、振幅作用素Hの定義（2.7）から、Hは、$\{|e_n\rangle\}$、$\{|f_n\rangle\}$に関する$\widetilde{H}$の転置として、次のように書ける。

$$H=\sum_{n,k}|f_k\otimes h_k(n)\rangle\langle e_n| \tag{2.9}$$

$$=\sum_n|H_n\rangle\langle e_n|。 \tag{2.10}$$

ここで、$|H_n\rangle=\sum_k|f_k\otimes h_k(n)\rangle$とおいた。$H$の分解（2.9）を用いれば、次の定理は簡単に示せる［3］。

定理2.1　(2.6) 式の正規合成状態ωは、振幅作用素Hを用いて次のように書ける。

$$\omega(A\otimes B)=tr_{\mathfrak{h}}\widetilde{A}H^*(I\otimes B)H=tr_{\mathfrak{f}\otimes\mathfrak{k}}H\widetilde{A}H^*(I\otimes B) \tag{2.11}$$

また、部分系の密度作用素ρ,σは、それぞれ、次式で与えられる。

$$\rho=\widetilde{H^*H}=H^*H \text{、} \sigma=tr_{\mathfrak{f}}HH^* \tag{2.12}$$

振幅作用素Hを**エンタングリング作用素**と呼ぶ。純粋合成状態のエンタングリング作用素

による表現（2.4）式は、定理２．１において、 $\mathfrak{f}=\mathbf{C}$ としたケースに対応する。

エンタングリング作用素Hを用いて、前節で触れた写像ϕ、ϕ^*を定義しよう。

$$\phi(B)\equiv\widetilde{H^*(I\otimes B)H}=JH^*(I\otimes B)^*HJ \quad (\forall B\in\mathrm{B}(\mathfrak{k})) \tag{2.13}$$

とおくと、ϕは$\mathrm{B}(\mathfrak{k})$から$\mathrm{B}(\mathfrak{h})_*$への写像となり、その共役写像$\phi^*:\mathrm{B}(\mathfrak{h})\mapsto\mathrm{B}(\mathfrak{k})_*$は、

$$\phi^*(A)=tr_{\mathfrak{f}}H\widetilde{A}H^* \quad (\forall A\in\mathrm{B}(\mathfrak{h})) \tag{2.14}$$

と与えられる。このとき、合成状態ωは、写像ϕ、ϕ^*を用いて次のように書ける。

$$\omega=tr_{\mathfrak{h}}A\phi(B)=tr_{\mathfrak{k}}\phi^*(A)B$$

さて、写像$(\sim\circ\phi):B\in\mathrm{B}(\mathfrak{k})\mapsto\widetilde{\phi(B)}$、および$(\phi^*\circ\sim):A\in\mathrm{B}(\mathfrak{h})\mapsto\phi^*(\widetilde{A})$を考えると、これらの写像は、それぞれ Steinspring 形式、Krus-Sudarshan 形式で書けて、完全正写像であることが分かる。すなわち、

$$\widetilde{\phi(B)}=H^*(I\otimes B)H\text{、}\phi^*(\widetilde{A})=tr_{\mathfrak{f}}HAH^*=\sum(\langle f_k|\otimes I)HAH^*(|f_k\rangle\otimes I)\text{。}$$

ところで、写像$\Lambda:B(\mathfrak{h})\mapsto B(\mathfrak{k})$が完全共正（complete co-positive）であるとは、任意の$n\in\mathrm{N}$において、$n\times n$の正定値作用素行列$[A_{ij}]$（$A_{ij}\in B(\mathfrak{h})$）に対し、常に$[\Lambda(A_{ji})]>0$が成立することをいうが、写像$(\sim\circ\phi)$と$(\phi^*\circ\sim)$の完全正性は、$\phi$、$\phi^*$が完全共正であることを意味する。一般に、$\phi$、$\phi^*$は正写像ではあるが、完全正になるとは限らない。例えば、純粋状態が非可分割（エンタングルド状態）であれば、そのϕ^*は完全正にはならない。

以上の議論から我々は、ϕ、ϕ^*の完全正性が状態の可分割性と関連することを期待できるが、まずは、ϕ、ϕ^*を用いて一般化された合成（エンタングルド）状態を次のように定義しよう。

定義２．１　$tr_{\mathfrak{h}}\phi(I)=1$と規格化された$\mathrm{B}(\mathfrak{k})$から$\mathrm{B}(\mathfrak{h})_*$への完全共正写像$\phi$の共役写像$\phi^*:\mathrm{B}(\mathfrak{h})\mapsto\mathrm{B}(\mathfrak{k})_*$を、状態$\rho\equiv\phi(I)$と状態$\sigma\equiv\phi^*(I)$の（一般化された）エンタングルメントという。また、エンタングルメントの全体を$\mathfrak{e}$と表す。

エンタングリング作用素Hの（2.10）式による分解を用いると、ϕ^*、ϕおよび、その対応する密度作用素θは、次のように分解される。

$$\phi^*(A)=\sum\langle e_n|A|e_m\rangle tr_{\mathfrak{f}}|H_m\rangle\langle H_n| \tag{2.15}$$

$$\phi(B)=\sum|e_m\rangle\langle e_n|\langle H_n|I\otimes B|H_m\rangle \tag{2.16}$$

$$\theta_\phi=\sum|e_n\rangle\langle e_m|\otimes tr_{\mathfrak{f}}|H_n\rangle\langle H_m| \tag{2.17}$$

ここで、$\{|e_n\rangle\}$がρの固有値$\{\lambda_n\}$の固有ベクトルであることは、次の直交条件に対応する。

$$tr_{\mathfrak{f}\otimes\mathfrak{k}}|H_n\rangle\langle H_m|=\lambda_n\delta_{m,n}=\langle H_m|H_n\rangle \tag{2.18}$$

さて、ωが可分割のとき、そのエンタングルメントはどのように表されるだろうか。いま、

ωが可分割な状態ならば、部分系の密度作用素ρ_k、$\sigma_k\ (k=1,2,\cdots)$が存在し、

$$\omega(A\otimes B)=\sum p_n tr_{\mathfrak{h}} A\rho_n\cdot tr_{\mathfrak{k}} B\sigma_n\text{、}\ p_n\geq 0\text{、}\ \sum p_n=1$$

と分解できる。可分割なωのエンタングルメントϕ^*、ϕは、(1.4)式に準じれば、

$$\phi^*(A)=\sum p_n tr_{\mathfrak{h}} A\widetilde{\rho_n}\cdot\sigma_n\text{、}\ \phi(B)=\sum p_n tr_{\mathfrak{k}} B\sigma_n\cdot\widetilde{\rho_n}$$

と書ける。ここで、$A\mapsto tr_{\mathfrak{h}} A\widetilde{\rho_n}\cdot\sigma_n$を素エンタングルメントと呼ぶ。すなわち、可分割な$\omega$のエンタングルメントは素エンタングルメントの線形結合で表すことができる。このとき、全ての$A_j\in\mathbf{B}(\mathfrak{h})$に対して、

$$tr_{\mathfrak{h}} A_i^* A_j\widetilde{\rho_n}=tr_{\mathfrak{h}}\widetilde{A_i^* A_j}\rho_n=tr_{\mathfrak{h}} JA_j^* A_i J\rho_n=tr_{\mathfrak{h}} A_j^* A_i\widetilde{\rho_n}$$

が成立する。ϕ^*の完全共正を考慮すれば、上の等式は、ϕ^*が完全正でもあることを意味している。よって、前節で述べた補題 1.1 が成立する[3]。

補題1.1　正規状態ωが可分割。$\Rightarrow$エンタングルメントϕ、ϕ^*は完全正写像。

補題1.1の逆は、一般には成立しない。すなわち、ϕ^*が完全正であっても、非可分割な状態（エンタングルド状態）が存在する。我々は、4 節で、ϕ^*が完全正であって非可分割な状態の具体例を取り上げる[8,9]。

これまでの議論を踏まえ、まず、$\mathfrak{S}$の部分集合として二つのクラスを定義しよう。

定義2.2

（1）　ϕ^*が完全正写像ではないとき、ϕ^*をϕ_q^*と書いてq-エンタングルメントと呼ぶ。また、ϕ_q^*の全体を$\mathfrak{S}_q$と表す。

（2）　ϕ^*が素エンタングルメントの線形結合で与えられるとき、ϕ^*をϕ_c^*と書いてc-エンタングルメントと呼ぶ。また、ϕ_c^*の全体を$\mathfrak{S}_c$と表す。

ところで、量子確率論や量子情報理論においては、二つ以上の系の間の相関を表すマルコフ連鎖や合成状態は、可分割な状態が用いられるケースも多い。よって、c-エンタングルメントを、さらに細かく分類しておくことは意味のあることである。このとき、エンタングルメントϕ^*の分解（2.14）式を用いると、c-エンタングルメントに二つのクラスを導入できる。

定義2.2

（3）　エンタングルメントϕ^*が、(2.15)式において、強い直交条件$tr_{\mathfrak{r}}|H_n\rangle\langle H_m|=\lambda_n\sigma_n\delta_{m,n}$を満たすとき、

$$\phi^*(A)=\sum\lambda_n\langle e_n|A|e_n\rangle\sigma_n \tag{2.18}$$

となる。ここで、σ_nは$\mathbf{B}(\mathfrak{k})$上の密度作用素である。このとき、ϕ^*をϕ_d^*と書いて d-エンタングルメントと呼ぶ。また、ϕ_d^*の全体を$\mathfrak{S}_d$と表す。

（4） エンタングルメントϕ^*が、d-エンタングルメントで、かつ、(2.18)式における全てのσ_nが直交するとき、ϕ^*をϕ_o^*と書いてo-エンタングルメントと呼ぶ。また、ϕ_o^*の全体を$\mathfrak{E}_o$と表す。

3．q-エンタングルメントとPPT条件

この節では、Peres[10]、Horodecki達[2]による合成状態の分類とエンタングルメントϕ^*によるクラスの関連について、著者達によって最近得られた結果[5]も踏まえて議論する。

前節において、エンタングルメントϕ^*の完全正性は、状態の可分割性の必要条件にしかなりえないことに触れた。合成状態の可分割性の必要条件はいくつか知られているが、Peresは有限次元の合成系$\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}$上の密度作用素$\theta$の可分割性の必要条件を、次のように与えた[10]。

定理3．1　θが可分割。$\Rightarrow$　$\theta^{T_{\mathfrak{k}}}>0$

ここで、$\theta^{T_{\mathfrak{k}}}$は、$\theta$の部分系$\mathfrak{k}$における部分転置行列と呼ばれ、$\mathfrak{h},\mathfrak{k}$のある固定された基底$\{x_i\},\{y_m\}$を用いて、$\theta^{T_{\mathfrak{k}}}$の要素が、次で与えられる行列である。

$$\left\langle x_i\otimes y_m\right|\theta^{T_{\mathfrak{k}}}\left|x_j\otimes y_n\right\rangle=\left\langle x_i\otimes y_n\right|\theta\left|x_j\otimes y_m\right\rangle \tag{3.1}$$

定理3.1の条件はPPT (Positive Partial Transpose) 条件と呼ばれる。θが可分割であれば、$\theta=\sum p_k\rho_k\otimes\sigma_k$と書けるが、行列の転置を取る操作$T$は行列の正値性を保存するから、$\theta^{T_{\mathfrak{k}}}=\sum p_k\rho_k\otimes\sigma_k^T>0$となり、定理3.1が成立する。PPT条件を満たす状態をPPT状態、満たさない状態をNPT状態と呼ぶ。Horodecki達は、Jamiołkowski同型写像[11]と低次元における正写像の分解[12. 13, 14]を用いて、低次元の合成系においては、PPT条件が可分割性の十分条件にもなり得ることを示した。以下に彼らの議論の概要を述べよう。

彼らは、まず、合成系上の状態の可分割性の必要十分条件をHahn-Banachの定理を適用することで、次のように導いた[2]。

定理3．2　$\mathfrak{h}$、$\mathfrak{k}$上の全ての純粋状態ρ、σに対し、$trW(\rho\otimes\sigma)>0$を満たすエルミート作用素Wの全体を$\mathbf{W}$とすると、次が成立する。

$\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}$上の密度作用素$\theta$が可分割。$\Leftrightarrow$　$trW\theta>0\quad\forall W\in\mathbf{W}$

上記の定理は、合成系が有限次元の場合、エルミート作用素と正写像の対応関係を与えるJamiołkowski同型写像を用いて、正写像を用いた文脈に書き直すことができる。

定理3．3　$B(\mathfrak{k})$から$B(\mathfrak{h})$の正写像Λの全体を$\mathfrak{p}$とすると、次が成立する。

$\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{k}$上の密度作用素$\theta$が可分割。$\Leftrightarrow$　$(I\otimes\Lambda)\theta>0\quad\forall\Lambda\in\mathfrak{p}$

定理3.2、定理3.3は、可分割な状態を特徴付けてはいるが、このままでは任意に与えら

れた状態が可分割であるかどうかを操作的にチェックすることは難しい。そこで、Horodecki 達は低次元の場合に限られるが、定理３．３に正写像の特徴付けに関する結果を適用した。

いま、$\mathbf{M}_n$を$n\times n$の複素行列の全体とし、$\mathbf{M}_2$から$\mathbf{M}_2$、$\mathbf{M}_3$から$\mathbf{M}_2$への正写像Λの全体をそれぞれ$\mathsf{P}_{2\to 2}$、$\mathsf{P}_{3\to 2}$とすると、$\mathsf{P}_{2\to 2}$、$\mathsf{P}_{3\to 2}$に含まれる任意の正写像Λは二つの完全正写像Λ_1^{CP}、Λ_2^{CP}を用いて、次のように分解できる[12, 13, 14]。

$$\Lambda=\Lambda_1^{CP}+\Lambda_2^{CP}\circ T \tag{3.2}$$

よって、低次元の合成系においては、

$$(I\otimes\Lambda)\theta=\left(I\otimes\Lambda_1^{CP}\right)\theta+\left(I\otimes\Lambda_2^{CP}\right)\theta^{T_\mathrm{k}} \tag{3.3}$$

となるから、定理 3.3 は PPT 条件を用いて次のように書き直される。

系３．４　$\mathsf{h}\otimes\mathsf{k}=\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2$または$\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^3$のとき、

θが可分割。$\Leftrightarrow$　$(I\otimes\Lambda)\theta>0\quad\forall\Lambda\in\mathsf{P}_{2\to 2},\Lambda\in\mathsf{P}_{3\to 2}$　$\Leftrightarrow$　$\theta^{T_\mathrm{k}}>0$

このとき、系３．４はq-エンタングルメントϕ_q^*を用いて書き直すことができる。

いま、$\mathsf{L}[\mathbf{M}_n,\mathbf{M}_n]$を$\mathbf{M}_n$から$\mathbf{M}_n$への線形写像の全体とし、次のような同型写像$\mathsf{w}:\mathsf{L}[\mathbf{M}_n,\mathbf{M}_n]\mapsto\mathbf{M}_n\otimes\mathbf{M}_n$を考える。各$\Lambda\in\mathsf{L}[\mathbf{M}_n,\mathbf{M}_n]$に対して、

$$\mathsf{w}_{\mathrm{P}_+}(\Lambda)=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_k\rangle\langle e_l|\otimes\Lambda\left(|e_k\rangle\langle e_l|\right)=(I\otimes\Lambda)\mathrm{P}_+ \tag{3.4}$$

$$\mathsf{w}_{\mathrm{J}}(\Lambda)=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_k\rangle\langle e_l|^*\otimes\Lambda\left(|e_k\rangle\langle e_l|\right)=(I\otimes\Lambda)\mathrm{J} \tag{3.5}$$

ここで、$\{|e_k\rangle\langle e_l|\}$は$\mathbf{M}_n$の基底であり、$\mathrm{P}_+=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_n\rangle\langle e_n|\otimes|e_n\rangle\langle e_n|$、$\mathrm{J}=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_k\rangle\langle e_l|^*\otimes|e_k\rangle\langle e_l|$であるが、特に、(3.5)式$\mathsf{w}_{\mathrm{J}}(\Lambda)$を Jamiołkowski 同型写像と呼ぶ[11]。このとき、次の補題が成立する[13, 15, 16]。

補題３．５　$\Lambda\in\mathsf{L}[\mathbf{M}_n,\mathbf{M}_n]$において、次が成立する。

（１）Λが完全正写像。$\Leftrightarrow$　$\mathsf{w}_{\mathrm{P}_+}(\Lambda)>0$　　（２）Λが完全共正写像。$\Leftrightarrow$　$\mathsf{w}_{\mathrm{J}}(\Lambda)>0$

さて、ωを$\mathbf{M}_n\otimes\mathbf{M}_n$上の合成状態、その密度作用素を$\theta$とし、$\omega$のエンタングルメント$\phi^*$の(2.15)式による分解を（3.4)、(3.5）式に適用すると、

$$\mathsf{w}_{\mathrm{J}}(\phi^*)=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_l\rangle\langle e_k|\otimes tr_f|H_l\rangle\langle H_k|=\theta>0 \tag{3.6}$$

$$\mathsf{w}_{\mathrm{P}_+}(\phi^*)=\sum\nolimits_{k,l}^n|e_k\rangle\langle e_l|\otimes tr_\tau|H_l\rangle\langle H_k| \tag{3.7}$$

となる。(3.6）式よりϕ^*は Jamiołkowski 同型写像を介して、密度作用素θを再構成することが分かる。また、$\mathsf{w}_{\mathrm{J}}(\phi^*)=\theta>0$であるが、これは、$\phi^*$が常に完全共正写像であることに対応する。さらに、(3.7）式において、$\mathsf{w}_{\mathrm{P}_+}(\Lambda)>0$となる必要十分条件は、$\theta^{T_\mathrm{k}}>0$であること

が示せるので、次の定理が成立する[5]。

定理3．7　θはPPT条件を満たす。$\Leftrightarrow \phi^{*} \notin \mathfrak{E}_{q}$

よって、系3．4はq-エンタングルメントを用いて次のように書き換えられる。

系3．8　θは可分割。$\Leftrightarrow$　$\phi^{*} \notin \mathfrak{E}_{q}$

ϕ^{*}の完全正性とθのPPT条件は同値であることがわかったが、一般に、PPT条件が可分割の十分条件にはなり得ないことは、Horodecki達によるものを含め、その反例がいくつか報告されている[17, 18, 19]。以上の議論をまとめると、合成系の状態は図3.1のように分類できる。

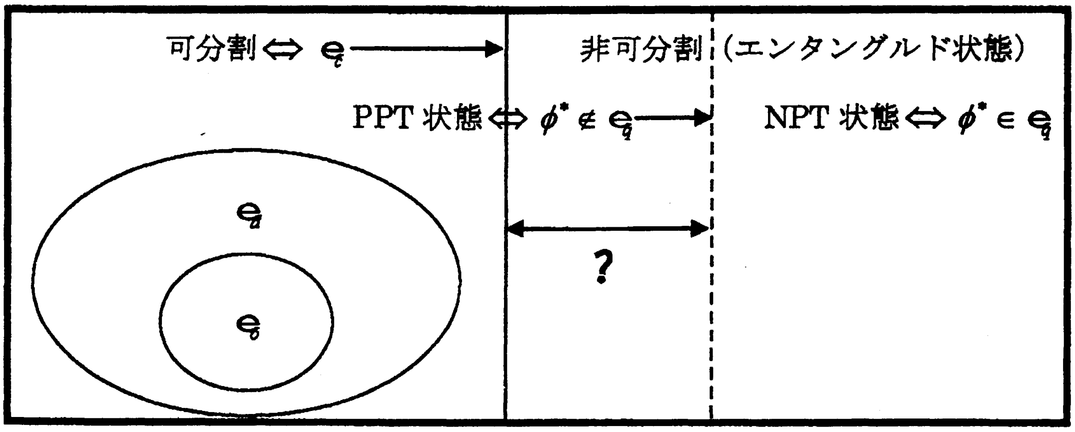

図3.1　合成状態の分類

定理3.3を念頭におくと、高次元の合成系においても正写像の構造が解明されれば、それは高次元の可分割な状態の特徴付けにつながるが、我々のアプローチは、無限次元の合成系において、状態そのものと関連する完全共正な正写像の構造を解明するということであり、数学的な煩雑さはあるものの、その汎用性は高いと考えている。すなわち、PPT条件は、反-ユニタリー作用素による"〜オペレーション"を用いれば、無限次元のHilebert空間上に拡張することができるから、定理3．7にいたる議論は、無限次元の合成系においても踏襲される。

また、純粋エンタングルド状態はq-エンタングルメントになること、すなわち、純粋エンタングルド状態はq-エンタングルメントで特徴付けられることを考えれば、ϕ^{*}が完全正で、かつエンタングルした状態のクラスの存在は、純粋エンタングルド状態と混合エンタングルド状態の構造の間に、大きな違いが在ること意味している。我々の文脈では、定理2．1における(2.11)式の f の次元が持つ意味合いを、再度、熟考してみることも必要であろう。こうしたアプローチは、一般の状態空間の分類をエンタングルメントという視点から捉えなおすということである。

次節では、エンタングルド状態の具体的な事例として、AccardiとFidaleoが導入した量子マルコフ連鎖の一つのクラス[7]が、ϕ^{*}が完全正で、かつエンタングルド状態となる、任意の次元の多体系混合状態のモデルを与えることを取り上げる。

4．エンタングルド・マルコフ連鎖の非可分割性とPPT条件

AccardiとFidaleoは、最近の量子情報理論の発展の要請から古典系のランダムウォークを量子系に拡張するために、量子マルコフ連鎖の一つのクラスを導入した[7]。このクラスは、その構成の仕方からエンタングルド状態を与えるという予想の下に、エンタングルド・マルコフ連鎖（以下、EMCと略）と命名されていたが、無限個の合成系における純粋状態とみなされるこのクラスの状態の非可分割性は決して自明なことではなかった。

ところで、量子干渉の強さを計量する測度を適切に導入できれば、その測度によって定量的にエンタングルド状態を特徴付けられることが期待される。著者達は、Degree of Entanglement（以下、DENと略）[3, 4, 6]と呼ぶ指標を用いて、EMCが確かにエンタングルド状態となっていることを示した[8]。

まず、DENの定義を与えよう。いま、密度作用素θが部分系の密度作用素としてρとσを持つ合成状態としたとき、そのDENは次式で定義される。

$$D_{EN}(\theta;\rho,\sigma) \equiv \frac{1}{2}\left(S(\rho)+S(\sigma)\right)-I_\theta(\rho,\sigma) \tag{4.1}$$

ここで、$S(\rho)=-tr\rho\log\rho$、$I_\theta(\rho,\sigma)\equiv tr\theta(\log\theta-\log\rho\otimes\sigma)$である。DENは、純粋状態の可分割性の必要十分条件、混合状態に対しては、その必要条件を与える。

定理4．1 [6,8]　θを純粋合成状態とする。このとき、

（1）θが可分割　$\Leftrightarrow$　$D_{EN}(\theta;\rho,\sigma)=0$

（2）θがエンタングルド状態　$\Leftrightarrow$　$D_{EN}(\theta;\rho,\sigma)<0$

定理4．2 [3, 4, 9]　θを混合合成状態とすると、

$$\theta\text{が可分割} \quad \Rightarrow \quad D_{EN}(\theta;\rho,\sigma)\geq 0$$

定理4.1、定理4.2を用いれば、簡単な計算でEMCの可分割性を調べることができる。その概要を述べるために、EMCの構成法について簡単に振り返ろう。

有限次元の複素Hilbert空間$\mathfrak{h}=\mathbf{C}^d\ (d<\infty)$に対し、適当な基底$\{|e_i\rangle\}_{1\leq i\leq d}$を一つ固定し、さらにその基底から適当なベクトルを一つ選び、それを$|\underline{e}\rangle\left(\in\{|e_i\rangle\}\right)$と表記して固定する。この固定された基底やベクトルを明記して、無限テンソルHilbert空間$\mathfrak{h}_\mathbf{N}=\bigotimes_{\mathbf{N}}^{(|\underline{e}\rangle)}\mathbf{C}^d$を考える。いま、$P=\{p_i\}_{1\leq i\leq d}$を確率分布、$T=(t_{ij})_{1\leq i,j\leq 1}$を推移確率行列（i.e., $t_{ij}\geq 0,\sum_j t_{ij}=1$）とし、$\sqrt{p_i},\sqrt{t_{ij}}$をそれぞれの要素の複素平方根（i.e., $\left|\sqrt{p_i}\right|^2=p_i,\left|\sqrt{t_{ij}}\right|^2=t_{ij}$）とする。このとき、$\mathfrak{h}_\mathbf{N}$のベクトル$|\Psi_n\rangle$を次のように定義する。

$$|\Psi_n\rangle \equiv \sum_{j_0,j_1,\cdots,j_n}\sqrt{p_{j_0}}\prod_{\alpha=0}^{n-1}\sqrt{t_{j_\alpha j_{\alpha+1}}}\left|e_{j_0},e_{j_1},\cdots,e_{j_n}\right\rangle \tag{4.2}$$

ここで、$\left|e_{j_0},\cdots,e_{j_n}\right\rangle\equiv\left(\otimes_{\alpha\in[0,n]}\left|e_{j_\alpha}\right\rangle\right)\otimes\left(\otimes_{\alpha\in[0,n]^c}\left|\underline{e}\right\rangle\right)\in\bigotimes_{\mathbf{N}}^{(|\underline{e}\rangle)}\mathbf{C}^d$である。さて、$\mathfrak{h}_\mathbf{N}$上の観測量の

集合として、$d\times d$ の全ての複素行列からなる代数 M_d を用いて $\mathfrak{a}=\bigotimes_{\mathrm{N}}\mathsf{M}_d$ を用意する。このとき、観測量 $A_\Lambda\in\mathfrak{a}$ が有限領域 Λ に局所化された観測量であるとは、ある作用素 $\overline{A}_\Lambda\in\mathfrak{a}_\Lambda=\bigotimes_{\Lambda}\mathsf{M}_d$ が存在して、$A_\Lambda=\overline{A}_\Lambda\otimes I_{\Lambda^c}$ であることをいう。以下、A_Λ を $\overline{A}_\Lambda$ と同一視して、$A_\Lambda=\overline{A}_\Lambda$ と書けば、次の補題が成立する[7]。

補題4.3　任意の局所観測量 $A\in\mathfrak{a}_{[0,k]}\ (k\in\mathrm{N})$ に対して、次が成立。

$$\langle\Psi_{k+1},\ A\Psi_{k+1}\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\Psi_n,\ A\Psi_n\rangle\equiv\varphi(A) \tag{4.3}$$

M_d を $\{|e_i\rangle\}_{1\le i\le d}$ で対角化された行列の集合からなる可換代数に制限すれば、(4.3)式は、古典系のマルコフ過程に対応する。補題4.3で定義される $\mathfrak{a}$ 上の状態 φ のエンタングルメントの度合いを評価するために、EMC状態 φ のDENを次のように定義する。

$$D_{EN}(\varphi)\equiv\lim_{n\to\infty}\underline{D_{EN}}(\varphi_n) \tag{4.4}$$

$$\underline{D_{EN}}(\varphi_n)\equiv\inf_{k\in[1,n]}D_{EN}\left(|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|:\rho_{k]},\sigma_{(k}\right) \tag{4.5}$$

ここで、$\varphi_n(\cdot)=tr|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|(\cdot)$　$\rho_{k]}=tr_{\mathfrak{h}_{[0,k]}}|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$、$\sigma_{(k}=tr_{\mathfrak{h}_{(k,n]}}|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ である。

定理4.4 [8]　あるユニタリー行列 $U=(u_{ij})$ が存在して、$t_{ij}=u_{ij}^*u_{ij}$ と書けるとき、次が成立する。

$$D_{EN}(\varphi)=-H(P)$$

ここで、$H(P)=-\sum_{i=1}^{d}p_i\log p_i$。

定理4.4から、EMC状態 φ は“生成的”にエンタングル状態の必要十分条件（定理4.1）を満たしているといえ、この意味で、EMCは確かにエンタングルド状態となっている。また、そのエンタングルメントの度合いは、EMC状態 φ を構成する初期分布 P に依存する。

次に、領域 $[0,\nu]\ (\nu\in\mathrm{N})$ に局所化されたEMC状態 $\omega_{[0,\nu]}$ について考えよう。$\mathfrak{a}_{[0,\nu]}$ 上の $\omega_{[0,\nu]}$ は、

$$\omega_{[0,\nu]}(A)=\langle\Psi_{\nu+1},A\Psi_{\nu+1}\rangle=trA\theta_{[0,\nu]}\quad(A\in\mathfrak{a}_{[0,\nu]})、 \tag{4.6}$$

$$\theta_{[0,\nu]}=tr_{\mathfrak{h}_{\nu+1}}|\Psi_{\nu+1}\rangle\langle\Psi_{\nu+1}| \tag{4.7}$$

と与えられる。$\theta_{[0,\nu]}$ は、混合状態 $\omega_{[0,\nu]}$ に対応する密度作用素である。いま、定理4.4と同様に、推移確率行列 T の要素の複素平方根があるユニタリー行列 U の要素で与えられているとすると、次の定理が成立する[9]。

定理4.5　任意の $\mu\in[1,\nu-1]$ に対して、$D_{EN}\left(\theta_{[0,\nu]};\rho_{\mu]},\sigma_{(\mu}\right)<0$。

すなわち、$\theta_{[0,\nu]}$は、任意の部分系への分割$\mathfrak{h}_{[0,\nu]} = \mathfrak{h}_{[0,\mu]} \otimes \mathfrak{h}_{(\mu,\nu]}$において、エンタングルド状態の十分条件（定理４．２の対偶）を満たしていることが分かる。また、$\theta_{[0,\nu]}$がPPT条件を満たすことが、次の定理から示される[9]。

定理４．６　任意の部分系への分割$\mathfrak{h}_{[0,\nu]} = \mathfrak{h}_{[0,\mu]} \otimes \mathfrak{h}_{(\mu,\nu]}$において、$\theta_{[0,\nu]}$のエンタングルメント$\phi^{*}_{\theta_{[0,\nu]}}$は、完全正である。

参考文献

1. R. F. Werner, Phys. Rev. A 40, 4277 (1989).
2. M. Horodecki, P. Horodecki. and R. Horodecki, Phy. Lett. A **223**, 1 (1996).
3. V. P. Belavkin, M. Ohya, Infin. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **4**, 137 (2001).
4. V. P. Belavkin, M. Ohya, Proc.Roy.Soc.Lond.A. **458**, 209 (2002)
5. J. Jamiołkowski, T. Matsuoka, M. Ohya, "Entangling oparator and PPT condition", Tus preprint.
6. M. Ohya, T. Matsuoka, Foundation and Probability and Physics-3, AIP **750**, 298 (2005).
7. L. Accardi, F. Fidaleo, Ann. di Mat. Pura Appl. (2004).
8. L. Accardi, T. Matsuoka, M. Ohya, Infin. Dim. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **9**, 379 (2006).
9. L. Accardi, T. Matsuoka, M. Ohya, "Entangled Quantum Markov Chains satifying the PPT condition", Tus preprint.
10. A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
11. J. Jamiołkowski, Rep. Math. Phys. **3**, 275 (1972).
12. M.-D. Choi, Can. J. Math. **3**, 520 (1972).
13. S. L. Woronowicz, Rep. Math. Phys. **10**, 165 (1976).
14. E. Stormar, Acta. Math. **110**, 233 (1963).
15. M.-D. Choi, Lin. Alg. Appl. **10**, 285 (1975)
16. G. Kimura, A. Kossakowski, Open Sys. & Information Dyn. **12**, 1 (2005)
17. M.Horodecki, P. Horodecki. and R. Horodecki, Phy. Rev. Lett. **78**, 574 (1997).
18. C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, T. Mor, P. W. Shor, J. A. Smolin, and B. M. Terhal, Phys. Rev. Lett. **82**, 5385 (1999).
19. R. F. Werner, M. M. Wolf, Phys. Rev. Lett. **86**, 3658 (2001).