Kaarevuus matematiikassa, fysiikassa ja EU:ssa

KAARLE KURKI-SUONIO, professori emeritus, Fysiikan laitos, Helsingin yliopisto

Hannu Korhonen oli kirjoittanut hauskan jutun tasokäyrän kaarevuudesta matematiikassa (Dimensio 2/2012, 58–60). Se suorastaan kutsuu täydennystä ja kommentointia fysiikan ja fysiikan terminologian näkökulmasta

Kaarevuuden merkitystä suureena valaisee hyvin se havainto, että tasaisella ratanopeudella liikkuvan kappaleen kiihtyvyys, joka on puhdasta normaalikiihtyvyyttä, on verrannollinen kaarevuusvektoriin (riippumatta siitä, onko liike rajoitettu tasoon). Kirjoituksessa puhutaan kuitenkin koko ajan keskeiskiihtyvyydestä, joka on aivan eri asia. Tästä perinteisestä sekaannuksesta olisi jo aika päästä eroon. Määre ”keskeis-” viittaa keskeisliikkeeseen, joka on tiettyyn (kiinteään) pisteeseen suuntautuvan voiman aiheuttama liikettä. Määre ”normaali-” taas viittaa kohtisuoruuteen rataa (nopeutta) vastaan.

Keskeiskiihtyvyys on keskeisvoiman aiheuttamaa kiihtyvyyttä, normaalikiihtyvyys suunnanmuutoskiihtyvyyttä.

Gravitaatio on tutuin esimerkki keskeisvoimasta. Kahden (pallosymmetrisen) kappaleen välinen gravitaatiovuorovaikutus aiheuttaa kumpaankin osapuoleen Newtonin painovoimalain mukaisen voiman, joka suuntautuu systeemin massakeskipisteeseen. Siten kaksoistähden tähtien liike on keskeisliikettä ja niiden kiihtyvyydet keskeiskiihtyvyyttä. Myös Auringon kiertolaisiin vaikuttavaa painovoimaa voidaan hyvällä syyllä pitää Aurinkoon suuntautuvana keskeisvoimana. Aurinkokuntaan saapuva pyrstötähti liikkuu tunnetusti tämän keskeisvoiman alaisena pitkin paraabelin muotoista ratakäyrää. Sen kiihtyvyys on keskeiskiihtyvyyttä, joka suuntautuu koko ajan Aurinkoon. Sen normaalikiihtyvyys taas on tämän kiihtyvyyden rataa vastaan kohtisuora komponentti.

Kaikille, jotka vielä, vaikka vahingossakin, kutsuvat normaalikiihtyvyyttä keskeiskiihtyvyydeksi, kuuluu laiskanläksyksi tehtävä: Laske pyrstötähden normaalikiihtyvyys, ratakäyrän kaarevuus ja niiden suhde pyrstötähden (keskeis-) kiihtyvyyteen Auringosta luetun etäisyyden funktiona!

Ratakäyrän kaarevuuden rinnastuksessa normaalikiihtyvyyteen tasainen ratanopeus on olennainen. Formula-autojen liike on kuitenkin ihan muuta, kuten myös HK toteaa. Jos kitkakerroinmallilla on ylimalkaan mitään merkitystä renkaiden ja radan pinnan välisen vuorovaikutuksen esityksessä, ideaalinen ajo kallistuksettomassa kaarteessa (niin kuin formularatojen kaarteet näyttävät olevan) edellyttää kaarreajoa nopeudella, jossa normaalikiihtyvyys on radan kaarevuudesta riippumatta mahdollisimman lähellä lepokitkakertoimen määräämää ylärajaa $\mu_0 g$. (Suorillahan tämä sallisi äärettömän nopeuden.) Suuremmat normaalikiihtyvyydet tulevat mahdollisiksi vain, jos rata on ”sisäänpäin” kallistettu. Kirjoituksessa mainittu nelinkertainen putoamiskiihtyvyys merkitsisi siten lepokitkakerrointa $\mu_0 \approx 4$. Jos tämä on totta, renkaiden valmistajat tekevät todella ihmeitä saadessaan aikaan renkaiden ja tien pinnan välille imun (adheesion), joka on kolminkertainen auton painoon verrattuna.

(Kirjoituksessa kylläkin puhutaan putouskiihtyvyydestä toistaen joidenkin oppikirjojen huonoa kielellistä mallia. Onhan putous, kuten Niagara, eri asia kuin putoaminen, aivan samalla tavalla kuin tapaus, lupaus, aitaus, kiusaus jne. ovat eri asioita kuin tapaaminen, lupaaminen, aitaaminen, kiusaaminen jne.)

Matemaatikon dimensiottoman kaarevuussäteen kohdatessaan fyysikko hämmentyy. Kuinka suuri on ympyrä, jonka säde on 50? Pelkkä luku ilman yksikköä ei kerro mitään säteen pituudesta. Kaarevuus on geometrinen suure. Standardi (ISO 80000-3 *Space and* *time*) tuntee sekä kaarevuussäteen ρ että kaarevuuden sen käänteissuureena $\kappa = 1/\rho$, yksikköinä metri ja käänteismetri.

Kaarevuudella on havainnollinen merkitys. Olisi varmasti mahdollista pohtia sitä oppilaiden kanssa jo melko varhaisessa vaiheessa, paljon ennen kuin on tarpeen tavoitella mekaniikan laskennallista hallintaa. Käsite on varmasti hyödyllinen ja fysiikan käsitteenmuodostusta valaisevana esimerkkinä kiitollinen.

Voitaisiin lähteä esimerkiksi seuraavantapaisista kysymyksistä:

a. Millainen käyrän ominaisuus on sen kaarevuus?

b. Miten kuvailisit käyrää, jonka kaarevuus on suuri, verrattuna käyrään, jonka kaarevuus on pieni?

c. Millaisen käyrän kaarevuus on vakio eli sama joka kohdassa?

d. Millaisella suureella esittäisit tällaisen käyrän kaarevuutta? Etsi siis suure, joka on sitä suurempi, mitä suurempi on käyrän kaarevuus.

e. Miten tällä perusteella määrittäisit jonkin muun piirretyn käyrän kaarevuuden sen eri pisteissä? (Apuvälineeksi sopisi vanhanaikainen ”ympyräsapluuna” tai kalvo, jolle on piirretty tiheähkö sarja erisäteisiä ympyröitä.)

Kaarevuusympyrää kutsutaan myös nimellä oskuloiva eli suuteleva ympyrä (*osculare* = suudella). Nuorisokielellä ehkä myös sekstaava ympyrä kävisi, muistaen, että sekstaaminen varsinaisesti tarkoittaa pussaamista. Sanahan on tiettävästi saanut alkunsa siitä, että satakunta vuotta sitten eräässä konditoriassa Norssin lähellä pusut (marenkileivokset) maksoivat sextio penniä. Kuvittelisin, että kaarevuussäteiden määritys ympyröitä käyrään sovittamalla voisi, tästä riippumattakin, olla vähän aikaa ihan hauskaa askartelua.

Kysymys c tietenkin ohjaa ajattelua kohti kaarevuusympyrää ja kaarevuuden määrittelyä sen avulla.

Kysymyksestä b voisi alkaa toinen, rinnakkainen ajattelun linja, jos c:n sijasta ruvettaisiinkin miettimään liikkumista käyrällä polulla, ja sitä miten polun mutkien eri suuret kaarevuudet ilmenevät etenemisen suunnan muutoksina. Vertaamalla polun suunnanmuutoksia yhtä pitkillä matkoilla voitaisiin päätyä lähemmäs suureen aitoa, ominaisuuden mukaista määritelmää ($\kappa = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s$, jossa φ on käyrän tangentin suuntakulma ja s kaarenpituus). Tästä seuraa kaarevuuden SI-yksikölle luonteva esitysmuoto rad/m, joka tietenkin on muodollisesti sama kuin 1/m. Käytäntöön aste per metri sopisi hyvin. Huomataan myös, että jonkin kaaren keskimääräiseksi kaarevuudeksi tarjoutuu itsestään selvästi erotusosamäärä $\Delta\varphi/\Delta s$, kun sitä on varsin hankalaa yrittää määritellä ja määrittää kaarevuusympyröiden avulla.

> ” Kaarevuusympyrää kutsutaan myös nimellä oskuloiva eli suuteleva ympyrä (osculare = suudella). Nuorisokielellä ehkä myös sekstaava ympyrä kävisi, muistaen, että sekstaaminen varsinaisesti tarkoittaa pussaamista. ”

Kaarevuuksien kahden määrittely- ja määritystavan vertaaminen on antoisa jatkokysymys. Siitä voi jossakin fysiikan opetuksen vaiheessa aueta tie myös tasaisen rataliikkeen kiihtyvyys- ja kaarevuusvektorien rinnastukseen.

Tarkistin: EU-direktiivi todellakin käyttää suurenimeä ”kaarevuus”. Sen mukaan ”suurin sallittu kaarevuus: 10 mm 10 cm:n matkalla kurkun pituudesta”. Tämä on käsitteellinen virhe. Kun EU:ssa ollaan valmistelemassa pykäliä, jotka sitovat jäsenmaita entistä tiukemmin käsitteiden standardien mukaisiin määritelmiin, on toivottavaa, että sen omassa pykäläviidakossa noudatettaisiin standardeja. *Ad hoc* ilmauksena tämä sanonta täyttää tarkoituksensa, mutta suureen ”kurkun kaarevuus” mitaksi se ei kelpaa.

EU-kaarevuuden ristiriita fysikaalisen kaarevuuden kanssa korostuu HK:n kirjoituksen kuvan 6 yksiköttömässä esityksessä ja siihen liittyvässä yleistävässä tulkinnassa: ”Ykkösluokan kurkku sai ... kaareutua *enintään kymmenen prosenttia* kurkun pituudesta.” Piirrokseen sovitetun kaarevuusympyrän perusteella on oikein laskettu, että 10 mm 10 cm:n matkalla merkitsee noin kaarevuussädettä 0,5 m eli kaarevuutta 2 m^{-1}. Kurkun keskiviivaa noudatteleva kaari näyttäisi kaartuvan kaikkiaan vähän vähemmän kuin kurkkuun sovitettu ympyränkaari, joten kurkun sen mukainen keskikaarevuus (yksiköissä aste per metri) olisi vähän pienempi. Mutta 20 mm 20 cm:n matkalla merkitseekin, mokoma, kaksinkertaista kaarevuussädettä ja kaarevuutta 1 m^{-1} ! ■