

# Kapitel 1. Kvantmekanik

[Understanding Physics: 13.1-13.6]

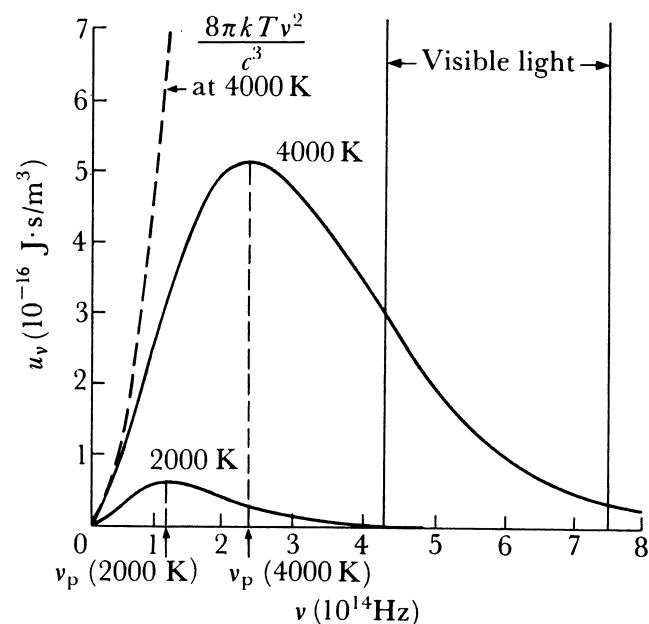
I början av 1900-talet upptäcktes fenomen, som inte kunde förklaras med hjälp av den klassiska fysikens lagar. Däremot kunde de förklaras, om man antog att vissa av materiens egenskaper var *kvantiserade*, dvs att alla värden inte var tillåtna. Detta ledde småningom till utvecklandet av kvantmekaniken.

## 1.1. Kvantfysikens uppkomst

Vid slutet av 1800-talet var de flesta fysiker överens om, att man i princip kunde förklara alla fenomen med hjälp av fysikens lagar, och att man snart skulle "veta allting". Men det visade sig snart att man grundligt hade misstagit sig. Upptäckten av nya fenomen vid det nya seklets början, som inte kunde förklaras klassiskt, ledde till uppkomsten av en kvantt teori, som till en början verkade ganska främmande och svår att begripa. Vi skall börja med att studera några av dessa fenomen, som visar skillnaden mellan vågor och partiklar, och dessutom visa, att det finns ett nytt slag av osäkerhet i beskrivningen av mikroskopiska fenomen.

## 1.2. Hålrumsstrålningen

När man upphettar en kropp till hög temperatur börjar den glöda, och utsända värmestrålning. Strålningens spektrum är *kontinuerligt*, dvs fördelat över alla frekvenser. Strålningens intensitet  $I$  beror av frekvensen  $f$ , är liten för små och stora värden av  $f$ , och når ett maximum för ett visst värde av  $f = f_{\max}$  (i nedanstående bild anger  $\nu$  frekvensen).



Ju högre temperaturen är, desto kortare är våglängden för intensitetsmaximet (dvs desto större är frekvensen  $f_{\max}$ ). Enligt *Wiens förskjutningslag* är  $f_{\max} \propto T$ . Därav följer att ju högre temperatur en kropp har, desto mer vitglödande är den.

Värmestrålningen beror på slumpmässiga vibrationer hos atomerna i kroppen. Ytan av en glödande kropp tillåter vanligen bara en bråkdel av strålningen som kommer från dess inre att tränga ut. Motsvarigt tillåter ytan endast en lika stor bråkdel av infallande strålning att tränga in, resten reflekteras. Detta leder till regeln, att en god absorberare av strålning vanligen också är en god utsändare av strålning, och vice versa, vilket förklarar varför t.ex. en termosflaska isolerar både från kyla och värme.

En kropp, som har en fullständigt absorberande yta kallas **svart kropp**. Ett exempel är en ihålig kub med ett litet hål i sidan. All strålning som träder in genom hålet, kommer fullständigt att absorberas. Därför brukar man också tala om *hålrumsstrålning* istället för svartkroppsstrålning.

Hålrumsstrålningen beror inte alls av kroppens material, utan endast av temperaturen. Detta är en följd av termodynamikens andra huvudsats, som säger, att värme inte kan strömma från en kallare till en varmare kropp. Antag, att två hålrum med öppningarna vända mot varandra har samma temperatur. Om flödet från hålrummet till vänster skulle vara större än flödet från hålrummet till höger, så borde temperaturen öka i hålrummet till höger, och minska i hålrummet till vänster. Värme skulle då strömma från en kallare till en varmare kropp, vilket strider mot den andra huvudsatsen. Följaktligen måste flödena från de båda hålrummen vara lika stora.

Om man därtill föreställer sig att ett filter, som bara släpper igenom ljus inom frekvensområdet  $(f, f + df)$  insätts i öppningen mellan hålrummen, så kan man på samma sätt inse, att flödet inom ett bestämt frekvensområde är oberoende av den emitterande kroppens material (Kirchhoffs lag, 1859).

Sålunda är strålningens energitäthet en *universell funktion*  $u$ , som beror av frekvensen  $f$  och temperaturen  $T$ . Denna funktion studerades av flera fysiker i slutet av 1800-talet.

Bland de första, som studerade hålrumstrålningen, var Lord Rayleigh (John William Strutt). Han försökte beräkna energiflödet, utgående från antagandet att strålningen kan uppfattas som stående vågor, som var och en representerar en vibrationsmod. Enligt det s.k. ekvipartitionsteoremet (s.292) bör varje molekyl ha medelenergin  $kT/2$  per frihetsgrad. Medelenergin per enhetsvolym i ett givet frekvensintervall är då lika med antalet stående vågor i frekvensintervallet, multiplicerat med medelenergin för en stående våg, och dividerat med kavitetsens volym.

Det slutliga uttrycket för energitätheten i svartkroppsspektret blev då enligt Rayleigh (1900)

$$u(f, T) = \frac{8\pi f^2 kT}{c^3}.$$

(Obs: i boken används *radiansen*:  $I(f) = c \cdot u(f, T)/4$ ).

Detta uttryck stämmer för låga frekvenser, men för höga frekvenser gäller det inte, utan växer mot oändligheten, då  $f$  växer! (den *ultravioletta katastrofen*, se fig. 13.1). Redan 1896 hade Wien också upptäckt en annan formel, som gäller för höga frekvenser, men inte för låga:  $u(f, T) \propto f^3 e^{-\beta f/T}$ .

Problemet löstes av Max Planck år 1900. Han härledde en ny formel för energitätheten, som gäller för *alla* värden av frekvensen:

$$u(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3(e^{hf/kT} - 1)}.$$

Konstanten  $h$  kallas **Plancks konstant** (eller verkningskvantum). Den har värdet  $6.63 \cdot 10^{-34}$  Js. Formeln visade sig stämma mycket väl överens med de experimentella kurvor, som mättes av Lummer och Pringsheim 1897. Dessutom visar sig Plancks formel övergå i Rayleighs formel för låga frekvenser, och Wiens formel för höga frekvenser.

Vi skall inte här gå in på den exakta härledningen av Plancks formel, utan endast skissera den i stora drag. Planck konstruerade först en teoretisk modell för hålrummets väggar. Han uppfattade atomerna i väggarna som harmoniska oscillatorer med elektriska laddningar, vilket är en ganska grov modell, men tillräckligt noggrann för att beskriva de termodynamiska egenskaperna. Oscillatorernas värmerörelse leder till utsändning av elektromagnetisk strålning, som fyller hålrummet och återverkar på själva oscillatorerna.

Planck visade efter en rent klassisk beräkning, att medelenergin vid en viss frekvens  $f$  i jämvikt är direkt proportionell mot medelenergin för en oscillator med frekvensen  $f$ . Men därefter postulerade han att oscillatorenergin är *kvantiserad* enligt en bestämd regel:  $E_n = nhf$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Alla andra värden av energin är förbjudna. Konstanten  $h$  är Plancks konstant, densamma som ingår i strålningsformeln. Energin  $hf$  kallas **energikvantum**, och heltalet  $n$  är oscillatorns **kvanttal**.

Med hjälp av denna kvantiseringsregel beräknade Planck oscillatorernas medelenergi, och härledde strålningslagen. För små frekvenser gäller  $hf \ll kT$ , och vi kan därför approximera  $e^{hf/kT}$  med  $1 + \frac{hf}{kT}$  (de två första termerna i Taylor-utvecklingen). Plancks formel övergår då i Rayleighs klassiska uttryck för intensiteten.

Den ultravioletta katastrofen undveks på följande sätt. Värmeenergin i hålrummets väggar delas mellan alla oscillatorerna på ett slumpartat sätt. Några oscillatorer svänger med hög frekvens, andra med låg. För en oscillator med hög frekvens är  $hf$  mycket stort. Om denna oscillator till en början är i vila ( $n = 0$ ), så kan den inte börja röra sig, förrän den mottagit ett tillräckligt stort energikvantum. Men eftersom den erforderliga energin är så stor, så kan den inte få den, och förblir i vila. Energins kvantisering leder alltså till att termisk excitation av högfrekventa oscillatorer förhindras. Därför uppstår inga högfrekventa stående vågor, och det uppträder ingen ultraviolet katastrof. Eftersom  $h$  är så liten, märks inte kvantiseringen på makroskopisk nivå. Planck kunde dock inte motivera sin kvantiseringsregel; den var en *ad hoc-hypotes* (dvs införd för detta ändamål).

Av Plancks strålningslag följer, att svartkroppsstrålningens energimaximum satisfierar formeln

$$\lambda = \frac{hc}{4.9651 kT},$$

som också kallas *Wiens förskjutningslag* efter sin upptäckare. Genom att integrera intensiteten (= energidensiteten) över alla frekvenser får man den totala energin per enhetsvolym i kaviteten:

$$E(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{f^3}{e^{hf/kT} - 1} df = \frac{4}{c} \sigma T^4,$$

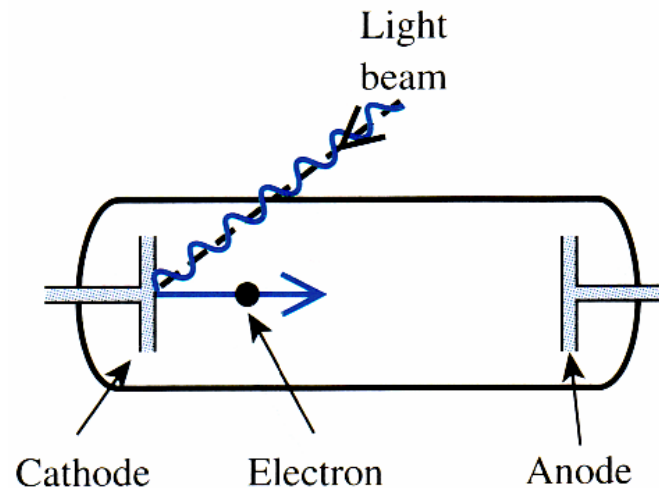
där  $\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3) = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$  (*Stefan-Boltzmanns konstant*, jfr. s. 271).



## 1.3. Fotonerna och den fotoelektriska effekten

År 1905 visade Albert Einstein (*Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkts*, Ann. der Physik **17**, 132-148), att man kan förklara Plancks strålningslag mycket enklare, om man direkt antar att *strålningen* är kvantiserad. Planck hade antagit, att oscillatorerna i hålrummets väggar hade kvantiserade energier, men Einstein gick ett steg längre, och föreslog, att den elektromagnetiska strålningen är kvantiserad. Han uppfattade en våg med en given frekvens  $f$  som en ström av energipaket, som vart och ett bär energin  $hf$ . Dessa partikelliknande energipaket kallas **fotoner** (namnet infördes av Gilbert Lewis år 1926). Värmestrålningen i hålrummet kan då uppfattas som en fotongas. Med hjälp av statistisk mekanik lyckades Einstein sedan härleda Plancks lag.

Genom att anta att ljuset är en ström av fotoner kunde han också förklara den **fotoelektriska effekten**. Redan Heinrich Hertz hade upptäckt (1887) under sina experiment med radiovågor, att ljus som belyser en elektrod, åstadkommer gnistor, dvs elektroner sänds ut. Också Wilhelm Hallwachs och Philipp Lenard studerade fenomenet.



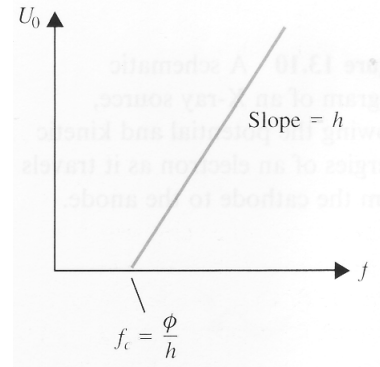
I experimentet belyses katoden i ett vakuumrör med ljus från en lampa (fig. 13.5, se ovan). De utsända elektronerna får träffa en anod, och gav därvid upphov till en ström i kretsen, som kan mätas t.ex. med en galvanometer. Genom att pålägga en spänning mellan katod och anod, kan man stoppa elektronflödet. Detta sker då elektronernas kinetiska energi är lika stor som elektronens potentialenergi vid anoden:  $K = \frac{1}{2}mv_0^2 = U$ . Experimentet utförs så, att man ökar elektronernas potentialenergi ända tills den får ett sådant värde  $U_0$ , att inga elektroner längre når fram till anoden. Eftersom  $K_{\max} = U_0$ , kan elektronernas maximienergi därför bestämmas.

Experimentet visar, att  $U_0$  är oberoende av ljusets intensitet, om ljuset är monokromatiskt, och att  $U_0$  är proportionell mot  $f$ . Dessutom finns en materialberoende gränshfrekvens  $f_c$ , under vilken inga elektroner sänds ut, hur starkt ljus man än använder. Elektronerna sänds också ut från katoden då ljusets intensitet är mycket låg.

Rent klassiskt föreställer vi oss, att den fotoelektriska effekten uppstår på följande sätt. Ljusvågorna får elektronerna att börja oscillera. Om oscillationsenergin överstiger  $\phi$ , som är katodmateriallets utträdesarbete, utsänds en elektron vars kinetiska energi är  $K = E_v - \phi$ , där  $E_v$  är vågornas energi. Detta leder till att en elektron sänds ut endast om ljusintensiteten är tillräckligt hög. Någon gränshfrekvens  $f_c$  borde inte förekomma. Den klassiska teorin säger också att det borde ta en viss tid, innan elektronen sänds ut, på grund av att vågenergin är fördelad i rummet. Klassiskt kan man alltså inte förklara resultatet av experimentet.

Einstein förklarade den fotoelektriska effekten på följande sätt. Elektronerna absorberar fotoner från ljuset. När en foton absorberas, mottar elektronen energin  $hf$ . Om ljusets intensitet ökas, växer antalet fotoner, men inte energin för en enskild foton. För att elektronen skall kunna utträda ur metallen, krävs ett utträdesarbete  $\phi$ , för att den skall kunna övervinna de krafter, som håller den kvar. Energin som krävs för detta, får elektronen av fotonen. Den frigjorda elektronens energi blir då  $hf - \phi$ , som är lika med elektronens maximala kinetiska energi:  $K_{\max} = U_0 = hf - \phi$ . Om  $f$  är en konstant frekvens, är  $U_0$  given genom denna ekvation, och oberoende av ljusets intensitet.

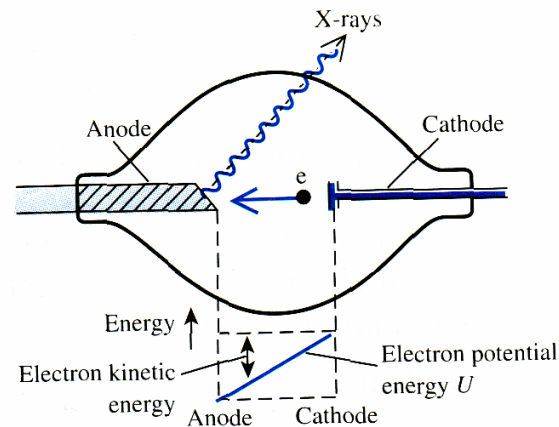
Om fotonernas energi  $hf < \phi$ , så kan de inte frigöra elektroner, hur intensivt det infallande ljuset än är. Ekvationen  $f_c = \phi/h$  anger därför en kritisk frekvens, som motsvarar  $U_0 = 0$ , under vilken inga elektroner kan sändas ut. Om man ritar  $U_0$  som funktion av  $f$ , så kan Plancks konstant  $h$  och utträdesarbetet  $\phi$  beräknas ur grafen (se figuren).



Dessutom är effekten *ögonblicklig*, eftersom energin inte tas från vågen, utan beror på en kollision mellan två *partiklar*, en foton och en av elektronerna i katoden. Det räcker med bara en foton med en energi som är minst lika med utträdesarbetet för att frigöra en elektron.

Einsteins formel för den fotoelektriska effekten bekräftades senare experimentellt av Robert Millikan (1914, publicerades i Phys. Rev. **7**, 355 – 388 (1916)), och man fick därigenom ett starkt stöd för kvantiseringshypotesen. Den fotoelektriska effekten utnyttjas numera i många apparater, t.ex. fotomultiplikatorer, som innehåller många sekundära anoder (dynoder), med vilka man kan åstadkomma förstärkta fotoströmmar.

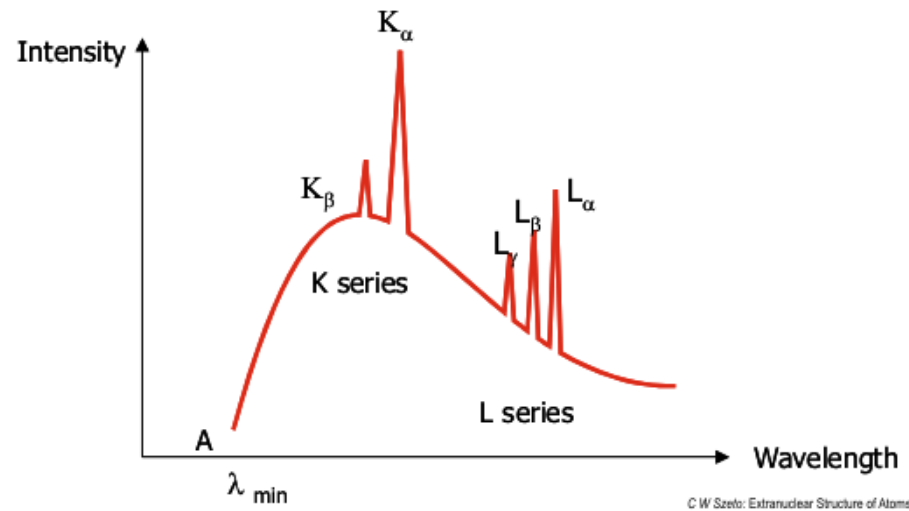
## 1.4. Den kontinuerliga röntgenstrålningen



Ett röntgenrör består av ett vakuumrör, där högenergetiska elektroner emitteras från katoden mot anoden (fig. 13.10, se ovan). Genom att värma katoden åstadkoms termionisk emission av elektroner, som får mycket stor energi genom att röret påläggs en hög spänning. Elektronerna kommer alltså att träffa anoden med höga hastigheter, vilket leder till uppkomsten av högfrekvent elektromagnetisk strålning (*röntgenstrålning*). Processen som åstadkommer denna brukar kallas **Bremsstrahlung** (bromsstrålning).

Röntgenstrålningens intensitetsfördelning, som första gången studerades av Charles Barkla 1906, uppvisar dels diskreta linjer, som beror av materialet, dels en *kontinuerlig* fördelning, som inte beror av materialet.

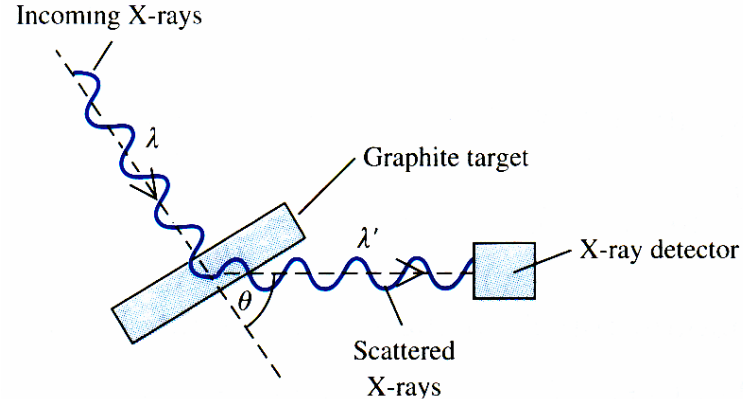
Den kontinuerliga fördelningen har en maximifrekvens  $f_{\max}$  (svarande mot en minimivåglängd  $\lambda_{\min}$ , se figuren nedan), som är direkt proportionell mot elektronernas potentiella energi  $U$ .



Maximifrekvensen svarar mot det fall, då elektronen förlorar all sin energi vid kollisionen mot anoden, och energin frigörs i form av en foton. Detta kan uppfattas som omvändningen av den fotoelektriska effekten. Av Einsteins ekvation följer då  $E = U = hf_{\max}$ , dvs  $f_{\max} = U/h$ . Enligt kvantteorin är alltså  $f_{\max} \propto U$ , vilket också experimenten visar. Det kontinuerliga röntgenspektret ger alltså ytterligare stöd för Einsteins kvanthypotes.

## 1.5. Compton–effekten

Ytterligare ett experimentellt bevis för fotonernas partikelnatur fann Arthur Compton år 1922, då han upptäckte effekten, som bär hans namn (experimentet finns beskrivet i Phys. Rev. **21**, 483 – 502 (1923)). När han bombarderade grafit med monokromatisk röntgenstrålning, upptäckte han att den spridda röntgenstrålningen hade något längre våglängd än den ursprungliga strålningen. Denna effekt beror på att fotonerna uppför sig som partiklar och kolliderar med kolatomernas elektroner. På grund av att den kraft varmed elektronerna är bundna vid atomerna är mycket mindre än den kraft, varmed fotonerna verkar på dem, så kan elektronerna uppfattas som i det närmaste fria. Då fotonerna studsar från elektronerna, kommer de senare att uppta något av fotonernas energi i samband med rekyl, och därför reduceras fotonens energi, vilket leder till att våglängden växer. Compton fann, att de fotoner, som avlänkas mest, förlorar mest energi, och deras våglängd ökar därför mest.



Comptons experimentuppställning avbildas i fig. 13.12 (se ovan). Då monokromatisk röntgenstrålning träffar ett grafitmål, kommer strålningen att spridas. Strålningen som sprids under vinkeln  $\theta$  mäts som funktion av våglängden  $\lambda$  med en röntgenspektrometer (jonisationskammare). Det observerade spektret visar sig ha två toppar. Den ena uppträder vid våglängden för den infallande strålningen ( $\lambda$ ), den andra vid en något längre våglängd ( $\lambda'$ ). Experimentellt kunde Compton visa, att skillnaden mellan dessa våglängder,  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , varierar med vinkeln  $\theta$  enligt formeln

$$\Delta\lambda \propto (1 - \cos \theta).$$

Klassiskt skulle man vänta sig att elektronerna i materialet oscillerar i röntgenstrålningens fält och ger upphov till strålning av *samma* frekvens som den inkommande strålningen. Man väntade sig nog att spridningsvinkeln  $\theta$  skulle variera, men inte att våglängden skulle förändras.



Enligt kvantteorin förklaras effekten genom att man uppfattar röntgenstrålningen som en ström av fotoner, dvs partiklar, som kolliderar med elektronerna i målet. Av Einsteins postulat följer, att fotonernas energi är  $hf$ . Fotonerna har ingen massa, men genom att använda den relativistiska energiformeln (s. 214)

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

som vi tidigare härlett, så kan vi definiera en *rörelsemängd* för fotonerna. Genom substitution av  $E = hf$  och  $m = 0$  i ovanstående formel fås  $E^2 = h^2 f^2 = p^2 c^2$ , dvs

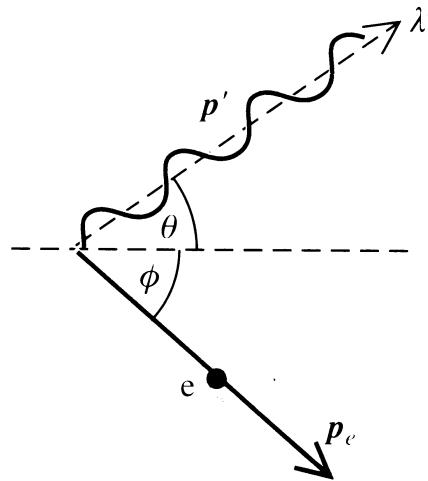
$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Med hjälp av den relativistiska hastighetsformeln  $v = pc^2/E$  (som härleds på s. 219 i boken) finner vi då  $v = (hf/c)c^2/(hf) = c$ , vilket var att vänta. Fotonen är alltså en masslös partikel med energin  $hf$  och rörelsemängden  $h/\lambda$ , som alltid rör sig med ljusets hastighet.

Vi skall behandla Compton–effekten som en relativistisk kollision mellan en foton och en elektron (se figuren nedan eller fig. 13.14 i boken). En foton med energin  $E = hf$  och rörelsemängden  $p = h/\lambda$  träffar en elektron i vila. Efter stöten rör sig fotonen med energin  $E' = hf'$  och rörelsemängden  $p' = h/\lambda'$  i en riktning, som bildar vinkeln  $\theta$  med den ursprungliga. Elektronen åter rör sig med energin  $E_e$  och rörelsemängden  $p_e$  i en riktning, som bildar vinkeln  $\phi$  med fotonens ursprungliga rörelseriktning.



(a) Before collision



(b) After collision

Om vi tillämpar konserveringslagen för energi i sin relativistiska form på Compton-effekten, fås

$$hf + mc^2 = hf' + E_e \quad \dots (1)$$

där  $mc^2$  betecknar elektronens viloenenergi. Eftersom också rörelsemängden bevaras, så gäller  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_e + \mathbf{p}'$ , som kan åskådliggöras i form av en vektortriangel (fig. 13.15).

Alltså gäller  $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , som efter kvadrering ger  $p_e^2 = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'$ , eller alltså

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta. \quad \dots (2)$$

Dessa ekvationer kan kombineras. Först skriver vi ekvation (1) i formen  $E_e = h(f - f') + mc^2 = c(p - p') + mc^2$  med hjälp av ekvationerna  $hf = pc$  och  $hf' = p'c$ . Därpå kvadrerar vi denna ekvation, och kombinerar den med det relativistiska energiuttrycket  $E_e^2 = m^2c^4 + p_e^2c^2$ :

$$E_e^2 = c^2(p - p')^2 + m^2c^4 + 2mc^3(p - p') = m^2c^4 + p_e^2c^2,$$

varav följer  $p_e^2 = (p - p')^2 + 2mc(p - p')$ . Genom att kombinera denna ekvation med ekvation (2) ovan kan  $p_e$  elimineras, och vi får ekvationen

$$p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = p^2 + p'^2 - 2pp' + 2mc(p - p'),$$

eller alltså  $mc(p - p') = pp'(1 - \cos \theta)$ . Med hjälp av relationerna  $p = h/\lambda$  och  $p' = h/\lambda'$  kan denna ekvation också uttryckas med våglängden:  $mc(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}) = \frac{h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos \theta)$  och vi får slutligen formeln

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta).$$

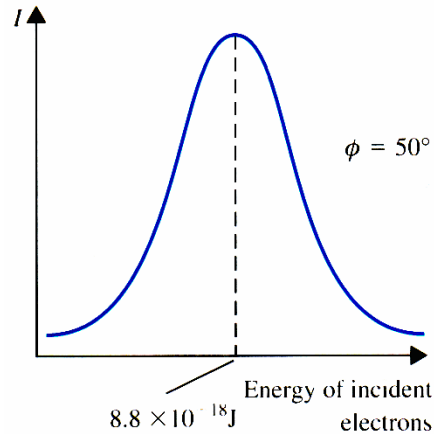
Detta uttryck stämmer väl överens med det experimentella resultatet, och visar övertygande att fotonmodellen stämmer. Att det uppträder en topp också för den inkommande strålningens våglängd  $\lambda$ , förklaras av att det också sker kollisioner mellan fotoner och kolatomer. Eftersom kolatomens massa är mer än 20000 gånger större än elektronens, så kommer högra medlem i formeln för Compton-spridning att vara försvinnande litet, och något skift kan alltså inte observeras. I praktiken förändras alltså inte våglängden för de fotoner som sprids från kolatomerna.

## 1.6. de Broglies hypotes; elektrondiffraktion

Vi har konstaterat, att elektromagnetisk strålning kan bete sig både som vågor och partiklar (fotoner). Hur är det med partiklar? Kan de också bete sig som vågor? År 1924 föreslog Louis de Broglie att också materia av symmetriskäl borde ha vågegenskaper. Han postulerade att den med en partikel associerade våglängden och frekvensen ges av  $\lambda = h/p$ , resp.  $f = E/h$ . Storheterna  $p$  och  $E$  betecknar här partikelns rörelsemängd, resp. energi. Ofta uttrycks också de Broglie-våglängden och -frekvensen med hjälp av vågtalet  $k = 2\pi/\lambda$  och vinkelfrekvensen  $\omega = 2\pi f$ . Då blir  $p = h/\lambda = \hbar k$  samt  $E = hf = \hbar\omega$ , där symbolen  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

Enligt de Broglies hypotes kommer materien därför att ha både partikel- och vågegenskaper. Detta fenomen, som kallas **våg-partikeldualitet**, kan observeras i den mikroskopiska världen, men *inte* i den makroskopiska. Om vi t.ex. betraktar en kropp, som väger 10 kg och rör sig med hastigheten 10 m/s, så är dess rörelsemängd 100 kgm/s. Dess de Broglie-våglängd blir då  $6.6 \cdot 10^{-36}$  m, och är så liten, att den inte kan leda till observerbara interferenseffekter. Om vi däremot betraktar en elektron, vars massa är  $9.1 \cdot 10^{-31}$  kg, som rör sig med hastigheten  $4.4 \cdot 10^6$  m/s, så blir dess kinetiska energi  $8.8 \cdot 10^{-18}$  J. Elektronens rörelsemängd är då  $4 \cdot 10^{-24}$  kgm/s och dess de Broglie-våglängd blir  $1.65 \cdot 10^{-10}$  m. Våglängden är liten, men likväl jämförbar med avståndet mellan atomerna i en kristall (t.ex.), så att elektrondiffraktion kan äga rum.

Elektrondifraktionen upptäcktes av Clinton Davisson och Lester Germer år 1927 (Phys. Review **30**, 705-740 (1927)). De bombarderade en nickelkristall med en elektronstråle, och studerade intensiteten av de spridda elektronerna för olika värden av spridningsvinkeln  $\phi$ . I början fick de ganska små förändringar i intensiteten, men på grund av att en flaska med flytande luft hade exploderat oxiderades metallytan, och de måste rengöra nickelstycket genom upphettning i en ugn med hög temperatur. Det visade sig då, att när elektronernas kinetiska energi ökades (vid ett konstant värde på vinkeln  $\phi$ ), så hade intensiteten ett maximum för en viss energi (se fig. 13.17). Förekomsten av ett maximum tyder på en interferenseffekt. Att de inte upptäckte detta tidigare berodde på att nickelstycket i början bestod av många små kristaller, upphettningen hade alstrat några stora kristaller.



Kvantitativt kan man påvisa interferensen i gittret genom att beräkna våglängden för de spridda elektronerna. Experimentet visade (se figuren), att elektronintensiteten var maximal för energin  $8.8 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ , då spridningsvinkeln var  $\phi = 50^\circ$ . Om Bragg-villkoret  $\lambda = 2d \sin \theta$  (s. 335,  $d = 9.1 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ) tillämpas på den observerade vinkeln  $\theta = \frac{1}{2}(180^\circ - \phi) = 65^\circ$  (jfr. fig. 13.16), så blir våglängden för de spridda elektronerna  $\lambda = 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-11} \sin 65^\circ = 1.65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , alltså samma som de Broglie-våglängden.

Den första som lyckades att göra ett elektroninterferensexperiment med ett gitter av kopparfilm var Claus Jönsson (1960). Numera är elektrondiffraktion och neutrodiffraktion standardmetoder för att studera kristallstrukturer. Diffraktionsmönstren liknar mönstren som röntgenstrålningen ger upphov till. I elektronmikroskopet kan man uppnå en betydligt större resolution än i optiska mikroskop, genom att utnyttja de korta de Broglie-våglängderna.