



Leibniz
Universität
Hannover



Institut
für Philosophie

Logik

Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. Torsten Wilholt
Institut für Philosophie
Leibniz Universität Hannover

torsten.wilholt@philos.uni-hannover.de

Zuerst erstellt 2007

Zuletzt überarbeitet 5/2023

Inhalt /Gliederung

1. Logik und Argumentation: Einführung.....	7
1. Logik 7; 2. Argumente 7; 3. Gründe 7; 4. Überzeugungen begründen / Überzeugungen verursachen 8; 6. Gültigkeit 9; 8. Gültige und schlüssige Argumente 9; 11. Deduktive Gültigkeit 11; 12. Deduktive und induktive Gültigkeit 11; 15. Formale Logik 12; 18. Logische Form 14; 19. Deduktive Gültigkeit 14; 20. Illustration: deduktive Gültigkeit, Schlüssigkeit und Wahrheit 14; 21. Eine einfache Heuristik zur Überprüfung deduktiver Argumente 15; 24. Grenzen der Heuristik 17; 25. Logische Form und grammatische Form 17; 26. Formale Sprachen 17; 27. Eine Logik oder mehrere Logiken? 18; 29. Wozu formale Logik studieren? 18; 33. Bietet die formale Logik eine <i>ausreichende</i> Grundlage für die Beurteilung von Argumenten? 19; 34. Argumentationspragmatische Aspekte (Zirkularität) 20; 35. Nicht-deduktive Argumente 20; 36. Induktive Argumente 20	
2. Aussagenlogik: Grundsätzliches und Syntax	21
37. Aussagen 21; 40. Satz vom ausgeschlossenen Dritten 22; 41. Zweiwertigkeit der Logik 22; 42. Zusammengesetzte und atomare Aussagen 23; 43. Wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen 23; 44. Nicht-wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen 24; 45. Wahrheitsfunktionale und nicht-wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen 24; 46. Das Ziel der Aussagenlogik 24; 47. Die Konjunktion 24; 51. Die Adjunktion 25; 54. Die Negation 26; 57. Die Subjunktion 27; 61. Die Bisubjunktion 29; 63. Beispiel: Ein aussagenlogisches Argument 29; 65. Objekt- und Metasprache 30; 69. Syntax und Semantik 32; 70. Die Syntax der Sprache AL 32; 71. Exkurs: Rekursive Definitionen 32; 72. Die Syntax der Sprache AL 33; 75. Wohlgebildete Sätze der Sprache AL 34; 76. Hauptzeichen 34; 77. Nicht wohlgebildete Zeichenketten 34; 78. Klammerersparnis 35; 79. Die Junktoren der Aussagenlogik 35	
3. Aussagenlogik: Semantik.....	35
80. Die Semantik der Sprache AL 35; 81. Intensionale Interpretation 36; 82. Extensionale Interpretationen 36; 84. Semantische Regeln der Sprache AL 37; 85. Erinnerung: Wahrheitstafeln 37; 86. Anwendung der semantischen Regeln 37; 88. Semantische Regeln der Sprache AL 38; 89. Anwendungsbeispiel: Ein Rätsel 38	
4. Aussagenlogik: Logik.....	39
90. Deduktive Argumente und logische Form in AL 39; 91. Logische Form in AL 39; 94. Deduktiv gültige Argumente in AL 40; 95. Das Zeichen „ \models “ 41; 96. Deduktiv gültige Argumente in AL 41; 99. Aussagenlogische Gültigkeit 43; 100. Gebräuchliche Formen aussagenlogisch gültiger Argumente 43; 101. Logische Wahrheit 44; 102. Logische Wahrheit, Tautologien 45; 104. Logische Wahrheit und das Zeichen „ \models “ 45; 106. Logische Wahrheit und logische Folgerung 47; 107. Tautologien folgen aus jeder Prämisse 47; 108. Widersprüchliche Aussagen 47; 109. Inkonsistente Aussagen(mengen) 47; 110. Einige logische Begriffe 48; 111. Aus einer Inkonsistenz folgt jede Aussage 48; 112. Logische Äquivalenz 48; 113. Wichtige aussagenlogische Äquivalenzen 49; 114. Kommutativität 49; 115. Assoziativität 49; 116. Beispiel für den Beweis einer aussagenlogischen Äquivalenz 49; 117. Distributivität 50; 118. DeMorgansche Gesetze 50; 119. Äquivalenzen der Subjunktion 50; 120. Äquivalenzen der Bisubjunktion 50; 121. Äquivalenzumformungen in AL 51; 125. Ausdrückbarkeit von AL 52; 126. Ausdrückbarkeit von AL, Sheffer-Strich 52; 127. Einige nützliche Regeln 53	

5. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Aussagenlogik	53
128. Das Wahrheitsbaumverfahren 53; 129. Das Wahrheitsbaumverfahren: Grundidee 54; 133. Wahrheitsbäume: Zweites Beispiel 56; 135. Wahrheitsbäume: Vereinfachte Schreibweise 56; 136. Das zweite Beispiel in vereinfachter Schreibweise 57; 137. Wie sind die Regeln für alle Junktoren begründet? 57; 138. Wahrheitsbäume: Alle Regeln für AL 58; 139. Ein unabschließbarer Wahrheitsbaum 58; 140. Grundeigenschaften des Wahrheitsbaumverfahrens für AL 59; 142. Logische Folgerungen mit dem Wahrheitsbaumverfahren überprüfen 60; 143. Logische Folgerungen mit dem Wahrheitsbaumverfahren überprüfen 60; 144. Verwendungsweisen des Wahrheitsbaumverfahrens 61; 145. Die Ausführung des Wahrheitsbaumverfahrens: Praktische Hinweise 61; 149. Die Nützlichkeit des Wahrheitsbaumverfahrens 64; 150. Beweis der Korrektheit des Wahrheitsbaumverfahrens für AL 65; 151. Beweis der Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens für AL 66	
6. Formalisierungen und Anwendungen mit Hilfe der Aussagenlogik	67
152. Formalisierung durch intensionale Interpretation 67; 154. Gelungene Formalisierung 68; 155. Strukturreich formalisieren! 68; 156. Konjunktionen 69; 158. Adjunktionen 70; 159. Negationen 70; 160. Negation und Gegensatz 71; 163. Subjunktionen 72; 166. Notwendige und hinreichende Bedingungen 73; 167. Bisubjunktionen 73; 168. Anwendungen: Der „Wason selection task“ 73; 169. Anwendungen: Ein Rätsel 74; 170. Anwendungen: Aussagenlogisch gültige Argumente von formalen Fehlschlüssen unterscheiden 75; 171. Bejahung des Konsequens (<i>fallacia consequentis</i>) 75; 172. Modus Ponens 76; 173. Verneinung des Antecedens 76; 174. Modus Tollens 76; 175. Reductio ad absurdum 76; 177. Allgemeine Regel für die Kritik von Argumenten 77	
7: Prädikatenlogik: Syntax	77
178. Motivation der Prädikatenlogik 77; 179. Binnenstruktur von Aussagen 78; 180. Quantifizierte Aussagen 78; 181. Prädikatenlogik 79; 182. Begriff und Gegenstand 79; 183. Logische Subjekte, logische Prädikate 80; 185. Mehrstellige Prädikate 80; 187. Logisches Subjekt und logisches Prädikat – Mehrdeutigkeiten 81; 188. Quantoren 81; 190. Variablen 82; 191. PL-Sprachen 83; 192. Die Syntax der PL-Sprachen: Deskriptive Grundzeichen 83; 193. Die Syntax der PL-Sprachen: Logische Grundzeichen 83; 194. Verschiedene PL-Sprachen 84; 195. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen 84; 200. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen: Wirkungsbereiche der Quantoren 86; 201. Gebundene und freie Variablen 86; 204. Sätze von PL-Sprachen 87; 205. Klammerersparnis in PL-Sprachen 87; 206. Beispiele für fehlerhaft gebildete „Sätze“ 88; 207. Alternative Notation 88; 208. E-Mail-Notation 88	
8. Prädikatenlogik: Semantik.....	89
209. Interpretationen von PL-Sprachen 89; 213. Interpretationen von PL-Sprachen: Offene Sätze 91; 214. Beispiel: die Sprache L_L 91; 215. Die Interpretation der Sprache L_L 91; 217. Wahrheit in PL-Sprachen 92; 219. Wahrheit in PL-Sprachen: Existenzsätze 93; 220. Wahrheit in PL-Sprachen: Allsätze 94; 221. Wahrheit in PL-Sprachen: Verschränkte Quantifikation 94; 222. Mögliche syntaktische Abwegigkeiten in den PL-Sprachen 95; 223. Einige erste Beispiele für die Bedeutung quantifizierter Sätze 95	
9. Prädikatenlogik: Formalisierungen	97
231. Formalisierungen mit Hilfe von PL-Sprachen 97; 232. Der Standard-Träger D_K 98; 233. Formalisierungen mit Hilfe von PL-Sprachen 98; 234. Relativierte All- und Existenzaussagen 99; 235. Formalisierung und argumentativer Kontext 99; 237. Ein Prädikat oder mehrere? 100; 241. Quantifizierte Aussagen: „alle“, „jede(r)“ 102; 242. Quantifizierte Aussagen: Allaussagen ohne	

quantifizierende Ausdrücke	102; 243. Quantifizierte Aussagen: „Es gibt“, „existieren“	102; 244.
Quantifizierte Aussagen: „manche“, „einige“	103; 245. Quantifizierte Aussagen: „irgend...“	103; 246.
Quantifizierte Aussagen: „ein“	104; 248. Quantifizierte Aussagen: „kein“	104; 249. Quantifizierte Bedingungssätze
251. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen		106
10. Prädikatenlogik: Logik.....		108
258. Logische Wahrheit in PL-Sprachen	108; 262. Deduktive Gültigkeit / logische Folgerung in PL-Sprachen	109; 263. Das Symbol „ \models “: 109; 264. Logische Wahrheit und logische Folgerung
265. Inkonsistente Aussagen(mengen) in PL-Sprachen	110; 266. Logisch wahre Konklusionen; inkonsistente Prämissen	110; 267. Logische Äquivalenz in PL-Sprachen
268. Universaler Abschluss	111; 269. Logische Äquivalenz von Ausdrücken in PL-Sprachen	111; 270. Spezifisch prädikatenlogische Äquivalenzen
271. Die fundamentalen Quantorenäquivalenzen	112; 272. Die fundamentalen Quantorenäquivalenzen (relativierte Formen)	112; 273. Quantorenvertauschung
275. Quantorenaufteilung / -zusammenführung	114; 280. Weitere Äquivalenzen	115; 281. Wichtige Äquivalenzen: Übersicht
116		
11. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik.....		117
282. Erweiterung des Wahrheitsbaumverfahrens	117; 283. Das Beispiel als Wahrheitsbaum	118; 284. Neue Regeln
287. Anwendungsbeispiele	121; 291. Ein unabschließbarer Wahrheitsbaum	123; 292. In welcher Form man Gegenmodelle ganz einfach angeben kann
124; 293. Extensionen von Prädikaten in mengentheoretischer Sprache angeben	125; 294. Gegenmodelle durch Diagramme darstellen	125; 295. Weitere Beispiele für die Anwendung des Wahrheitsbaumverfahrens
127; 297. Korrektheit des prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens	129; 298. Vollständigkeit des prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens	130; 299. Der Satz von Löwenheim und Skolem
132; 300. Beweissysteme, syntaktische Charakterisierbarkeit	132; 301. Nicht-Charakterisierbarkeit der Logik zweiter Stufe	133; 302. Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik
134		
12. Typische prädikatenlogische Argumentformen und formale Fehlschlüsse.....		134
303. Extensionen von Prädikaten	134; 304. Euler-Venn-Diagramme	135; 305. PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen
135; 310. Kategorische Aussagen	137; 312. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Barbara“)	138; 313. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Camenes“)
139; 314. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Darii“)	139; 315. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Baroco“)	140; 316. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Ferison“)
141; 317. Quasi-Syllogismus	141; 318. Viele gültige Argumentformen	142; 319. Formale Fehlschlüsse
142; 320. Bejahung des Konsequens (<i>fallacia consequentis</i>)	142; 321. Verneinung des Antecedens	142; 322. Quantorenschwindel
143		
13. Prädikatenlogik mit Identität.....		143
323. Das Identitätsprädikat	143; 324. „Es gibt mehrere ...“	144; 325. Eindeutige Existenzaussagen
144; 326. Einzigkeit, Eindeutigkeit	144; 327. Eindeutige und ein-eindeutige Relationen	145; 328. Numerische Quantoren
145; 329. Kennzeichnungen	146; 330. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik mit Identität	147; 331. Gesamtübersicht der Regeln des Wahrheitsbaumverfahrens
148		

Zu diesem Skript

Diese Materialien stellen lediglich das Grundgerüst für eine Vorlesung zur Einführung in die Logik für Studierende der Philosophie dar. Die Materialien sind *nicht* für das Selbststudium ausgelegt und ersetzen insbesondere *nicht* die Teilnahme an der Vorlesung. Die Lehrveranstaltung (einschließlich der Klausur) ist auf Studierende ausgerichtet, die sowohl an der Vorlesung als auch an den begleitenden Übungen regelmäßig teilnehmen und die Übungsaufgaben zur Vorlesung regelmäßig und selbständig bearbeiten.

Die Materialien geben im Kern nur Inhalte der Präsentation aus der Vorlesung wieder, um den Studierenden das Mitschreiben zu ersparen und so eine bessere Konzentration auf die Vorlesung selbst zu ermöglichen.

Gelegentlich werden diese Inhalte durch kurze, wie in diesem Abschnitt gekennzeichnete Zusatz-Kommentare ergänzt.

Ebensowenig wie die Vorlesungsteilnahme ersetzt dieses Skript ein gutes Lehrbuch. Es enthält nur sehr komprimiert die wesentlichsten Inhalte und Beispiele aus der Vorlesung und kann deshalb nicht immer eine vollständige, aus sich selbst heraus gut verständliche Darstellung der behandelten Themen liefern.

Um Ihnen das Auffinden ausführlicherer Lehrbuchliteratur zu den behandelten Themen zu erleichtern, finden Sie im Folgenden eine nach Kapiteln aufgeschlüsselte Liste von Literaturempfehlungen.

Literaturempfehlungen zu den einzelnen Kapiteln

Diese Literaturempfehlungen sind nicht erschöpfend, sondern sollen nur erste Hinweise geben, wo zu den entsprechenden Kapiteln passende Lehrbuchliteratur gefunden werden kann.

Kapitel	Literaturempfehlungen
1	Rosenberg, Kap. 2; Beckermann, Teil I
2	Hoyningen-Huene, Abschn. I.3 u. II.1.1; Beckermann, Abschn. 10.1 u. 10.2
3	Hoyningen-Huene, Abschn. II.1.3, Beckermann, Abschn. 10.3
4	Hoyningen-Huene, Abschn. II.2, Beckermann, Abschn. 11 u. 12
5	Beckermann, Abschn. 13 u. 27.1; Bostock, Kap. 4
6	Beckermann, Abschn. 15; Salmon, Abschn. 6-9; Black, Kap. 12
7	Mates, Kap. 3; Beckermann, Abschn. 17.1
8	Mates, Kap. 4; Beckermann, Abschn. 17.2
9	Beckermann, Abschn. 21; Mates, Kap. 5
10	Hoyningen-Huene, Abschn. III.2, Beckermann, Abschn. 18
11	Beckermann, Abschn. 19 u. 27.2; Bostock, Kap. 4
12	Salmon, Abschn. 14-15
13	Bostock, Abschn. 8.1

Literaturangaben

Ansgar Beckermann: *Einführung in die Logik*, 3. Aufl., Berlin: Walter de Gruyter 2010.

Arthur K. Bierman & Robin N. Assali: *The Critical Thinking Handbook*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall 1996.

Max Black: *Critical Thinking: An Introduction to Logic and Scientific Method*, 2. Aufl., Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall 1952.

David Bostock: *Intermediate Logic*, Oxford: Clarendon 1997.

Tracy Bowell: *Critical Thinking: A Concise Guide*, London etc.: Routledge 2002.

Irving M. Copi & Keith Burgess-Jackson: *Informal Logic*, 3. Aufl., Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall 1996.

Irving M. Copi: *Einführung in die Logik*, München: Fink 1998.

Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Aufl., Heidelberg: Spektrum 1996.

Wilhelm K. Essler: *Einführung in die Logik*, 2. Aufl., Stuttgart: Kröner 1996.

Ian Hacking: *An Introduction to Probability and Inductive Logic*, Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press 2001.

Colin Howson: *Logic with Trees: An Introduction to Symbolic Logic*, London: Routledge 1997.

Paul Hoyningen-Huene: *Formale Logik: Eine philosophische Einführung*, Stuttgart: Reclam 1998.

Gary Jason: *Critical Thinking: Developing An Effective Worldview*, Belmont, Calif.: Wadsworth/Thomson Learning 2001.

Benson Mates: *Elementare Logik: Prädikatenlogik der ersten Stufe*, Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1969.

Arnold Oberschelp: *Logik für Philosophen*, 2. Aufl., Stuttgart: Metzler 1997.

Jay F. Rosenberg: *Philosophieren: Ein Handbuch für Anfänger*, Frankfurt a.M.: Klostermann 1986.

Sven Rosenkranz: *Einführung in die Logik*, Stuttgart: Metzler 2006.

Paul Ruppen: *Einstieg in die formale Logik: Ein Lern- und Übungsbuch für Nichtmathematiker*, Bern: Lang, 1997.

Wesley C. Salmon: *Logik*, Stuttgart: Reclam 1983.

1. Logik und Argumentation: Einführung

1. Logik

Logik untersucht die Gültigkeit von Argumenten.

Ihre traditionelle Hauptaufgabe ist es, Methoden bereitzustellen, die helfen, gültige von ungültigen Argumenten zu unterscheiden.

Daher rührt die Bedeutung der Logik für Philosophie sowie für alle Wissenschaften. In allen Wissenschaften sollen Aussagen mit Hilfe anderer Aussagen begründet werden.

In dieser Veranstaltung werden wir die Begriffe „Argument“ und „Schluss“ synonym verwenden.

2. Argumente

Beispiele für Argumente

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.

Der Motor läuft.

Also ist Benzin im Tank.

Klaus hat gesagt, dass Lieselotte ein Wiederkäuer sei.

Also muss Lieselotte eine Kuh sein.

△ **Argumente bestehen aus einer *Schlussfolgerung* oder *Konklusion* (einer Aussage, die durch das Argument gestützt wird) und einer oder mehreren *Prämissen* (Aussagen, die zur Stützung der Konklusion angeführt werden).**

Eine Konvention, an die sich viele Logikbücher und auch wir in dieser Vorlesung halten: Argumente werden mit einem waagerechten Strich angegeben; die Prämissen befinden sich darüber, die Konklusion darunter.

Anhand des ersten Beispiels oben wird deutlich: Die Prämissen erzwingen praktisch den Übergang zur Konklusion. Anders gesagt: *Wenn* die Prämissen wahr sind, dann *kann* die Schlussfolgerung nicht falsch sein. Für solche Argumente interessiert sich die Logik besonders.

Argumente dienen dazu, Behauptungen zu *begründen*.

3. Gründe

Von Gründen sprechen wir in mindestens drei verschiedenen Sinnen:

- ▶ *Realgründe oder Ursachen:*
Glatteis war der Grund dafür, dass das Auto von der Straße abkam.

- ▶ *Handlungsgründe:*
Lenas Überzeugung, damit ihre Zukunftschancen optimieren zu können, war der Grund, aus dem Sie sich für ein BWL-Studium entschied.
- ▶ *Epistemische Gründe:*
Dass die Sonne bisher jeden morgen aufgegangen ist, ist ein guter, wenn auch nicht vollkommener Grund für die Annahme, dass sie es auch morgen wieder tun wird.

Wenn man davon spricht, dass eine Behauptung „begründet“ wird, meint man die Angabe **epistemischer Gründe**. Epistemische Gründe sind Umstände, die dafür sprechen, eine bestimmte Annahme für wahr zu halten. In diesem Sinn müssen Argumente Gründe für die Konklusion angeben.

Natürlich kann die Angabe von epistemischen Gründen manchmal in einem Verweis auf Real- und/oder Handlungsgründe bestehen, z.B.:

Niels wollte heute eine große Radtour machen, und er ist frühestens vor einer Stunde aufgebrochen. Also ist anzunehmen, dass er noch unterwegs ist.

Aber epistemische Gründe müssen nicht immer in einem ursächlichen Verhältnis zur begründeten Aussage stehen.

4. Überzeugungen begründen / Überzeugungen verursachen

Logik und Argumentationstheorie im Sinne dieser Veranstaltung beschäftigen sich mit *Begründungen* von Überzeugungen.

Sie beschäftigt sich *nicht* allgemein mit Tricks und Techniken, bei anderen bestimmte Überzeugungen hervorzurufen – im Unterschied zur Rhetorik.

Natürlich kann und soll Sie Ihnen trotzdem dabei helfen: Aber nur im Hinblick auf eine bestimmte Technik, bei anderen eine Überzeugung hervorzurufen; nämlich die Technik, die darin besteht, diese Überzeugung gut zu begründen.

5. Überzeugungen begründen / Überzeugungen verursachen

Beispiel:

Sie zweifeln daran, dass es ein universell gültiges moralisches Gesetz geben könnte? Nun, das Gravitationsgesetz ist universell gültig, die Gesetze der Mathematik sind universell gültig. Wie können Sie da an der Möglichkeit universell gültiger Gesetze zweifeln?

Aus logischer Sicht ist mit diesem „Argument“ vielerlei nicht in Ordnung.

Erstens beruht die Argumentation darauf, dass zwei ganz verschiedene Dinge, nämlich moralische Gesetze und Naturgesetze, mit demselben Wort „Gesetz“ benannt werden. Diesen Argumentationsfehler werden wir unter dem Namen „Äquivokation“ noch genauer untersuchen.

Zweitens verfehlt die implizite Schlussfolgerung „Universelle Gesetze sind möglich“ die eigentlich in Rede stehende Behauptung „Universelle moralische Gesetze sind möglich“. Diesen Fehler nennt man „*ignoratio elenchi*“.

Aus Sicht der Rhetorik sind diese Merkmale nicht unbedingt problematisch, solange das Gegenüber keinen Anstoß daran nimmt. Ein *rhetorisches* Studium dieser Merkmale würde sich damit befassen, wie man sie am Geschicktesten zum Einsatz bringt.

In dieser Veranstaltung werden wir sie dagegen als *Argumentationsfehler* studieren, um fehlerhafte Begründungen kritisieren zu können.

6. Gültigkeit

Damit die Prämissen die Konklusion wirklich gut begründen, müssen Prämissen und Konklusion im richtigen Verhältnis zueinander stehen. Dieses richtige Verhältnis bezeichnet man als *Gültigkeit* des Arguments:

- △ **Ein Argument heißt genau dann *gültig*, wenn Folgendes gilt:**
Wenn man die Prämissen für wahr hält, dann ist es deshalb vernünftig, auch die Konklusion für wahr zu halten.
(Das ist gemeint, wenn wir sagen: Die Prämissen stützen die Konklusion.)

Hinweis: Manche Bücher verwenden statt „gültig“ auch „korrekt“ oder „richtig“.

Bemerkung: Diese Definition der Gültigkeit liefert für sich genommen noch keinen sehr praktischen Ansatz zur Beurteilung der Gültigkeit von Argumenten. Denn dazu müsste man zuerst wissen, wann es „vernünftig“ ist, auf der Grundlage bestimmter Prämissen eine bestimmte Konklusion zu akzeptieren.

Wir werden noch zu weitergehenden Definitionen kommen, die uns eine präzisere Handhabe für die Beurteilung von Argumenten bieten.

Überlegen Sie, ob das folgende Beispiel nach unserer Definition ein gültiges Argument ist:

Hubschrauber sind Vögel.

Alle Vögel sind Lebewesen.

Hubschrauber sind Lebewesen.

Auch dies *ist* ein gültiges Argument! Denn unter der Annahme, die Prämissen wären wahr, muss man auch die Konklusion für wahr halten. Dies zeigt, dass Gültigkeit nicht das alleinige Qualitätskriterium für Argumente sein kann. Gültigkeit sagt eben noch nichts über den tatsächlichen Wahrheitsgehalt der Prämissen.

7. Gültigkeit

Die Gültigkeit von Argumenten kann oft ganz unabhängig vom Wahrheitsgehalt von Prämissen und Konklusion beurteilt werden:

Die Polkappen werden abschmelzen.

Wenn die Polkappen abschmelzen, dann werden erhebliche Teile von Bangladesh überschwemmt.

Erhebliche Teile von Bangladesh werden überschwemmt werden.

Damit aus einem gültigen Argument auch ein gutes Argument wird, müssen die Prämissen auch wahr sein.

8. Gültige und schlüssige Argumente

- △ **Ein Argument heißt genau dann *schlüssig*, wenn es gültig ist und alle seine Prämissen wahr sind.**

z.B.:

Wale sind Säugetiere.

Alle Säugetiere sind Warmblüter.

Wale sind Warmblüter.

... ist ein gültiges Argument. Seine Prämissen sind außerdem wahr, also ist es auch schlüssig.

Dagegen ist

Hubschrauber sind Vögel.

Alle Vögel sind Lebewesen.

Hubschrauber sind Lebewesen.

zwar gültig, aber nicht schlüssig.

9. Gültige und schlüssige Argumente

Achtung: Die Wahrheit der Prämissen allein sagt nichts über Gültigkeit und Schlüssigkeit aus! Es kann sogar Argumente geben, bei denen sowohl die Prämissen als auch die Konklusion wahr sind, während das Argument dennoch nicht gültig (und demzufolge auch nicht schlüssig) ist.

Einige Menschen sind Brillenträger.

Frank-Walter Steinmeier ist ein Mensch.

Frank-Walter Steinmeier ist ein Brillenträger.

Was diesem Argument fehlt ist die Stützung der Konklusion durch die Prämissen. Die Prämissen könnten (in einer möglichen Welt) wahr sein und die Konklusion trotzdem falsch.

Das können Sie erkennen, indem Sie ein analoges Argument konstruieren, das wahre Prämissen hat, aber zu einer falschen Schlussfolgerung führt.

Einige Menschen sind Brillenträger.

Frank-Walter Steinmeier ist ein Mensch.

Frank-Walter Steinmeier ist ein Brillenträger.

Einige Menschen sind Frauen.

Frank-Walter Steinmeier ist ein Mensch.

Frank-Walter Steinmeier ist eine Frau.

10. Gültige und schlüssige Argumente

Die Logik interessiert sich in erster Linie für die *Gültigkeit* von Argumenten.

Das liegt daran, dass für die Beurteilung der Wahrheit der Prämissen und somit der Schlüssigkeit normalerweise sachspezifisches Wissen erforderlich ist. Die Gültigkeit von Argumenten lässt sich dagegen interessanterweise in vielen Fällen ohne Rücksicht auf die sachlichen Inhalte beurteilen.

Genau dieser Umstand eröffnet uns die Möglichkeit, Logik zu betreiben.

11. Deduktive Gültigkeit

Manche Argumente haben die faszinierende Eigenschaft, dass die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion praktisch erzwingt:

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.

Der Motor läuft.

Also ist Benzin im Tank.

Wale sind Säugetiere.

Alle Säugetiere sind Warmblüter.

Wale sind Warmblüter.

Für diese Argumente gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann *muss* die Konklusion wahr sein. Wir werden solche Argumente *deduktiv gültig* nennen. Eine genaue Definition der deduktiven Gültigkeit muss aber noch einen Moment warten.

12. Deduktive und induktive Gültigkeit

Nicht alle gültigen Argumente sind auch deduktiv gültig:

Klaus hat gesagt, dass Lieselotte ein Wiederkäuer sei.

Klaus sagt fast immer die Wahrheit.

Fast alle Wiederkäuer, mit denen Klaus und ich zu tun haben und die einen Namen besitzen, sind Kühe.

Also ist Lieselotte eine Kuh.

Dieses Argument ist nach unserer Definition gültig, insofern die Annahme, dass die Prämissen wahr sind, dafürspricht (es rational macht, zu glauben), dass auch die Schlussfolgerung wahr ist.

Aber: Die Schlussfolgerung *muss* nicht wahr sein, wenn die Prämissen wahr sind. Klaus könnte sich ausnahmsweise irren oder sogar lügen, oder Lieselotte könnte eine der wenigen Ausnahmen unter den Wiederkäuern im Umfeld von Klaus und uns sein, die keine Kühe sind.

Stattdessen machen die Prämissen es *wahrscheinlich*, dass die Konklusion wahr ist. Solche Argumente heißen *induktiv gültig*.

Genau genommen ist also die Frage, ob das Argument gültig ist, davon abhängig, wie wahrscheinlich die Schlussfolgerung im Lichte der angeführten Prämissen ist. Wenn die Prämissen die Schlussfolgerung ausreichend wahrscheinlich machen, dann ist das Argument in sofern gültig, als es vernünftig ist, etwas sehr Wahrscheinliches zu glauben.

13. Deduktive und induktive Gültigkeit

- ▶ *Induktive Gültigkeit*: Wenn alle Prämissen wahr sind, dann ist es wahrscheinlich, dass auch die Konklusion wahr ist.

Bei induktiven Argumenten ist die Gültigkeit eine graduelle Angelegenheit. Die Prämissen können die Konklusion mehr oder weniger wahrscheinlich machen. Mit induktiv gültigen Argumenten werden wir uns (ggf.) im zweiten Semester der Vorlesung beschäftigen. *In diesem Semester geht es uns in erster Linie um deduktiv gültige Argumente.*

- ▶ *Deduktive Gültigkeit* (vorläufige Definition): Wenn alle Prämissen wahr sind, dann *muss* die Konklusion wahr sein.

Bei deduktiven Argumenten soll die Gültigkeit ein Entweder-Oder sein: Ein Argument soll die Definition entweder ganz oder gar nicht erfüllen.

Manche Autoren verwenden „gültig“ synonym mit „deduktiv gültig“ im obigen Sinn. Für diese Autoren gibt es folglich keine induktiv gültigen Argumente. In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir „gültig“ aber in einem weniger restriktiven Sinn (wie oben definiert, siehe Folie 6).

14. Deduktive Gültigkeit

Aber was heißt es genau, dass die Schlussfolgerung wahr sein *muss*, falls die Prämissen wahr sind? Betrachten Sie das folgende Beispiel:

Lieselotte ist eine Kuh.

Also hat Lieselotte mehrere Mägen.

In einem gewissen Sinne *muss* die Konklusion wahr sein, wenn die Prämisse wahr ist. Aber dies ist kein Beispiel für das, worauf die Logik mit dem Begriff der deduktiven Gültigkeit hinauswill: Mit deduktiv gültigen Argumenten sind solche gemeint, bei denen allein aus der Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Schlussfolgerung folgt, egal wie die Welt ansonsten beschaffen ist.

Das „Muss“ der deduktiven Gültigkeit ist in diesem Sinne noch strenger als natürliche Gesetzmäßigkeiten es sind!

Ein Beispiel für deduktive Gültigkeit ist dagegen:

Lieselotte ist eine Kuh.

Alle Kühe haben mehrere Mägen.

Also hat Lieselotte mehrere Mägen.

Die deduktive Gültigkeit ist sogar in einem bestimmten Sinne *unabhängig vom Inhalt der Aussagen*, die in dem Argument vorkommen. Um zu verstehen, wie das möglich ist und die deduktive Gültigkeit endlich klar zu definieren, brauchen wir die Methoden der *formalen Logik*.

15. Formale Logik

Bei typischen deduktiv gültigen Argumenten fällt folgendes auf: Es gibt immer eine ganze Klasse von solchen Argumenten, die einander ähneln und alle deduktiv gültig sind:

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.

Der Motor läuft.

Benzin ist im Tank.

Lieselotte ist ein Wiederkäuer oder Lieselotte ist keine Kuh.

Lieselotte ist eine Kuh.

Lieselotte ist ein Wiederkäuer.

Die Zahl N ist ungerade oder das Produkt NM ist nicht ungerade.

Das Produkt NM ist ungerade.

Die Zahl N ist ungerade.

16. Formale Logik

Offenbar liegt dies daran, dass diese Argumente *formal* gleich aufgebaut sind und dass in ihnen an den gleichen Stellen bestimmte inhaltsunabhängige Elemente vorkommen. Im Beispiel sind dies die Wörter „oder“ und „nicht“.

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.

Der Motor läuft.

Benzin ist im Tank.

Lieselotte ist ein Wiederkäuer oder Lieselotte ist keine Kuh (= ist nicht eine Kuh).

Lieselotte ist eine Kuh.

Lieselotte ist ein Wiederkäuer.

Die Zahl N ist ungerade oder das Produkt NM ist nicht ungerade.

Das Produkt NM ist ungerade.

Die Zahl N ist ungerade.

17. Formale Logik

Für die Wörter „oder“ und „nicht“ gilt:

- ▶ Sie sind *inhaltsunabhängig*, d.h. sie kommen in allen möglichen Aussagen vor, egal wovon sie handeln.
- ▶ Und es lassen sich *ganze Klassen inhaltlich völlig verschiedener Argumente* finden, in denen die inhaltlichen Bestandteile der Aussagen jeweils *in der selben Form* mit Hilfe von „oder“ und „nicht“ verknüpft sind und für die ausnahmslos gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist auch die Konklusion wahr.

In allen bekannten Sprachen kommen Elemente vor, für die diese beiden Punkte gelten. Sie heißen *logische Konstanten*.

- △ Die *formale Logik* untersucht die Bedingungen der Gültigkeit anhand formaler Eigenschaften von Argumenten. Sie tut dies, indem sie *logische Konstanten* der Sprache identifiziert und die *Gesetzmäßigkeiten* untersucht, nach denen sich mit Hilfe der logischen Konstanten gültige Argumente bilden lassen.

18. Logische Form

Die drei Argumente haben eine gemeinsame Form. Ihre inhaltlichen Elemente sind auf die gleiche Weise arrangiert und mit Hilfe der logischen Konstanten verknüpft.

Es ist Benzin im Tank oder der Motor läuft nicht.

Der Motor läuft.

Benzin ist im Tank.

A oder nicht B

B

A

- △ Die Art und Weise, wie die inhaltlichen Bestandteile des Arguments mit Hilfe der logischen Konstanten angeordnet und verknüpft sind, ist die *logische Form* des Arguments.

Hinweis: Damit ganz klar ist, was die logische Form eines Arguments ist, muss eindeutig feststehen,

- welches die logischen Konstanten sind,
- welches die inhaltlichen Elemente (Teilaussagen) sind und
- welches die relevanten formalen Eigenschaften und Verknüpfungen dazwischen sind.

Das ist zunächst mal eher intuitiv klar. Die formale Logik hat aber Methoden, dies ganz präzise zu definieren. Dazu werden wir noch kommen.

19. Deduktive Gültigkeit

Mit Hilfe des Begriffs der logischen Form können wir jetzt endlich die deduktive Gültigkeit genau definieren.

- △ Ein Argument heißt *deduktiv gültig*, wenn alle Argumente, die dieselbe logische Form und ausschließlich wahre Prämissen haben, auch eine wahre Konklusion besitzen.

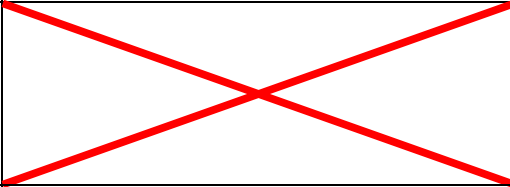
Erinnerung: In manchen Büchern wird schon der Begriff der Gültigkeit oder Korrektheit für deduktive Gültigkeit in diesem Sinne reserviert.

- △ Wenn Prämissen und Konklusion in diesem Sinne ein deduktiv gültiges Argument bilden, sagt man auch, dass die Konklusion aus den Prämissen *logisch folgt*.

20. Illustration: deduktive Gültigkeit, Schlüssigkeit und Wahrheit

Da es sehr wichtig ist, zu verstehen, was genau der Begriff der deduktiven Gültigkeit im Hinblick auf die Wahrheit von Schlussfolgerungen und Prämissen impliziert, veranschaulichen wir uns dies anhand der folgenden Übersichten.

Deduktiv gültige Argumente

	Schlussfolgerung wahr	Schlussfolgerung falsch
Prämissen wahr	Wenn Paris in Frankreich liegt, spricht man dort Französisch. Paris liegt in Frankreich. ----- In Paris spricht man Französisch.	
Prämissen falsch	Wenn London in Belgien liegt, spricht man dort Englisch. London liegt in Belgien. ----- In London spricht man Englisch.	Wenn Berlin in Italien liegt, spricht man dort Spanisch. Berlin liegt in Italien. ----- In Berlin spricht man Spanisch.

deduktiv gültig
und schlüssig

deduktiv gültig,
aber *nicht* schlüssig

Nicht deduktiv gültige „Argumente“

	Schlussfolgerung wahr	Schlussfolgerung falsch
Prämissen wahr	Alle Katholiken sind getauft. Der Papst ist getauft. ----- Der Papst ist ein Katholik.	Alle Katholiken sind getauft. George W. Bush ist getauft. ----- George W. Bush ist ein Katholik.
Prämissen falsch	Mäuse regieren heimlich die Welt. Wenn das Buch Hiob genau 42 Kapitel hat, dann regieren Mäuse heimlich die Welt. ----- Das Buch Hiob hat genau 42 Kapitel.	Nilpferde sind Reptilien. Nur Reptilien spielen Klarinette. ----- Alle Nilpferde spielen Klarinette.

△ Der einzige Fall, der nie auftreten kann, ist der eines deduktiv gültigen Arguments mit wahren Prämissen und einer falschen Konklusion.

21. Eine einfache Heuristik zur Überprüfung deduktiver Argumente

Aus diesem Sachverhalt lässt sich eine einfache Heuristik ableiten, mit deren Hilfe Sie sich schnell über ein deduktives Argument orientieren können

Als Heuristiken bezeichnet man Richtlinien für kognitive Vorgehensweisen. Eine Heuristik muss nicht unbedingt mit Sicherheit zum kognitiven Ziel führen, sondern kann auch eine bloße Daumenregel sein.

Wenn ein deduktives Argument gültig sein soll, dann muss *jedes* Argument, das dieselbe logische Form und wahre Prämissen hat, zu wahren Konklusionen führen.

Sie können deshalb die Gültigkeit eines deduktiven Arguments erproben, indem Sie einige analoge Argumente mit vertrauten und überschaubaren wahren Prämissen konstruieren.

Beispiel:

Es gibt kein Opiat, das kein Analgetikum wäre.

Einige Inhaltsstoffe von gängigen Hustenmitteln sind Opiate.

Nicht alle gängigen Hustenmittel sind frei von Analgetika.

Manchmal empfiehlt es sich allerdings, zunächst die Aussagen durch (einfachere) logisch äquivalente Aussagen zu ersetzen.

Erste Prämisse:

Es gibt kein Opiat, das kein Analgetikum wäre.

≡ Alle Opiate sind Analgetika.

Konklusion:

Nicht alle gängigen Hustenmittel sind frei von Analgetika.

≡ Einige Inhaltsstoffe von gängigen Hustenmitteln sind Analgetika.

Umgeformtes Argument:

Alle Opiate sind Analgetika.

Einige Inhaltsstoffe von gängigen Hustenmitteln sind Opiate.

Einige Inhaltsstoffe von gängigen Hustenmitteln sind Analgetika.

Analoge Argumente:

Alle Säugetiere sind Warmblüter.

Einige Raubtiere sind Säugetiere.

Einige Raubtiere sind Warmblüter.

Alle Polizisten sind Beamte.

Einige Schnurbartträger sind Polizisten.

Einige Schnurbartträger sind Beamte.

Das Argument gehört zu einem Typ, den wir erst mit Mitteln der Prädikatenlogik (Kap. 8 ff.) genau beschreiben werden können. (Es ist ein kategorischer Syllogismus des Typs „Daril“.)

22. Eine einfache Heuristik zur Überprüfung deduktiver Argumente

Achtung: Wenn Sie mit dieser Heuristik *kein* Gegenbeispiel zu dem vorgelegten Schluss finden, besteht natürlich noch immer eine Irrtumsmöglichkeit. Die von Ihnen erdachten analogen Schlüsse könnten ebenso ungültig sein wie der vorgelegte und nur zufällig wahre Konklusionen haben.

Anders verhält es sich im negativen Fall. Wenn Sie ein einwandfreies Gegenbeispiel gefunden haben (d.h. einen Schluss derselben Form, der von wahren Prämissen auf eine *falsche* Konklusion führt), ist das Argument eindeutig nicht gültig.

23. Eine einfache Heuristik zur Überprüfung deduktiver Argumente

Alle Kommunisten befürworten ein staatliches Gesundheitssystem.

Hans Meier befürwortet ein staatliches Gesundheitssystem.

Hans Meier ist ein Kommunist.

Dieses Argument sieht der gültigen Argumentform eines sogenannten „Quasi-Syllogismus“ (s. Kap. 13) ähnlich, *ist* aber nicht gültig, wie man durch Bildung formal analoger Argumente leicht zeigen kann.

Alle Frauen atmen.

Der Papst atmet.

Der Papst ist eine Frau.

Das vorangehende Argument ist deshalb ein Beispiel für einen *formalen Fehlschluss*.

24. Grenzen der Heuristik

Allerdings stößt diese Heuristik bei komplexen logischen Zusammenhängen schnell an ihre Grenzen. Außerdem setzen sie voraus, dass man schon verstanden hat, was die logische Form eines Arguments ist, sodass man Argumente mit „derselben logischen Form“ bilden kann.

Was ist also die logische Form eines Arguments, und wie müssen Sprachen funktionieren, damit man solche Argumente in ihnen formulieren kann? Die Beantwortung dieser Fragen kann nur mit Hilfe der formalen Logik erfolgen. Außerdem werden wir mit ihrer Hilfe Verfahren kennen lernen, die auch bei komplexesten Zusammenhängen die Frage logischer Gültigkeit mit Sicherheit beantworten lassen.

25. Logische Form und grammatische Form

Die logische Form ist etwas anderes als die grammatische Form der Aussagen. Zum Beispiel haben die folgenden Aussagen dieselbe logische Form (und übrigens dieselbe Bedeutung) aber unterschiedliche grammatische Formen:

Es ist nicht der Fall, dass Wasser ein Metall ist.

Wasser ist kein Metall.

Für die logische Form ist nur relevant, dass es sich in beiden Fällen um die Verneinung der Aussage „Wasser ist ein Metall“ handelt. Ob eine Nebensatzkonstruktion in dem Satz vorkommt, ist egal.

Außerdem erkennen Sie hier, dass die logische Konstante „nicht“ auch in einer anderen sprachlichen Erscheinungsform vorkommt. Es wäre unsinnig, hier von einer *weiteren* logischen Konstante „keine“ zu sprechen, da die beiden Beispielsätze offenbar genau dasselbe bedeuten.

26. Formale Sprachen

Um diese Situation zu vereinfachen, studiert die formale Logik die Beziehung der logischen Folgerung anhand *formaler Sprachen*. In diesen formalen Sprachen hat jede logische Konstante eine eindeutige Erscheinungsform. Die Grammatik der formalen Sprachen ist ebenfalls so einfach, dass die logische Form der Aussagen in den formalen Sprachen an ihrem äußeren Erscheinungsbild eindeutig erkennbar ist.

Das war der Hintergrund der Bemerkung, dass die Formale Logik über Methoden verfügt, den Begriff der logischen Form präzise zu fassen. Dies gelingt eben mit Hilfe der formalen Sprachen.

Die formalen Sprachen der Logik sind so konstruiert, dass sie die Funktionsweise der logischen Konstanten in natürlichen Sprachen widerspiegeln. Deshalb kann man Aussagen und Aussagensysteme aus natürlichen Sprachen in formale Sprachen *übersetzen*.

Wir werden aber sehen, dass nicht immer eine ganz präzise und eindeutige Übersetzung aller Aussagen aus natürlichen in formale Sprachen möglich ist. Grund: Die formalen Sprachen sind viel einfacher, eleganter und konsequenter aufgebaut als die natürlichen Sprachen. Die formalen Sprachen sind *Idealisierungen* der logischen Struktur natürlicher Sprachen.

Ähnlich wie z.B. in der Physik reibungsfreie Ebenen oder gewichtslose Pendelschnüre.

27. Eine Logik oder mehrere Logiken?

In der Logik versucht man nicht bei jeder formalen Sprache, *alle* logischen Konstanten der natürlichen Sprache zu identifizieren und in der formalen Sprache abzubilden. Man beschränkt sich immer auf eine bestimmte Menge wichtiger logischer Konstanten.

In dieser Vorlesung werden wir es mit zwei Typen von formalen Sprachen zu tun haben. Zu Anfang werden wir uns mit *aussagenlogischen Sprachen* beschäftigen, die nur die allerwichtigste Grundmenge logischer Konstanten enthalten. Der Teilbereich der Logik, der sich mit diesen formalen Sprachen beschäftigt, heißt *Aussagenlogik*. Später kommen wir zu *prädikatenlogischen Sprachen*, die neben den logischen Konstanten der Aussagenlogik noch weitere logische Konstanten abbilden können. Dieser Teil heißt entsprechend *Prädikatenlogik*.

28. Eine Logik oder mehrere Logiken?

Da der Begriff der logischen Form davon abhängt, welche Elemente der Sprache man als logische Konstanten identifiziert, muss man entsprechend differenzieren: Streng genommen haben Argumente z.B. nicht ganz allgemein eine logische Form, sondern eine *aussagenlogische Form* und eine *prädikatenlogische Form*. Entsprechend muss man streng genommen auch unterscheiden, ob die Konklusion *aussagenlogisch* oder *prädikatenlogisch* aus den Prämissen *folgt*.

In diesem Sinn gibt es nicht eine Logik, sondern mehrere verschiedene Logiken.

Dazu kommt noch, dass man die logischen Strukturen der natürlichen Sprache auf verschiedene Weise idealisieren kann. Deshalb gibt es sogar verschiedene Logiken mit denselben logischen Konstanten. Außerdem kann man sogar formale Sprachen erfinden, in denen es ganz anders funktionierende logische Konstanten gibt als in den natürlichen Sprachen (z.B. Quantenlogik). Aber nicht alle Logiken haben die gleiche Wichtigkeit. Die Logiken, die wir in der Vorlesung studieren, sind allgemein als Standard anerkannt und bilden die Grundlage für fast alle anderen Logiken. Aussagen- und Prädikatenlogik zusammen, wie wir sie in dieser Vorlesung studieren, werden oft auch als „klassische Logik“ bezeichnet.

29. Wozu formale Logik studieren?

Die Methoden der formalen Logik werden in der Philosophie vielfältig angewandt. Hier nur einige *Beispiele*.

In der *Sprachphilosophie* werden zentrale Fragen und Begriffe (wie Wahrheit oder Bedeutung) oft anhand formaler Sprachen diskutiert, weil man hier genauer sein kann als bei natürlichen Sprachen. Die Sprachen der formalen Logik dienen also als Modell für natürliche Sprachen.

Die Begriffe der logischen Folgerung, der Widerspruchsfreiheit oder des Beweises spielen auch in anderen Bereichen der Philosophie eine Rolle, wie etwa in der *Erkenntnistheorie* und der *Wissenschaftstheorie*. Die formale Logik erlaubt es, diese Begriffe genau zu analysieren.

30. Wozu formale Logik studieren?

Außerdem kommt es in der Gegenwartsphilosophie oft vor, dass komplizierte logische Zusammenhänge zur besseren Übersicht und zur genaueren Analyse in passende formale Sprachen übersetzt werden. Das Ergebnis bezeichnet man manchmal als *Formalisierung* eines philosophischen Problems.

Formalisierungen kommen heute in allen Bereichen der Philosophie vor: Von der Ethik bis zur Metaphysik, von der Philosophie des Geistes bis zur Theorie der Gerechtigkeit.

Grundlage der Formalisierungen ist fast immer die Prädikatenlogik, wie Sie sie am Ende dieser Vorlesung kennengelernt haben werden.

31. Wozu formale Logik studieren?

△ Sie müssen also als Studierende der Philosophie die formale Logik aus zwei Gründen lernen: Erstens, weil wichtige philosophische Grundbegriffe anhand der in der formalen Logik studierten formalen Sprachen untersucht und verstanden werden. Und zweitens, um Sie in die Lage zu versetzen, Formalisierungen in der fortgeschrittenen Diskussion der philosophischen Forschung aller Teilgebiete zu verstehen.

32. Wozu formale Logik studieren?

Übrigens wird die formale Logik auch in vielen anderen Wissenschaften verwendet.

In der Künstliche-Intelligenz-Forschung wird z.B. Denken als Operation an Sätzen aus prädikatenlogischen formalen Sprachen modelliert.

In der Informatik spielt sie unter anderem eine Rolle, weil Programmiersprachen oft Grundbegriffe der Prädikatenlogik übernehmen.

Eine große Bedeutung hat die formale Logik außerdem in der Linguistik und in der Mathematik.

33. Bietet die formale Logik eine *ausreichende* Grundlage für die Beurteilung von Argumenten?

Wie Sie sehen werden, kann man mit Hilfe der formalen Logik tatsächlich oft Aufschluss über die *deduktive Gültigkeit* von Argumenten erhalten.

Wir haben aber schon gesehen, dass ein gültiges Argument nur dann auch eine gute Begründung für eine Behauptung liefert, wenn seine *Voraussetzungen* (Prämissen) auch wahr sind.

Allerdings hängt die Beurteilung der Voraussetzungen eines Arguments im Allgemeinen von sachbezogenen Erwägungen ab und kein Gegenstand der Logik. (Dennoch gibt es aber eine Reihe *typischer* Voraussetzungen, die in den verschiedensten Argumentationskontexten immer wieder gemacht werden. Einige dieser typischen Voraussetzungen werden in der Argumentationstheorie diskutiert.)

34. Argumentationspragmatische Aspekte (Zirkularität)

Sind wenigstens alle *schlüssigen* Argumente gute Argumente?

Belgien und die Niederlande sind Beneluxländer.

Also ist Belgien ein Beneluxland.

Dieses Argument ist ganz offenbar sowohl gültig als auch schlüssig, und doch scheint es kein besonders gutes Argument zu sein.

Grund: Niemand, der nicht von vornherein ohnehin schon von der Konklusion überzeugt ist, würde die Prämisse glauben. In diesem Sinn taugt das Argument nicht dazu, die Konklusion zu begründen.

Es gibt also über Gültigkeit und Wahrheit der Prämissen noch weitere für die Beurteilung von Argumenten wichtige Aspekte.

35. Nicht-deduktive Argumente

Wie bereits gesehen, gibt es auch gute Argumente, die nicht deduktiv gültig sind:

Niels Gunnarsson lebt in Trondheim.

Wer in Trondheim wohnt, besitzt mit großer Wahrscheinlichkeit ein Paar warme Socken.

Also wird Niels Gunnarsson ein Paar warme Socken besitzen.

Im Sinne unserer Definition ist dieses Argument *gültig*: Die Wahrheit der Prämissen vorausgesetzt, ist es vernünftig, auch die Konklusion für wahr zu halten.

Es ist jedoch *nicht deduktiv gültig*, selbst wenn Niels Gunnarsson tatsächlich ein Paar warme Socken besitzen sollte. Denn es gibt Argumente derselben logischen Form, die von wahren Prämissen zu falschen Konklusionen führen:

Mick Jagger befindet sich bei einem Stones-Konzert.

Wer sich bei einem Stones-Konzert befindet, besitzt mit großer Wahrscheinlichkeit eine Eintrittskarte.

Also wird Mick Jagger eine Eintrittskarte besitzen.

36. Induktive Argumente

Zur Erinnerung: Die Art und Weise, in der das Niels-Gunnarsson-Argument seine Konklusion dennoch stützt, kann man mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ausdrücken:

Wenn alle Prämissen wahr sind, dann ist es wahrscheinlich, dass auch die Konklusion wahr ist.

Solche Argumente nennt man *induktiv*. Die formale Logik kann nur sehr bedingt zu ihrer Beurteilung beitragen.

Wir sehen also, dass es aus verschiedenen Gründen nicht *nur* auf den Begriff der deduktiven Gültigkeit ankommt, wenn wir Argumente untersuchen wollen.

Trotzdem spielt er eine sehr zentrale Rolle, weswegen wir jetzt das formale Studium einer bestimmten Klasse deduktiv gültiger Argumente kennenlernen wollen.

2. Aussagenlogik: Grundsätzliches und Syntax

37. Aussagen

Argumente bestehen aus Aussagen. Nicht jeder Satz ist eine Aussage:

Ach, wie schön!

Bielefeld ist die Metropole Ostwestfalens.

$2 + 2 = 4$

John Oliver ist der gegenwärtige Präsident der USA.

Wird es morgen regnen?

Schließe die Tür!

38. Aussagen

△ **Aussagen sind Sätze, die entweder wahr oder falsch sind.**

Aussagen sind z.B.:

$56\,464\,456 + 864\,686 = 57\,329\,142$

An der Limmerstraße gibt es Kioske.

Paris ist die Hauptstadt von Belgien.

Keine Aussagen sind z.B.:

Die Kioske an der Limmerstraße

Uhbzbbkeubm kjnbkk bjhsjkja.

Himmeldonnerwetter!

Ist der Ball rund?

Hau ab!

Bemerkung: Was eine Aussage ist und was nicht, ist natürlich strenggenommen relativ zu einer Sprache.

Außerdem: Sätze natürlicher Sprachen lassen oft Dinge offen, die meist mehr oder weniger selbstverständlich sind und/oder sie lassen verschiedene Deutungen zu. Gemeint ist die Definition so: Aussagen sind Sätze, die, gegeben eine bestimmte Deutung, entweder wahr oder falsch sind.

△ **„Wahr“ und „falsch“ heißen in der Logik *Wahrheitswerte*.**

39. Aussagen

Aus der Definition „Aussagen sind Sätze, die entweder wahr oder falsch sind“ folgen unmittelbar zwei Grundsätze der klassischen Logik:

- △ *Satz vom Widerspruch*
Keine Aussage ist zugleich wahr und falsch.

- △ *Satz vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur)*
Es gibt keine Aussage, die weder wahr noch falsch ist.

Während der Satz vom Widerspruch unproblematisch und weithin anerkannt ist, ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten erläuterungsbedürftig.

40. Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Es gibt in natürlichen Sprachen möglicherweise Beispiele für Aussagen, auf die der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht zutrifft:

Gregor ist glatzköpfig.

Auf Gregors langem Weg vom vollbeschopten Jugendlichen zum haarlosen Greis scheint es ein Stadium zu geben, in dem die Aussage „Gregor ist glatzköpfig“ *weder wahr noch falsch* ist. Es scheint aber merkwürdig, deshalb in Abrede zu stellen, dass „Gregor ist glatzköpfig“ in diesem Stadium eine Aussage ist.

Unter anderem deshalb kann man daran zweifeln, ob der Satz vom ausgeschlossenen Dritten für natürliche Sprachen gilt.

Weitere, anders geartete Beispiele für Aussagesätze, die möglicherweise weder wahr noch falsch sind, sind die folgenden:

Am 1.1.2050 wird es in Hannover schneien.

El Dorado ist ein Königreich.

Wohlgemerkt: Bei *all* diesen Fällen ist es sprachphilosophisch umstritten, ob die Aussagen wirklich in eine „Wahrheitswert-Lücke“ zwischen den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ fallen.

41. Zweiwertigkeit der Logik

In der klassischen Logik gehen wir trotzdem davon aus, dass jede Aussage entweder wahr oder falsch ist. Dies ist eben eine der Idealisierungen, die die Logik bei der Konstruktion ihrer formalen Sprachen vornimmt.

Es gibt auch Logiken, die diese Idealisierung unterlassen und für die der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt. Die führen dann für gewöhnlich einen dritten Wahrheitswert (z.B. „unbestimmt“) oder noch mehrere zusätzliche Wahrheitswerte ein.

Die Logiken, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten anerkennen, heißen deshalb auch *zweiwertige* Logiken. In dieser Vorlesung werden wir uns nur mit zweiwertigen Logiken beschäftigen.

42. Zusammengesetzte und atomare Aussagen

- △ **Aussagen, die aus Teilaussagen zusammengesetzt sind (d.h. aus Bestandteilen, die selbst wahr oder falsch sind), wollen wir *zusammengesetzte Aussagen* nennen.**

Am Donnerstag hat es geregnet und am Freitag hatte Hans keine Zeit.

Emma ist glücklich, weil die Sonne scheint.

- △ **Alle anderen Aussagen heißen *atomare Aussagen*.**

Es regnet.

Die Katze sitzt auf der Matratze.

Eine Aussage muss wohlgemerkt nicht kurz sein, um atomar zu sein.

An einem windstillen Sommertag eines unbestimmten Jahres, mehr als ein Jahrhundert nach der Gründung von Cornell, erklomm ein Mann, der vom Lügen lebte, den Hügel, um einen Drachen steigen zu lassen.

Entscheidend ist, dass sie nicht aus Bestandteilen zusammengesetzt ist, die für sich genommen Wahrheitswerte besitzen.

43. Wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen

Bei manchen zusammengesetzten Aussageverknüpfungen ergibt sich der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen.

Ein Beispiel:

Am Donnerstag hat es geregnet und am Freitag hatte Hans keine Zeit.

Wenn beide Teilaussagen wahr sind, ist die zusammengesetzte Aussage auch wahr.

Wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen falsch ist, ist auch die zusammengesetzte Aussage falsch.

Es genügt in diesem Beispiel, die Wahrheitswerte der Teilaussagen zu kennen, um den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage beurteilen zu können.

Dies ist ein Charakteristikum nicht nur dieses Beispielsatzes, sondern aller Aussagen, bei denen Teilaussagen durch die Konjunktion „und“ verbunden sind. Weil dabei der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage eine Funktion der Wahrheitswerte der Teilaussagen ist, heißen solche Verknüpfungen *wahrheitsfunktional*.

- △ **Eine Verknüpfung von Teilaussagen, bei der der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage allein aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen hervorgeht, heißt *wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfung*.**

44. Nicht-wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen

Nicht alle Aussagenverknüpfungen sind wahrheitsfunktional.

Emma ist glücklich, weil die Sonne scheint.

Hier genügt es nicht, die Wahrheitswerte der Teilaussagen

Emma ist glücklich.

und

Die Sonne scheint.

zu kennen, um die Gesamtaussage zu beurteilen.

45. Wahrheitsfunktionale und nicht-wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen

Weitere Beispiele für wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen:

Ich werde am Sonntag kommen oder (ich werde) eine Karte schicken.

Bielefeld liegt am Teutoburger Wald und (Bielefeld) ist die Metropole Ostwestfalens.

Weitere Beispiele für nicht-wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen:

Gisbert Schlüter schaute am Samstagabend Fußball, während seine Frau das Haus für immer verließ.

Dadurch, dass die mittlere Temperatur der Erde immer wärmer wird, steigt der Meeresspiegel immer weiter.

46. Das Ziel der Aussagenlogik

Das Ziel der Aussagenlogik ist es, diejenigen logischen Konstanten, die wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen sind, zu identifizieren, in einer formalen Sprache abzubilden und zu untersuchen.

Bevor wir die formale Sprache der Aussagenlogik kennenlernen, werden wir nun die wichtigsten wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfungen anhand von Beispielen aus der natürlichen Sprache betrachten.

47. Die Konjunktion

Die Konjunktion haben Sie bereits kennengelernt. Im Deutschen spielt das Wort „und“ die Rolle der Konjunktion. Beispiele:

Bielefeld liegt am Teutoburger Wald und (Bielefeld) ist die Metropole Ostwestfalens.

Am Donnerstag hat es geregnet und am Freitag hatte Hans keine Zeit.

Die Wahrheit der zusammengesetzten Aussage ergibt sich bei der Konjunktion gemäß der folgenden Regel aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen:

Dann und nur dann, wenn beide Teilaussagen wahr sind, ist auch ihre Konjunktion wahr.

48. Die Konjunktion

Die Konjunktion zweier Aussagen symbolisiert man in der Aussagenlogik durch das Zeichen „ \wedge “.

Entsprechend kann man die Regel, nach der sich der Wahrheitswert einer Konjunktion aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen ergibt, wie folgt ausbuchstabieren:

Wenn A wahr ist und B wahr ist, ist $A \wedge B$ wahr.

Wenn A wahr ist und B falsch ist, ist $A \wedge B$ falsch.

Wenn A falsch ist und B wahr ist, ist $A \wedge B$ falsch.

Wenn A falsch ist und B falsch ist, ist $A \wedge B$ falsch.

49. Die Konjunktion

Dafür hat sich eine übersichtliche Schreibweise eingebürgert, die man als *Wahrheitstafel* bezeichnet.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

50. Die Konjunktion

Achtung! „Und“ wird im Deutschen nicht immer als Aussagenverknüpfung verwendet:

Alfred und Ruth sind Geschwister.

Selbst dort, wo „und“ zur Verbindung von Teilaussagen verwendet wird, gibt es Ausnahmefälle, bei denen die Verknüpfung nicht eindeutig wahrheitsfunktional ist:

Die Ärzte entfernten die Mandeln und Hans wurde wieder gesund.

Solche Ausnahmen werden in der Aussagenlogik nicht erfasst. Mit der Konjunktion ist immer eine wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfung gemeint.

51. Die Adjunktion

Als Adjunktion bezeichnet man die Verknüpfung zweier Teilaussagen durch „oder“:

Frieda hat einen guten Job oder sie stammt aus einer wohlhabenden Familie.

Ich werde am Sonntag kommen oder (ich werde) eine Karte schicken.

Die Wahrheit der zusammengesetzten Aussage ergibt sich bei der Adjunktion gemäß der folgenden Regel aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen:

Dann und nur dann, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist, ist auch ihre Adjunktion wahr.

Anstelle von „Adjunktion“ verwenden manche Autoren auch das Wort „Disjunktion“.

52. Die Adjunktion

In der Logik symbolisiert man die Adjunktion durch das Zeichen „ \vee “, das für lateinisch „vel“ (=„oder“) steht.

(Merken: \vee , **o**ben offen, **o**der
 \wedge , **u**nten offen, **u**nd.)

Die Wahrheitstafel der Adjunktion sieht folgendermaßen aus:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

53. Die Adjunktion

Auch beim „Oder“ ist der Gebrauch in der natürlichen Sprache etwas komplexer als die angegebene Wahrheitstafel angibt. Manchmal wird nämlich „oder“ im Sinne des sogenannten *ausschließenden Oder* gebraucht:

Ich werde nachher eine Flasche Weißwein aus dem Keller mitnehmen, oder ich nehme den Prosecco aus dem Kühlschrank.

Beim ausschließenden Oder ist die zusammengesetzte Aussage dann und nur dann wahr, wenn genau eine Teilaussage wahr ist. Im Deutschen wird dies zumeist mit dem Zusatz „entweder“ ausgedrückt. Es hat also eine andere Wahrheitstafel als die eben genannte.

In der Aussagenlogik ist mit der Adjunktion immer das *einschließende Oder* gemeint, das durch die Wahrheitstafel auf der vorangehenden Folie charakterisiert ist.

54. Die Negation

Die Negation ist strenggenommen keine Aussagenverknüpfung, da sie nicht zwei Teilaussagen verknüpft, sondern auf eine Teilaussage angewendet wird:

Es ist nicht der Fall, dass Wasser ein Metall ist.

Zur Aussagenlogik gehört die Negation trotzdem, weil sie wahrheitsfunktional ist:

„Es ist nicht der Fall, dass Wasser ein Metall ist“ ist *wahr*, wenn „Wasser ist ein Metall“ *falsch* ist und „Es ist nicht der Fall, dass Wasser ein Metall ist“ ist *falsch*, wenn „Wasser ist ein Metall“ *wahr* ist.

Um den Wahrheitswert einer Negation zu bestimmen, genügt es, den Wahrheitswert der negierten Teilaussage zu kennen.

55. Die Negation

Die Regel, der die Negation folgt, ist also:

Eine Negation ist dann und nur dann wahr, wenn die negierte Teilaussage falsch ist.

Entsprechend kann man ihre Wahrheitstafel wie folgt angeben:

A	$\neg A$
w	f
f	w

56. Die Negation

Auch bei der Negation gibt es Besonderheiten zu beachten. Es gibt im Deutschen und in anderen natürlichen Sprachen nicht-wahrheitsfunktionale Verwendungen von „nicht“, um einzelne inhaltliche Aspekte einer Aussage zu negieren:

Nicht Herta Kortokrax-Johantobehrens fuhr mit dem Bus nach Ubbedissen.

Herta Kortokrax-Johantobehrens fuhr nicht mit dem Bus nach Ubbedissen.

Herta Kortokrax-Johantobehrens fuhr mit dem Bus nicht nach Ubbedissen.

Im Gegensatz dazu ist in der klassischen Aussagenlogik mit der Negation immer die Umkehrung des Wahrheitswertes gemeint.

Es ist nicht der Fall, dass Herta Kortokrax-Johantobehrens mit dem Bus nach Ubbedissen fuhr.

Als Bedeutung von „ \neg “ merken Sie sich deshalb am besten „es ist nicht der Fall, dass“.

57. Die Subjunktion

In der Aussagenlogik spielen noch zwei weitere wahrheitsfunktionale Verknüpfungen eine Rolle, die wir zunächst anhand ihrer Regeln kennen lernen wollen. Die erste von ihnen heißt *Subjunktion* oder *materiale Implikation* und wird durch den Pfeil „ \rightarrow “ symbolisiert.

Bemerkung: „Anhand ihrer Regeln“ soll hier heißen: Anhand derjenigen Regeln, die für sie in den formalen Sprachen der Logik gelten.

$A \rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A falsch oder B wahr ist.

Sie können sich die Bedeutung von „ $A \rightarrow B$ “ daher am Besten als „nicht A, oder B“ merken.

Es ergibt sich die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

An der Wahrheitstafel erkennt man, dass man die Regel auch andersherum formulieren kann:

$A \rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist.

58. Die Subjunktion

In gewissem Sinne gibt die Subjunktion die Bedeutung der logischen Verknüpfung „wenn ..., dann“ wieder.

Wenn der Motor läuft, dann ist Benzin im Tank.

Die Beispielaussage ist nur dann falsch, wenn der Motor läuft und kein Benzin im Tank ist. Sofern man sie in allen anderen Fällen als wahr gelten lassen will, genügt sie der Wahrheitstafel von „ \rightarrow “.

59. Die Subjunktion

Man könnte deshalb versucht sein, sich die Bedeutung von „ \rightarrow “ als „wenn ..., dann“ zu merken. Aber dabei ist die größte Vorsicht geboten!

Woody Allen ist Brillenträger \rightarrow In Jena werden viele Brillengläser hergestellt.

Den Gesetzen der Subjunktion zufolge ist die obige Beispielaussage wahr. Dagegen würden wir den folgenden Satz normalerweise *nicht* als wahr bezeichnen:

Wenn Woody Allen Brillenträger ist, dann werden in Jena viele Brillengläser hergestellt.

Der Grund dafür ist, dass die Verknüpfung „wenn ..., dann“ in der deutschen Sprache nicht rein wahrheitsfunktional ist, sondern zusätzlich eine inhaltliche Relevanz des Vorderglieds für das Hinterglied behauptet.

60. Die Subjunktion

△ Die Subjunktion spiegelt näherungsweise den wahrheitsfunktionalen Gehalt von „wenn ..., dann“ wieder. Merken Sie sich als Bedeutung der Subjunktion, dass $A \rightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn A falsch ist oder B wahr.

Bemerkung: Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir eine komplexere formale Sprache kennenlernen (diejenige der Prädikatenlogik), mit deren Hilfe die Erfassung der normalsprachlichen Bedeutung von „wenn ..., dann“ in vielen Fällen deutlich besser gelingt.

Es genügt also, zu wissen, dass A falsch ist, um zu wissen, dass $A \rightarrow B$ wahr ist (ganz gleich, welchen Wahrheitswert B hat).

Ebenso genügt es, zu wissen, dass B wahr ist, um zu wissen, dass $A \rightarrow B$ wahr ist (ganz gleich, welchen Wahrheitswert A hat).

△ Merken Sie sich zusätzlich (was gleichbedeutend ist), dass $A \rightarrow B$ genau dann falsch ist, wenn A wahr ist und B falsch.

Übrigens wird das Vorderglied einer Subjunktion *Antecedens* genannt, das Hinterglied *Konsequens*.

61. Die Bisubjunktion

Die letzte wahrheitsfunktionale Verknüpfung, die wir kennen lernen, ist die Bisubjunktion, die durch das Zeichen „ \leftrightarrow “ symbolisiert wird.

Die Bisubjunktion zweier Aussagen ist dann und nur dann wahr, wenn beide denselben Wahrheitswert haben.

Die Wahrheitstafel der Bisubjunktion sieht deshalb folgendermaßen aus:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

62. Die Bisubjunktion

Die Bisubjunktion bildet in einem gewissen Sinn den wahrheitsfunktionalen Gehalt von Aussagenverknüpfungen wie „genau dann, wenn ...“ und „dann und nur dann, wenn“ ab.

Doch ist hier aus denselben Gründen wie bei der Bisubjunktion äußerste Vorsicht geboten! Die genannten Wendungen haben in der deutschen Sprache noch zusätzliche, nicht-wahrheitsfunktionale Bedeutungskomponenten, wie man am folgenden Beispiel sieht:

Der Papst ist ein Mann \leftrightarrow Der Mond umkreist die Erde.

Der Papst ist genau dann ein Mann, wenn der Mond die Erde umkreist.

63. Beispiel: Ein aussagenlogisches Argument

Um schon jetzt einen Eindruck davon zu gewinnen, wie die Aussagenlogik das Phänomen deduktiv gültiger Argumente zu erklären helfen kann, betrachten wir ein Beispiel für ein aussagenlogisches Argument.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

An der Wahrheitstafel der Subjunktion können wir folgende Beobachtung anstellen:

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Im einzigen Fall, in dem sowohl „ $A \rightarrow B$ “ als auch „ A “ wahr sind, ist auch „ B “ wahr. Das liegt an der Art und Weise, wie die wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfung „ \rightarrow “ funktioniert. Deshalb müssen bei allen Argumenten in AL, die diese Form aufweisen und bei denen beide Prämissen wahr sind, auch die Konklusionen wahr sein. Daher ist das obige Argument deduktiv gültig.

Analog sind auch entsprechende natürlichsprachliche Argumente deduktiv gültig:

Wenn Lisa die Klausur bestanden hat, bekommt sie den Schein.
 Lisa hat die Klausur bestanden.

 Lisa bekommt den Schein.

64. Beispiel: Ein aussagenlogisches Argument

Betrachten Sie dagegen das folgende Argument:

$A \rightarrow B$
 B

 A

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Anhand der Wahrheitstafel wird deutlich, dass es auch möglich ist, dass „ $A \rightarrow B$ “ und „ B “ beide wahr sind, „ A “ aber zugleich falsch. Es handelt sich deshalb um kein deduktiv gültiges Argument.

Entsprechend ist auch das analoge normalsprachliche Argument *nicht* gültig:

Wenn Peter faul war und nicht gelernt hat, ist er durch die Klausur durchgefallen.
 Peter ist durch die Klausur durchgefallen.

 Peter war faul und hat nicht gelernt.

65. Objekt- und Metasprache

Nun, da wir die wichtigsten wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfungen kennen und ahnen, wie sie funktionieren, können wir beginnen, uns mit der formalen Sprache der Aussagenlogik zu beschäftigen. Vorher müssen wir noch einige Begriffe klären.

„Kiel“ besteht aus vier Buchstaben.

Handelt dieser Satz von der Stadt Kiel? Nein, er handelt vom *Namen* der Stadt Kiel. Dies ist ein wichtiger Unterschied, der in der Philosophie so ausgedrückt wird: „Kiel“ wird im obigen Beispielsatz nicht *verwendet*, sondern *erwähnt*. Im folgenden Satz wird „Kiel“ dagegen verwendet:

Kiel hat viele interessante Sehenswürdigkeiten.

66. Objekt- und Metasprache

Dass ein sprachlicher Ausdruck nur erwähnt und nicht verwendet wird, muss durch Anführungszeichen gekennzeichnet werden.

Die Anführungszeichen machen aus einem Ausdruck, der sich beispielsweise auf eine Stadt bezieht, einen Ausdruck, der sich auf den Namen einer Stadt bezieht:

Kiel

„Kiel“

67. Objekt- und Metasprache

Wir sprechen in der Logik *über* Ausdrücke formaler Sprachen, benutzen dafür aber die deutsche Sprache. Die Ausdrücke aus den formalen Sprachen können wir dabei in den deutschsprachigen Sätzen nur erwähnen, nicht verwenden.

In der Logik nennt man die (normalerweise formale) Sprache, über die man spricht, die *Objektsprache*, die Sprache, in der man Aussagen über die Objektsprache spricht, heißt *Metasprache*.

Bei der informellen Vorstellung der Aussagenverknüpfungen habe ich diese Trennung nicht streng durchgehalten (weil wir ja noch keine formale Sprache eingeführt hatten). Von jetzt an werden wir aber streng zwischen Objekt- und Metasprache trennen und darauf achten, Ausdrücke dort, wo sie erwähnt und nicht verwendet werden, in Anführungszeichen zu setzen.

Nur in Tabellen und wenn wir Ausdrücke oder Sätze der Objektsprache in einer eigenen Zeile absetzen, verzichten wir der Übersichtlichkeit halber auf Anführungszeichen.

68. Objekt- und Metasprache

Beispiele für die Unterscheidung von Erwähnen und Verwenden bzw. Objekt- und Metasprache:

Richtig:

„Torsten“ ist zweisilbig.

Wenn „ $A \rightarrow B$ “ falsch ist, muss „B“ falsch sein.

Der Satz „Schnee ist weiß“ ist genau dann wahr, wenn Schnee weiß ist.

Bemerkung: Hier sieht man, dass Objekt- und Metasprache nicht unbedingt unterschiedliche Sprachen sein müssen.

Falsch:

„ $2 + 2 = 1 + 3$ “

Kiel besteht aus vier Buchstaben.

„Die größte Stadt Ostwestfalens“ bezieht sich auf „Bielefeld“.

In der Logik und in anderen Disziplinen, die sich mit Sprachen beschäftigen, unterscheidet man zwischen Syntax und Semantik.

- △ **In der *Syntax* geht es um die formalen Beziehungen der sprachlichen Zeichen zueinander. Für formale Sprachen bedeutet das: Welches sind die Grundzeichen der formalen Sprache? Und wie bildet man daraus die komplexen Ausdrücke und Sätze der Sprache?**

Entsprechend werden solche Aspekte einer Sprache, die allein den formalen Aufbau der Ausdrücke aus den Grundzeichen und nicht deren Bedeutung betreffen, *syntaktische* Aspekte der Sprache genannt.

- △ **In der *Semantik* geht es um die Bedeutungen der Ausdrücke und Sätze einer Sprache. Für formale Sprachen bedeutet das: Welches sind die Bedeutungen der Grundzeichen der formalen Sprache? Und wie ergeben sich aus diesen Bedeutungen die Bedeutungen der komplexen Ausdrücke und Sätze der Sprache?**

Entsprechend werden solche Aspekte einer Sprache, die wesentlich die Bedeutungen der Ausdrücke und Sätze betreffen, *semantische* Aspekte der Sprache genannt.

70. **Die Syntax der Sprache AL**

Damit kommen wir nun zur formalen Sprache der Aussagenlogik, die wir auch kurz die Sprache AL nennen werden; wir beginnen mit der Syntax.

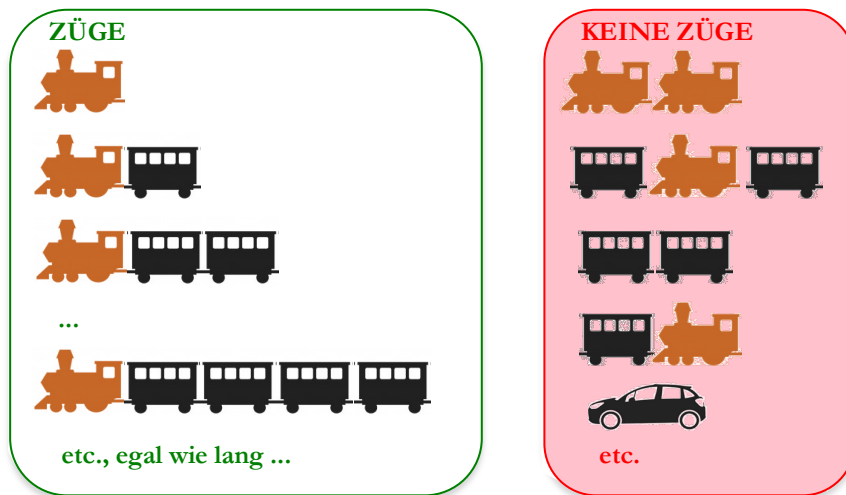
Die Sprache AL ist aus den folgenden Grundzeichen aufgebaut:

- ▶ *Atomare Sätze.* Dies sind die Großbuchstaben „A“, „B“, „C“, usw. sowie Großbuchstaben mit Numeralen als Indizes: „A₁“, „A₂“, usw., „B₁“, „B₂“ usw.
- ▶ *Junktoren.* Dies sind die Zeichen „ \wedge “, „ \vee “, „ \neg “, „ \rightarrow “ und „ \leftrightarrow “.
- ▶ *Hilfszeichen.* Dies sind die Klammerzeichen „(“ und „)“.



71. **Exkurs: Rekursive Definitionen**

Bei der nun folgenden Art und Weise, die Syntax der Sprache AL festzulegen, werden wir uns der Technik der rekursiven Definition bedienen. Um zu verstehen, wie sie funktioniert, probieren wir sie zunächst an einem anderen Beispiel aus.

In unserem Beispiel stellt sich uns die Aufgabe, zu definieren, was als ein Zug gelten soll. Es gibt genau einen Typ Lokomotiven und einen Typ Waggons. Wir haben ein bestimmtes Ziel, welche Dinge im Ergebnis durch unsere Definition als Züge ausgewiesen werden sollen und welche nicht. Dieses Ziel wird durch die folgende Abbildung vorgegeben:



Lösung durch rekursive Definition mit drei Regeln:

1. Regel:  ist ein Zug.
2. Regel: Wenn ... ein Zug ist, dann ist auch ...  ein Zug.
3. Regel: Außer den Gebilden, die durch Anwendung der 1. und 2. Regel (letztere beliebig häufig iteriert) zustande kommen, gibt es keine weiteren Züge.

72. Die Syntax der Sprache AL

Analog gehen wir jetzt auch vor, um zu definieren, welche Gebilde als Sätze von AL gelten.

Dabei ist das Ziel, dass unsere Definition die folgenden Grundideen durch präzise Definitionen erfasst:

- ▶ Die atomaren Sätze an und für sich, wie z. B.
Q
sollen bereits zu den Sätzen von AL zählen.
- ▶ Diese können mit Hilfe der Junktoren zu komplexeren Sätzen verbunden werden. (Alle Junktoren außer „¬“ sind binär, d. h. sie erfordern zwei Teilsätze, um eine Verbindung zu bilden.)

$$\neg A \quad A \wedge B \quad P \vee Q \quad A_1 \rightarrow A_2 \quad D \leftrightarrow E$$

- ▶ Zusammengesetzte Sätze können wiederum mit Hilfe von Junktoren verbunden werden. Und das immer wieder, in beliebiger Komplexität.

$$\neg A \rightarrow (A \wedge B) \quad (P \vee Q) \wedge ((A_1 \rightarrow A_2) \leftrightarrow (D \leftrightarrow E))$$

73. Die Syntax der Sprache AL

Genau dies präzise festzulegen, leistet die folgende rekursive Definition, die aus sieben Regeln besteht:

1. Jeder atomare Satz ist ein Satz von AL.
2. Wenn φ und ψ Sätze von AL sind, dann ist auch $(\varphi \wedge \psi)$ ein Satz von AL.
3. Wenn φ und ψ Sätze von AL sind, dann ist auch $(\varphi \vee \psi)$ ein Satz von AL.
4. Wenn φ ein Satz von AL ist, dann ist auch $\neg\varphi$ ein Satz von AL.
5. Wenn φ und ψ Sätze von AL sind, dann ist auch $(\varphi \rightarrow \psi)$ ein Satz von AL.
6. Wenn φ und ψ Sätze von AL sind, dann ist auch $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ein Satz von AL.

7. Außer den gemäß 1. bis 6. gebildeten gibt es keine weiteren Sätze von AL.

Hinweis: Wohlgermerkt, in den Formulierungen 2.-3. lautet die Bedingung, dass φ und ψ Sätze von AL sind, und nicht etwa, dass sie atomare Sätze sind. Die Bedingungen können also mehrmals hintereinander auf Sätze wachsender Komplexität angewendet werden. Solche Definitionen nennt man rekursiv.

74. Die Syntax der Sprache AL

Die Sätze von AL nennt man auch *wohlgebildete Sätze*. Zeichenketten, die den in der siebenteiligen Definition ausgedrückten syntaktischen Bedingungen nicht genügen, nennt man *nicht wohlgebildet*.

75. Wohlgebildete Sätze der Sprache AL

A

D_{421}

$(A \rightarrow Z_2)$

$(A \wedge \neg B)$

$((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$

$((\neg A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3)$

$((A_4 \wedge \neg A_5) \vee (\neg A_4 \wedge A_5)) \leftrightarrow ((\neg A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3)$

76. Hauptzeichen

Derjenige Junktor, der bei der schrittweisen Bildung des Satzes gemäß der siebenteiligen Definition als Letzter eingeführt wird, heißt *Hauptzeichen* des Satzes.

$((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$

$((\neg A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3)$

$((A_4 \wedge \neg A_5) \vee (\neg A_4 \wedge A_5)) \leftrightarrow ((\neg A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3)$

77. Nicht wohlgebildete Zeichenketten

$(A \rightarrow q)$

$(\varphi \rightarrow \psi)$

$(A \wedge B \vee C)$

$\neg(A)$

$(B \neg \rightarrow C)$

78. Klammerersparnis

Wie Sie gesehen haben, können die vielen Klammern einen Satz aus AL schnell sehr unübersichtlich machen. Deshalb gibt es drei einfache Klammerregeln:

1. Äußerste Klammern dürfen weggelassen werden.

Z.B.: „ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ “ statt „ $((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$ “

2. „ \wedge “ und „ \vee “ binden stärker als „ \rightarrow “ und „ \leftrightarrow “.

Z.B.: „ $A \wedge B \rightarrow C$ “ statt „ $(A \wedge B) \rightarrow C$ “,

„ $A \leftrightarrow C \vee D$ “ statt „ $A \leftrightarrow (C \vee D)$ “.

3. Bei iterierten Konjunktionen und Adjunktionen dürfen die Klammern weggelassen werden.

Z.B.: „ $A \wedge B \wedge C$ “ statt „ $(A \wedge B) \wedge C$ “,

„ $A \vee B \vee C \vee D$ “ statt „ $((A \vee B) \vee C) \vee D$ “.

Mit iterierten Verknüpfungen sind dabei zunächst nur solche Sätze gemeint, bei denen sich die Klammern auf der linken Seite sammeln.

79. Die Junktoren der Aussagenlogik

Zum Abschluss der Syntax hier noch eine Übersicht über die Junktoren der Aussagenlogik. Beachten Sie, dass die Junktoren in verschiedenen Büchern und Zeitschriften oft auch mit Hilfe anderer als der oben eingeführten Zeichen dargestellt werden. Die Tabelle enthält dafür einige gebräuchliche Beispiele in der rechten Spalte.

	Name der Verknüpfung; Lesarten	Abweichende Symbole
$A \wedge B$	Konjunktion; lies: „A und B“	\wedge & B, $A \cdot B$, AB
$A \vee B$	Adjunktion (Disjunktion); lies: „A oder B“	\vee B
$\neg A$	Negation lies: „nicht A“	$\sim A$, \bar{A}
$A \rightarrow B$	Subjunktion (materiale Implikation, Konditional); lies: „wenn A, so B“ oder „A Pfeil B“	$\supset B$
$A \leftrightarrow B$	Bisubjunktion; lies „A genau dann, wenn B“ oder „A Doppelpfeil B“	$\equiv B$

3. Aussagenlogik: Semantik

80. Die Semantik der Sprache AL

Die Sätze der Sprache AL bedeuten zunächst einmal nichts Bestimmtes. Um ihnen eine Bedeutung beizulegen, müssen wir sie *interpretieren*. Dies tun wir zum Beispiel, wenn wir die Sprache AL *anwenden* wollen, um bestimmte logische Zusammenhänge zu formalisieren. Wir nehmen dann eine intensionale

Interpretation vor.

△ Eine *intensionale Interpretation* der Sprache AL ist eine Zuordnung, bei der einzelnen atomaren Sätzen Aussagen aus einer anderen Sprache zugeordnet werden. Die atomaren Sätze übernehmen den Wahrheitswert der ihnen zugeordneten Aussagen.

Bemerkung: Nachdem Wahrheitswerte einiger atomarer Sätze durch eine intensionale Interpretation festgelegt sind, ergeben sich natürlich die Wahrheitswerte der aus ihnen zusammengesetzten Ausdrücke gemäß den Wahrheitstabellen der jeweiligen Junktoren. Dazu gleich mehr.

Hat man einen Teil der atomaren Sätze intensional interpretiert, dann man mit diesem Fragment der Sprache AL bestimmte Zusammenhänge formalisieren. Dazu ein Beispiel

81. Intensionale Interpretation

„A“ möge bedeuten „Helga Horstkötter ist zu Hause.“

„B“ möge bedeuten „Hermann Horstkötter ist zu Hause.“

„C“ möge bedeuten „Heike Horstkötter ist zu Hause.“

„D“ möge bedeuten „Mindestens zwei Horstkötters sind zu Hause.“

Wir können die Sprache AL verwenden, um einen Zusammenhang zwischen diesen vier Sätzen zu formulieren:

$$D \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

(Sofern es außer den genannten keine weiteren Horstkötters gibt, ist dies eine wahre Aussage.)

82. Extensionale Interpretationen

Wenn wir die *Logik* der Sprache AL untersuchen wollen, wollen wir aber gerade diejenigen Zusammenhänge zwischen den Sätzen untersuchen, die unabhängig von den konkreten Inhalten sind, für die die Aussagen und Teilaussagen stehen. Es geht uns um diejenigen Zusammenhänge, die bei *jeder beliebigen Interpretation der atomaren Sätze* gelten.

Erinnerung: In der Logik geht es um die inhaltsunabhängigen logischen Konstanten. Die logischen Konstanten der Aussagenlogik sind die Junktoren, d.h. die wahrheitsfunktionalen Aussagenverknüpfungen. Die atomaren Sätze bilden die inhaltlichen Elemente der Sprache ab.

Schon bei einem einzigen atomaren Satz gibt es natürlich unendlich viele mögliche intensionale Interpretationen. Die Situation ist aber viel einfacher, weil die Junktoren der Aussagenlogik alle *wahrheitsfunktional* sind. Die Wahrheitswerte aller Sätze aus AL ergeben sich deshalb aus den Wahrheitswerten der atomaren Sätze. Deshalb kommt es bei der Untersuchung der logischen Zusammenhänge zwischen den Sätzen aus AL nur auf die verschiedenen möglichen Wahrheitswerte der atomaren Sätze an.

83. Extensionale Interpretationen

△ Eine *extensionale Interpretation* oder *Bewertung* der Sprache AL ist eine Zuordnung, bei der jedem atomaren Satz genau ein Wahrheitswert zugewiesen wird.

Die Ausdrücke „intensional“ und „extensional“ gehen auf eine sprachphilosophische Unterscheidung zurück. „Intension“ bedeutet soviel wie „Sinn“.

Sie können sich eine Bewertung wie eine unendliche Tabelle vorstellen:

atomarer Satz	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	...
Wahrheitswert	w	f	f	w	w	f	w	f	f	w	w	w	f	w	...

Zum Glück interessieren wir uns immer nur für endlich viele endlich lange Sätze, in denen nur endlich viele atomare Sätze vorkommen, so dass wir uns auch mit endlichen (Teil-) Bewertungen begnügen können.

84. Semantische Regeln der Sprache AL

Die semantischen Regeln (d.h. die Regeln, nach denen sich die Bedeutung der komplexen Ausdrücke aus den Bedeutungen der einfacheren ergeben) sind bei der Sprache AL durch die Wahrheitstafeln der Junktoren bestimmt.

△ Ist eine Bewertung gegeben, dann ergeben sich, von den atomaren Sätzen ausgehend, die Wahrheitswerte der komplexeren Sätze von AL nach Maßgabe der Wahrheitstafeln der Junktoren.

85. Erinnerung: Wahrheitstafeln

A		$\neg A$
w		f
f		w

A		B		$A \wedge B$
w		w		w
w		f		f
f		w		f
f		f		f

A		B		$A \vee B$
w		w		w
w		f		w
f		w		w
f		f		f

A		B		$A \rightarrow B$
w		w		w
w		f		f
f		w		w
f		f		w

A		B		$A \leftrightarrow B$
w		w		w
w		f		f
f		w		f
f		f		w

86. Anwendung der semantischen Regeln

Bei der Anwendung der semantischen Regeln geht man von der Bewertung der atomaren Sätze aus und schreitet von dort aus zu den jeweils komplexeren Ausdrücken fort.

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \rightarrow (A \leftrightarrow \neg D)$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{w} & \underline{f} & \underline{w} & \underline{f} & \underline{w} & \underline{f} \\ \underbrace{\quad} & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} \\ \underline{f} & \underline{f} & & \underline{w} & & \underline{w} \\ \underbrace{\quad} & & & \underbrace{\quad} & & \\ \underline{f} & & & \underline{w} & & \\ & & & \underbrace{\quad} & & \\ & & & \underline{w} & & \end{array}$$

Die Feststellung des Wahrheitswertes eines zusammengesetzten Satzes von AL bei gegebener Bewertung nennt man auch *Wahrheitswertanalyse*.

87. Anwendung der semantischen Regeln

Bei der Wahrheitswertanalyse kann man die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Teilaussagen auch direkt unter die dazugehörigen Junktoren schreiben. Der Wahrheitswert des ganzen Satzes steht dann am Ende unter dem Hauptzeichen.

Beispiele:

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

$$\underline{w} \underline{f} \quad \underline{f} \underline{w} \quad \underline{f} \quad \underline{f} \quad \underline{w} \underline{f} \quad \underline{w}$$

$$(\neg A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_3$$

$$\underline{w} \underline{f} \quad \underline{f} \quad \underline{f} \quad \underline{w} \quad \underline{f}$$

88. Semantische Regeln der Sprache AL

Durch die Wahrheitswertanalyse lässt sich so bei gegebener Bewertung der Wahrheitswert jedes Satzes von AL bestimmen. Eine Bewertung legt also nicht nur die Wahrheitswerte der atomaren Sätze, sondern indirekt die Wahrheitswerte aller Sätze von AL fest.

Wenn man weiß, wie das funktioniert, kann man es sich schon in ersten, einfachen Anwendungen wie der folgenden zunutze machen:

89. Anwendungsbeispiel: Ein Rätsel

Im Land der Lügner und Wahrsager gibt es zwei Arten von Menschen: Lügner, die nur falsche Sätze äußern, und Wahrsager, die nur wahre Sätze äußern. Auf Ihrer Reise durch dieses Land begegnen Sie drei Einheimischen, Alfred, Berta und Cäsar. Alfred sagt: „Wenn ich ein Wahrsager bin, dann ist Berta eine Lügnerin.“ Berta sagt: „Ich bin genau dann eine Wahrsagerin, wenn Cäsar ein Wahrsager ist.“

Sind Alfred, Berta und Cäsar jeweils Wahrsager oder Lügner?

Zur Lösung des Rätsels nehmen wir eine intensionale Interpretation von AL vor, wobei die Wahrheitswerte der Aussagen uns zunächst unbekannt sind:

- A: Alfred ist ein Wahrsager.
- B: Berta ist eine Wahrsagerin.
- C: Cäsar ist ein Wahrsager.

Da im Land der Lügner und Wahrsager jeder entweder Wahrsager oder Lügner ist, bedeutet „ $\neg A$ “ damit automatisch „Alfred ist ein Lügner“ usw.

Was Alfred sagt, lässt sich damit so formalisieren:

$$(1) \quad A \rightarrow \neg B$$

Was Berta sagt, so:

$$(2) \quad B \leftrightarrow C$$

Diese Sätze müssen allerdings nicht wahr sein – (1) zum Beispiel ist es nur dann, wenn Alfred ein Wahrsager ist. Wenn Alfred ein Lügner ist, ist er falsch. Mit anderen Worten, er ist dann und nur dann wahr, wenn A wahr ist:

$$(3) \quad A \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B),$$

Entsprechend gilt für (2):

$$(4) \quad B \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

Gesucht ist also eine Bewertung von A, B, C, die sowohl (3) als auch (4) wahr macht. Diese können wir durch eine Wahrheitstafel finden, bei der wir in jeder Zeile die Wahrheitswerte der komplexen Sätze entsprechend der uns bekannten Regeln entwickeln:

A	B	C	$A \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B)$			$B \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$		
f	f	f	f	f	f	w	w	f
f	f	w	f	f	f	w	w	f
f	w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	f	w	w	w	w	w	f
w	f	w	w	w	w	w	w	f
w	w	f	w	f	w	f	f	w
w	w	w	w	f	w	f	f	w

Wie wir sehen, gibt es nur eine Möglichkeit, wie beide Sätze (3) und (4) wahr sein können, nämlich die Bewertung, unter der A und C wahr sind und B falsch ist.

Alfred und Cäsar sind Wahrsager, Berta ist eine Lügnerin.

4. Aussagenlogik: Logik

90. Deduktive Argumente und logische Form in AL

Erinnern Sie sich an die Definition der logischen Gültigkeit von Argumenten aus der Einführung:

Ein Argument heißt *deduktiv gültig*, wenn alle Argumente, die dieselbe logische Form und ausschließlich wahre Prämissen haben, auch eine wahre Konklusion besitzen.

Wie lässt sich diese Definition auf die Sprache AL anwenden?

Zunächst müssen wir uns klar darüber werden, was bei Aussagen und Argumenten der Sprache AL die logische Form ist.

91. Logische Form in AL

Die logischen Konstanten der Sprache AL sind natürlich die Junktoren. Daher gilt:

Zwei Sätze (oder Argumente) in AL haben dieselbe logische Form, wenn Sie in zweierlei Hinsicht übereinstimmen:

- ▶ Anordnung der Junktoren und
- ▶ Identität und Nicht-Identität unter mehrfach auftretenden atomaren Sätzen.

Z.B. haben die folgenden Sätze dieselbe logische Form:

$$A \wedge B \rightarrow A \vee C$$

$$D_{12} \wedge Z \rightarrow D_{12} \vee Q_4$$

Die folgenden zwei Sätze von AL haben *nicht* dieselbe logische Form:

$$A_1 \vee A_2 \leftrightarrow A_3 \vee A_4$$

$$D \vee E \leftrightarrow F \vee D$$

92. Logische Form in AL

Diese Bestimmung der logischen Form lässt sich auch auf Argumente in AL anwenden. Die folgenden zwei Argumente haben dieselbe logische Form.

$U \rightarrow V$	$R_2 \rightarrow A_{17}$
$V \rightarrow F$	$A_{17} \rightarrow G$
<hr/>	<hr/>
$U \rightarrow F$	$R_2 \rightarrow G$

93. Logische Form in AL

$U \rightarrow V$	$R_2 \rightarrow A_{17}$
$V \rightarrow F$	$A_{17} \rightarrow G$
<hr/>	<hr/>
$U \rightarrow F$	$R_2 \rightarrow G$

Prämissen und Konklusionen von Argumenten derselben logischen Form können unterschiedliche Wahrheitswerte haben. Aber es ist klar, dass dies nicht an den unterschiedlichen Bezeichnungen der atomaren Sätze liegt, sondern nur an ihren unterschiedlichen *Bewertungen*.

Wenn man sich also fragt, ob ein AL-Argument X deduktiv gültig ist, kann man sich deshalb sparen, alle Argumente, die dieselbe Form wie X haben und all ihre verschiedenen möglichen Bewertungen zu betrachten. Es genügt, alle verschiedenen Bewertungen von X selbst zu untersuchen, denn bei allen anderen AL-Argumenten mit derselben Form werden genau dieselben Wahrheitwert-Muster auftreten.

94. Deduktiv gültige Argumente in AL

Wenn man prüfen will, ob alle Argumente, die dieselbe logische Form wie ein gegebenes Argument und ausschließlich wahre Prämissen haben, auch eine wahre Konklusion besitzen, genügt es deshalb, alle verschiedenen möglichen *Bewertungen* des Arguments zu prüfen.

△ Ein Argument in AL heißt *deduktiv gültig*, wenn unter allen Bewertungen, bei denen sämtliche Prämissen des Arguments wahr sind, auch die Konklusion wahr ist.

Erinnerung: Man sagt dann auch, dass die Konklusion aus den Prämissen *logisch folgt*.

95. Das Zeichen „ \models “

Um die Beziehung der logischen Folgerung auszudrücken, verwendet man oft das Zeichen „ \models “.
Z.B.:

$$U \rightarrow V, V \rightarrow S \models U \rightarrow S$$

$$A \wedge B \models A$$

Wohlgemerkt: „ \models “ ist kein Zeichen, das zur Sprache AL gehört, sondern als Abkürzung für die metasprachliche Formulierung „Aus ... folgt logisch ...“ zu verstehen.

Deshalb müsste man strenggenommen Anführungszeichen verwenden und schreiben „ $U \rightarrow V$ “, „ $V \rightarrow S$ “ \models „ $U \rightarrow S$ “.
Diese Anführungszeichen werden aber gemeinhin aus Bequemlichkeit weggelassen.

96. Deduktiv gültige Argumente in AL

Ob ein Argument deduktiv gültig ist oder nicht, kann man deshalb überprüfen, indem man alle Bewertungen des Arguments ausprobiert. Am übersichtlichsten geschieht dies in Form einer Wahrheitstafel. Beispiel:

$$\begin{array}{l} U \vee V \\ \neg V \\ \hline U \end{array}$$

Bewertungen		Prämissen		Konklusion
U	V	$U \vee V$	$\neg V$	U
w	w	w	f	w
w	f	w	w	w ✓
f	w	w	f	f
f	f	f	w	f

Das Argument ist deduktiv gültig, wenn in jeder Zeile, in der alle Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist.

$$\begin{array}{ll} U \vee V & X_{17} \vee J_2 \\ \neg V & \neg J_2 \\ \hline U & X_{17} \end{array}$$

Wohlmerkt: Das Ergebnis unserer Überprüfung bedeutet, dass *alle Argumente*, die dieselbe logische Form wie das Beispiel haben, deduktiv gültig sind. Die logische Form unseres Beispielsarguments hat einen Namen, sie heißt *disjunktiver Syllogismus*.

97. Deduktiv gültige Argumente in AL

Wichtig ist, dass *alle* möglichen unterschiedlichen Bewertungen der Formel in der Wahrheitstafel auftreten. Bei n verschiedenen atomaren Sätzen werden 2^n Zeilen erforderlich.

Im folgenden Beispiel treten drei verschiedene atomare Sätze auf, man braucht also eine achtzeilige Wahrheitstafel.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

Auch diese Argumentform ist so wichtig, dass sie einen Namen hat: Sie heißt *hypothetischer Syllogismus*.

Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass jeder hypothetische Syllogismus ein deduktiv gültiges Argument ist.

Bewertungen			Prämissen		Konklusion
A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow C$
w	w	w	w	w	w ✓
w	w	f	w	f	f
w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	w	w	w	w ✓
f	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w ✓
f	f	f	w	w	w ✓

98. Deduktiv gültige Argumente in AL

Wenn Sie das Wahrheitstafelverfahren auf ein Argument anwenden, das nicht deduktiv gültig ist, werden Sie auf mindestens eine Zeile stoßen, bei der alle Prämissen wahr sind, nicht aber die Konklusion.

$$\begin{array}{l} A_1 \rightarrow A_2 \\ A_2 \\ \hline A_1 \end{array}$$

Bewertungen		Prämissen		Konklusion
A_1	A_2	$A_1 \rightarrow A_2$	A_2	A_1
w	w	w	w	w ✓

w	f	f	f	w
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

99. Aussagenlogische Gültigkeit

Ein Argument der natürlichen Sprache, das übersetzt in die Sprache AL ein deduktiv gültiges Argument ergibt, heißt *aussagenlogisch gültig*.

Es folgen einige typische aussagenlogisch gültige Argumente. Die Formen dieser Argumente sind so gebräuchlich, dass sich Namen für sie eingebürgert haben.

100. Gebräuchliche Formen aussagenlogisch gültiger Argumente

Modus Ponens

Wenn ich rauche, habe ich ein schlechtes Gewissen.

Ich rauche.

Ich habe ein schlechtes Gewissen.

$A \rightarrow B$

A

B

Modus Tollens

Wenn es einen Sturm geben wird, fällt das Barometer.

Das Barometer fällt nicht.

Es wird keinen Sturm geben.

$A \rightarrow B$

$\neg B$

$\neg A$

Disjunktiver Syllogismus

Michael hat reiche Eltern oder einen guten Job.

Einen guten Job hat Michael nicht.

Also hat er reiche Eltern.

$$\begin{array}{l}
 A \vee B \\
 \neg B \\
 \hline
 A
 \end{array}$$

Konjunktiver Syllogismus

Es ist nicht der Fall, dass sowohl Frank-Walter Steinmeier als auch Olaf Scholz das höchste Staatsamt innehaben.

Frank-Walter Steinmeier hat das höchste Staatsamt inne.

Also hat Olaf Scholz nicht das höchste Staatsamt inne.

$$\begin{array}{l}
 \neg(A \wedge B) \\
 A \\
 \hline
 \neg B
 \end{array}$$

Hypothetischer Syllogismus

Wenn es regnet, wird die Erde nass.

Wenn die Erde nass wird, kommen die Regenwürmer.

Wenn es regnet, kommen die Regenwürmer.

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow B \\
 B \rightarrow C \\
 \hline
 A \rightarrow C
 \end{array}$$

Klassisches Dilemma

Wenn Neo die Pille schluckt, wird er unglücklich werden.

Wenn Neo die Pille nicht schluckt, wird er unglücklich werden.

Neo wird unglücklich werden.

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow B \\
 \neg A \rightarrow B \\
 \hline
 B
 \end{array}$$

101. **Logische Wahrheit**

Manche Sätze von AL sind unter jeder Bewertung wahr.

$$A \vee \neg A$$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

Ganz gleich, wie man „A“ interpretiert (extensional oder intensional), „ $A \vee \neg A$ “ ist notwendigerweise immer wahr.

102. Logische Wahrheit, Tautologien

△ Sätze von AL, die unter jeder Bewertung wahr sind, heißen *logisch wahr*.

△ Logisch wahre Sätze von AL nennt man auch *Tautologien*.

103. Logische Wahrheit

Einige logisch wahre Sätze von AL:

$$A \rightarrow A$$

$$A \leftrightarrow A$$

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Diese Tautologie wird manchmal auch Satz vom Widerspruch genannt, ebenso wie man „ $A \vee \neg A$ “ manchmal als Satz vom ausgeschlossenen Dritten bezeichnet. Das ist aber irreführend und eine typische Verwechslung von Objekt- und Metasprache. Die eigentlich so zu bezeichnenden Sätze (vgl. Teil 1) sind metasprachliche Behauptungen.

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

104. Logische Wahrheit und das Zeichen „ \models “

Man kürzt die Feststellung, dass ein Satz logisch wahr ist, mit Hilfe desselben Zeichens ab, das auch zur Bezeichnung der logischen Folgerung verwendet wird:

$$\models A \vee \neg A$$

Der Hintergrund dafür ist die Vorstellung, dass „ $A \vee \neg A$ “ voraussetzungslos wahr ist, also sozusagen bereits ohne Prämissen „aus nichts“ logisch folgt.

105. Logische Wahrheit

Tautologien kommen in beliebigen Komplexitätsgraden vor und müssen nicht auf den ersten Blick als

solche erkennbar sein.

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

Natürlich können Sie im Prinzip jeden Satz von AL mit Hilfe einer Wahrheitstafel daraufhin überprüfen, ob er logisch wahr ist.

Die Wahrheitstafel können Sie in einem vereinfachten Verfahren direkt unter dem Satz anlegen.

Schreiben Sie zunächst alle möglichen Bewertungen der auftretenden atomaren Sätze unter die ersten Vorkommnisse dieser Sätze.

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

w	w	w
w	w	f
w	f	w
w	f	f
f	w	w
f	w	f
f	f	w
f	f	f

Kopieren Sie diese dann unter die weiteren Vorkommnisse der jeweiligen atomaren Sätze.

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	w	w	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	w	f	f	w	f	f	f
f	f	w	f	f	f	w	w
f	f	f	f	f	f	f	f

Stellen Sie dann die Wahrheitswerte des Satzes unter allen Bewertungen fest, indem Sie jeweils von innen nach außen vorgehend die semantischen Regeln der Junktoren anwenden und die Zwischenergebnisse direkt unter den jeweiligen Junktor schreiben.

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w	w	w	w	f	w	f	f
w	w	f	w	w	w	w	f	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	w	w	w	f	w	w	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	f	w	w	w	f	w	f
f	w	f	w	w	w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f	w	f

Wenn unter dem Hauptzeichen überall „w“ steht, dann ist der Satz unter jeder Bewertung wahr und folglich eine Tautologie.

106. Logische Wahrheit und logische Folgerung

Wenn ϕ und ψ Sätze von AL sind, gilt immer: Aus ϕ folgt logisch ψ genau dann, wenn $\phi \rightarrow \psi$ ein logisch wahrer Satz ist.

Symbolisch: $\phi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \phi \rightarrow \psi$.

Beweis:

Wenn aus ϕ logisch ψ folgt, macht jede Bewertung, die ϕ wahr macht, auch ψ wahr. Unter jeder solchen Bewertung ist aber $\phi \rightarrow \psi$ wahr.

Wenn $\phi \rightarrow \psi$ ein logisch wahrer Satz ist, dann gibt es keine Bewertung, unter der ϕ wahr ist und ψ falsch. Dann folgt aber ϕ logisch aus ψ .

107. Tautologien folgen aus jeder Prämisse

Wenn Σ eine beliebige Menge von Sätzen von AL und ϕ eine aussagenlogische Tautologie ist, dann folgt ϕ logisch aus Σ .

Beweis:

Ist ϕ eine Tautologie, dann ist ϕ unter *jeder* Bewertung überhaupt wahr. Also ist ϕ auch unter jeder Bewertung wahr, die alle Sätze aus der Prämisenmenge Σ wahr macht. Das heißt aber, dass ϕ aus Σ logisch folgt.

108. Widersprüchliche Aussagen

Es gibt auch Aussagen, die unter jeder Bewertung falsch sind.

Z.B.:

$$A \wedge \neg A$$

$$(P \rightarrow Q) \wedge P \wedge \neg Q$$

109. Inkonsistente Aussagen(mengen)

△ Ein Satz von AL heißt *inkonsistent*, wenn er unter jeder Bewertung falsch ist.

Inkonsistente Sätze werden auch logisch falsch, kontradiktorisch oder widersprüchlich genannt.

△ Eine Menge Σ von Aussagen von AL heißt *inkonsistent*, wenn unter jeder Bewertung mindestens eine Aussage aus Σ falsch ist.

Dies entspricht unserer alltäglichen Redeweise von widersprüchlichen Aussagenmengen. Denn es bedeutet, dass die Aussagen der Menge Σ *unmöglich alle gleichzeitig wahr sein* können.

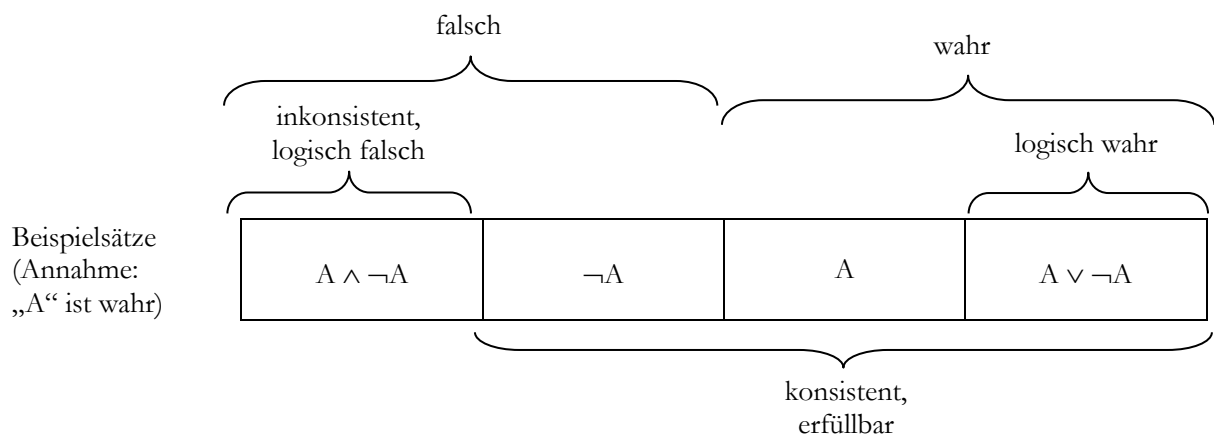
Beispiel einer inkonsistenten Aussagenmenge:

$\{„P \vee Q“, „\neg P“, „\neg Q“\}$

110. Einige logische Begriffe

Aussagen, die nicht inkonsistent sind, d.h. also die unter mindestens einer Bewertung wahr sind, heißen auch *konsistent* oder *erfüllbar*.

Hier eine Übersicht über einige logische Begriffe. Bei den Beispielsätzen gehen wir davon aus, dass eine Bewertung gegeben ist, unter der „A“ wahr ist.



111. Aus einer Inkonsistenz folgt jede Aussage

Wenn Σ eine inkonsistente Menge von Sätzen von AL ist und ϕ ein beliebiger Satz von AL, dann folgt ϕ logisch aus Σ .

Beweis:

Dass Σ inkonsistent ist, heißt, dass es keine Bewertung gibt, unter der alle Aussagen von Σ wahr sind. Das heißt auch, dass es keine Bewertung gibt, unter der die Aussagen aus Σ alle wahr sind und die Aussage ϕ falsch. Das ist aber dasselbe, wie zu sagen, dass alle diejenigen Bewertungen, die alle Aussagen von Σ wahr machen, auch ϕ wahr machen.

Auf den ersten Blick sieht dieser Beweis für Sie vielleicht aus wie ein schlechter Trick. Aber er ist korrekt. Es hängt an der Bedeutung der Klausel „Wenn alle Bewertungen, die jede der Prämissen wahr machen, auch die Konklusion wahr machen...“ – was ist, wenn überhaupt keine Bewertung die Konklusion wahr macht? Nach der konventionellen und in der Logik üblichen Verwendung von „alle“ ist die Bedingung dann erfüllt.

112. Logische Äquivalenz

Eine besondere Rolle spielen Tautologien, bei denen das Hauptzeichen die Bisubjunktion ist.

△ Wenn ϕ und ψ Sätze von AL sind und $\phi \leftrightarrow \psi$ logisch wahr ist, dann heißen ϕ und ψ *logisch äquivalent*. Man schreibt dann auch $\phi \equiv \psi$.

Ein ganz einfaches Beispiel für eine logische Äquivalenz ist:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

Bemerkung: Wieder gilt, dass „ \equiv “ kein objektsprachliches Zeichen ist, sondern eine metasprachliche Kurzschrift für „ $(\dots) \leftrightarrow (\dots)$ “ ist logisch wahr.

△ Zwei Sätze von AL ϕ und ψ sind genau dann logisch äquivalent, $\phi \equiv \psi$, wenn unter jeder Bewertung beide denselben Wahrheitswert haben.

Das folgt unmittelbar aus der Definition der logischen Äquivalenz und der Wahrheitstafel der Bisubjunktion.

113. Wichtige aussagenlogische Äquivalenzen

Idempotenz:

$$A \wedge A \equiv A \qquad A \vee A \equiv A$$

Doppelte Verneinung:

$$\neg\neg A \equiv A$$

114. Kommutativität

$$A \wedge B \equiv B \wedge A \qquad A \vee B \equiv B \vee A \qquad A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$$

115. Assoziativität

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \qquad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$$

116. Beispiel für den Beweis einer aussagenlogischen Äquivalenz

$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$$

w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	w	f	f	w	w	f	w	f	f
w	f	f	f	w	w	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	w	w	f	f	w	w	w
f	f	w	w	f	w	f	w	w	f	f
f	w	f	w	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	f	f	w	f	f	f	w	f

117. Distributivität

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

D.h.: Sie dürfen bei Und-oder-Kombinationen in *beiden* Fällen „ausklammern“.

Das ist ähnlich wie in der Arithmetik:

$$5 \cdot (10 + 2) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 2$$

Einen wichtigen Unterschied zur Arithmetik gibt es aber: Bei Und-oder-Kombinationen darf man in *beiden* Fällen ausklammern, egal ob die Oder-Verknüpfung innen und die Und-Verknüpfung außen steht oder umgekehrt.

Dagegen funktioniert bei der Arithmetik das Ausklammern nur einer Kombination von Operanden, bei der umgekehrten *nicht*: $5 + (10 \cdot 2) \neq (5 + 10) \cdot (5 + 2)$.

118. DeMorgansche Gesetze

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

119. Äquivalenzen der Subjunktion

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$$

Kontraposition:

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

120. Äquivalenzen der Bisubjunktion

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

121. Äquivalenzumformungen in AL

Die genaue Kenntnis der Äquivalenzen ist sehr nützlich, da Sie uns oft hilft, Sätze von AL umzuformen und so einfacher zu machen.

Dabei gilt: Die Äquivalenzumformungen dürfen sowohl innerhalb echter Teilsätze vorgenommen werden, als auch auf einer höheren Satzebene, bei der in den Wirkungsbereichen der betreffenden Junktoren selbst wieder komplexe Sätze stehen.

Damit, dass Umformungen innerhalb echter Teilsätze vorgenommen werden dürfen, ist z.B. folgendes gemeint:

Es gilt ...,	denn ...
$P \rightarrow R \wedge Q \equiv P \rightarrow Q \wedge R$	$\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
$F \leftrightarrow \neg\neg G \equiv F \leftrightarrow G$	$\alpha \equiv \neg\neg\alpha$

122. Äquivalenzumformungen in AL

Damit, dass Umformungen auf einer höheren Satzebene vorgenommen werden dürfen, ist z.B. folgendes gemeint:

Es gilt ...,	denn ...
$\neg(P \wedge Q) \vee (R \wedge S) \equiv P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$	$\neg\alpha \vee \beta \equiv \alpha \rightarrow \beta$
$(X \wedge Y \wedge (W \rightarrow Z)) \vee (X \wedge Y \wedge Q) \equiv X \wedge Y \wedge ((W \rightarrow Z) \vee Q)$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \equiv \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$

123. Äquivalenzumformungen in AL: Echte Teilsätze

Wichtig ist zu beachten, dass Äquivalenzen innerhalb eines Satzes nur auf echte Teilsätze angewandt werden dürfen – also nur auf Zeichenfolgen, die als Ganzes im Wirkungsbereich eines Junktors stehen – und nicht auf nur zufällig hintereinanderstehende Zeichenketten.

Mit anderen Worten: Sie müssen sehr sorgfältig auf die richtige Lesart der Sätze im Sinne der Klammerersparnisregeln achten!

Zum Beispiel:

$$(A \rightarrow B) \vee C \equiv \neg A \vee B \vee C$$

aber:

„ $A \rightarrow B \vee C$ “ ist selbstverständlich NICHT äquivalent zu „ $\neg A \vee B \vee C$ “,

denn „ $A \rightarrow B$ “ ist kein echter Teilsatz von „ $A \rightarrow B \vee C$ “.

124. Äquivalenzumformungen in AL

Durch geschickten Einsatz dieser Umformungsmöglichkeiten auf allen Ebenen lassen sich Sätze von AL oft sehr effizient vereinfachen oder übersichtlicher machen.

$$\begin{aligned} & (\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R) \\ & \equiv (\neg\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ & \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned}$$

$$\equiv P \vee (Q \wedge R)$$

$$\begin{aligned} & (\neg F \vee \neg G \vee H) \wedge (J \vee \neg F \vee \neg G) \\ & \equiv (\neg F \vee \neg G \vee H) \wedge (\neg F \vee \neg G \vee J) \\ & \equiv \neg F \vee \neg G \vee (H \wedge J) \\ & \equiv \neg(F \wedge G) \vee (H \wedge J) \\ & \equiv F \wedge G \rightarrow H \wedge J \end{aligned}$$

125. Ausdrückbarkeit von AL

Die dargelegten Möglichkeiten der Äquivalenzumformunegn machen klar, dass Sie in jedem Satz von AL jeden Junktore durch eine äquivalente Formulierung ersetzen können.

Z.B. „ $A \wedge B$ “ durch „ $\neg(\neg A \vee \neg B)$ “,
 „ $A \vee B$ “ durch „ $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ “,
 „ $A \rightarrow B$ “ durch „ $\neg(A \wedge \neg B)$ “,
 „ $A \leftrightarrow B$ “ durch „ $\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$ “.

Die drei unteren Zeilen zeigen gemeinsam, dass Sie jeden Satz von AL allein mit Hilfe der Junktoren „ \wedge “ und „ \neg “ ausdrücken können.

126. Ausdrückbarkeit von AL, Sheffer-Strich

Betrachten Sie nun einen neuen Junktore „ $|$ “, definiert durch seine Wahrheitstafel.

A	B	A B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

Es gilt:

$$A \wedge B \equiv \neg(A | B)$$

$$\neg A \equiv (A | A)$$

Da wir schon wissen, dass sich mit Hilfe von „ \wedge “ und „ \neg “ jeder Satz von AL ausdrücken lässt, folgt, dass jeder Satz von AL allein mit Hilfe des Junktors „ $|$ “ (sowie atomaren Sätzen und Klammern) formuliert werden kann.

Der Junktore „ $|$ “ heißt Sheffer-Strich nach dem Logiker Henry M. Sheffer. In der Schaltalgebra entspricht er dem NAND-Gatter, mit dessen Hilfe man jede beliebige logische Schaltung aufbauen kann.

127. Einige nützliche Regeln

In den folgenden Regeln sind mit φ , α und ω immer Sätze von AL gemeint.

Ist α logisch wahr, dann ist auch $\varphi \vee \alpha$ logisch wahr.

Beispiel: „ $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \vee (A \rightarrow (B \rightarrow A))$ “ ist logisch wahr, weil schon „ $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$ “ logisch wahr ist.

Beweis: Dass α logisch wahr ist, heißt, dass es unter jeder Bewertung wahr ist. Aber unter jeder Bewertung, unter der mindestens eines ihrer Adjunktionsglieder wahr ist, muss auch die ganze Adjunktion wahr sein.

Deshalb ist auch die Adjunktion $\varphi \vee \alpha$ unter jeder Bewertung wahr.

Ist ω logisch falsch (inkonsistent), dann hat $\varphi \vee \omega$ denselben Wahrheitswert wie φ .

Beispiel: „ $A \vee (B \wedge \neg B)$ “ hat denselben Wahrheitswert wie „ A “.

Ist α logisch wahr, dann hat $\varphi \wedge \alpha$ denselben Wahrheitswert wie φ .

Beispiel: „ $A \wedge (B \rightarrow B)$ “ hat denselben Wahrheitswert wie „ A “.

Ist ω logisch falsch, dann ist auch $\varphi \wedge \omega$ logisch falsch.

Beispiel: „ $A \wedge B \wedge \neg B$ “ ist logisch falsch.

Ist α logisch wahr, dann ist auch $\varphi \rightarrow \alpha$ logisch wahr.

Beispiel: „ $A \rightarrow (B \leftrightarrow B)$ “ ist logisch wahr.

Ist ω logisch falsch, dann ist $\omega \rightarrow \varphi$ logisch wahr.

Beispiel: „ $(B \wedge \neg B) \rightarrow A$ “ ist logisch wahr.

Wenn Sie einen Satz von AL nur unter einer einzigen ganz bestimmten Bewertung betrachten, dann dürfen Sie die sechs vorstehenden Regeln anwenden und überall „falsch“ statt „logisch falsch“ und „wahr“ statt „logisch wahr“ setzen.
Beispiel (letzte Regel): Wenn „A“ falsch ist, ist „ $A \rightarrow (B \vee C)$ “ wahr.

5. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Aussagenlogik

128. Das Wahrheitsbaumverfahren

Mit Hilfe von Wahrheitstafeln kann man grundsätzlich jeden Satz von AL auf seine logische Wahrheit hin überprüfen. Allerdings wächst die Größe der Tafeln exponentiell mit der Zahl der auftretenden atomaren Sätze. Für einen komplexen Satz mit 10 atomaren Sätzen bräuchte man schon eine Wahrheitstafel mit 1024 Zeilen. Glücklicherweise gibt es diverse Verfahren, die die Überprüfung von Sätzen von AL vereinfachen. Ein solches Verfahren besteht in der Konstruktion von *Wahrheitsbäumen* (oder *semantischen Tableaus*).

Die Grundidee beruht auf dem Prinzip des indirekten Beweises, denn mit einem Wahrheitsbaum zeigt man immer, dass ein bestimmter Satz oder eine bestimmte Menge von Sätzen *inkonsistent* ist.

129. Das Wahrheitsbaumverfahren: Grundidee

Wir wollen eine logische Wahrheit beweisen:

$$\models A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$$

Dem Prinzip des indirekten Beweises folgend, tun wir dies, indem wir nachweisen, dass die Annahme

1. $A \vee B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ **ist falsch**

inkonsistent ist. Wir nehmen dazu an, (1) träfe zu, und versuchen, daraus einen Widerspruch abzuleiten.

Wir wissen, dass eine Aussage der Form $\varphi \rightarrow \psi$ nur dann falsch ist, wenn das Antecedens wahr ist und das Konsequens falsch. Aus unserer Annahme (1) folgt also

2. $A \vee B$ **ist wahr** *und*
3. $\neg A \rightarrow B$ **ist falsch.**

Dieselbe Überlegung lässt sich nun erneut auf (3) anwenden, so dass wir sagen können:

4. $\neg A$ **ist wahr** *und*
5. B **ist falsch.**

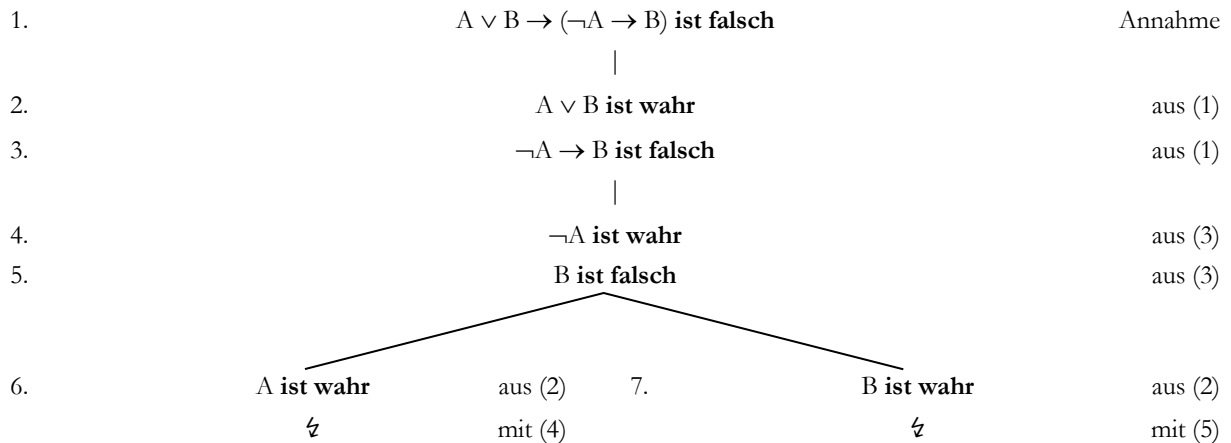
Was können wir aus (2) weiter folgern? Offenbar *muss* mindestens einer der folgenden zwei Umstände gelten, wenn (2) zutreffen soll:

6. A **ist wahr** *oder*
7. B **ist wahr.**

Obwohl wir nur wissen das (6) *oder* (7) zutreffen muss, haben wir damit die Widersprüchlichkeit der Annahme nachgewiesen, denn falls (6) der Fall ist, steht das im Widerspruch zu (4); falls (7) zutrifft, widerspricht das (5).

130. Das Wahrheitsbaumverfahren: Grundidee

Unsere Überlegungen kann man wie folgt schematisch zusammenstellen:



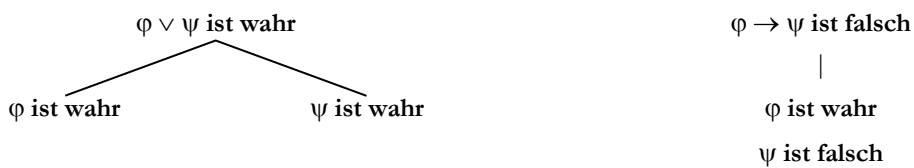
131. Das Wahrheitsbaumverfahren: Grundidee

Eine solche Struktur nennt man einen Wahrheitsbaum. Jeder Ast des Baums repräsentiert sozusagen einen Versuch, die Annahme(n) an seiner Wurzel als wahr zu interpretieren. Um eine wahrmachende Interpretationsmöglichkeit nachzuweisen, müssen alle Annahmen in einem Ast (einschließlich der Äste, aus denen er hervorgegangen ist) miteinander vereinbar sein. Wenn sich in einem Ast ein Widerspruch ergibt, nennen wir ihn „geschlossen“. Sind alle Äste eines Baums geschlossen, dann wissen wir, dass es keine Möglichkeit gibt, eine wahrmachende Interpretation zu entwickeln – die Annahme(nmenge) muss widersprüchlich sein.

Einen Ast verstehen wir so, dass er alle Stücke des Baums, aus denen er hervorgegangen ist, mit einschließt. Ein Ast ist also sozusagen der gesamte Weg von einem Endpunkt eines Wahrheitsbaums bis an seine Wurzel.

132. Das Wahrheitsbaumverfahren: Grundidee

Bei der Konstruktion des vorigen Baums haben wir zwei Prinzipien verwendet:



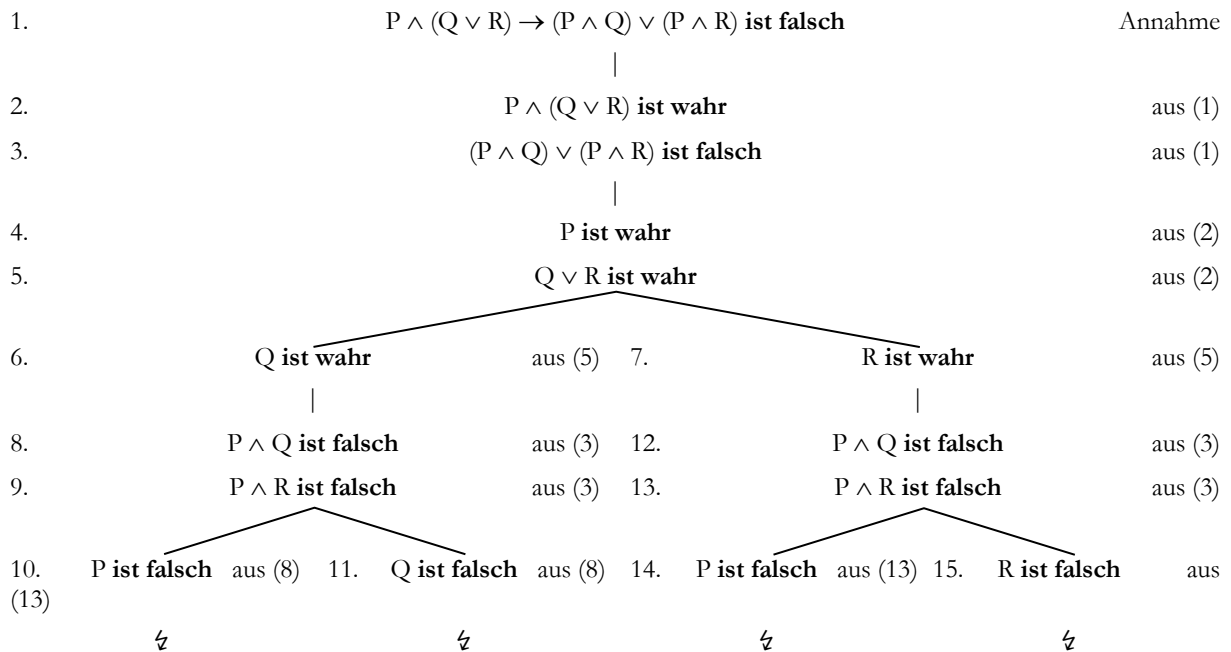
Diese Prinzipien lassen sich verallgemeinern, d.h. die linke Regel lässt sich in jedem Fall anwenden, um alle Interpretationsmöglichkeiten auszuentwickeln, die einen Satz mit „ \vee “ als Hauptzeichen wahr machen. Mit der rechten Regel kann man ganz allgemein ausentwickeln, was der Fall sein muss, wenn ein Satz mit „ \rightarrow “ als Hauptzeichen falsch sein soll.

Im Folgenden werden diese Regeln auf ein weiteres Beispiel angewandt, nämlich um zu zeigen:

$$\models P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

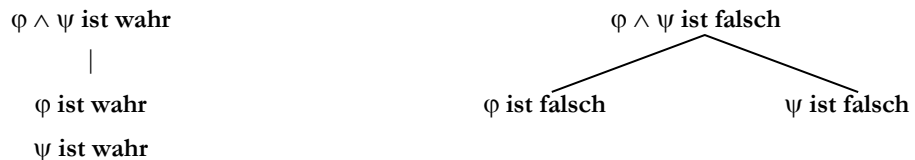
Wie vorhin entwickeln wir dazu den Wahrheitsbaum aus der Annahme, dass diese Aussage falsch ist, um zu zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

133. **Wahrheitsbäume: Zweites Beispiel**



134. **Wahrheitsbäume: Zweites Beispiel**

In diesem Beispiel wurden zwei weitere Regeln angewandt, nämlich für Aussagen, deren Hauptzeichen „ \wedge “ ist:

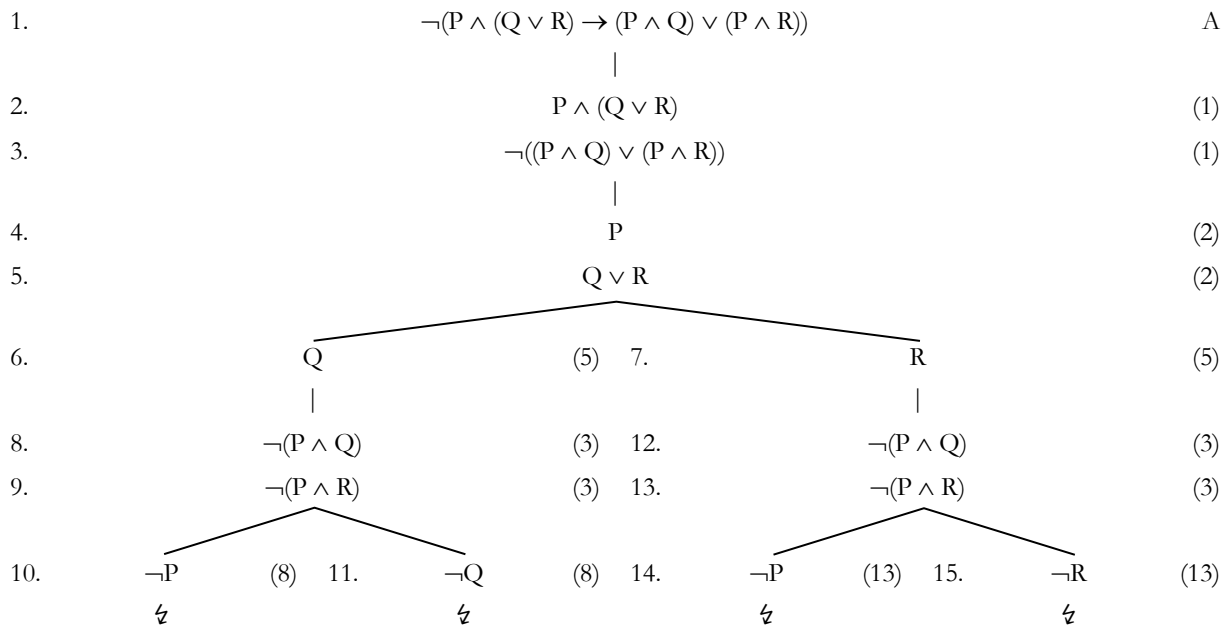


Solche Regeln gibt es für alle Junktoren, wie wir gleich sehen werden. Zunächst führen wir aber eine vereinfachte Schreibweise ein.

135. **Wahrheitsbäume: Vereinfachte Schreibweise**

Wegen der zweiwertigen Semantik von AL ist eine Annahme der Form „ φ ist falsch“ gleichwertig mit „ $\neg\varphi$ ist wahr“. Wir nutzen das aus, indem wir in Wahrheitsbäumen von jetzt an statt „ φ ist wahr“ nur kurz „ φ “ und statt „ φ ist falsch“ einfach „ $\neg\varphi$ “ schreiben.

136. Das zweite Beispiel in vereinfachter Schreibweise



137. Wie sind die Regeln für alle Junktoren begründet?

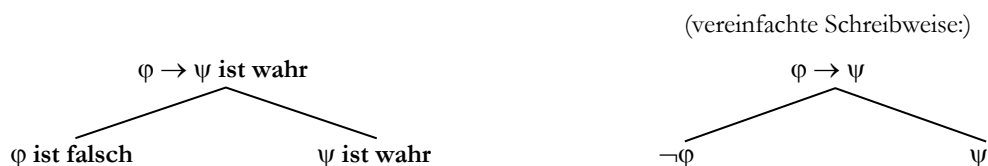
Wir suchen exemplarisch die Regeln für Sätze mit Hauptzeichen „ \rightarrow “. Betrachten wir die Wahrheitstafel:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir sehen, dass es nur eine Möglichkeit dafür gibt, dass „ $\varphi \rightarrow \psi$ “ falsch ist. Deshalb verzweigt sich für $\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ der Baum nicht und die Regel lautet:



Es gibt drei Fälle, in denen „ $\varphi \rightarrow \psi$ “ wahr ist, also würde man dafür vielleicht eine Aufspaltung in drei Äste erwarten. (Daran wäre im Prinzip nichts verkehrt.) Die drei Fälle lassen sich aber zusammenfassen: φ ist falsch *oder* ψ ist wahr. Daher lautet die Regel:

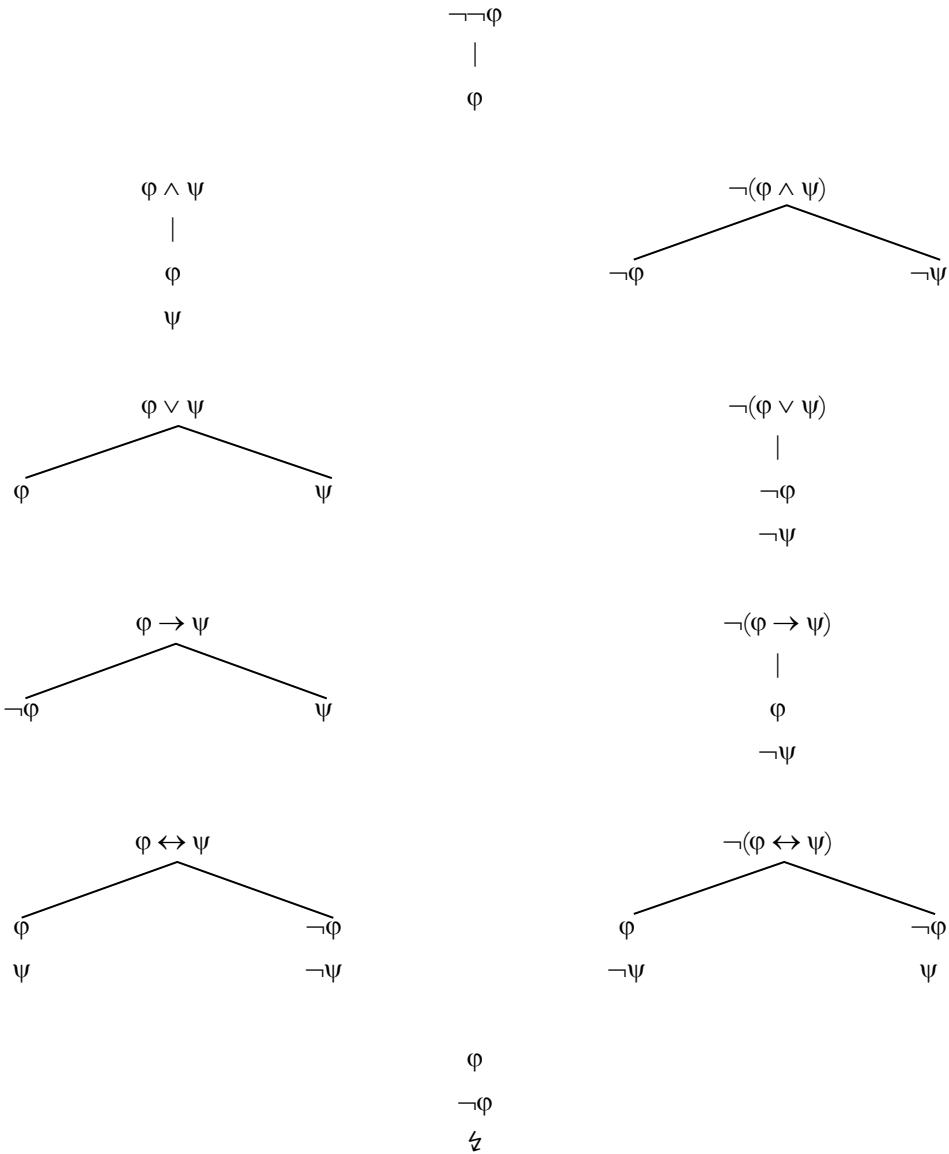


Eine dreifache Differenzierung in die Möglichkeiten der Wahrheitstafel ($\neg\varphi \psi, \neg\varphi \neg\psi, \varphi \psi$) würde

nichts Zusätzliches bringen, da die beiden Äste unserer Regel genau dieselben Möglichkeiten für Widersprüche und widerspruchsfreie Entwicklungen repräsentieren.

Auf diese Weise lassen sich Regeln für alle Junktoren finden, die im Folgenden zusammengestellt sind.

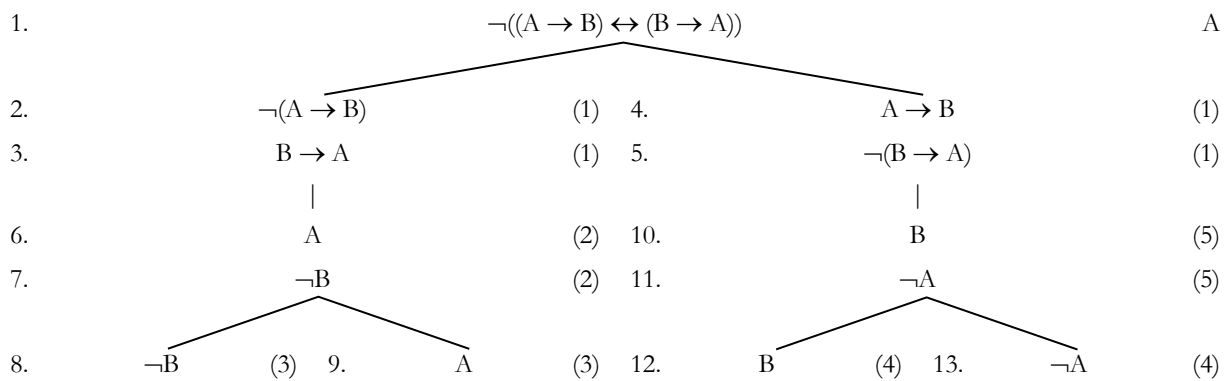
138. **Wahrheitsbäume: Alle Regeln für AL**



139. **Ein unabschließbarer Wahrheitsbaum**

Was passiert, wenn wir versuchen, einen Baum aus einer Aussage zu entwickeln, die *nicht* widersprüchlich ist? Versuchen wir einmal, die folgende, **falsche** Behauptung durch einen indirekten Beweis im Wahrheitsbaumverfahren nachzuweisen:

$$\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$



Wie wir sehen, können wir in diesem Fall keinen Ast des Baumes abschließen. Wir können keine Regel mehr auf einen Satz anwenden, auf die wir sie nicht schon angewendet hätten, und haben deshalb keine Aussicht darauf, noch etwas Neues in dem Baum zu erzeugen. Der Baum ist fertig ausentwickelt, ohne dass seine Äste geschlossen sind.

Wir können sogar zwei konsistente Interpretationen von „ $\neg((A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A))$ “ aus dem Baum ablesen, nämlich (auf der linken Seite des Baums) B falsch und A wahr, sowie (auf der rechten Seite) B wahr und A falsch. Diese Interpretationen bieten zugleich Gegenmodelle gegen die falsche Behauptung

$$\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

140. Grundeigenschaften des Wahrheitsbaumverfahrens für AL

△ **Jede Menge von Sätzen von AL, aus denen sich ein Wahrheitsbaum entwickeln lässt, dessen sämtliche Äste geschlossen sind, ist inkonsistent.**

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Korrektheit des Wahrheitsbaumverfahrens*.

△ **Aus jeder inkonsistenten Menge von Sätzen von AL lässt sich ein Wahrheitsbaum entwickeln, dessen sämtliche Äste geschlossen sind.**

Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens*.

Die Beweise von Korrektheit und Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens werden wir am Ende dieses Abschnitts führen.

141. Grundeigenschaften des Wahrheitsbaumverfahrens für AL

Außerdem gilt für das Wahrheitsbaumverfahren für AL die folgende Einsicht:

△ **Wenn wir jeden Satz im Baum außer den atomaren und negierten atomaren Sätzen für jeden unterhalb von ihm wachsenden Ast entwickelt haben und sich immer noch nicht alle Äste schließen lassen, dann gibt es für die Aussagenmenge an der Wurzel keinen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste geschlossen sind.**

Dieser Satz bedeutet, dass wir mit dem Wahrheitsbaumverfahren für AL in jedem Fall nach einer endlichen Zahl von Schritten fertig sind und dann wissen, ob die Annahmenmenge an der Wurzel des Satzes inkonsistent ist oder nicht.

Was heißt es dabei genau, einen Satz „für jeden unterhalb von ihm wachsenden Ast entwickelt“ zu haben? Es bedeutet, die entsprechende Regel auf ihn angewendet zu haben, so dass die Ergebnisse dieser Anwendung entweder direkt unterhalb vom selben Ast oder Stamm abzweigen, oder, wenn es vorher schon eine Verzweigung gibt, in jedem der abzweigenden Unteräste einmal angebracht werden. Das obige „zweite Beispiel“ für einen Wahrheitsbaum illustriert

dies gut: Da bei der Entwicklung von Satz (2) schon eine Aufspaltung des Baums stattgefunden at, muss danach der Satz (3) zweimal entwickelt werden: einmal auf der rechten und einmal auf der linken Seite des Baums.

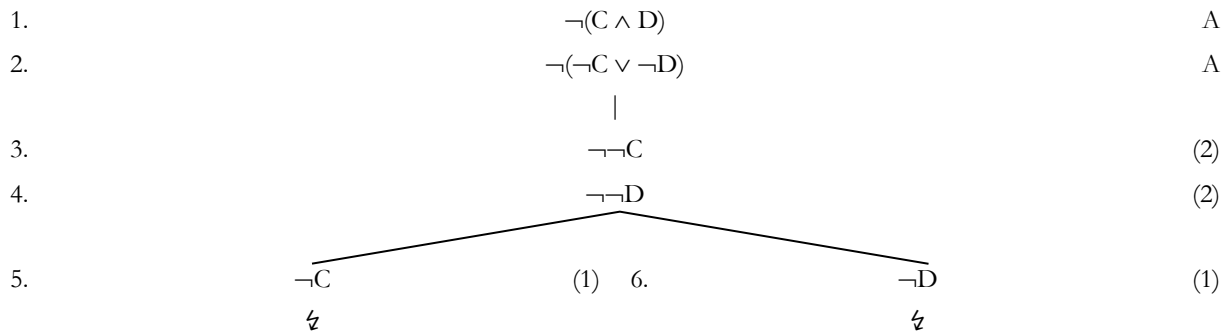
142. **Logische Folgerungen mit dem Wahrheitsbaumverfahren überprüfen**

Dass φ aus einer Menge Σ von Voraussetzungen logisch folgt, bedeutet, dass jede Bewertung, die alle Elemente aus Σ wahr macht, auch φ wahr macht – oder anders gesagt, dass es keine Interpretation gibt, die alle Aussagen aus Σ wahr, φ aber falsch machen würde. Wir können deshalb nachweisen, dass $\Sigma \models \varphi$, indem wir beweisen, dass die Voraussetzungen in Σ zusammengenommen mit der Negation von φ inkonsistent sind.

Im folgenden Beispiel wird also die Richtigkeit von

$$\neg(C \wedge D) \models \neg C \vee \neg D$$

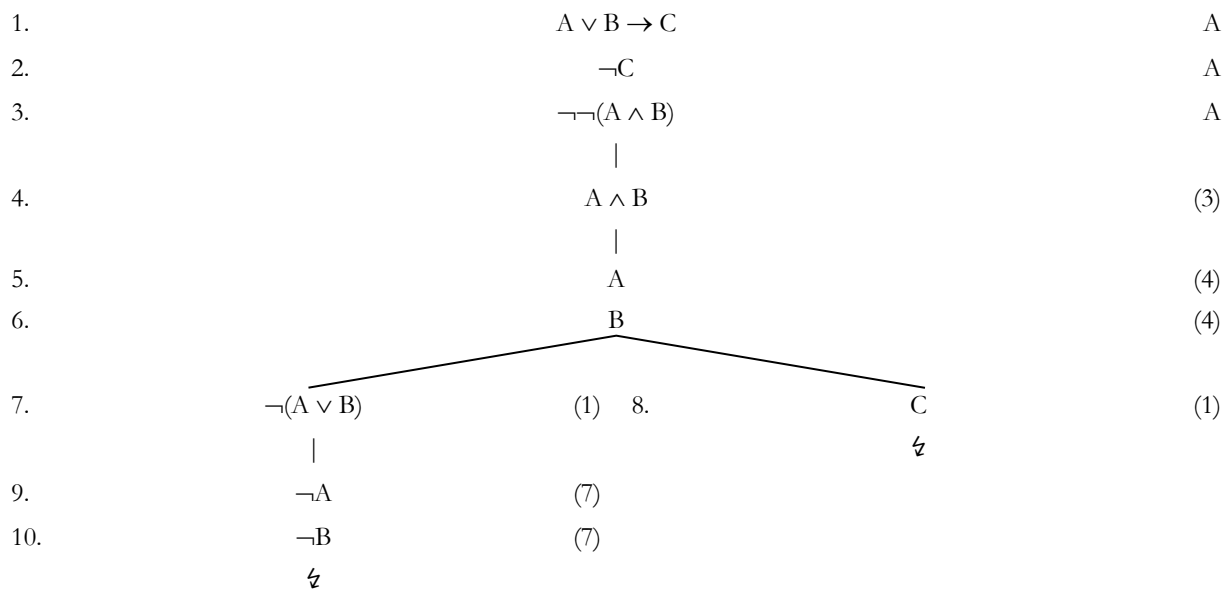
bewiesen.



143. **Logische Folgerungen mit dem Wahrheitsbaumverfahren überprüfen**

Als zweites Beispiel hier der Nachweis der Gültigkeit für den Schluss

$$\begin{array}{l} A \vee B \rightarrow C \\ \neg C \\ \hline \neg(A \wedge B) \end{array}$$



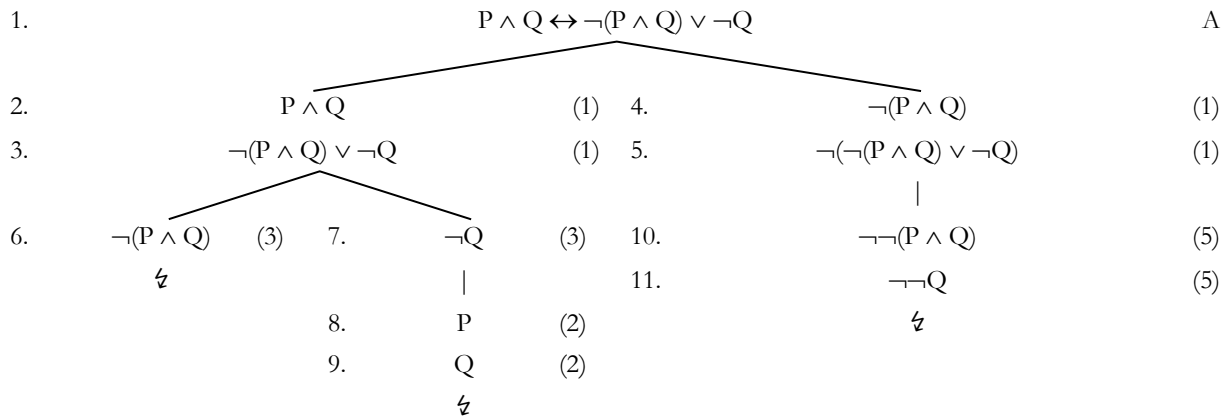
144. Verwendungsweisen des Wahrheitsbaumverfahrens

- △ Um die *logische Wahrheit* eines Satzes φ nachzuweisen,
 $\models \varphi$,
 entwickle aus der
 Annahme $\neg\varphi$
 einen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste abgeschlossen sind.

- △ Um eine *logische Folgerung* nachzuweisen,
 $\Sigma \models \varphi$,
 entwickle aus den
 Annahmen $\Sigma, \neg\varphi$
 einen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste abgeschlossen sind.

145. Die Ausführung des Wahrheitsbaumverfahrens: Praktische Hinweise

Hinweis 1: Wie der folgende Baum zeigt, ist es nicht immer notwendig, einen Ast bis in die atomaren Sätze auszuentwickeln, um ihn schließen zu können.

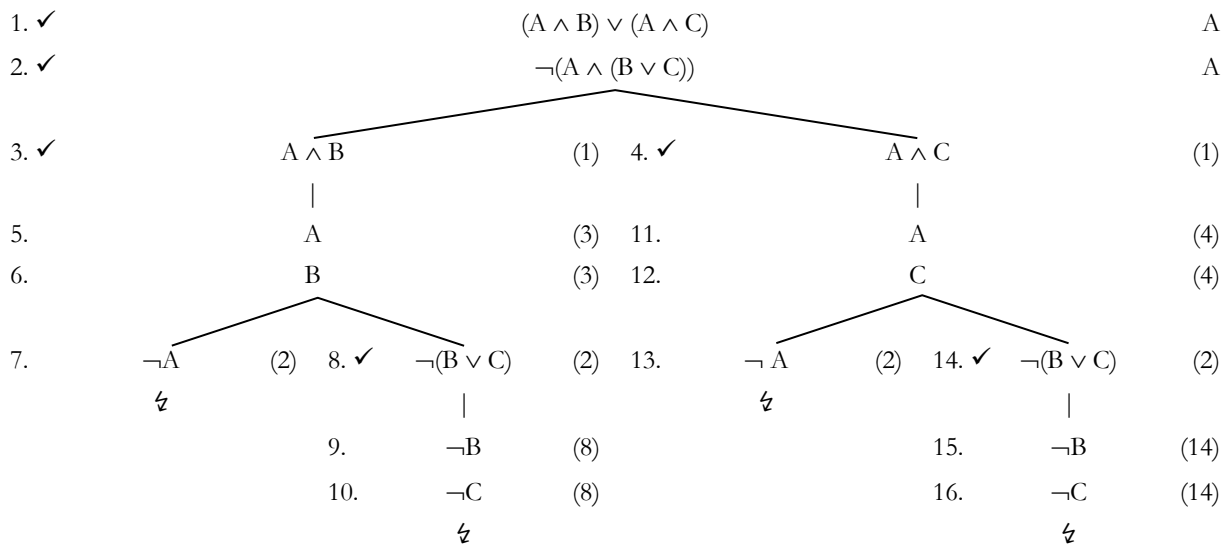


146. Die Ausführung des Wahrheitsbaumverfahrens: Praktische Hinweise

Hinweis 2: Damit man nicht vergisst, einen Satz des Baums zu entwickeln, kann man die bereits entwickelten Sätze mit Häkchen kennzeichnen.

Beispiel: Nachweis von

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \models (A \wedge (B \vee C))$$



Sehr wichtig ist, dass Sie hier das Häkchen bei Satz (2) *noch nicht* anbringen, nachdem Sie die Entwicklungsschritte (7) und (8) ausgeführt haben! Ein Satz muss für alle unterhalb von ihm wachsenden Äste entwickelt werden, deshalb sind wir mit Satz (2) erst fertig, nachdem wir auch die Schritte (13) und (14) unternommen haben. Erst dann darf das Häkchen bei „2.“ gesetzt werden.

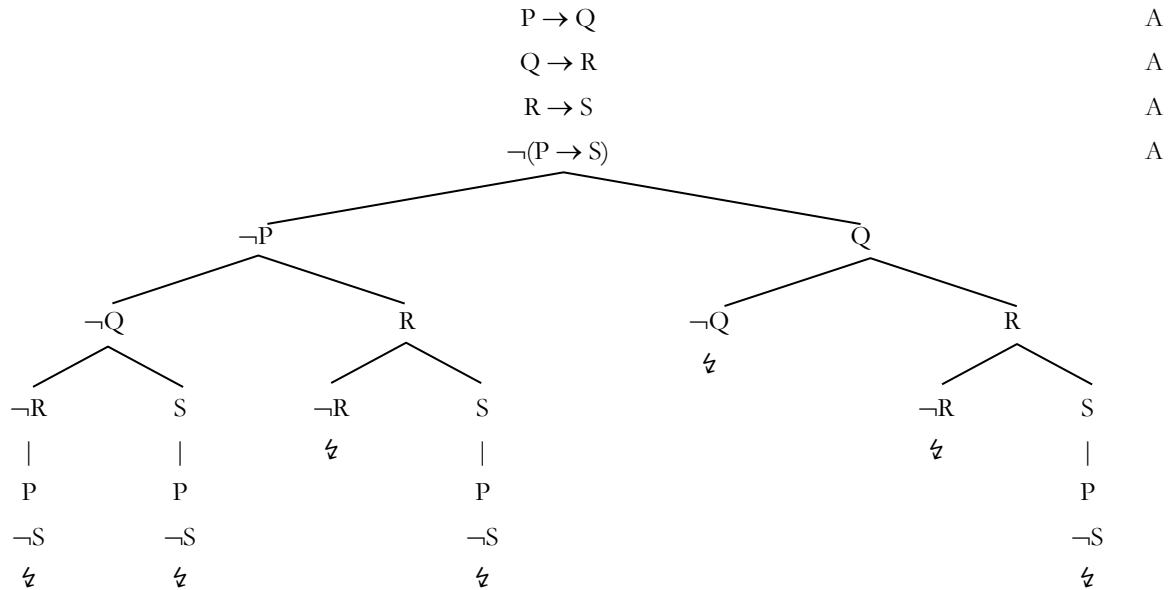
Sowohl die Häkchen als auch die Zahlen im Baum sind rein didaktische Hilfskonstruktionen, weswegen Sie im Folgenden weggelassen werden.

Hinweis 3: Um Arbeit und Tinte zu sparen, sollte man immer zuerst alle nichtverzweigenden Regeln anwenden.

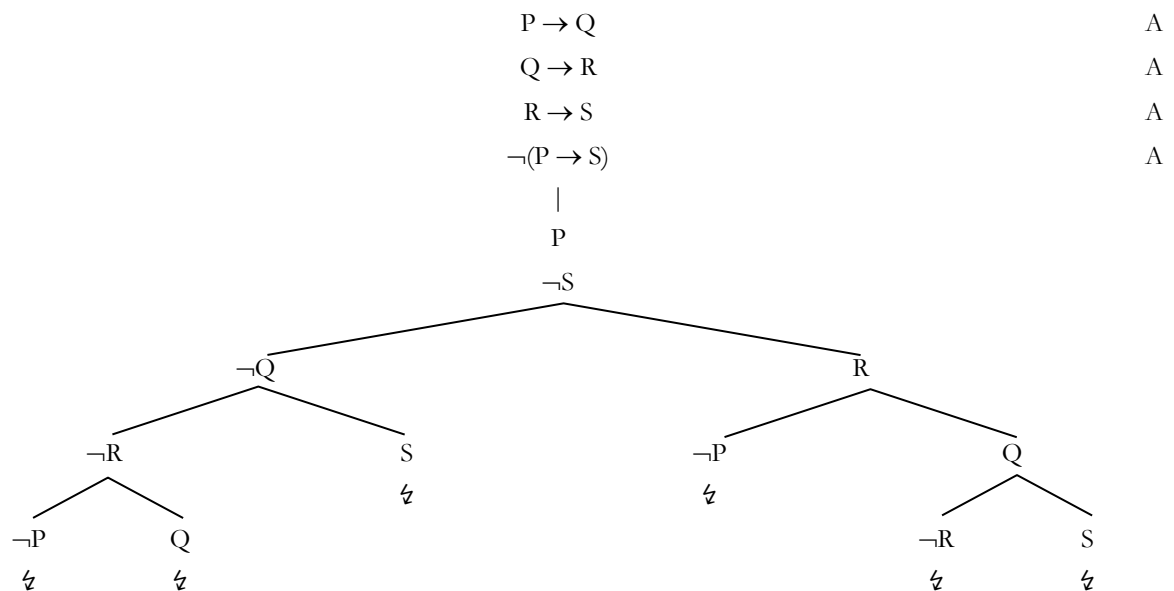
Vergleichen Sie dazu die beiden folgenden Entwicklungen zum Beweis von

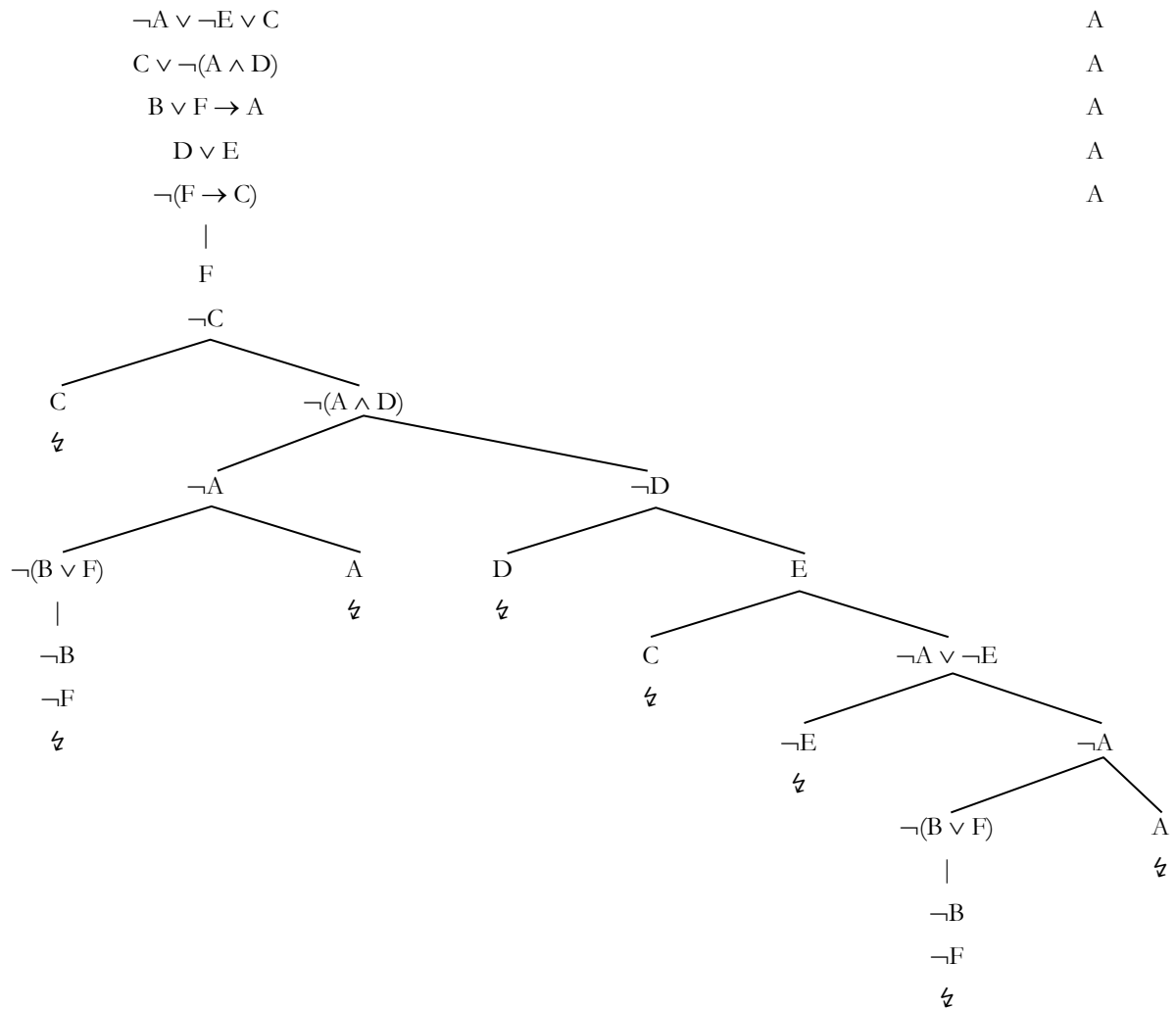
$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, R \rightarrow S \models P \rightarrow S$$

In der ersten Entwicklung halten wir uns *nicht* an Hinweis 3:



Dagegen wird im folgenden Baum Hinweis 3 berücksichtigt, was die Sache (hier zunächst nur ein wenig) vereinfacht:





150. Beweis der Korrektheit des Wahrheitsbaumverfahrens für AL

Korrektheit und Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens gelten sogar für unendliche Mengen von Sätzen von AL. Wir werden die Vollständigkeit aber nur für endliche Mengen beweisen, da der Beweis für unendliche Mengen deutlich komplizierter ist.

Beweise finden Sie auch beispielsweise in Beckermann 2003, Abschnitt 27.1 und Howson 1997, Kap.4. Ich lehne mich an die Darstellung der Beweise in Bostock 1997, Abschnitte 4.5-4.6, an.

Zu zeigen: Korrektheit des Wahrheitsbaumverfahrens:

Jede Menge von Sätzen von AL, aus denen sich ein Wahrheitsbaum entwickeln lässt, dessen sämtliche Äste geschlossen sind, ist inkonsistent.

Beweis:

Bei der Entwicklung jedes Baumes werden zwei Arten von Regeln angewandt:



(Δ ist die Menge aller übrigen, oberhalb dieser Entwicklung auf demselben Ast wie α stehenden Sätze. Zur Erinnerung: unter einem Ast verstehen wir immer den gesamten Weg von einem Endpunkt des Baumes bis zur Wurzel.)

- (V) Für alle verzweigenden Regeln gilt: Wenn Δ, α konsistent ist, dann ist Δ, α, β konsistent, *oder* es ist Δ, α, γ konsistent.
- (N) Für alle nichtverzweigenden Regeln gilt: Wenn Δ, α konsistent ist, dann ist auch $\Delta, \alpha, \beta, \gamma$ konsistent.

Wir zeigen (V) und (N) nur für die beiden Regeln für die Adjunktion:

Wenn $\Delta, \varphi \vee \psi$ konsistent ist, bedeutet das, dass es eine Bewertung B gibt, die $\Delta, \varphi \vee \psi$ wahr macht. Dann muss unter B auch mindestens eines von den beiden Adjunkten φ und ψ wahr sein. Also wird auch mindestens eine der beiden Mengen $\Delta, \varphi \vee \psi, \varphi$ und $\Delta, \varphi \vee \psi, \psi$ unter B vollständig wahr und muss somit konsistent sein.

Wenn es eine Bewertung C gibt, unter der $\Delta, \neg(\varphi \vee \psi)$ wahr ist, dann müssen unter dieser sowohl φ als auch ψ falsch sein, also muss dann auch $\Delta, \neg(\varphi \vee \psi), \neg\varphi, \neg\psi$ konsistent sein.

(V) und (N) gelten auch für alle übrigen Regeln, da wir die Regeln genau in diesem Sinn aus den Wahrheitstabellen der Junktoren abgelesen haben (s.o. Folie 139).

Wie (V) bei den Regeln für „ \leftrightarrow “, die eine etwas andere Form haben, verstanden werden muss, dürfte klar sein: Wenn $\Delta, \varphi \leftrightarrow \psi$ konsistent ist, dann ist $\Delta, \varphi \leftrightarrow \psi, \varphi, \psi$ konsistent, oder es ist $\Delta, \varphi \leftrightarrow \psi, \neg\varphi, \neg\psi$ konsistent. (Entsprechend für $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$.)

Da ein Wahrheitsbaum durch wiederholte Anwendung von verzweigenden und nichtverzweigenden Regeln entsteht, für die alle (V) bzw. (N) gelten, gilt: Wenn eine Menge von Aussagen an der Wurzel eines Wahrheitsbaumes konsistent ist, dann muss auch mindestens ein Ast des Baumes (bzw. die Menge der auf ihm stehenden Sätze) konsistent sein.

Da auf einem geschlossenen Ast ein Satz und seine Negation stehen, ist die Menge der auf ihm stehenden Sätze inkonsistent. Deshalb folgt: Wenn in einem Wahrheitsbaum alle Äste geschlossen sind, muss die Menge von Sätzen an seiner Wurzel inkonsistent sein. Q.E.D.

151. Beweis der Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens für AL

Zu zeigen: Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens:

Aus jeder endlichen inkonsistenten Menge von Sätzen von AL lässt sich ein Wahrheitsbaum entwickeln, dessen sämtliche Äste geschlossen sind.

Beweis:

Zunächst zwei Definitionen:

Ein Ast eines Wahrheitsbaums heißt *voll ausentwickelt*, wenn auf keinen der auf ihm stehenden Sätze mehr eine Regel angewandt werden kann, ohne zumindest auf einer der neu entstehenden Abzweigungen nur solche Sätze zu erzeugen, die bereits auf dem Ast stehen.

Ein Wahrheitsbaum heißt *fertig*, wenn jeder seiner Äste voll ausentwickelt oder geschlossen ist.

Es ist leicht einzusehen, dass jede endliche Menge von Sätzen von AL in einen fertigen Wahrheitsbaum entwickelt werden kann: Jeder Satz hat eine endliche Länge, jede Regelanwendung erzeugt eine endliche Zahl *kürzerer* Sätze, so dass notwendig nach einer endlichen Zahl von Regelanwendungen alle Sätze auf atomare Sätze oder negierte atomare Sätze heruntergebrochen sind, auf die keine Regel mehr angewandt werden kann.

Nehmen wir also an, wir hätten es mit einem fertigen Wahrheitsbaum zu tun, bei dem (mindestens) ein Ast \mathcal{A} nicht geschlossen ist. Dann können wir die folgende Bewertung I definieren:

I weise allen atomaren Sätzen, die (als solche, d.h. nicht negiert und nicht nur als Teil eines zusammengesetzten Satzes) auf \mathcal{A} stehen, den Wert w zu, allen übrigen atomaren Sätzen von AL den Wert f .

Behauptung: *Alle* Sätze auf \mathcal{A} müssen unter I wahr sein. Für die atomaren Sätze auf \mathcal{A} ist das klar. Für negierte atomare Sätze $\neg\alpha$ auf \mathcal{A} gilt das deshalb, weil α nicht auf \mathcal{A} steht (sonst wäre \mathcal{A} geschlossen) und deshalb durch I den Wert f zugewiesen bekommt. Für alle übrigen Sätze gilt: Es ist schon einmal eine Regel auf sie angewendet worden (denn \mathcal{A} ist voll ausentwickelt). Nun gilt aber folgendes:

(V) Für alle verzweigenden aussagenlogischen Regeln gilt: $\beta \vDash \alpha$ und $\gamma \vDash \alpha$.

(N) Für alle nichtverzweigenden aussagenlogischen Regeln gilt: $\beta \wedge \gamma \vDash \alpha$.

Auch diese beiden Prinzipien folgen aus der Art und Weise, wie wir die Regeln aus den Wahrheitstabellen der Junktoren entwickelt haben, und können leicht für jede Regel überprüft werden.

Deshalb gilt: Wenn alle kürzeren, auf einem Ast stehenden Sätze wahr sind, müssen auch die über ihnen auf demselben Ast stehenden längeren Sätze, aus denen sie durch Entwicklung hervorgegangen sind, wahr sein. Es müssen deshalb *alle* Sätze auf \mathcal{A} unter I wahr sein. Insbesondere die Sätze an der Wurzel des Baumes, die auch zu \mathcal{A} gehören, müssen alle unter I wahr und somit konsistent sein.

Wir haben gezeigt: Jeder fertige Wahrheitsbaum, der (mindestens) einen nicht geschlossenen Ast besitzt, wurzelt in einer konsistenten Menge von Sätzen.

Dazu ist äquivalent: Für einen Wahrheitsbaum, der in einer *inkonsistenten* Menge von Sätzen wurzelt, gibt es *keinen* fertigen Wahrheitsbaum, der einen nicht geschlossenen Ast besitzt.

Da es für jede endliche Menge von Sätzen von AL einen fertigen Wahrheitsbaum gibt, folgt:

Für jede endliche inkonsistente Menge von Sätzen von AL gibt es einen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste geschlossen sind. Q.E.D.

6. Formalisierungen und Anwendungen mit Hilfe der Aussagenlogik

152. Formalisierung durch intensionale Interpretation

Da die Sprache AL so konstruiert ist, dass die Semantik der Junktoren die Semantik wahrheitsfunktionaler Aussagenverknüpfungen in natürlichen Sprachen widerspiegelt, kann man mit ihrer Hilfe Aussagen und Argumente natürlicher Sprachen formalisieren.

Man gibt eine Formalisierung einer Aussage an, indem man eine intensionale Interpretation für einen Teil der atomaren Sätze der Sprache AL angibt und einen aus diesen Sätzen aufgebauten Satz von AL, der die Übersetzung der natürlichsprachlichen Aussage darstellen soll.

153. Formalisierung durch intensionale Interpretation

Beispiel:

Es sind Pilze auf der Pizza oder Kerstin ist nicht froh.

Formalisierung:

$P \vee \neg K$

P: Es sind Pilze auf der Pizza.

K: Kerstin ist froh.

154. Gelungene Formalisierung

Eine aussagenlogische Formalisierung ist dann und nur dann gelungen, wenn die Teilaussagen, die als intensionale Interpretation der atomaren Sätze dienen, in der natürlichsprachlichen Aussage tatsächlich durch wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen verknüpft sind—und zwar durch diejenigen wahrheitsfunktionalen Verknüpfungen, die genau den Junktoren entsprechen, die in der Formalisierung verwendet werden.

Wenn ϕ , ψ_1 , ψ_2 , ... jeweils gelungene aussagenlogische Formalisierungen der natürlichsprachlichen Sätze ρ , σ_1 , σ_2 , ... sind, dann gilt:

- ▶ Wenn ϕ logisch wahr ist, dann ist auch ρ (aussagen)logisch wahr.
- ▶ Wenn ϕ logisch aus den Prämissen ψ_1 , ψ_2 , ... folgt, dann folgt auch ρ (aussagen)logisch aus σ_1 , σ_2 ,

Letzteres bedeutet: Sie können die deduktive Gültigkeit eines Arguments feststellen, indem Sie das Argument formalisieren und die deduktive Gültigkeit des formalisierten Arguments in AL prüfen. Vorsicht: Wenn das Ergebnis sich *nicht* als deduktiv gültig herausstellt, bedeutet das nicht etwa, dass das Ausgangsargument ungültig wäre! Denn es könnte sein, dass sich die deduktive Gültigkeit des Arguments aus Aspekten der logischen Form ergibt, die durch die Sprache AL nicht erfasst werden können.

155. Strukturreich formalisieren!

Eine nützliche Formalisierung sollte keine Möglichkeit auslassen, wahrheitsfunktionale Verknüpfungen der natürlichsprachlichen Aussage als Junktoren wiederzugeben.

Zwar könnte man

Es sind Pilze auf der Pizza oder Kerstin ist nicht froh.

Auch wie folgt formalisieren:

$A \vee B$

A: Es sind Pilze auf der Pizza.

B: Kerstin ist nicht froh.

Oder gar so:

X

X: Es sind Pilze auf der Pizza oder Kerstin ist nicht froh.

... aber je genauer die Struktur der natürlichsprachlichen Aussage in der Formalisierung wiedergegeben wird, desto mehr logische Beziehungen zu anderen Aussagen treten dabei zu Tage.

Unter den angegebenen Formalisierungen von

Es sind Pilze auf der Pizza oder Kerstin ist nicht froh

lässt nur die folgende

$P \vee \neg K$

P: Es sind Pilze auf der Pizza.

K: Kerstin ist froh.

erkennen, dass der formalisierte Satz logisch äquivalent ist mit

Wenn Kerstin froh ist, dann sind Pilze auf der Pizza.

$K \rightarrow P$

P: Es sind Pilze auf der Pizza.

K: Kerstin ist froh.

156. Konjunktionen

Erinnerung: Nicht jedes Vorkommenis von „und“ ist eine wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfung! (Vgl. Folie 51.)

Dafür gibt es andererseits andere Aussagenverknüpfungen, die bei der Formalisierung angemessen als Konjunktion wiedergegeben werden können.

(1) Otto fährt nach Norderney, obwohl er das Meer hasst.

Satz (1) kann sinnvoll formalisiert werden durch:

(1') $N \wedge M$

N: Otto fährt nach Norderney.

M: Otto hasst das Meer.

Das ist so, obwohl (1') zugleich auch eine sinnvolle Formalisierung von (2) ist:

(2) Otto fährt nach Norderney und Otto hasst das Meer.

Natürlich bedeuten (1) und (2) nicht genau dasselbe. Aber der entscheidende Punkt ist: Die Bedingungen, unter denen (2) *wahr* ist, sind dieselben, wie diejenigen, unter denen (1) wahr ist.

Ein Sprecher, der (1) äußert, will zusätzlich zu einer Mitteilung darüber, was der Fall ist, noch eine Einschätzung der Sachlage übermitteln (nämlich dass er eine Unstimmigkeit in Ottos Handeln empfindet), aber dies betrifft nicht die Wahrheitsbedingungen des Satzes.

Diese Einschätzung geht bei der Formalisierung verloren, aber für eine gelungene Formalisierung kommt es eben nur auf die Beziehungen zwischen den Wahrheitswerten der (Teil-)Aussagen an.

157. Konjunktionen

Ähnlich wie bei „obwohl“ liegt der Fall bei „aber“ und „sondern“.

Gudrun geht nicht ins Kino, sondern ins Theater.

Formalisierung:

$\neg K \wedge T$

K: Gudrun geht ins Kino.

T: Gudrun geht ins Theater.

Peter hat viel Geld, aber er ist nicht glücklich.

Formalisierung:

$G \wedge \neg H$

G: Peter hat viel Geld.

H: Peter ist glücklich.

158. Adjunktionen

Erinnerung: Nicht jedes Vorkommen von „oder“ kann adäquat mit „ \vee “ formalisiert werden, denn die Bedeutung von „oder“ kann zwischen dem einschließenden und dem ausschließenden Oder schwanken. (Vgl. Folie 54.)

Wir werden aber im Allgemeinen davon ausgehen, dass mit „oder“ das einschließende und nur mit „entweder ... oder“ das ausschließende Oder gemeint ist.

Wie sich das ausschließende Oder formalisieren lässt, haben Sie im Rahmen der Übungsaufgaben gelernt.

159. Negationen

Erinnerung: Der Negationsjunktork „ \neg “ ist überall dort angebracht, wo man im Deutschen die Verneinung mit „es ist nicht der Fall, dass“ ausdrücken könnte. (Vgl. Folie 57.)

Außer „nicht“ gibt es verschiedene andere natürlichsprachliche Mittel, die auch sinnvoll mit der Negation wiedergegeben werden können.

Wasser ist kein Metall.

Formalisierung:

$\neg W$

W: Wasser ist ein Metall.

Das Wohnzimmer ist unbeheizt.

Formalisierung:

$\neg B$

B: Das Wohnzimmer ist beheizt.

160. Negation und Gegensatz

Aber Vorsicht: Versuchen Sie nicht, den folgenden Satz als Negation wiederzugeben:

Markus ist unbeliebt.

Dieser Satz bedeutet nämlich nicht dasselbe wie „Es ist nicht der Fall, dass Markus beliebt ist.“ Denn „Markus ist unbeliebt“ und „Markus ist beliebt“ bilden keinen kontradiktorischen Gegensatz.

△ **Zwei Sätze bilden genau dann einen *kontradiktorischen Gegensatz*, wenn der eine genau dann wahr ist, wenn der andere falsch ist.**

Mit Hilfe von aussagenlogischen Junktoren kann man den Umstand, dass φ und ψ einen kontradiktorischen Gegensatz bilden, wie folgt ausdrücken:

$$\varphi \leftrightarrow \neg\psi$$

Beispielsweise bilden „Das Wohnzimmer ist beheizt“ und „Das Wohnzimmer ist unbeheizt“ einen kontradiktorischen Gegensatz.

△ **Nur bei *kontradiktorischen Gegensätzen* ist es möglich, den einen Satz als Negation des anderen zu formalisieren.**

161. Negation und Gegensatz

Dagegen bilden „Markus ist beliebt“ und „Markus ist unbeliebt“ keinen kontradiktorischen, sondern einen konträren Gegensatz.

△ **Zwei Sätze bilden einen *konträren Gegensatz*, wenn sie nicht beide zugleich wahr sein können.**

Das lässt, anders als beim kontradiktorischen Gegensatz, die Möglichkeit offen, dass sie beide zugleich *falsch* sein könnten – wie es im Beispiel offenkundig möglich ist.

Mit Hilfe von aussagenlogischen Junktoren kann man den Umstand, dass φ und ψ einen konträren Gegensatz bilden, wie folgt ausdrücken:

$$\neg(\varphi \wedge \psi)$$

Außerdem sagt man manchmal, dass zwei Sätze, die zwar beide zugleich wahr sein, aber nicht beide zugleich falsch sein können, einen *subkonträren Gegensatz* bilden. In AL bedeutet das schlicht: „ $A \vee B$ “. Die Rede von subkonträren Gegensätzen ist allerdings ziemlich irreführend, weil solche Sätze dem normalen Sprachgebrauch zufolge gar keinen Gegensatz bilden. Ein Beispiel wäre: „Einige Bielefelder sind katholisch“ und „Einige Bielefelder sind nicht katholisch“.

162. Negation und Gegensatz

Beispiele für kontradiktorische Gegensätze:

„Es gibt einen Fan, der noch keine Karte hat.“ / „Jeder Fan hat schon eine Karte.“

„Die Anzahl der Bäume in Finnland ist ungerade.“ / „Die Anzahl der Bäume in Finnland ist gerade.“

Beispiele für konträre Gegensätze:

„Alle Menschen sind Lügner.“ / „Kein Mensch ist ein Lügner.“

„Peter ist reich.“ / „Peter ist arm.“

163. Subjunktionen

Erinnerung (vgl. Folien 60-61): Es gibt Fälle, in denen die Verwendung von Konditionalen in natürlichen Sprachen nicht gut mit der Verwendung der Subjunktion in AL übereinstimmt, z.B.:

Wenn Woody Allen Brillenträger ist, dann werden in Jena viele Brillengläser hergestellt.

Das Problem tritt hauptsächlich dann auf, wenn die im Antecedens ausgesprochene Tatsache sachlich überhaupt keine Relevanz für die im Konsequens ausgesprochene hat.

△ Dagegen können im Allgemeinen Konditionale, bei denen tatsächlich eine sachliche Relevanz zwischen Antecedens und Konsequens besteht, näherungsweise gut als Subjunktion formalisiert werden.

Faustregel also: Bei gegebener Relevanz kann man als Subjunktion formalisieren; Skepsis ist angezeigt, wo die sachliche Relevanz zwischen Antecedens und Konsequens zweifelhaft ist.

164. Subjunktionen

Beispiel für eine gelungene Formalisierung:

Wenn der Motor läuft, ist Benzin im Tank.

Formalisierung:

$M \rightarrow B$

M: Der Motor läuft.

B: Es ist Benzin im Tank.

Dank der Formalisierung können wir z.B. wissen, dass diese Aussage logisch äquivalent zu ihrer *Kontraposition* „ $\neg B \rightarrow \neg M$ “ ist:

Wenn kein Benzin im Tank ist, läuft der Motor nicht.

Außerdem kennen wir die Äquivalenz zu „ $\neg M \vee B$ “ und somit zu:

Der Motor läuft nicht oder es ist Benzin im Tank.

165. Subjunktionen

Achtung: Bei der Wendung „nur wenn“ ist die Reihenfolge von Antecedens und Konsequens im Deutschen umgekehrt! (D.h. der Nebensatz, in dem das „nur wenn“ auftritt, entspricht dem *Konsequens*.)

Nur wenn Berta eingeladen worden ist, kommt Anton zur Party.

Formalisierung:

$A \rightarrow B$

A: Anton kommt zur Party.

B: Berta ist eingeladen worden.

166. Notwendige und hinreichende Bedingungen

Konditionale können im Deutschen auch mit Hilfe der Begriffe der notwendigen und hinreichenden Bedingung ausgedrückt werden.

Dabei entspricht eine *notwendige* Bedingung immer dem *Konsequens* einer Subjunktion:

Dass Berta eingeladen worden ist, ist notwendige Bedingung dafür, dass Anton zur Party kommt.

Eine *hinreichende* Bedingung dagegen entspricht dem *Antecedens*:

Dass Anton zur Party kommt, ist hinreichende Bedingung dafür, dass Berta eingeladen worden ist.

Dass dieser Beispielsatz etwas merkwürdig aussieht, liegt daran, dass wir dazu tendieren, einen kausalen Gehalt in Bedingungssätze hineinzulesen.

Formalisierung in beiden Fällen:

$A \rightarrow B$

A: Anton kommt zur Party.

B: Berta ist eingeladen worden.

167. Bisubjunktionen

Für die Bisubjunktionen gilt das gleiche wie für die Subjunktionen: Im Allgemeinen sind sie brauchbar als Formalisierung von „genau dann, wenn“ und „dann und nur dann, wenn“, sofern die verbundenen Teilsätze sachlich füreinander relevant sind. Wo diese Relevanz in Frage steht, ist es auch fragwürdig „ \leftrightarrow “ als genaue Entsprechung des natürlichsprachlichen „genau dann, wenn“ anzuerkennen.

168. Anwendungen: Der „Wason selection task“

Seit den 1960er Jahren von Psychologen dazu verwendet, Fähigkeiten zu formallogischem Urteilen experimentell zu untersuchen. Zuerst eingeführt von dem Psychologen Peter Wason.

Welche Karten müssen umgedreht werden, um das Zutreffen Regel zu überprüfen?



Regel:
Wenn auf der einen Seite der Karte ein Vokal ist, dann ist auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

V: Die Karte hat einen Vokal auf der Buchstabenseite.

G: Die Karte hat eine gerade Zahl auf der Zahlenseite.

Die Regel: $V \rightarrow G$

Die richtige Lösung der Aufgabe lässt sich durch eine Betrachtung der Wahrheitstafel der Subjunktion leicht ermitteln:

V	G	$V \rightarrow G$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Der kritische Fall, an dem sich die Regel als unzutreffend erweisen könnte, ist die zweite Zeile der Wahrheitstafel, wenn V wahr ist und G falsch. Man muss deshalb die Karte zur Überprüfung umdrehen, bei der V wahr ist („E“) sowie die Karte, bei der G falsch ist („3“). Die Karte „K“ muss man nicht umdrehen, denn wenn V falsch ist, ist die Regel $V \rightarrow G$ in jedem Fall eingehalten, egal was mit der Zahlenseite los ist. Dasselbe gilt für die Karte „2“, man braucht sie nicht umzudrehen, denn wenn G wahr ist, ist es in jedem Fall auch $V \rightarrow G$, unabhängig vom Wahrheitswert von V.

169. Anwendungen: Ein Rätsel

Odysseus findet sich gefangen in einem Verlies. Er findet dort drei Türen vor, über die er durch eine Weissagung weiß, dass sich hinter einer von ihnen der Weg in die Freiheit eröffnet, während hinter den beiden anderen schreckliche Drachen warten. Jede der Türen trägt eine Aufschrift.



Durch die Prophezeiung weiß Odysseus außerdem, dass mindestens eine der Aufschriften auf den drei Türen wahr und mindestens eine falsch ist.

Stellen Sie fest, welche Tür in die Freiheit führt!

Ein Lösungsweg: Formalisierung mittels AL

L: Die linke Tür führt in die Freiheit.

M: Die mittlere Tür führt in die Freiheit.

R: Die rechte Tür führt in die Freiheit.

Da mindestens eine der Aufschriften wahr ist, gilt:

$$L \vee \neg M$$

Da mindestens eine der Aufschriften falsch ist, gilt außerdem:

$$\neg L \vee M$$

Da genau eine der drei Türen in die Freiheit führt, kommen nur drei Bewertungen in Frage:

L	M	R	$L \vee \neg M$	$\neg L \vee M$
w	f	f	w	f
f	w	f	f	w
f	f	w	w	w

Von diesen drei Bewertungen erfüllt nur die letzte beide Bedingungen. Also führt die rechte Tür in die Freiheit.

Anders und viel einfacher gesagt:

Wenn die linke Tür in die Freiheit führt, wären alle drei Aufschriften wahr, wenn die mittlere in die Freiheit führt, wären alle drei Aufschriften wahr.

Nur dass die rechte Tür in die Freiheit führt, erfüllt die Bedingung, dass mindestens eine Aufschrift falsch ist (nämlich die auf der linken Tür) und mindestens eine wahr (nämlich die beiden anderen).

170. Anwendungen: Aussagenlogisch gültige Argumente von formalen Fehlschlüssen unterscheiden

△ **Argumentationen, die den Anschein eines deduktiven Arguments erwecken, aber nicht gültig sind, weil sie keine deduktiv gültige Argumentform haben, nennt man *formale Fehlschlüsse*.**

Ähnlich wie für die gültigen Argumentformen gilt: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, einen formalen Fehlschluss zu begehen. Man kann deshalb nur einige wenige typische Beispiele aufzählen und benennen.

171. Bejahung des Konsequens (*fallacia consequentis*)

Dies ist ein Beispiel für einen sehr alltäglichen Fehlschluss:

Wenn Anna für die Klausur nicht geübt hat,
wird sie schlecht abgeschnitten haben.

$$A \rightarrow B$$

Anna hat in der Klausur schlecht abgeschnitten.

$$B$$

Also hat Anna für die Klausur nicht geübt.

$$A$$

Die Bejahung des Konsequens wird vielleicht deshalb so oft als Fehlschluss begangen, weil sie mit einer aussagenlogisch gültigen Argumentform verwechselt wird, nämlich dem Modus Ponens. Zur Erinnerung:

172. Modus Ponens

Wenn Lisa klug ist, sollte sie Philosophie studieren.	$A \rightarrow B$
Lisa ist klug.	A
<hr/>	
Lisa sollte Philosophie studieren.	B

173. Verneinung des Antecedens

Eine weiterer sehr gängiger Fehlschlusstyp ist die Verneinung des Antecedens.

Wenn Tina weiter raucht, wird sie bald krank werden.	$A \rightarrow B$
Tina raucht aber nicht weiter.	$\neg A$
<hr/>	
Also wird sie auch nicht bald krank werden.	$\neg B$

Auch bei der Verneinung des Antecedens gibt es Ähnlichkeit zu einer gültigen Argumentform, diesmal zum Modus Tollens:

174. Modus Tollens

Wenn man mit einem Angriffskrieg einen Konflikt lösen kann, dann gibt es dafür sicher historische Beispiele.	$A \rightarrow B$
Es gibt keine historischen Beispiele dafür, dass mit einem Angriffskrieg ein Konflikt zu lösen ist.	$\neg B$
<hr/>	
Man kann mit einem Angriffskrieg keinen Konflikt lösen.	$\neg A$

175. Reductio ad absurdum

Oft wird auch das Prinzip des indirekten Beweises, auch bekannt unter dem Namen „*reductio ad absurdum*“, zu den aussagenlogischen Argumentformen gezählt. Manchmal wird es mit dem *modus tollens* gleichgesetzt.

Die *reductio ad absurdum* (kurz: *reductio*) ist jedoch keine bestimmte Argumentform, sondern eine Strategie, aus einem gültigen Argument ein anderes gültiges Argument zu machen. Eine solche Strategie nennt man in der Logik ein *Thema* (Plural „Themata“).

Bei der *reductio ad absurdum* verwandelt man ein gültiges Argument, das von Nicht-A auf etwas bekanntermaßen Falsches schließt, in ein Argument für A.

Genauer besteht eine *reductio* aus den folgenden Elementen:

- ▶ Annahme: $\neg A$
- ▶ Deduktiv gültiges Argument, das von $\neg A$
 - ▷ auf A (Widerspruch zur Annahme)
 - ▷ oder auf B und auf $\neg B$ (Kontradiktion)
 - ▷ oder auf C schließt, wobei C bekanntermaßen oder offensichtlicherweise falsch ist.
- ▶ Konklusion: A

176. Reductio ad absurdum: Beispiel

Euklids Beweis, dass es keine größte Primzahl gibt.

Annahme: Es gibt eine größte Primzahl, sie heiße p .

Argument:

Dann gibt es nur endlich viele Primzahlen. Wir können sie also alle miteinander multiplizieren und zu diesem Produkt 1 addieren. Das Ergebnis heiße x .

Wenn man jetzt x durch eine der anderen Primzahlen teilt, bleibt immer der Rest 1. Also ist x selbst eine Primzahl.

Außerdem ist x größer als p .

Dann gäbe es eine Primzahl, die größer ist als die größte Primzahl. Das ist aber unmöglich.

Konklusion: Es gibt keine größte Primzahl.

177. Allgemeine Regel für die Kritik von Argumenten

Die logische Form des verwendeten Schlusses ist eine Möglichkeit, ein gegebenes Argument zu kritisieren. Eine weitere Möglichkeit ist, seine Prämissen oder Voraussetzungen anzuzweifeln. Ganz allgemein gilt die folgende

△ Grundregel für die Kritik an Argumenten:

Wenn Sie ein Argument kritisieren wollen, richten Sie Ihre Kritik gegen (1) die Glaubhaftigkeit von einer oder mehreren Prämissen und/oder (2) die Gültigkeit des Schlusses.

Kritisieren Sie ein Argument *nie*, indem Sie nur die Glaubhaftigkeit der Schlussfolgerung in Frage ziehen.

7: Prädikatenlogik: Syntax

178. Motivation der Prädikatenlogik

Es gibt in den natürlichen Sprachen Argumente, die unsere Definition der *deduktiven Gültigkeit* zu erfüllen scheinen, obwohl sie sich nicht mit Hilfe der Sprache AL als *aussagenlogisch gültig* formalisieren lassen.

Zur Erinnerung: Das heißt, dass es so aussieht, als ob es eine ganze Klasse von formgleichen Argumenten gibt, für die gilt: Wenn die Prämissen wahr sind, ist die Konklusion wahr.

Alle Wale sind Säugetiere.

Alle Säugetiere sind Warmblüter.

Alle Wale sind Warmblüter.

Alfons Oestersoetebier ist Millionär.
Alfons Oestersoetebier wählt die Linkspartei.

Es gibt einen Millionär, der die Linkspartei wählt.

Da die Aussagen, aus denen diese Argumente bestehen, nicht aus Teilaussagen zusammengesetzt sind, können wir sie nicht aussagenlogisch formalisieren.

Genauer gesagt: wir können sie höchstens formalisieren als:

A
B
C

und dabei tritt ihre deduktive Gültigkeit eben nicht zum Vorschein.

179. Binnenstruktur von Aussagen

Ein Problem scheint dabei zu sein, dass die Aussagenlogik nicht die Binnenstruktur von Aussagen erfassen kann.

Alfons Oestersoetebier ist Millionär.
Alfons Oestersoetebier wählt die Linkspartei.

Es gibt einen Millionär, der die Linkspartei wählt.

Z.B. haben wir in AL keine Möglichkeit, auszudrücken, dass die erste und die zweite Prämisse von *derselben Person* handeln. Auch haben wir keine Möglichkeit, zu berücksichtigen, dass in der ersten Prämisse und der Konklusion, *derselbe Begriff* („Millionär“) verwendet wird.

Diese Umstände sind aber offenbar wesentlich für die Gültigkeit des Arguments.

180. Quantifizierte Aussagen

Außerdem kommen in den Beispielen die Ausdrücke „Es gibt ein ...“ und „Alle ...“ vor, die offenbar eine große Rolle für ihre deduktive Gültigkeit spielen.

Alle Wale sind Säugetiere.

Alle Fische sind Reptilien.

Alle Säugetiere sind Warmblüter.

Es gibt einen Meeresbewohner, der kein Reptil ist.

Alle Wale sind Warmblüter.

Es gibt einen Meeresbewohner, der kein Fisch ist.

Die Gültigkeit dieser Argumente ist ganz unabhängig von ihren spezifisch meeresbiologischen Inhalten. Die Gültigkeit erkennt man schon an ihrer Form:

Alle X sind Y.

Alle A sind B.

Alle Y sind Z.

Es gibt ein C, das nicht B ist.

Alle X sind Z.

Es gibt ein C, das nicht A ist.

Hieraus wird ersichtlich, dass „Alle ...“ in der neuen formalen Sprache, die wir brauchen, die Rolle einer logischen Konstante spielen müssen. Das gleiche gilt für „Es gibt ...“.

Um Argumente wie die genannten zu formalisieren, brauchen wir also eine ausdrucksstärkere formale Sprache, die Sprache der Prädikatenlogik. Wir werden sie als eine Familie von einander ganz ähnlichen Sprachen ansehen, die wir PL-Sprachen nennen werden.

Diese Sprachen bilden so etwas wie *die* Grundsprache der Logik. Wenn Logiker von „elementaren Sprachen“ sprechen, meinen sie die PL-Sprachen. Mit der Sprache AL haben Sie sich aber nicht umsonst beschäftigt: Sie bildet in gewissem Sinne die Grundlage für die PL-Sprachen.

Die Prädikatenlogik wird manchmal auch als Quantorenlogik bezeichnet.

Bevor wir die PL-Sprachen formal einführen, sollen im Folgenden ihre Grundbegriffe schon einmal informell vorgestellt werden.

182. **Begriff und Gegenstand**

Im Allgemeinen geschieht immer zweierlei, wenn wir Sprache verwenden:

- ▶ Wir beziehen uns auf Gegenstände
- ▶ und wir wenden Begriffe an.

Beispiele:

„Der Eiffelturm ist ein beeindruckendes Gebäude.“

„Bielefeld ist kleiner als New York.“

„Beharrlichkeit ist eine Tugend.“

In all diesen Sätzen kommen sowohl sprachliche Ausdrücke vor, die dazu dienen, sich auf Gegenstände zu beziehen, als auch solche, die dazu dienen, auf diese Gegenstände einen Begriff anzuwenden.

Unter einem Begriff versteht man in der Philosophie etwas, das man prinzipiell auf verschiedene Gegenstände anwenden kann oder könnte.

Daher drücken Eigennamen in diesem Sinn keine Begriffe aus. Sie können nur benutzt werden, um sich auf einen einzigen Gegenstand zu beziehen. Es gibt also Wörter, die keinen Begriff ausdrücken, sondern nur dazu benutzt werden können, sich auf Gegenstände zu beziehen.

Alfons Oestersoetebier ist Millionär.

Alfons Oestersoetebier wählt die Linkspartei.

Es gibt einen Millionär, der die Linkspartei wählt.

Am Beispiel dieses Arguments haben wir gesehen, dass die Binnenstruktur von Aussagen, die durch Gegenstandsbezug und Begriffsanwendung gebildet wird, für die logische Form von Argumenten wichtig werden kann.

Wir müssen berücksichtigen, *über wen oder was* in einer Aussage etwas gesagt wird (Gegenstandsbezug) und *welche Eigenschaft, Tätigkeit usw.* in der Aussage zugeschrieben wird (Begriffsanwendung).

Diese Differenzierung bildet die Prädikatenlogik durch eine Unterscheidung zwischen logischem Subjekt und logischem Prädikat ab.

183. Logische Subjekte, logische Prädikate

- △ Wenn in einer Aussage über ein bestimmtes einzelnes Individuum oder einen bestimmten einzelnen Gegenstand gesprochen wird, dann wird der Ausdruck, mit dem dieser Gegenstand im Satz bezeichnet wird, das *logische Subjekt* der Aussage genannt.

Logische Subjekte können Individuen und Gegenstände im weitesten Sinne bezeichnen. Jeder Ausdruck, der sich auf etwas Einzelnes bezieht, kann logisches Subjekt eines Satzes sein. Dazu gehören auch beispielsweise Vorgänge, Ereignisse und abstrakte Gegenstände. „Caesars Ermordung“, „der Eiffelturm“, „die Zahl 7“, „der 3. Januar 2007“, „Konrad Adenauer“ oder „das Universum“ kommen alle als logische Subjekte in Frage.

- △ Ausdrücke, die dazu verwendet werden, den durch die logischen Subjekte bezeichneten Gegenständen Eigenschaften, Tätigkeiten, Zustände etc. zuzuschreiben, nennt man *logische Prädikate*.

184. Logische Subjekte, logische Prädikate

Alfons Oestersoetebier ist Millionär.

In diesem Satz ist beispielsweise „Alfons Oestersoetebier“ das logische Subjekt, „... ist Millionär“ ist das logische Prädikat.

In den formalen PL-Sprachen werden wir logische Prädikate mit Großbuchstaben wiedergeben und logische Subjekte mit Kleinbuchstaben. Wenn „a“ für Alfons Oestersoetebier steht und „M“ für die Eigenschaft, Millionär zu sein, dann formalisieren wird en Satz „Alfons Oestersoetebier ist Millionär“ durch

Ma

D.h.: Das direkte Hintereinanderschreiben soll bedeuten, dass das logische Prädikat auf das vom logischen Subjekt bezeichnete Individuum zutrifft.

185. Mehrstellige Prädikate

Roderigo liebt Desdemona.

Wir werden auch die Möglichkeit berücksichtigen, dass eine einfache Aussage von mehreren Individuen handeln kann. Das logische Prädikat „... liebt ---“ braucht zwei Individuenausdrücke, um zu einer vollständigen Aussage zu werden. Solche Prädikate nennen wir *zweistellig*. Wenn wir mit „L“ das zweistellige Prädikat „... liebt ---“ formalisieren und „r“ für Roderigo und „d“ für Desdemona steht, lautet die prädikatenlogische Formalisierung des Beispielsatzes:

Lrd

Beachten Sie, dass die Reihenfolge von „r“ und „d“ eine entscheidende Rolle spielt. „Lrd“ ist nicht gleichbedeutend mit „Ldr“.

186. Mehrstellige Prädikate

„... ist Millionär“ ist ein *einstelliges* Prädikat, „... liebt ---“ ein *zweistelliges*. Es gibt auch *drei- und vierstellige* Prädikate usw. Z.B. ist „... liegt zwischen ___ und ---“ ein *dreistelliges* Prädikat.

Bielefeld liegt zwischen Paderborn und Osnabrück.

Die mehr als einstelligen Prädikate heißen *mehrstellig*.

Was ist das logische Subjekt von „Roderigo liebt Desdemona“? Man könnte vielleicht sagen, dass sowohl „Roderigo“ als auch „Desdemona“ logische Subjekte des Satzes sind. Wir wollen aber genauer sein: Als logisches Subjekt des Satzes werden wir das *geordnete Paar* („Roderigo“, „Desdemona“) ansehen.

Ebenso ist das *geordnete Tripel* („Bielefeld“, „Paderborn“, „Osnabrück“) das logische Subjekt des Satzes „Bielefeld liegt zwischen Paderborn und Osnabrück“.

Allgemein nennt man *geordnete Zusammenfassungen* von n Objekten *n -Tupel*.

Beachten Sie, dass logisches Subjekt und grammatisches Subjekt unterschiedliche Dinge sind. Das grammatische Subjekt des Beispielsatzes ist eindeutig „Rodrigo“, „Desdemona“ dagegen ist Akkusativobjekt. Aber auf grammatische Kategorien kommt es hier nicht an. Dasselbe gilt für das logische Prädikat.

187. Logisches Subjekt und logisches Prädikat – Mehrdeutigkeiten

Es ist nicht immer eindeutig, wie eine natürlichsprachliche Aussage in logisches Subjekt und logisches Prädikat zu zerlegen ist.

Kassel liegt in der Mitte von Deutschland.

Hier könnte man sagen, dass das logische Subjekt („Kassel“, „Deutschland“) ist und das logische Prädikat das *zweistellige* „... liegt in der Mitte von ---“.

Ebenso könnte man aber auch behaupten, dass nur „Kassel“ das logische Subjekt bildet und das logische Prädikat das *einstellige* „... liegt in der Mitte von Deutschland“.

Der Kontext muss jeweils entscheiden, wie man den Satz am besten analysiert.

Im Allgemeinen wird auch in der Prädikatenlogik wieder gelten, dass man möglichst strukturreich zu analysieren hat. Die strukturreichere Alternative ist hier natürlich die zuerst genannte. Aber in manchen Kontexten, in denen man auch mit einer weniger strukturreichen Formalisierung auskommt, kann dies aus Gründen der Übersichtlichkeit praktischer sein.

188. Quantoren

Es gibt mindestens einen Millionär.

Was ist das logische Subjekt dieses Satzes? Nicht etwa „ein Millionär“, denn das logische Subjekt müsste ein Ausdruck sein, der sich auf einen bestimmten Gegenstand, ein bestimmtes Individuum bezieht. „Ein Millionär“ bezieht sich aber im Beispiel nicht auf irgendeinen bestimmten Millionär.

Die Prädikatenlogik analysiert den Satz deshalb anders: Dieser Satz *hat gar kein* logisches Subjekt. Stattdessen geht es darin sozusagen nur um ein logisches Prädikat, nämlich das Prädikat „... ist ein Millionär“. Der Satz sagt aus, dass es mindestens einen Gegenstand oder ein Individuum gibt, dem dieses Prädikat wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Halb-formal könnte man das so ausdrücken:

Es gibt mindestens ein x , so dass gilt: x ist ein Millionär.

Wenn ein Prädikat wahrheitsgemäß einem Gegenstand zugeschrieben werden kann, sagt man in der Logik auch, dass dieser Gegenstand unter das Prädikat fällt. In diesem Sinne besagt eine Aussage wie die vorliegende einfach, dass es mindestens einen Gegenstand gibt, der unter das Prädikat „... ist ein Millionär“ fällt.

In den PL-Sprachen werden wir für „Es gibt mindestens ein x , so dass gilt“ den Ausdruck „ $\exists x$ “ verwenden, den man *Existenzquantor* nennt.

$\exists x Mx$.

189. Quantoren

Ähnlich werden wir in der Prädikatenlogik auch den folgenden Satz analysieren:

Alles ist vergänglich.

Der Satz sagt nicht, dass etwas Bestimmtes vergänglich ist (nämlich alles), sondern er sagt, dass der Eiffelturm vergänglich ist, ich, Sie, der Kleingartenverein Ubbedissen, der Europäische Kontinent, einfach alles. In diesem Sinne hat auch dieser Satz kein logisches Subjekt, sondern ist eine Aussage über das Prädikat „... ist vergänglich“. Er sagt, dass jeder beliebige Gegenstand, jedes beliebige Individuum unter dieses Prädikat fällt.

Für alle x gilt: x ist vergänglich.

Für den Ausdruck „Für alle x gilt“ verwenden wir in den PL-Sprachen den sogenannten *Allquantor* „ $\forall x$ “, so dass dieser Satz formalisiert so aussehen könnte:

$\forall x Vx$.

Mit Hilfe des Allquantors werden wir auch den schon bekannten Beispielsatz „Alle Wale sind Säugetiere“ formalisieren können. Denn dieser bedeutet nicht anderes als:

Für alle x gilt: Wenn x ein Wal ist, dann ist x ein Säugetier.

Und dies können wir mit den uns bekannten logischen Mitteln schon ausdrücken.

$\forall x (Wx \rightarrow Sx)$

190. Variablen

Beachten Sie, dass auch in dem formalen Satz

$\exists x Mx$

das „ x “ *nicht* etwa das logische Subjekt irgendeines Satzes oder Teilsatzes ist. Denn dazu müsste es sich auf *einen bestimmten* Gegenstand beziehen, was es nicht tut. Es vertritt sozusagen beliebige Gegenstände. Nur

im Zusammenhang mit dem Quantor „ $\exists x$ “ wird überhaupt klar, was die Bedeutung des Satzes sein soll. In der Terminologie der Prädikatenlogik ist „ x “ damit eine *Variable*.

Damit funktioniert „ x “ in diesem Beispiel völlig anders als z.B. „ a “ in der Formalisierung

Ma

des Satzes „Alfons Oestersoetebier ist ein Millionär“. „ a “ bezieht sich auf ein bestimmtes Individuum und zählt deshalb zu den *Individuenkonstanten*.

191. PL-Sprachen

Anders als bei der Aussagenlogik werden wir die formalen Sprachen der Prädikatenlogik nicht als eine einzige Sprache, sondern als eine Familie verschiedener formaler Sprachen ansehen, die alle nach denselben Prinzipien aufgebaut sind.

Diese Form der Darstellung ist nicht unbedingt nötig, scheint mir aber für die Prädikatenlogik die übersichtlichste zu sein.

Eine Darstellung, nach der es stattdessen nur eine Sprache PL gibt, finden Sie in Beckermann 2003 (Teil III).

192. Die Syntax der PL-Sprachen: Deskriptive Grundzeichen

Jede PL-Sprache L ist aus *deskriptiven* und *logischen* Grundzeichen aufgebaut.

Ihre *deskriptiven* Grundzeichen sind die folgenden:

- ▶ *Eine bestimmte Menge von Individuenkonstanten.* Dies sind Kleinbuchstaben „ a “, „ b “, „ c “, ..., „ v “ sowie nötigenfalls diese Kleinbuchstaben mit Numeralen als Indizes: „ a_1 “, „ a_2 “, usw., „ b_1 “, „ b_2 “ usw., ..., „ v_1 “, „ v_2 “, usw.

Wohlgemerkt: Die vier letzten Buchstaben „ w “, „ x “, „ y “, „ z “ des Alphabets gehören nicht zu den Individuenkonstanten!

- ▶ *Eine bestimmte nichtleere Menge von Prädikatbuchstaben.* Dies sind Großbuchstaben „ A “, „ B “, „ C “, usw. sowie nötigenfalls Großbuchstaben mit Numeralen als Indizes: „ A_1 “, „ A_2 “, usw., „ B_1 “, „ B_2 “ usw. ... Jeder Prädikatbuchstabe besitzt innerhalb einer Sprache L eine ganz bestimmte *Stelligkeit*. (d.h. eine ihm zugewiesene Zahl n , die angibt, dass es sich bei ihm um ein n -stelliges Prädikat handelt).

In den deskriptiven Grundzeichen können sich die verschiedenen PL-Sprachen unterscheiden. Sie können verschiedene und verschieden große Mengen von Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben besitzen und ein Prädikatbuchstabe kann in der einen Sprache einstellig und in der nächsten mehrstellig sein.

Wohlgemerkt: *Innerhalb* einer Sprache ist die Stelligkeit ein und desselben Prädikatbuchstabens ein und für alle mal festgelegt.

193. Die Syntax der PL-Sprachen: Logische Grundzeichen

Die logischen Grundzeichen sind für alle PL-Sprachen dieselben:

- ▶ *Junktoren.* Dies sind die Zeichen „ \wedge “, „ \vee “, „ \neg “, „ \rightarrow “ und „ \leftrightarrow “.
- ▶ *Quantorzeichen.* Dies sind die Zeichen „ \exists “ und „ \forall “.

- ▶ *Variablen*. Dies sind die Kleinbuchstaben „w“, „x“, „y“, „z“ sowie diese Kleinbuchstaben mit Numeralen als Indizes: „w₁“, „w₂“, usw., „x₁“, „x₂“ usw., ...
- ▶ *Hilfszeichen*. Dies sind die Klammerzeichen „(“ und „)“.

194. Verschiedene PL-Sprachen

Die Unterschiede zwischen den PL-Sprachen erschöpfen sich also sozusagen im nichtlogischen Vokabular.

Eine bestimmte Sprache L ist ganz einfach dadurch zu definieren, dass wir angeben

- ▶ ... welche Individuenkonstanten zu L gehören sollen,
- ▶ welche Prädikatbuchstaben zu L gehören sollen und
- ▶ welche Stelligkeit jeder dieser Prädikatbuchstaben innerhalb von L haben soll.

Z.B. können Sie die Sprache L_1 definieren, indem Sie sagen, dass sie nur die zwei Individuenkonstanten „a“ und „b“ und den zweistelligen Prädikatbuchstaben „P“ besitzen soll.

Die „bestimmten Mengen“ von Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben brauchen keineswegs endlich zu sein. Sie können z.B. die Sprache L_2 definieren, indem Sie festlegen, dass diese die Individuenkonstanten „a₁“, „a₂“, ... und die sämtlich dreistelligen Prädikatbuchstaben „Q₁“, „Q₂“, ... besitzen möge.

(In der Praxis verwenden wir in der Philosophie meist PL-Sprachen mit nur wenigen Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben, die wir im Kontext einer Formalisierung gleichzeitig mit einer bestimmten Interpretation definieren.)

195. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen

Es sei im folgenden L eine beliebige PL-Sprache. Dann wird wie folgt definiert, welches die Sätze von L sind.

Wir definieren zunächst rekursiv, was ein *Ausdruck von L* ist.

- a) Wenn Γ ein n -stelliger Prädikatbuchstabe von L ist und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Individuenkonstanten von L oder Variablen sind, dann ist $\Gamma\alpha_1 \dots \alpha_n$ ein Ausdruck von L .
- b) Wenn φ und ψ Ausdrücke von L sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Ausdrücke von L .
- c) Wenn φ ein Ausdruck von L und α eine Variable ist, dann sind auch $\forall\alpha \varphi$ und $\exists\alpha \varphi$ Ausdrücke von L .
- d) Nur Ausdrücke, die durch endlich oftmaliges Anwenden von a) bis c) entstehen können, sind Ausdrücke von L .

Sehen wir uns diese Regeln einzeln an.

196. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen

- a) Wenn Γ ein n -stelliger Prädikatbuchstabe von L ist und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Individuenkonstanten von L oder Variablen sind, dann ist $\Gamma\alpha_1 \dots \alpha_n$ ein Ausdruck von L .

Nehmen wir im Folgenden zu Illustrationszwecken an, L besitze die Individuenkonstanten „a“, „b“, „c“ und die Prädikatbuchstaben „F“ (einstellig), „G“ (zweistellig) und „H“ (dreistellig).

Dann folgt aus a), dass die folgenden Zeichenketten Beispiele für Ausdrücke von L sind:

Fa
Fx
Gaa
Gax
Hyyy
Hzbc

197. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen

- b) Wenn φ und ψ Ausdrücke von L sind, dann sind auch $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Ausdrücke von L .

Aus b) folgt dann, dass auch mit Hilfe der aussagenlogischen Junktoren Ausdrücke von L gebildet werden dürfen.

$(Gaa \wedge Fb)$
 $((Gax \vee Hxyz) \rightarrow Habc)$
 $(\neg(\neg Fw \vee Gxx) \wedge ((Fa \vee Fb) \vee Hxbx))$

198. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen

- c) Wenn φ ein Ausdruck von L und α eine Variable ist, dann sind auch $\forall\alpha \varphi$ und $\exists\alpha \varphi$ Ausdrücke von L .

In diesem Fall nennt man φ den *Wirkungsbereich* des entsprechenden Quantors.

Ausdrücke, die durch Anwendung der Quantorenregel c) entstehen, nennt man quantifizierte Ausdrücke.

$\forall x Fx$
 $\forall x Fy$
 $\exists y (Gby \wedge Fb)$
 $\exists w (\neg(\neg Fw \vee Gxx) \wedge ((Fa \vee Fb) \vee Hxbx))$

199. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen

Da die Regeln oftmals und in verschiedenen Reihenfolgen angewendet werden können, gehen auch quantifizierte Ausdrücke wiederum in komplexere Ausdrücke ein.

$$(\exists y (Gby \wedge Fb) \rightarrow \forall z Fz)$$

$$\exists x \forall y (Fx \vee Gxy)$$

$$\forall z (\exists x \forall y (Fx \vee Gxy) \rightarrow Haaz)$$

$$\exists z (\exists y (Gby \wedge Fz) \wedge \forall w Hwby)$$

200. Der syntaktische Aufbau von PL-Sprachen: Wirkungsbereiche der Quantoren

Beachten Sie die unterschiedlichen Wirkungsbereiche der Quantoren.

$$(\exists y \underline{(Gby \wedge Fb)} \rightarrow \forall z \underline{Fz})$$

$$\exists x \underline{\forall y (Fx \vee Gxy)}$$

$$\forall z \underline{(\exists x \forall y (Fx \vee Gxy) \rightarrow Haaz)}$$

$$\exists z \underline{(\exists y (Gby \wedge Fz) \wedge \forall w Hwby)}$$

Der Wirkungsbereich eines Quantors $\forall \alpha$ (oder $\exists \alpha$) ist derjenige eingebettete Teilausdruck φ , auf den die Regel c) beim schrittweisen Aufbau des Gesamtausdrucks gemäß unserer rekursiven Definition angewendet werden muss, um $\forall \alpha \varphi$ (bzw. $\exists \alpha \varphi$) als Teil des Gesamtausdrucks zu erzeugen. Zugleich gilt:

△ Der Wirkungsbereich eines Quantors ist die kürzeste Kette von Zeichen, die sich rechts von ihm erstreckt und einen vollständigen Ausdruck bildet.

201. Gebundene und freie Variablen

Nicht jeder Ausdruck von L ist auch ein Satz von L . Nach den Regeln a) bis d) lassen sich auch Ausdrücke bilden, in denen Variablen vorkommen, ohne dass ein entsprechender Quantor im Ausdruck auftritt:

$$Fy$$

$$\exists x Fy$$

Wie bereits angemerkt, ergeben Variablen jedoch nur gemeinsam mit einem entsprechenden Quantor einen Sinn.

„Es gibt mindestens ein y , so dass gilt: y ist ein Millionär“ ist eine Aussage.

„ y ist ein Millionär“ dagegen ist überhaupt keine Aussage. (Wer ist y ?)

■ Bitte bedenken Sie: „ y “ ist keine Individuenkonstante, kann nicht logisches Subjekt eines Satzes sein.

Ebensowenig:

„Es gibt mindestens ein x , so dass gilt: y ist ein Millionär.“ Wieder stellt sich die Frage: Was soll das „ y “ hier?

202. Gebundene und freie Variablen

Um aus den Ausdrücken von L die (sinnvollen) Sätze herauszupicken, brauchen wir noch weitere Definitionen:

Wenn beispielsweise die Variable „ w “ in einem Ausdruck vorkommt und innerhalb des Wirkungsbereichs eines Quantors „ $\exists w$ “ oder „ $\forall w$ “ (also eines Quantors mit derselben Variablen) steht, dann sagen wir, sie sei durch den Quantor *gebunden*. Steht sie aber nicht innerhalb des Wirkungsbereichs eines solchen Quantors, dann kommt sie *frei* vor. Genauer und allgemein formuliert:

△ Wenn φ ein Ausdruck der Sprache L und α eine Variable ist, und es ein Vorkommnis von α in φ gibt, das sich nicht innerhalb des Wirkungsbereichs eines Quantors $\exists\alpha$ oder $\forall\alpha$ befindet, dann *kommt α in φ frei vor*.

203. Gebundene und freie Variablen

Z.B. sind die Vorkommnisse von „ y “ in den folgenden Ausdrücken gebunden:

$$\neg\exists y Gya$$
$$\forall y (Fa \wedge Gya)$$

In den folgenden Ausdrücken kommt „ y “ frei vor.

$$\forall y Fa \wedge Gya$$
$$\neg\exists x Hxyb$$

Im folgenden Ausdruck ist zwar *ein* Vorkommnis von „ y “ gebunden, ein zweites aber nicht.

$$\exists z (\exists y (Gby \wedge Fz) \wedge \forall w Hwby)$$

Daher kommt „ y “ auch hier frei vor.

204. Sätze von PL-Sprachen

Mit Hilfe dieser Begriffe können wir jetzt genau definieren, was ein Satz der Sprache L ist.

△ Ein Satz der PL-Sprache L ist ein Ausdruck von L , in dem keine Variable frei vorkommt.

205. Klammerersparnis in PL-Sprachen

In den PL-Sprachen gelten nur die Klammerersparnisregeln, die sie schon von der Sprache AL kennen.

1. Äußerste Klammern dürfen weggelassen werden.

Z.B.: „ $(Fa \wedge \exists x Gax) \vee \neg\forall y Fy$ “ statt „ $((Fa \wedge \exists x Gax) \vee \neg\forall y Fy)$ “

2. „ \wedge “ und „ \forall “ binden stärker als „ \rightarrow “ und „ \leftrightarrow “.

Z.B.: „ $Fa \wedge \exists x Gax \rightarrow \forall y Fy$ “ statt „ $(Fa \wedge \exists x Gax) \rightarrow \forall y Fy$ “,
 „ $\forall x \forall y (Gxy \leftrightarrow Fx \vee Fy)$ “ statt „ $\forall x \forall y (Gxy \leftrightarrow (Fx \vee Fy))$ “.

3. Bei iterierten Konjunktionen und Adjunktionen dürfen die Klammern weggelassen werden.

Z.B.: „ $\forall x \forall y (Gxy \wedge Fx \wedge Fy)$ “ statt „ $\forall x \forall y ((Gxy \wedge Fx) \wedge Fy)$ “.
 „ $Fa \vee \exists x Habx \vee Fb \vee \forall y Gyb$ “ statt „ $((Fa \vee \exists x Habx) \vee Fb) \vee \forall y Gyb$ “.

206. Beispiele für fehlerhaft gebildete „Sätze“

- a) $\forall x \forall y (x \rightarrow Fa)$
- b) $\forall x Gxy$
- c) $\forall z Gab \leftrightarrow Gzb$
- d) $\neg \exists x (\forall y Fy \vee Gxy)$
- e) $\exists z (Gaz \leftrightarrow Ga)$
- f) $\forall x \wedge \forall y Gxy$

Gründe der Fehlerhaftigkeit: a) „x“ ist kein Ausdruck; b) „y“ kommt frei vor; c) „z“ kommt frei vor; d) „y“ kommt frei vor (zweites Vorkommen); e) uneinheitliche Stelligkeit von „G“; f) „ $\forall x$ “ ist kein Ausdruck.

207. Alternative Notation

Prädikate werden in manchen Texten mit Klammern geschrieben, also „ $F(x)$ “ statt „ Fx “, „ $G(a, b)$ “ statt „ Gab “.

Häufige Notationen für Existenzsätze

- $\exists x Fx$
- $(\exists x) Fx$
- $\bigvee x Fx$

Häufige Notationen für Allsätze

- $\forall x Fx$
- $(\forall x) Fx$
- $\bigwedge x Fx$

208. E-Mail-Notation

Wegen der Nichtverfügbarkeit von Sonderzeichen hat sich für den E-Mail-Verkehr (und bei anderen

Internetanwendungen) eine bestimmte Mischung aus verschiedenen traditionellen Notationen eingebürgert.

Notation in dieser Vorlesung	Gängige E-Mail-Notation
$\forall x Fx$	$(x) Fx$
$\exists x Fx$	$(Ex) Fx$
$Fa \rightarrow Ga$	$Fa \rightarrow Ga$
$Pab \leftrightarrow Qba$	$Pab \leftrightarrow Qba$
$Fa \wedge Gb$	$Fa \& Gb$
$Fa \vee Gb$	$Fa \vee Gb$
$\neg Fa$	$\sim Fa$

Beispiel:

$$\exists x Fx \vee \exists x Gx \leftrightarrow \neg \forall x (\neg Fx \wedge \neg Gx) \quad (Ex) Fx \vee (Ex) Gx \leftrightarrow \sim (x) (\sim Fx \& \sim Gx)$$

8. Prädikatenlogik: Semantik

209. Interpretationen von PL-Sprachen

Wie bereits bei der Sprache AL erhalten auch in den PL-Sprachen die deskriptiven Zeichen erst dann eine Bedeutung, wenn wir eine Interpretation vornehmen.

Allerdings funktionieren die Quantoren der PL-Sprachen nicht wahrheitsfunktional. Die Prädikate, auf die sie wirken, haben ja für sich allein keine Wahrheitswerte („... ist ein Millionär“ hat für sich genommen keinen Wahrheitswert). Also kann der Wahrheitswert „ $\exists x Mx$ “ nicht etwa eine Funktion des Wahrheitswertes von „ Mx “ sein.

D.h. aber auch, dass es bei der Semantik von PL-Sprachen nicht mehr nur um Wahrheitswerte gehen kann. Interpretationen von PL-Sprachen brauchen eine viel genauere Semantik.

210. Interpretationen von PL-Sprachen

Die Semantik von PL-Sprachen kann man sehr genau definieren, indem man mengentheoretische Begriffe zugrundelegt. Wir werden aber diese genaue Definition auslassen und stattdessen die Interpretationen und den Wahrheitsbegriff der PL-Sprachen auf informelle Weise einführen.

Eine ausführliche Darstellung der formalen Semantik der Prädikatenlogik einschließlich der mengentheoretischen Hintergründe finden Sie in Ruppen 1997, IV. Teil.

Auch ohne mengentheoretische Details lässt sich die formale Semantik der PL-Sprachen mit einiger Genauigkeit behandeln, siehe etwa Mates 1969, 4. Kapitel, oder Beckermann 2003, Kapitel 24.

So oder so erfordert die formal korrekte Einführung der Semantik von PL-Sprachen einen formalen Aufwand, der in einer Pflichtveranstaltung für Philosophiestudierende besser zugunsten sinnvollerer Themen eingespart wird.

211. Interpretationen von PL-Sprachen

△ Jede Interpretation I einer PL-Sprache L erfordert drei Teile:

- 1) Die Angabe einer nichtleeren Grundmenge D von Gegenständen / Individuen (D nennt man manchmal auch den Wertebereich der Variablen, oder auch den Träger der Interpretation).
- 2) Die Zuweisung eines bestimmten Gegenstandes / Individuums aus D zu jeder Individuenkonstante von L .
- 3) Die Zuweisung einer bestimmten Eigenschaft bzw. einer bestimmten Relation zu jedem Prädikatbuchstaben von L .

Schauen wir uns diese drei Teile einzeln an.

212. Interpretationen von PL-Sprachen

- 1) Die Angabe einer nichtleeren Grundmenge D von Gegenständen / Individuen (D nennt man manchmal auch den Wertebereich der Variablen, oder auch den Träger der Interpretation).

Diese Menge muss aus Gegenständen / Individuen in genau dem sehr weiten Sinne bestehen, wie Sie das bereits gewohnt sind. D kann die Menge aller Bundesbürger sein, die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge {Eiffelturm, Brandenburger Tor, Tower Bridge} oder jede beliebige andere Menge.

- 2) Die Zuweisung eines bestimmten Gegenstandes / Individuums aus D zu jeder Individuenkonstante von L .

Jeder Individuenkonstante wird also genau ein Element aus D zugeordnet. Umgekehrt gilt *nicht*, dass jedes Element aus D einen Namen in der Sprache L besitzen muss. Außerdem können auch verschiedenen Individuenkonstanten dasselbe Element aus D zugeordnet werden

Wir geben die Interpretation der Individuenkonstanten in ähnlicher Weise an, wie wir es von intensionalen Interpretationen von AL gewohnt sind.

- a: Angela Merkel
- b: Gregor Gysi
- c: Annalena Baerbock
- d: Angela Merkel

- 3) Die Zuweisung einer bestimmten Eigenschaft bzw. einer bestimmten Relation zu jedem Prädikatbuchstaben von L .

Einstelligen Prädikatbuchstaben werden dabei Eigenschaften zugeordnet, zweistelligen Prädikatbuchstaben zweistellige Relationen (wie z.B. Vater-Sein-von, Größer-Sein), usw.

Relationen und Eigenschaften sind wieder im weitesten Sinne aufzufassen. Es kann sich dabei auch z.B. um Zustände oder Tätigkeiten (Rauchen) handeln. Entscheidend ist, dass es sich um Eigenschaften

handelt, die jeder Gegenstand aus D eindeutig entweder besitzt oder nicht besitzt, bzw. um Relationen, die zwischen Gegenständen aus D eindeutig entweder bestehen oder nicht bestehen.

Man kann die Interpretation der Prädikate am besten mit Hilfe offener Sätze angeben.

213. Interpretationen von PL-Sprachen: Offene Sätze

Als einen offenen Satz bezeichnet man in natürlichen wie in formalen Sprachen einen sprachlichen Ausdruck, der alleine keinen vollständigen Aussagesatz bildet, aber durch Hinzufügen eines oder mehrerer Individuenausdrücke zu einem solchen werden kann. „... ist ein Millionär“ ist z.B. ein offener Satz, ebenso wie „... liebt ---“. Gerade an mehreren Stellen offene Sätze kann man auch in natürlichen Sprachen oft gut mit Hilfe von Variablen angeben, z.B. als „x ist ein Millionär“ oder „x liebt y“.

Da man Eigenschaften und Relationen mit Hilfe offener Sätze bezeichnen kann, gehen wir genau so vor, wenn wir die Interpretationen der Prädikatbuchstaben angeben.

Vxy:	x ist der Vater von y.
Rx:	x raucht.
Gxy:	x ist größer als y.
Zxyz:	x liegt zwischen y und z.

214. Beispiel: die Sprache L_L

Als Beispiel betrachten wir die Sprache L_L . Sie soll die Individuenkonstanten „j₁“, „v“, „j₂“, „a“, „l“ und „r“, die einstelligigen Prädikatbuchstaben „D“ und „H“ und den zweistelligen Prädikatbuchstaben „K“ besitzen.

215. Die Interpretation der Sprache L_L

Wir geben nun die Interpretation I_L der Sprache L_L an.

Die Grundmenge D_L der Interpretation sei:

{Joe Dalton, William Dalton, Jack Dalton, Averell Dalton, Lucky Luke, Rantanplan}

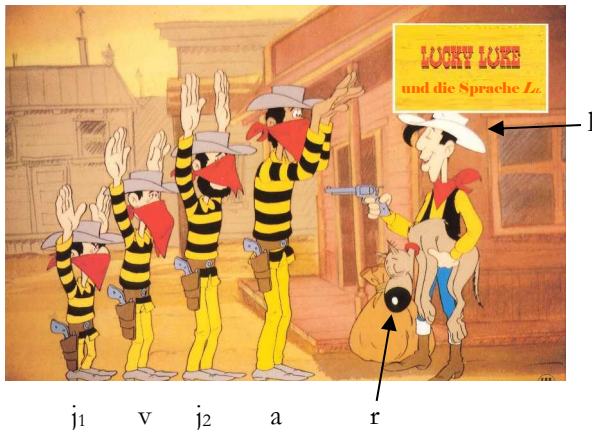
Wir werden dabei so tun, als ob die Elemente dieser Menge wirkliche Menschen bzw. ein wirklicher Hund wären.

Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben werden wie folgt interpretiert:

j ₁ :	Joe Dalton
v:	William Dalton
j ₂ :	Jack Dalton
a:	Averell Dalton
l:	Lucky Luke
r:	Rantanplan
Dx:	x ist ein Dalton.
Hx:	x ist ein Hund.
Kxy:	x ist kleiner als y.

Erinnern Sie sich: In unserer Syntax für PL-Sprachen sind die Buchstaben „w“, „x“, „y“ und „z“ für Variablen reserviert. Deshalb habe ich für William Dalton die Individuenkonstante „v“ gewählt.

216. Die Interpretation der Sprache L_L



Dieses Bild wird für weitere Beispiele unsere maßgebliche Auskunftsquelle über die Kleiner-als-Relation auf D_L sein.

217. Wahrheit in PL-Sprachen

Für bestimmte Sätze von PL ist es sehr einfach, anzugeben, wann sie bzgl. der Interpretation I wahr sind:

- △ Wenn Γ ein n -stelliger Prädikatbuchstabe von L ist und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ Individuenkonstanten von L sind, dann ist $\Gamma\alpha_1 \dots \alpha_n$ genau dann bezüglich der Interpretation I wahr, wenn die Relation, die dem Prädikatbuchstaben Γ durch I zugeordnet wird, zwischen den Gegenständen, die den Individuenkonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ durch I zugeordnet werden, tatsächlich besteht (bzw., falls $n = 1$, wenn der α_1 zugeordnete Gegenstand die Γ zugeordnete Eigenschaft tatsächlich besitzt).

Auch in der Semantik der PL-Sprachen gilt das Prinzip der Zweiwertigkeit: Alle Sätze, die nicht wahr sind, sind falsch.

Z.B.: Der Satz „Hr“ von L_L ist wahr im Hinblick auf die Interpretation I_L , weil der der Individuenkonstanten „r“ zugeordnete Gegenstand, Rantanplan, die dem Prädikatbuchstaben „H“ zugeordnete Eigenschaft, ein Hund zu sein, tatsächlich besitzt.

Ebenso ist „Krj1“ wahr bezüglich I_L , weil Rantanplan tatsächlich kleiner als Joe Dalton ist.

„Hv“ ist falsch bezüglich I_L , weil William Dalton nicht die Eigenschaft besitzt, ein Hund zu sein.

218. Wahrheit in PL-Sprachen

Die Syntax der PL-Sprachen erlaubt aussagenlogische Verknüpfungen von Sätzen dieser Sprachen zu neuen Sätzen. Diese sollen natürlich wahrheitsfunktional funktionieren, genauso wie in AL.

- △ Seien ϕ und ψ Sätze der PL-Sprache L und I eine Interpretation dieser Sprache. Dann gilt:
- $\phi \wedge \psi$ ist wahr bzgl. I genau dann, wenn sowohl ϕ als auch ψ wahr bzgl. I sind,
 - $\phi \vee \psi$ ist wahr bzgl. I genau dann, wenn mindestens einer der Sätze ϕ und ψ wahr bzgl. I ist,
 - $\phi \rightarrow \psi$ ist wahr bzgl. I genau dann, wenn ϕ nicht wahr bzgl. I ist oder ψ wahr bzgl. I ist (oder beides),

$\varphi \leftrightarrow \psi$ ist wahr bzgl. I genau dann, wenn φ und ψ bzgl. I dieselben Wahrheitswerte haben und
 $\neg\varphi$ ist wahr bzgl. I genau dann, wenn φ nicht wahr bzgl. I ist.

Z.B.: Der Satz „ $Hj_1 \rightarrow Dj_1$ “ ist wahr bzgl. I_L , weil „ Hj_1 “ nicht wahr ist bzgl. I_L .
 Der Satz „ $Kva \wedge Dr$ “ ist nicht wahr bzgl. I_L , weil „ Dr “ nicht wahr bzgl. I_L ist.

219. Wahrheit in PL-Sprachen: Existenzsätze

Bleibt noch zu klären, wann quantifizierte Sätze wahr bezüglich einer Interpretation sind. Intuitiv dürfte dies schon ziemlich klar sein.

Z.B. soll „ $\exists x Hx$ “, wie wir gesehen haben, eine Formalisierung der Aussage sein, dass es mindestens einen Hund gibt.

Ebenso dürfte klar sein, dass „ $\exists x Kxv$ “ dafür stehen soll, dass es irgendjemanden oder irgendetwas gibt, das kleiner ist als William Dalton.

△ Sei $\varphi(\alpha)$ ein Ausdruck einer PL-Sprache L , in der nur die Variable α frei vorkommt. Dann ist der Satz von L $\exists\alpha \varphi(\alpha)$ genau dann wahr in Bezug auf die Interpretation I , wenn es in deren Grundmenge D mindestens ein Element gibt, dem man die Eigenschaft, die durch den $\varphi(\alpha)$ entsprechenden offenen Satz ausgedrückt wird, wahrheitsgemäß zuschreiben kann.

Angewandt auf das Beispiel des Satzes „ $\exists x Kxv$ “ unter der Interpretation I_L :

„ $\exists x Kxv$ “ ist genau dann wahr bzgl. I_L , wenn es mindestens ein Element in D_L gibt, dem die durch „... ist kleiner als William Dalton“ ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. So ein Element gibt es in D_L (z.B. Joe Dalton).

Offensichtlich ist der Begriff der Eigenschaft hier wirklich sehr weit zu fassen. Kleiner-Sein-als-William-Dalton ist unter vielerlei philosophischen Gesichtspunkten eine etwas seltsame Eigenschaft. Hier kommt es aber nur darauf an, dass unsere Definition verständlich und eindeutig ist. Eine philosophisch elegantere Definition lässt sich durch mengentheoretische Begriffe erreichen, aber diese ist nicht so leicht verständlich wie die vorliegende.

Weitere Beispiele:

„ $\exists y \neg Ky_l$ “ ist wahr bzgl. I_L , weil es ein Element in D_L gibt (nämlich Averell Dalton), dem die durch den folgenden offenen Satz ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann: „Es ist nicht der Fall, dass ... kleiner ist als Lucky Luke“.

„ $\exists x (Dx \wedge Hx)$ “ ist falsch bzgl. I_L , weil es kein Element in D_L gibt, dem wahrheitsgemäß die durch „ x ist ein Dalton und x ist ein Hund“ ausgedrückte Eigenschaft zugeschrieben werden kann.

Bemerkung: Innerhalb der Wirkungsbereiche von Quantoren sollen natürlich für die aussagenlogischen Junktoren dieselben Regeln gelten, wie wir sie auch bei nicht-quantifizierten Sätzen längst kennen.

Das heißt zum Beispiel: Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Sätze einer PL-Sprache, in denen nur die Variable „ x “ frei vorkommt. Dann kann einem Gegenstand die durch $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ ausgedrückte Eigenschaft genau dann wahrheitsgemäß zugeschrieben werden, wenn ihm die durch $\varphi(x)$ ausgedrückte Eigenschaft *nicht* wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann oder ihm die durch $\psi(x)$ ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann (oder beides).

Entsprechend für die anderen Junktoren.

Beispiel: „ $\exists x (Dx \rightarrow Hx)$ “ ist wahr bzgl. I_L , weil es ein Element von I_L gibt (z.B. Lucky Luke), dem die durch den offenen Satz, der „ Dx “ entspricht, ausgedrückte Eigenschaft nicht wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann.

220. Wahrheit in PL-Sprachen: Allsätze

Analog zum Existenzquantor werden wir jetzt auch die Wahrheitsbedingungen für allquantifizierte Aussagen angeben:

△ Sei $\varphi(\alpha)$ ein Ausdruck einer PL-Sprache L , in der nur die Variable α frei vorkommt. Dann ist der Satz von L $\forall \alpha \varphi(\alpha)$ genau dann wahr in Bezug auf die Interpretation I , wenn man allen Elementen ihrer Grundmenge D die Eigenschaft, die durch den $\varphi(\alpha)$ entsprechenden offenen Satz ausgedrückt wird, wahrheitsgemäß zuschreiben kann.

Z.B. ist „ $\forall x (Hx \vee Krx)$ “ wahr bzgl. I_L , weil man allen Elementen aus D_L die durch den offenen Satz „ x ist ein Hund oder Rantanplan ist kleiner als x “ ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zuschreiben kann.

„ $\forall x (Dx \rightarrow \neg Kxr)$ “ ist wahr bzgl. I_L , weil man allen Elementen aus D_L die durch den offenen Satz „Wenn x ein Dalton ist, dann ist x nicht kleiner als Rantanplan“ ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zuschreiben kann.

„ $\forall x Krx$ “ ist falsch bzgl. I_L , weil die durch den entsprechenden offenen Satz ausgedrückte Eigenschaft nicht *allen* Elementen von D_L wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann (nämlich nicht Rantanplan).

„ $\forall x (Kxr \rightarrow Dx)$ “ ist schon allein deshalb wahr bzgl. I_L , weil man keinem Element von D_L die Eigenschaft, kleiner zu sein als Rantanplan wahrheitsgemäß zuschreiben kann.

Allgemein gilt übrigens:

In allen PL-Sprachen sind Sätze der Form $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ unter solchen Interpretationen, bei denen kein einziges Element der Grundmenge die $\varphi(x)$ entsprechende Eigenschaft besitzt, immer wahr.

221. Wahrheit in PL-Sprachen: Verschränkte Quantifikation

Betrachten Sie nun den folgenden Satz von L_L :

$\forall x (Dx \rightarrow \exists y Kyx)$

Für die Wahrheitsbedingungen dieses Satzes unter der Interpretation I_L gilt nichts grundsätzlich anderes, als was wir ganz allgemein über Allsätze gesagt haben: Er ist wahr bzgl. I_L , wenn die durch den dem Ausdruck „ $Dx \rightarrow \exists y Kyx$ “ entsprechenden offenen Satz ausgedrückte Eigenschaft allen Elementen von D_L wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann.

Achtung: der dem Ausdruck „ $Dx \rightarrow \exists y Kyx$ “ entsprechende offene Satz ist natürlich nur an den Stellen offen, an denen hier das „ x “ (ungebunden) vorkommt. Es ist also der Satz:

„Wenn x ein Dalton ist, dann gibt es etwas, das kleiner ist als x .“

Da dies auf alle Elemente von D_L zutrifft, ist „ $\forall x (Dx \rightarrow \exists y Kyx)$ “ wahr bzgl. I_L .

$\exists y \forall z \neg Kzy$

Der vorstehende Satz ist wahr bzgl. I_L , wenn es in D_L ein Element gibt, dem der offene Satz „Für alle Gegenstände/Individuen gilt, dass sie nicht kleiner als y sind“ wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Da es ein solches Individuum in D_L gibt (nämlich Rantanplan) ist „ $\exists y \forall z \neg Kzy$ “ bzgl. I_L wahr.

222. Mögliche syntaktische Abwegigkeiten in den PL-Sprachen

Ein Hinweis: Die syntaktischen Regeln der Prädikatenlogik verbieten es nicht, quantifizierte Ausdrücke zu bilden, bei denen im Wirkungsbereich eines Quantors die entsprechende Variable überhaupt nicht vorkommt, z.B. „ $\exists x$ Da“. Es ergibt nicht besonders viel Sinn, solche Sätze zu bilden. Sie sind als gleichbedeutend mit den entsprechenden unquantifizierten Sätzen zu behandeln, im Beispiel also als gleichbedeutend mit „Da“.

223. Einige erste Beispiele für die Bedeutung quantifizierter Sätze

Im folgenden wollen wir noch einige Beispiele für quantifizierte Sätze aus PL-Sprachen betrachten. Die Semantik der PL-Sprachen, wie wir sie nun informell eingeführt haben, verleiht ihnen jeweils bestimmte Bedeutungen (bei bestimmten gegebenen Interpretationen)

Jedes Beispiel setzt eine bestimmte Sprache und eine bestimmte Interpretation voraus. Wir werden die jeweilige Sprache nicht gesondert angeben, da jeweils aus der Angabe der Interpretation hervorgeht, welche Individuenkonstanten und Prädikatbuchstaben die entsprechende Sprache besitzen muss.

224. Beispiel

$\forall x (Fx \rightarrow \neg Gx)$

Interpretation

D : Menge aller Menschen.
 Fx : x ist ein katholischer Priester.
 Gx : x ist verheiratet.

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Für alle x gilt: Wenn x katholischer Priester ist, dann ist x unverheiratet.

Anders ausgedrückt:
Alle katholischen Priester sind unverheiratet

225. Beispiel

$\forall x Lxh$

Interpretation

D : Menge aller Menschen.
 h : Hans.
 Lxy : x liebt y .

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Für alle x gilt: x liebt Hans.

Anders ausgedrückt:
Alle lieben Hans.

226. Beispiel

$\exists x \forall y Lxy$

Interpretation

D : Menge aller Menschen.
 Lxy : x liebt y .

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Es gibt ein x , so dass alle dieses x lieben.

Anders ausgedrückt:
Es gibt einen Menschen, der von allen geliebt wird.

227. Beispiel

$\forall x \exists y Lxy$

Interpretation

D : Menge aller Menschen.

Lxy : x liebt y .

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Für jedes x gibt es ein y , so dass y x liebt.

Anders ausgedrückt:
Jeder Mensch wird von jemandem geliebt.

228. Beispiel

$\neg \exists x \forall y Kxy$

Interpretation

D : Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen.

Kxy : $x < y$

Unter dieser Interpretation bedeutet der Satz in erster Näherung: Es gibt kein x , so dass alle y kleiner sind als x .

Anders ausgedrückt bedeutet der Satz also, dass es keine größte natürliche Zahl gibt.

229. Beispiel

$\exists x (Gx \wedge Px)$

Interpretation

D : Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen.

Gx : x ist eine gerade Zahl.

Px : x ist eine Primzahl.

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Es gibt ein x , so dass x gerade ist und x eine Primzahl ist.

Anders ausgedrückt:
Es gibt eine gerade Primzahl.

230. Beispiel

$\exists x \exists y (Kxy \wedge Sxy)$

Interpretation

D : Menge aller Menschen.

Kxy: x ist kleiner als y.
Sxy: x ist stärker als y.

Der Satz bedeutet bei der gegebenen Interpretation in erster Näherung:
Es gibt ein x, so dass es ein y gibt, so dass x kleiner ist als y und x stärker ist als y.

Anders ausgedrückt:
Es kommt vor, dass der/die Kleinere der/die Stärkere ist.

9. Prädikatenlogik: Formalisierungen

231. Formalisierungen mit Hilfe von PL-Sprachen

Die Formalisierung eines umgangssprachlichen Satzes funktioniert im Grunde in der Prädikatenlogik nicht viel anders als in der Aussagenlogik.

Sie müssen eine passende PL-Sprache L definieren, für diese eine Interpretation angeben und den Satz dann in der Sprache L ausdrücken.

Beispiel:

Jeder Informatikstudent hat einen Computer.

Wir verwenden die Sprache L_C , die zwei einstellige Prädikatbuchstaben „I“ und „C“ besitzt. In L_C lautet der Satz dann

$$\forall x (Ix \rightarrow Cx)$$

sofern man die folgende Interpretation I_C zugrundelegt:

D_C : Menge aller Studenten
 Ix : x ist ein Informatikstudent.
 Cx : x hat einen Computer.

Sie sehen, dass man dem formalisierten Satz und der Interpretation ansehen kann, über welches deskriptive Vokabular die entsprechende Sprache verfügen muss. Wir werden deshalb von jetzt an die Sprache nicht mehr ausdrücklich angeben; das vereinfacht die Formalisierung.

Jeder Informatikstudent hat einen Computer.

$$\forall x (Ix \rightarrow Cx)$$

D : Menge aller Studenten
 Ix : x ist ein Informatikstudent.
 Cx : x hat einen Computer.

Sie erkennen außerdem, dass man D , den Wertebereich der Variablen, ruhig größer hätte wählen können: Z.B. hätte man auch die Menge aller Menschen wählen können.

Da dies bei den meisten Formalisierungen so ist, verabreden wir einen Standard-Träger D_K .

D_K ist die Menge aller konkreten Gegenstände und Individuen. Sie soll alle und nur die Dinge umfassen, die raumzeitlich lokalisierbar sind: Physische Gegenstände, vergangene und gegenwärtige Vorgänge, Ereignisse, Menschen, Tiere, etc.

Nur abstrakte Gegenstände sind nicht in D_K enthalten (z.B. Zahlen, Mengen, Formen).

Wir treffen die folgende Vereinbarung: Wenn bei einer Interpretation kein Träger angegeben wird, ist immer der Träger D_K gemeint.

D.h.: Wenn wir Aussagen über abstrakte Gegenstände formalisieren wollen, müssen wir weiterhin ausdrücklich einen Träger der Interpretation angeben. Dasselbe werden wir auch tun, wenn wir uns nicht sicher sind, ob die Dinge, die zum Wertebereich gehören sollen, in D_K sind.

Diese Übereinkunft ist keineswegs eine Standardkonvention der Logik oder dergleichen. Sie gilt nur für diese Vorlesung (einschließlich der Übungen und Klausur).

Warum vereinbaren wir nicht einfach, dass der Standard-Träger *alle* Gegenstände und Individuen überhaupt umfasst? Dies hat zwei Gründe: Erstens ist es bei der Formalisierung von Aussagen über abstrakte Gegenstände oft hilfreich, sich bewusst Gedanken darüber zu machen, was genau der Wertebereich der Quantoren sein soll. Zweitens kann es laut Mengentheorie eine solche Menge nicht geben.

233. Formalisierungen mit Hilfe von PL-Sprachen

Diese Konvention vereinfacht die Angabe einer Formalisierung weiter:

Jeder Informatikstudent hat einen Computer.

$\forall x (Ix \rightarrow Cx)$

Ix: x ist ein Informatikstudent.

Cx: x hat einen Computer.

Achtung! Manche gelungene Formalisierungen werden durch die Erweiterung des Trägers zerstört:

Alle Menschen sind sterblich.

$\forall x Sx$

D: Menge aller Menschen

Sx: x ist sterblich.

Dieselbe Aussage kann aber bei Zugrundelegung des Standard-Trägers D_K formalisiert werden.

Alle Menschen sind sterblich.

$\forall x (Mx \rightarrow Sx)$

Mx: x ist ein Mensch.

Sx: x ist sterblich.

234. Relativierte All- und Existenzaussagen

Sätze wie „ $\forall x (Mx \rightarrow Sx)$ “ nennt man relativierte Allaussagen. Sie sind in der Anwendung eher der Normalfall, da man selten behaupten will, dass ein Prädikat auf wirklich Alles zutrifft.

Auch Existenzsätze treten oft in relativierter Form auf, die jedoch ein bisschen anders aussieht:

Es gibt mindestens einen Menschen, der größer ist als 2m.

$\exists x (Mx \wedge Zx)$

Mx: x ist ein Mensch.
Zx: x ist größer als 2m.

Eine Relativierung muss aber nicht ausdrücklich angegeben werden, wenn sie schon im Prädikat enthalten ist:

Es gibt einen Ort, an dem sich der Gral befindet.

$\exists x Ogx$

g: der Gral
Oxy: x befindet sich am Ort y.

235. Formalisierung und argumentativer Kontext

Passen Sie Ihre Formalisierungen den Erfordernissen des argumentativen Kontexts an, d.h. achten Sie darauf, welche logischen Beziehungen durch ihre Formalisierung erfasst werden sollen. Wenn Sie z.B. den Schluss

Hans ist jetzt in Paris.

Irgendjemand ist jetzt in Paris.

formalisieren möchten, genügt ein einstelliges Prädikat:

Ph

 $\exists x Px$

h: Hans
Px: x ist jetzt in Paris.

Geht es aber um den Schluss

Hans ist jetzt in Paris.
Marie ist jetzt in Paris.

Es gibt einen Ort, an dem sich jetzt sowohl Hans als auch Marie befinden.

so brauchen Sie ein zweistelliges Prädikat mit einer Personen- und einer Ortsstelle:

Ohp
Omp

$\exists x (Ohx \wedge Omx)$

h: Hans
m: Marie
p: Paris
Oxy: x befindet sich am Ort y.

236. Formalisierung und argumentativer Kontext

Berücksichtigen Sie auch die Möglichkeit, dass sich in einem Prädikat der natürlichen Sprache schon ein quantifizierter Ausdruck verbergen kann:

Peter ist allbekannt.

Hans kennt Peter.

Um die Logik hinter diesem Argument offen zu legen, genügt es sicher nicht, „allbekannt“ durch ein einstelliges Prädikat zu formalisieren. Fassen Sie „x ist allbekannt“ stattdessen als Kurzform von „jeder kennt Peter“ auf („jeder“ innerhalb einer durch den Kontext gegebenen Gemeinschaft):

$\forall x Kxp$

Khp

D: Menge aller Menschen in der Region Hannover
h: Hans
p: Peter
Kxy: x kennt y.

237. Ein Prädikat oder mehrere?

Es muss zuweilen auch nach dem Kontext entschieden werden, ob man eine Aussage als Zuschreibung eines Prädikats oder mehrerer Prädikate auffassen will.

George ist ein reicher Millionärssohn.

Wg

g: George
Wx: x ist ein reicher Millionärssohn.

George ist ein reicher Millionärssohn.

Rg \wedge Mg

g: George
Rx: x ist reich.
Mx: x ist ein Millionärssohn.

238. Ein Prädikat oder mehrere?

Konjunktionen von Prädikaten haben im Deutschen verschiedene Erscheinungsformen.

Ed ist ein Pferd, das sprechen kann.
Ed kann sprechen, obwohl er ein Pferd ist.
Ed ist ein sprechendes Pferd.

$Pe \wedge Se$

e: Ed
Px: x ist ein Pferd.
Sx: x kann sprechen.

239. Ein Prädikat oder mehrere?

Besonders häufig erscheinen Konjunktionen von Prädikaten als Relativsatzkonstruktionen („ein Pferd, das sprechen kann“) und als Kombinationen von Attribut und Prädikatsnomen („... ist ein berühmter Philosoph“ = „... ist berühmt und ist ein Philosoph“).

Aber Vorsicht! Nicht jede Kombination von Attribut und Prädikatsnomen drückt eine Konjunktion von Prädikaten aus:

Peter ist ein ehemaliger Schüler.

Dieser Satz bedeutet *nicht* einfach „Peter ist ehemalig und Peter ist ein Schüler“. Ein ehemaliger Schüler ist im Allgemeinen *kein* Schüler. Diesen Satz dürfen Sie deshalb nur mit *einem* Prädikat mit der Interpretation „... ist ein ehemaliger Schüler“ formalisieren.

Wenn Sie eine Aussage durch eine Konjunktion von Prädikaten wiedergeben, müssen Sie sich deshalb überlegen, ob wirklich jedes Prädikat auch einzeln Bestandteil der Aussage ist.

240. Ein Prädikat oder mehrere?

Ein ähnliches Beispiel ist:

Merkur ist ein kleiner Planet.

Dieser Satz ist *nicht* gelungen formalisiert durch

$Km \wedge Pm$

m: Merkur
Kx: x ist klein.
Px: x ist ein Planet.

Es ist nämlich etwas merkwürdig, über etwas, das mehr als 4800 km Durchmesser hat, zu sagen, es sei klein. Eine Möglichkeit für eine gelungene Formalisierung wäre:

$Km \wedge Pm$

m: Merkur
Px: x ist ein Planet.

Kx: Für einen Planeten ist x vergleichsweise klein.

241. Quantifizierte Aussagen: „alle“, „jede(r)“

Die Ausdrücke „alle“, „jede(r)“ sind im Normalfall als Allaussagen zu formalisieren. Dabei folgt auf sie oft unmittelbar ein Ausdruck, der die Relativierung der Allaussage angibt. Wo dies nicht der Fall ist, ist fast immer eine Relativierung durch den Kontext impliziert, die bei der Formalisierung explizit gemacht werden muss.

Alle Städte sind Gemeinden.

$$\forall x (Sx \rightarrow Gx)$$

Sx: x ist eine Stadt.

Gx: x ist eine Gemeinde.

Jeder muss sich gegen Pocken impfen lassen.

$$\forall x (Mx \rightarrow Px)$$

Mx: x ist ein Mensch.

Px: x muss sich gegen Pocken impfen lassen.

242. Quantifizierte Aussagen: Allaussagen ohne quantifizierende Ausdrücke

In der deutschen Sprache können Allaussagen aber auch getroffen werden, ohne dass dies ausdrücklich durch quantifizierende Ausdrücke signalisiert wird, insbesondere durch Relativsätze.

Hunde, die bellen, beißen nicht.

$$\forall x (Hx \wedge Bx \rightarrow \neg Cx)$$

Hx: x ist ein Hund.

Bx: x bellt.

Cx: x beißt.

Wer ein Auto hat, braucht eine Versicherung.

$$\forall x (Ax \rightarrow Vx)$$

Ax: x hat ein Auto.

Vx: x braucht eine Versicherung.

243. Quantifizierte Aussagen: „Es gibt“, „existieren“

Vergessen Sie nicht, dass Existenzsätze in PL-Sprachen die Bedeutung „Es gibt mindestens ein ...“ haben. Mit dieser Einschränkung können Sie Sätze mit „Es gibt ...“ oder „existieren“ als Existenzsätze formalisieren.

Säugetiere, die Eier legen, existieren tatsächlich.

$$\exists x (Sx \wedge Ex)$$

Sx: x ist ein Säugetier.
Ex: x legt Eier.

Es gibt einen Beamten, der für dieses Problem zuständig ist.

$\exists x (Bx \wedge Zx)$

Bx: x ist ein Beamter.
Zx: x ist für dieses Problem zuständig.

Ob diese Formalisierungen genau den Gehalt der Ausgangsaussagen treffen, hängt davon ab, wie diese genau gemeint sind. Im ersten Fall ist es möglich, dass die Aussage so zu verstehen ist, dass die Existenz *mehrerer* solcher Tiere behauptet werden soll. Im zweiten Fall kann es sein, dass gesagt werden soll, es gebe *genau* einen Beamten, der für dieses Problem zuständig ist. In diesen Fällen würde die Bedeutung der vorliegenden Formalisierungen von der Bedeutung der natürlichsprachlichen Aussagen abweichen.

244. Quantifizierte Aussagen: „manche“, „einige“

Wenn man Aussagen, die die Ausdrücke „manche“ oder „einige“ verwenden, so versteht, dass sie das Vorliegen von mindestens einem so-und-so gearteten Fall behaupten, kann man Sie gelungen mit Hilfe des Existenzquantors formalisieren.

Der in solchen Aussagen meist zusätzlich enthaltene Gehalt, dass es *mehrere* so-und-so geartete Fälle gibt, geht bei einer solchen Formalisierung allerdings verloren.

Manche Katholiken wählen SPD.

$\exists x (Kx \wedge Sx)$

Kx: x ist katholisch.
Sx: x wählt SPD.

Einige Metallgegenstände schwimmen auf Wasser.

$\exists x (Mx \wedge Wx)$

Mx: x ist ein Metallgegenstand.
Wx: x schwimmt auf Wasser.

245. Quantifizierte Aussagen: „irgend...“

Zusammensetzungen mit „irgend...“ drücken im Allgemeinen Existenzsätze aus. Beachten Sie, dass z.B. „irgendjemand“ und „irgendwo“ zugleich eine bestimmte Relativierung beinhalten.

Irgendjemand war in meinem Büro.

$\exists x (Mx \wedge Bx)$

Mx: x ist ein Mensch.
Bx: x war in meinem Büro.

Irgendwann wird Justus aufräumen.

$\exists x (Zx \wedge Ajx)$

j: Justus
 Zx: x ist ein zukünftiger Zeitpunkt.
 Axy: x räumt zum Zeitpunkt y auf.

Im zweiten Beispiel ergibt sich die genaue Relativierung der Existenzaussage auf *zukünftige* Zeitpunkte natürlich nicht allein aus dem „irgendwann“, sondern auch aus der Zeitform des Verbs.

246. Quantifizierte Aussagen: „ein“

Beachten Sie, dass sehr oft auch der unbestimmte Artikel („ein[e]“) als Existenzquantifikation (also im Sinne von „irgendein[e]“) verstanden werden sollte:

Ein Journalist hat ein Buch geschrieben.

$\exists x \exists y (Jx \wedge By \wedge Axy)$

Jx: x ist ein Journalist.
 By: y ist ein Buch.
 Axy: x ist der Autor von y.

Als Faustregel gilt: Ein Nomen, das in der natürlichen Sprache mit unbestimmtem Artikel vorkommt, ist *nicht* als Individuenkonstante zu übersetzen (sondern entweder als Existenzquantifikation wie im obenstehenden Beispiel oder als Bestandteil eines komplexen Prädikats, wie in „... hat ein Auto“).

247. Quantifizierte Aussagen: „irgend...“, „ein“

Achtung! Ausdrücke wie „irgendjemand“ und „ein(e)“ können im Deutschen *auch* verwendet werden, um Allaussagen zu machen (besonders im Zusammenhang von Bedingungssätzen).

Ein Hund, der bellt, beißt nicht.

$\forall x (Hx \wedge Bx \rightarrow \neg Cx)$

Hx: x ist ein Hund.
 Bx: x bellt.
 Cx: x beißt.

Wenn irgendeiner etwas Dummes sagt, kommt er in die Bildzeitung.

$\forall x (Dx \rightarrow Bx)$

Dx: x sagt etwas Dummes.
 Bx: x kommt in die Bildzeitung.

248. Quantifizierte Aussagen: „kein“

Viele Aussagen mit „kein“ sind verneinte Existenzaussagen.

Keine Kuh legt Eier.

$\neg \exists x (Kx \wedge Ex)$

Kx: x ist eine Kuh.
 Ex: x legt Eier.

Dasselbe gilt für „niemand“, „nichts“, etc.

Niemand ist vollkommen.

$$\neg \exists x (Mx \wedge Vx)$$

Mx: x ist ein Mensch.
Vx: x ist vollkommen.

Hier ist in dem Wort „niemand“ eine implizite Relativierung der Aussage auf Menschen enthalten.

249. Quantifizierte Bedingungssätze

Beachten Sie, dass die Wiedergabe von Bedingungssätzen durch die Subjunktion „ \rightarrow “, die in der Aussagenlogik etwas problematisch war, innerhalb von Allsätzen viel besser funktioniert.

Genauer gesagt: Sie ist meist ganz unproblematisch, wenn die gelungene Formalisierung eines Bedingungssatzes eine Subjunktion innerhalb des Quantors „ $\forall x$ “ beinhaltet, bei der sowohl im Antecedens als auch im Konsequens die Variable „ x “ vorkommt.

Wenn ein Auto kein Benzin im Tank hat, dann fährt es nicht.

$$\forall x (Ax \wedge \neg Bx \rightarrow \neg Fx)$$

Ax: x ist ein Auto
Bx: x hat Benzin im Tank
Fx: x fährt.

Der Grund dafür ist, dass die Quantifikation sicherstellt, dass die Aussage eine ganze Klasse verschiedener Einzelfälle abdeckt. Es kann deshalb nicht wie bei der Aussagenlogik sein, dass die Kombination aus Antecedens und Konsequens nur „zufällig“ eine der zulässigen Kombinationen von Wahrheitswerten (w-w, f-w und f-f) besitzt. Da sich der Zusammenhang über den ganzen Wertebereich der Variablen „ x “ erstreckt, ist er im Allgemeinen ein systematischer, der ein echtes Bedingungsverhältnis zwischen Antecedens und Konsequens widerspiegelt.

250. Quantifizierte Bedingungssätze

Viele Bedingungssätze lassen sich am besten so analysieren, dass sie eine implizite Quantifikation über (z.B. räumliche oder zeitliche) Gesamtheiten enthalten.

Wenn es eine Kirche am Ort gibt, dann gibt es auch eine Kneipe.

Ox: x ist eine Ortschaft.
Kx: In x gibt es eine Kirche.
Lx: In x gibt es eine Kneipe.

$$\forall x (Ox \wedge Kx \rightarrow Lx)$$

Wenn es in Hannover regnet, dann sind wenige Menschen auf dem Kröpcke.

D: Menge aller Zeitpunkte.
Rx: In Hannover regnet es zum Zeitpunkt x.
Wx: Zum Zeitpunkt x sind wenige Menschen auf dem Kröpcke.

$$\forall x (Rx \rightarrow Wx)$$

251. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

In Ubbedissen kennt jeder jeden.

Ux : x wohnt in Ubbedissen.

K_{xy} : x kennt y .

$$\forall x \forall y (Ux \wedge Uy \rightarrow K_{xy})$$

252. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Jeder Philosoph kennt sich selbst.

Px : x ist ein Philosoph.

K_{xy} : x kennt y .

$$\forall x (Px \rightarrow K_{xx})$$

253. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Es gibt eine Philosophin, von der Peter alle Bücher gelesen hat.

p : Peter.

Px : x ist eine Philosophin.

Bx : x ist ein Buch.

A_{xy} : x ist Autor/-in von y .

G_{xy} : x hat y gelesen.

$$\exists x (Px \wedge \forall y (By \wedge A_{py} \rightarrow G_{xy}))$$

254. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Irgendjemandem wird Anke all ihre Besitztümer schenken.

a : Anke

B_{xy} : x besitzt y .

S_{xyz} : x wird y an z verschenken.

$$\exists x \forall y (B_{ay} \rightarrow S_{ayx})$$

Anke wird all ihre Besitztümer verschenken.

(Sprache und Interpretation wie oben.)

$$\forall x (B_{ax} \rightarrow \exists y S_{axy})$$

255. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Roderigo liebt Desdemona, aber Desdemona liebt Roderigo nicht.

Also wird Liebe nicht immer erwidert.

Lxy: x liebt y.
r: Roderigo.
d: Desdemona.

$Lrd \wedge \neg Ldr$

$\neg \forall x \forall y (Lxy \rightarrow Lyx)$

256. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Peter besitzt ein Auto.

Es gibt etwas, das Peter besitzt.

p: Peter
Ax: x ist ein Auto.
Bxy: x besitzt y.

$\exists x (Ax \wedge Bpx)$

$\exists x Bpx$

257. Weitere Beispiele für prädikatenlogische Formalisierungen

Alle Bürohäuser befinden sich in großen Städten.

Alle Bürohäuser befinden sich in Städten.

Bx: x ist ein Bürohaus.
Sx: x ist eine Stadt.
Gx: x ist groß für eine Stadt.
Oxy: x befindet sich in y.

$\forall x (Bx \rightarrow \exists y (Sy \wedge Gy \wedge Oxy))$

$\forall x (Bx \rightarrow \exists y (Sy \wedge Oxy))$

10. Prädikatenlogik: Logik

258. Logische Wahrheit in PL-Sprachen

Die logische Wahrheit von Aussagen aus PL-Sprachen definieren wir wie folgt:

△ Ist L eine PL-Sprache und ϕ ein Satz von L , dann ist ϕ genau dann logisch wahr, wenn er bezüglich jeder Interpretation von L wahr ist.

Natürlich ist „Interpretation“ in dem technischen Sinn zu verstehen, in dem wir diesen Begriff in Kapitel 8 eingeführt haben.

259. Logische Wahrheit in PL-Sprachen

Zur Erläuterung betrachten wir den folgenden Beispielsatz der einfachen PL-Sprache L_{mini} , die nur eine Individuenkonstante und einen einstelligen Prädikatbuchstaben besitzt:

$$Fa \rightarrow \exists x Fx$$

Jede Interpretation, bezüglich derer „ Fa “ falsch ist, macht „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “ wahr.

Zur Erinnerung: Das liegt an der wahrheitsfunktionalen Definition von „ \rightarrow “: Wenn das Antecedens falsch ist, ist die Subjunktion als Ganzes wahr.

Bei jeder Interpretation, bezüglich derer „ Fa “ wahr ist, muss es ein Element in D geben, dem die dem Prädikatbuchstaben „ F “ entsprechende Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Jede solche Interpretation muss daher auch „ $\exists x Fx$ “ wahr machen und somit auch „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “.

Insgesamt ist „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “ also bezüglich jeder Interpretation überhaupt wahr. Also: „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “ ist logisch wahr.

260. Logische Wahrheit in PL-Sprachen

Das bedeutet also: „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “ ist wahr ...

... bezüglich der Interpretation
 D : Menge aller Städte
 a : Paris
 Fx : x liegt in Dänemark

... bezüglich der Interpretation
 D : Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen
 a : 2
 Fx : x ist eine Primzahl

... und bezüglich *jeder* anderen Interpretation von L_{mini} .

261. Logische Wahrheit in PL-Sprachen

Sie erkennen, dass es selbst für eine PL-Sprache mit wenig umfangreichem deskriptivem Vokabular unendlich viele verschiedene mögliche Interpretationen gibt.

Es gibt bei PL-Sprachen, anders als bei der Sprache AL, im Allgemeinen keine Möglichkeit, alle Interpretationen, oder auch nur alle für die Beurteilung eines bestimmten Satzes relevanten Interpretationen der Sprache aufzuzählen. (D.h. es gibt für PL-Sprachen kein Instrument, das Ähnliches für sie leisten könnte wie die Wahrheitstabellen für die Sprache AL.)

Es gibt übrigens trotz dieser Schwierigkeit Verfahren, die in der Lage sind, alle logisch wahren Sätze einer gegebenen PL-Sprache L zu erzeugen. In der Logik drückt man dies so aus: Die Menge der logisch wahren Sätze von L ist *aufzählbar*.

Allerdings gibt es *kein* Verfahren, das für PL-Sprachen nach endlich vielen Schritten entscheiden kann, ob ein gegebener Satz logisch wahr ist oder nicht. In der Terminologie der Logiker/innen: Die Menge der logisch wahren Sätze einer PL-Sprache L ist *nicht entscheidbar*. (Vgl. Folie 358.)

Trotz dieser prinzipiellen Grenzen lässt sich jedoch viel über logische Wahrheit in PL-Sprachen herausfinden, wie wir sehen werden.

262. Deduktive Gültigkeit / logische Folgerung in PL-Sprachen

△ Ein Argument in einer PL-Sprache L heißt genau dann *deduktiv gültig*, wenn jede Interpretation von L , bezüglich derer alle Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr macht.

△ Es seien φ und ψ Sätze der PL-Sprache L . Dann *folgt* ψ genau dann *logisch* aus φ , wenn jede Interpretation von L , die φ wahr macht, auch ψ wahr macht.

263. Das Symbol „ \models “:

Für die logische Wahrheit und die Beziehung der logischen Folgerung in PL-Sprachen benutzen wir dasselbe Symbol „ \models “, das Sie schon von der Sprache AL her kennen.

$$\models Fa \rightarrow \exists x Fx$$

... z.B. bedeutet, dass „ $Fa \rightarrow \exists x Fx$ “ logisch wahr ist.

Dagegen bedeutet

$$Fa \models \exists x Fx$$

dass „ $\exists x Fx$ “ aus „ Fa “ logisch folgt.

264. Logische Wahrheit und logische Folgerung

Genau wie schon bei der Sprache AL gilt:

Wenn φ und ψ Sätze einer PL-Sprache L sind, gilt immer: Aus φ folgt logisch ψ genau dann, wenn $\varphi \rightarrow \psi$ ein logisch wahrer Satz ist.

Symbolisch: $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Der Beweis ist genau analog zu demjenigen des entsprechenden Satzes über die Sprache AL, vgl. Folie 104.

265. Inkonsistente Aussagen(mengen) in PL-Sprachen

△ Ein Satz einer PL-Sprache L heißt *inkonsistent*, wenn er bezüglich jeder Interpretation falsch ist.

△ Eine Menge Σ von Sätzen einer PL-Sprache L heißt *inkonsistent*, wenn bezüglich jeder Interpretation mindestens eine Aussage aus Σ falsch ist.

Z.B. ist die Menge $\{\exists x \neg Fx, \forall x Fx\}$ von Sätzen von L_{mini} inkonsistent.

Denn bei jeder Interpretation, bezüglich derer „ $\exists x \neg Fx$ “ wahr ist, muss es ein Element in D geben, von dem wahrheitsgemäß ausgesagt werden kann, dass es die Eigenschaft, die in dieser Interpretation „F“ entspricht, *nicht* besitzt. Bezüglich einer solchen Interpretation kann dann aber „ $\forall x Fx$ “ nicht mehr wahr sein.

266. Logisch wahre Konklusionen; inkonsistente Prämissen

Genau wie bei der Sprache AL gilt:

Ein logisch wahrer Satz folgt aus beliebigen Prämissen:

Wenn Σ eine beliebige Menge von Sätzen einer PL-Sprache L und φ ein logisch wahrer Satz von L ist, dann folgt φ logisch aus Σ .

Aus einer Inkonsistenz folgt jeder beliebige Satz:

Wenn Σ eine inkonsistente Menge von Sätzen einer PL-Sprache L ist und φ ein beliebiger Satz von L , dann folgt φ logisch aus Σ .

Die Beweise sind ganz analog zu den Beweisen für die Sprache AL, vgl. Folien 105 und 109.

267. Logische Äquivalenz in PL-Sprachen

Genau wie bei AL können wir zunächst vorläufig definieren:

△ Wenn φ und ψ Sätze einer PL-Sprache L sind und $\varphi \leftrightarrow \psi$ logisch wahr ist, dann heißen φ und ψ *logisch äquivalent*. Man schreibt dann auch $\varphi \equiv \psi$.

Um logische Äquivalenzen bei PL-Sprachen optimal ausnutzen zu können, erweitern wir jedoch unseren Begriff der logischen Äquivalenz bei PL-Sprachen. Ziel dieser Erweiterung ist es, logische Äquivalenzen

auch bei Ausdrücken anzuwenden, die noch freie Variablen enthalten und somit nicht als Sätze anzusehen sind. Z.B. ist intuitiv klar, dass „ $(Fx \wedge Gx)$ “ auf eine gewisse Weise äquivalent zu „ $(Gx \wedge Fx)$ “ ist, so dass

$$\forall x (Fx \wedge Gx) \equiv \forall x (Gx \wedge Fx).$$

268. Universaler Abschluss

Zunächst müssen wir definieren, was der universale Abschluss einer Aussage ist:

- ▶ Sei φ ein Ausdruck der PL-Sprache L . Dann ist $\forall \alpha_1 \dots \forall \alpha_n \varphi$ der *universale Abschluss* von φ , wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alle und nur die Variablen sind, die in φ frei vorkommen.

Z.B.:

„ Fx “	hat den universalen Abschluss	„ $\forall x Fx$ “.
„ Hxy “	hat den universalen Abschluss	„ $\forall x \forall y Hxy$ “.
„ Hay “	hat den universalen Abschluss	„ $\forall y Hay$ “.
„ $Fx \wedge \forall y Gyz$ “	hat den universalen Abschluss	„ $\forall x \forall z (Fx \wedge \forall y Gyz)$ “.
„ Fa “	hat den universalen Abschluss	„ Fa “.

269. Logische Äquivalenz von Ausdrücken in PL-Sprachen

Jetzt können wir definieren:

- △ Wenn φ und ψ Ausdrücke einer PL-Sprache L sind, dann heißen φ und ψ genau dann *logisch äquivalent*, wenn der universale Abschluss von $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ logisch wahr ist.

Da der universale Abschluss eines *Satzes* von L einfach dieser Satz L selbst ist, enthält diese Definition die vorhin gegebene vorläufige Definition der logischen Äquivalenz für Sätze als Sonderfall.

Beispiel: „ $Fx \wedge Gx$ “ und „ $Gx \wedge Fx$ “

Es ist intuitiv klar, dass unter jeder beliebigen Interpretation einem Element die Eigenschaft, die „ $Fx \wedge Gx$ “ entspricht, genau dann wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann, wenn ihm die Eigenschaft, die „ $Gx \wedge Fx$ “ entspricht, wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Das heißt aber, dass die Eigenschaft, die „ $Fx \wedge Gx \leftrightarrow Gx \wedge Fx$ “ entspricht, absolut jedem Element wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann.

Das heißt:

$$\models \forall x (Fx \wedge Gx \leftrightarrow Gx \wedge Fx)$$

Das bedeutet: Der universale Abschluss von „ $Fx \wedge Gx \leftrightarrow Gx \wedge Fx$ “ ist logisch wahr. „ $Fx \wedge Gx$ “ und „ $Gx \wedge Fx$ “ sind also logisch äquivalent.

Anwendungsbeispiele:

$$\exists y \neg Ky_l \wedge Dj_1 \wedge Hr \equiv \exists y \neg Ky_l \wedge \neg(\neg Dj_1 \vee \neg Hr)$$

$$\exists y \neg Ky_l \wedge Dj_1 \wedge Hr \equiv \neg(\neg \exists y \neg Ky_l \vee \neg Dj_1) \wedge Hr$$

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y Kyx) \equiv \forall x (\neg Dx \vee \exists y Kyx)$$

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y Kyx) \equiv \forall x (\neg \exists y Kyx \rightarrow \neg Dx)$$

Bisher haben wir nur logische Äquivalenzen verwendet, die sich direkt aus aussagenlogischen Äquivalenzen auf die Prädikatenlogik übertragen lassen. Es gibt aber auch eigene, spezifisch prädikatenlogische Äquivalenzen.

270. Spezifisch prädikatenlogische Äquivalenzen

Alle hier folgenden prädikatenlogischen Äquivalenzen gelten für beliebige PL-Sprachen. Im Folgenden sind

mit φ , χ und ψ immer beliebige Ausdrücke derselben PL-Sprache gemeint und

mit α und β beliebige Variablen.

271. Die fundamentalen Quantorenäquivalenzen

$$\forall \alpha \neg \varphi \equiv \neg \exists \alpha \varphi$$

$$\exists \alpha \neg \varphi \equiv \neg \forall \alpha \varphi$$

Diese Äquivalenzen geben den Zusammenhang zwischen Existenz- und Allquantor an. Sie folgen auf unmittelbar ersichtliche Weise aus der Semantik der Quantoren, wie wir sie in Teil 6 eingeführt haben.

Beispiel:

$$\exists x \neg \forall x Vx \equiv \neg \forall x Vx$$

„Es gibt etwas, das nicht vergänglich ist.“ \equiv „Es ist nicht der Fall, dass alles vergänglich ist.“

Ableitbare Formen sind:

$$\forall \alpha \varphi \equiv \neg \exists \alpha \neg \varphi$$

$$\exists \alpha \varphi \equiv \neg \forall \alpha \neg \varphi$$

Ableitbar sind diese Ausdrücke einfach durch Einsetzen von $\neg \varphi$ für φ und Ausnutzung der aussagenlogischen Äquivalenz $\neg \neg \varphi \equiv \varphi$.

272. Die fundamentalen Quantorenäquivalenzen (relativierte Formen)

Praktisch brauchen wir häufiger die folgenden relativierten Quantorenäquivalenzen:

$$\forall \alpha (\varphi \rightarrow \neg \psi) \equiv \neg \exists \alpha (\varphi \wedge \psi)$$

$$\exists \alpha (\varphi \wedge \neg \psi) \equiv \neg \forall \alpha (\varphi \rightarrow \psi)$$

Die können wir schon sehr einfach mit Hilfe uns bereits bekannter Äquivalenzen herleiten:

$$\forall \alpha (\varphi \rightarrow \neg \psi) \equiv \forall \alpha (\neg \varphi \vee \neg \psi)$$

$$\equiv \forall \alpha \neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\equiv \neg \exists \alpha (\varphi \wedge \psi)$$

(Letzteres folgt aus der Äquivalenz der vorigen Folie.) Die zweite Äquivalenz funktioniert ganz ähnlich.

Beispiele:

$$\forall x (Hx \rightarrow \neg Bx) \equiv \neg \exists x (Hx \wedge Bx)$$

„Alle Hörsäle sind unbeheizt.“ \equiv „Es gibt keinen Hörsaal, der beheizt ist.“

$$\exists x (Hx \wedge \neg Bx) \equiv \neg \forall x (Hx \rightarrow Bx)$$

„Es gibt mindestens einen Hund, der nicht beißt.“ \equiv „Nicht alle Hunde beißen.“

273. Quantorenvertauschung

Gleichartige Quantoren sind vertauschbar.

$$\forall \alpha \forall \beta \varphi \equiv \forall \beta \forall \alpha \varphi$$

$$\exists \alpha \exists \beta \varphi \equiv \exists \beta \exists \alpha \varphi$$

Beispiele:

$$\forall x \forall y Kxy \equiv \forall y \forall x Kxy$$

„Jeder kennt jeden.“ \equiv „Jeder wird von jedem gekannt.“

$$\exists x \exists y Lxy \equiv \exists y \exists x Lxy$$

„Es gibt jemanden, der jemanden liebt.“ \equiv „Es gibt jemanden, der von jemandem geliebt wird.“

274. Quantorenvertauschung

Achtung! *Verschiedenartige* Quantoren sind *nicht* einfach vertauschbar! Es gilt nur *eine* Richtung:

$$\exists \alpha \forall \beta \varphi \models \forall \beta \exists \alpha \varphi$$

Der Übergang von $\exists \forall$ zu $\forall \exists$ ist erlaubt.

Beispiel:

$$\exists x \forall y Kyx \models \forall y \exists x Kyx$$

Aus „Es gibt mindestens einen, den jeder kennt“ folgt „Jeder kennt jemanden.“

Der Übergang von $\forall \exists$ zu $\exists \forall$ ist *kein* deduktiv gültiger Schluss, sondern ein häufig anzutreffender Fehlschluss!

$$\forall \alpha \exists \beta \varphi \not\models \exists \beta \forall \alpha \varphi$$

Beispiel:

$$\forall x \exists y Lxy \not\models \exists y \forall x Lxy$$

Aus „Jeder liebt jemanden“ folgt *nicht* „Es gibt mindestens einen, den alle lieben.“

275. Quantorenaufteilung / -zusammenführung

$$\forall \alpha (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall \alpha \varphi \wedge \forall \alpha \psi$$

Beispiel:

$$\forall x (Vx \wedge Wx) \equiv \forall x Vx \wedge \forall x Wx$$

„Alles ist vergänglich und wunderschön.“ \equiv „Alles ist vergänglich und alles ist wunderschön.“

Auch hier gibt es eine nützliche relativierte Variante:

$$\forall \alpha (\chi \rightarrow \varphi \wedge \psi) \equiv \forall \alpha (\chi \rightarrow \varphi) \wedge \forall \alpha (\chi \rightarrow \psi)$$

Beispiel:

$$\forall x (Sx \rightarrow Kx \wedge Fx) \equiv \forall x (Sx \rightarrow Kx) \wedge \forall x (Sx \rightarrow Fx)$$

„Alle Studierenden sind klug und fleißig.“ \equiv „Alle Studierenden sind klug und alle Studierenden sind fleißig.“

276. Quantorenaufteilung / -zusammenführung

$$\exists \alpha (\varphi \vee \psi) \equiv \exists \alpha \varphi \vee \exists \alpha \psi$$

Beispiel:

$$\exists x (Yx \vee Bx) \equiv \exists x Yx \vee \exists x Bx$$

„Es existiert etwas, das ein Yeti oder ein Bigfoot ist.“ \equiv „Es gibt einen Yeti oder es gibt einen Bigfoot.“

Relativierte Variante:

$$\exists \alpha (\chi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \exists \alpha (\chi \wedge \varphi) \vee \exists \alpha (\chi \wedge \psi)$$

Beispiel:

$$\exists x (Mx \wedge (Dx \vee Bx)) \equiv \exists x (Mx \wedge Dx) \vee \exists x (Mx \wedge Bx)$$

„Es gibt mindestens einen Microsquash-Programmierer, der dumm oder böse ist.“ \equiv „Es gibt mindestens einen Microsquash-Programmierer, der dumm ist, oder es gibt mindestens einen Microsquash-Programmierer, der böse ist.“

277. Quantorenaufteilung / -zusammenführung

Achtung! Quantorenaufteilung / -zusammenführung funktioniert nur bei den Kombinationen Allquantor-Konjunktion und Existenzquantor-Adjunktion.

Das können Sie sich so merken: Ein Allsatz hat *selbst* große Ähnlichkeit mit einer gigantischen (unendlichen) Konjunktion: „Alles ist vergänglich“ z.B. bedeutet ja so viel wie: „Adam ist vergänglich und dieser Apfel ist vergänglich und der Eiffelturm ist vergänglich und ...“

Dagegen kann man einen Existenzsatz vielleicht als eine unendliche Adjunktion auffassen. Dann würde „Es gibt einen Yeti“ soviel bedeuten wie „Dieser Tisch ist ein Yeti oder ich bin ein Yeti oder Reinold Messner ist ein Yeti oder der Eiffelturm ist ein Yeti ...“ Vorausgesetzt wäre natürlich jeweils, dass man wirklich alle Gegenstände und Individuen aufzählen und benennen kann. Da dies im Allgemeinen keine einlösbare Voraussetzung ist, *sind* Existenzsätze nicht wirklich Adjunktionen und Allsätze sind keine Konjunktionen. Aber sie haben eine gewisse Affinität zu den entsprechenden Junktoren, die sich z.B. in der Aufteilbarkeit bzw. Zusammenführbarkeit äußert.

278. Quantorenaufteilung / -zusammenführung

Bei den umgekehrten Kombinationen gilt jeweils wieder *nur eine Richtung*:

$$\forall \alpha \varphi \vee \forall \alpha \psi \models \forall \alpha (\varphi \vee \psi)$$

$$\text{Relativierte Form: } \forall \alpha (\chi \rightarrow \varphi) \vee \forall \alpha (\chi \rightarrow \psi) \models \forall \alpha (\chi \rightarrow \varphi \vee \psi)$$

Beispiel:

$$\forall x (Rx \rightarrow Sx) \vee \forall x (Rx \rightarrow Bx) \models \forall x (Rx \rightarrow Sx \vee Bx)$$

Aus „Alle Raben sind schwarz oder alle Raben sind Blau“ folgt „Alle Raben sind schwarz oder blau.“

Aber *nicht* umgekehrt:

$$\forall x (Nx \rightarrow Gx \vee Ux) \not\models \forall x (Nx \rightarrow Gx) \vee \forall x (Nx \rightarrow Ux)$$

Aus „Alle natürlichen Zahlen sind gerade oder ungerade“ folgt *nicht* „Alle natürlichen Zahlen sind gerade oder alle natürlichen Zahlen sind ungerade“.

279. Quantorenaufteilung / -zusammenführung

$$\exists \alpha (\varphi \wedge \psi) \models \exists \alpha \varphi \wedge \exists \alpha \psi$$

$$\text{Relativierte Form: } \exists \alpha (\chi \wedge \varphi \wedge \psi) \models \exists \alpha (\chi \wedge \varphi) \wedge \exists \alpha (\chi \wedge \psi)$$

Beispiel:

$$\exists x (Sx \wedge Ex) \models \exists x Sx \wedge \exists x Ex$$

Aus „Es gibt mindestens ein Säugetier, das Eier legt“ folgt „Es gibt mindestens ein Säugetier und es gibt irgendetwas, das Eier legt.“

Aber *nicht* umgekehrt:

$$\exists x Ex \wedge \exists x Mx \not\models \exists x (Ex \wedge Mx)$$

Aus „Es gibt mindestens einen Elefanten und es gibt mindestens eine Maus“ folgt *nicht* „Es gibt mindestens einen Elefanten, der eine Maus ist“.

280. Weitere Äquivalenzen

Vielleicht ist Ihnen schon aufgegangen, dass Teilaussagen, die innerhalb des Wirkungsbereiches eines Quantors auftreten, ohne dass in ihnen die entsprechende Variable frei vorkommt, dort nicht allzu viel Sinn ergeben. Dies drückt sich in den folgenden vier Äquivalenzen aus.

Die folgenden vier Äquivalenzen gelten **unter der Voraussetzung, dass die Variable α in χ nicht frei vorkommt**.

$$\forall \alpha (\varphi \wedge \chi) \equiv \forall \alpha \varphi \wedge \chi$$

$$\forall \alpha (\varphi \vee \chi) \equiv \forall \alpha \varphi \vee \chi$$

$$\exists \alpha (\varphi \wedge \chi) \equiv \exists \alpha \varphi \wedge \chi$$

$$\exists \alpha (\varphi \vee \chi) \equiv \exists \alpha \varphi \vee \chi$$

Beispiele:

$$\exists x (Dx \wedge \neg Hl) \equiv \exists x Dx \wedge \neg Hl$$

„Es gibt ein x, so dass x ein Dalton ist und Lucky Luke kein Hund ist“ \equiv „Es gibt einen Dalton und Lucky Luke ist kein Hund“.

$$\exists x (Mx \vee \forall y (Ky \rightarrow Ay)) \equiv \exists x Mx \vee \forall y (Ky \rightarrow Ay)$$

„Es gibt ein x, so dass x ein Millionär ist oder alle Katholiken arm sind“ \equiv „Es gibt einen Millionär oder alle Katholiken sind arm.“

281. Wichtige Äquivalenzen: Übersicht

φ , χ und ψ seien Ausdrücke einer PL-Sprache, α und β Variablen.

$$\begin{array}{lll} \varphi \wedge \varphi \equiv \varphi & \varphi \vee \varphi \equiv \varphi & \neg\neg\varphi \equiv \varphi \\ \varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi & \varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi & \varphi \leftrightarrow \psi \equiv \psi \leftrightarrow \varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \\ (\varphi \vee \psi) \vee \chi \equiv \varphi \vee (\psi \vee \chi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \equiv \varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi & \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\varphi & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \forall\alpha \neg\varphi \equiv \neg\exists\alpha \varphi \\ \exists\alpha \neg\varphi \equiv \neg\forall\alpha \varphi \end{array}$$

Relativierte Formen:

$$\begin{array}{l} \forall\alpha (\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv \neg\exists\alpha (\varphi \wedge \psi) \\ \exists\alpha (\varphi \wedge \neg\psi) \equiv \neg\forall\alpha (\varphi \rightarrow \psi) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \forall\alpha \forall\beta \varphi \equiv \forall\beta \forall\alpha \varphi \\ \exists\alpha \exists\beta \varphi \equiv \exists\beta \exists\alpha \varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \forall\alpha (\varphi \wedge \psi) \equiv \forall\alpha \varphi \wedge \forall\alpha \psi \\ \exists\alpha (\varphi \vee \psi) \equiv \exists\alpha \varphi \vee \exists\alpha \psi \end{array}$$

Relativierte Formen:

$$\begin{array}{l} \forall\alpha (\chi \rightarrow \varphi \wedge \psi) \equiv \forall\alpha (\chi \rightarrow \varphi) \wedge \forall\alpha (\chi \rightarrow \psi) \\ \exists\alpha (\chi \wedge (\varphi \vee \psi)) \equiv \exists\alpha (\chi \wedge \varphi) \vee \exists\alpha (\chi \wedge \psi) \end{array}$$

Falls α in χ nicht frei vorkommt:

$$\begin{array}{ll} \forall\alpha (\varphi \wedge \chi) \equiv \forall\alpha \varphi \wedge \chi & \forall\alpha (\varphi \vee \chi) \equiv \forall\alpha \varphi \vee \chi \\ \exists\alpha (\varphi \wedge \chi) \equiv \exists\alpha \varphi \wedge \chi & \exists\alpha (\varphi \vee \chi) \equiv \exists\alpha \varphi \vee \chi \end{array}$$

11. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik

282. Erweiterung des Wahrheitsbaumverfahrens

Wir wollen nun das in Kapitel 5 für die Aussagenlogik eingeführte Wahrheitsbaumverfahren so erweitern, dass es für die Prädikatenlogik anwendbar ist. Dazu schauen wir uns, wie zuvor, zunächst einmal einen informellen Beweis an, der dem Prinzip des indirekten Beweises folgt.

Wir wollen die Gültigkeit der folgenden Argumentform,

$\forall x (Mx \rightarrow Px)$	Alle Münsteraner kennen den Prinzipalmarkt.
$\exists x (Sx \wedge Mx)$	Es gibt einen Susaphonspieler, der Münsteraner ist.
<hr/>	<hr/>
$\exists x (Sx \wedge Px)$	Also gibt es einen Susaphonspieler, der den Prinzipalmarkt kennt.

informell und indirekt beweisen.

Es handelt sich hierbei um einen sogenannten kategorischen Syllogismus (des Typs „Darii“), vgl. Kapitel 12.

Das tun wir, indem wir annehmen, es gebe eine Interpretation, unter der

1. $\forall x (Mx \rightarrow Px)$ **wahr**,
2. $\exists x (Sx \wedge Mx)$ **ebenfalls wahr**, aber
3. $\exists x (Sx \wedge Px)$ **falsch** sei.

Wenn es uns gelingt, dies zum Widerspruch zu führen, dann haben wir gezeigt, dass jede Interpretation, die „ $\forall x (Mx \rightarrow Px)$ “ und „ $\exists x (Sx \wedge Mx)$ “ wahr macht, auch „ $\exists x (Sx \wedge Px)$ “ wahr machen muss.

Da unsere Interpretation (2) wahr machen soll, muss es im Träger der Interpretation ein Element geben, dem die durch den „ $Sx \wedge Mx$ “ entsprechenden offenen Satz ausgedrückte Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Nennen wir dieses Element einmal „a“. Dann muss also gelten

4. $Sa \wedge Ma$ **ist wahr**,

und daraus folgt unmittelbar

5. Sa **ist wahr** *und* 6. Ma **ist wahr**.

Als prädikatenlogische Äquivalenz haben wir bereits kennengelernt, dass „ $\exists x (Sx \wedge Px)$ “ nur falsch sein kann, wie in (3) angenommen, wenn

7. $\forall x \neg(Sx \wedge Px)$ **wahr** ist.

Da dies bedeutet, dass die in unserer Interpretation durch „ $\neg(Sx \wedge Px)$ “ ausgedrückte Eigenschaft allen Gegenständen zukommen muss, also auch dem mit „a“ benannten, gilt:

8. $\neg(Sa \wedge Pa)$ **ist wahr**.

Damit (8) gegeben sein kann muss in unserer Interpretation mindestens eine der folgenden Möglichkeiten realisiert sein:

9. Sa **ist falsch** *oder* 10. Pa **ist falsch**.

Davon scheidet (9) wegen Widerspruchs mit (5) sofort aus, wir sind also auf Möglichkeit (10) angewiesen. Da auch „ $Mx \rightarrow Px$ “ laut (1) auf *alle* Gegenstände des Trägers zutreffen muss, ist verbindlich:

11. $Ma \rightarrow Pa$ **ist wahr**.

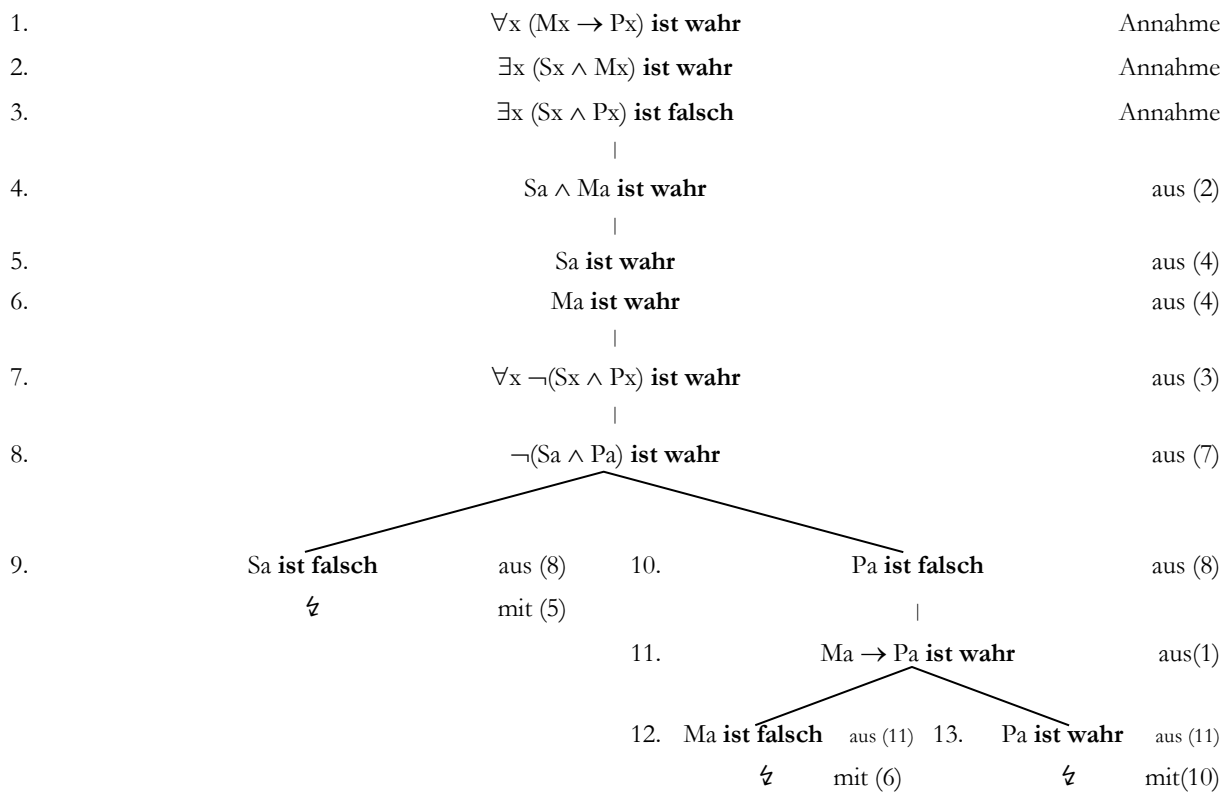
Das kann aber nur in einer Interpretation der Fall sein, in der mindestens eine der beiden folgenden Möglichkeiten vorliegt:

12. Ma **ist falsch** *oder* 13. Pa **ist wahr**.

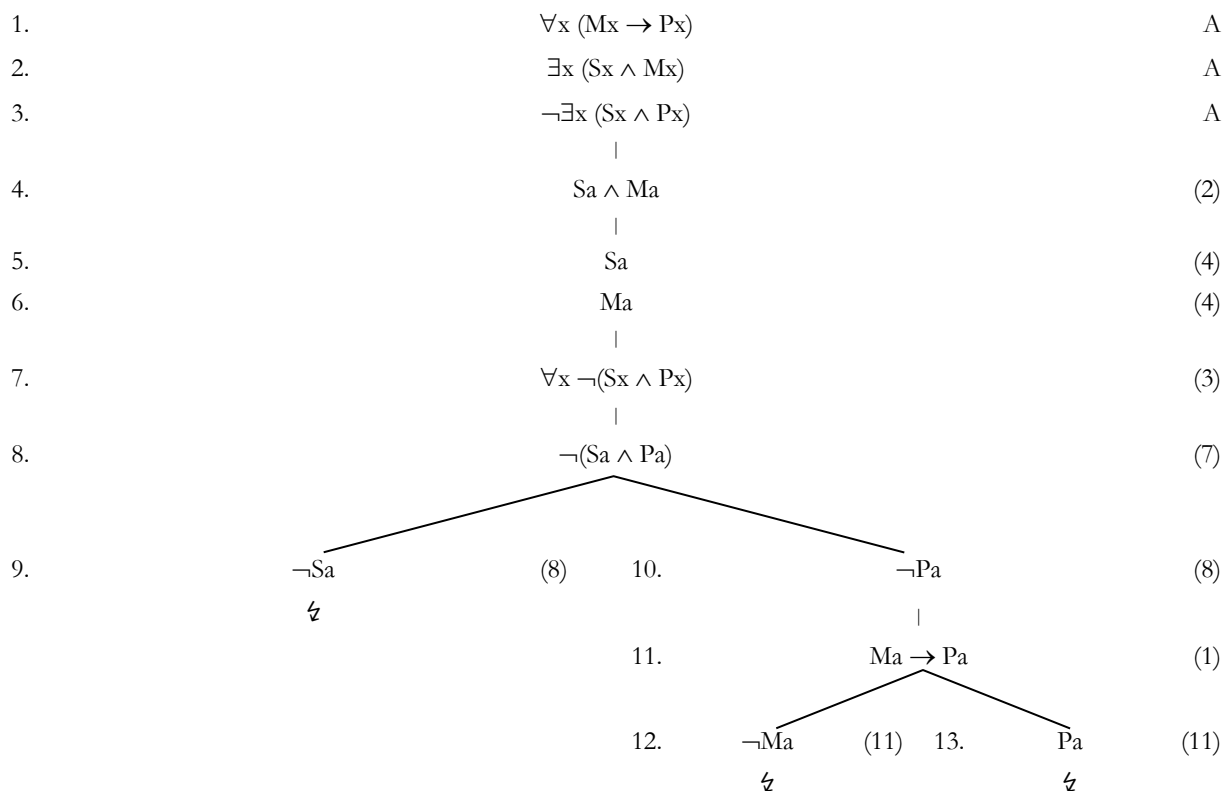
Beides befindet sich im Widerspruch zu Annahmen, die wir zuvor schon als verbindlich für unsere Interpretation anerkennen mussten: (12) widerspricht (6), (13) widerspricht (10). Eine widerspruchsfreie Interpretation von (1) – (3) ist also nicht möglich. Q.E.D.

283. Das Beispiel als Wahrheitsbaum

Diese Überlegungen kann man wie gewohnt in Baumform darstellen:



In der ebenfalls bereits gewohnten, vereinfachten Darstellung:



284. Neue Regeln

In diesem Beispiel haben wir mehrere neuartige Schritte ausgeführt, die zu Regeln für ein Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik verallgemeinert werden können.

Beim Übergang von (2) nach (4) sind wir nach dem folgenden Schema vorgegangen:

$$\begin{array}{c} \exists \xi \varphi \\ | \\ \varphi(\alpha/\xi), \end{array}$$

wobei α für eine neu eingeführte Individuenkonstante steht und $\varphi(\alpha/\xi)$ der Ausdruck ist, der entsteht, wenn man im Ausdruck φ jedes (freie) Vorkommen der Variablen ξ durch die Konstante α ersetzt.

Die Begründung für diese Regel ist die folgende: Wenn es eine Interpretation gibt, die $\exists \xi \varphi$ wahr macht, dann muss es in der Trägermenge D der Interpretation *irgendein* Element geben, dem φ wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Diesem Element geben wir bei dieser Regelanwendung sozusagen einfach einen Namen.

Etwas technischer ausgedrückt: Wenn Γ eine Menge von Ausdrücken der PL-Sprache L ist, $\exists \xi \varphi$ in Γ enthalten ist und I eine Interpretation von L , hinsichtlich derer alle Elemente in Γ wahr sind, dann gibt es auch eine Interpretation I' von L , die von I einzig darin abweicht, dass sie der in den Ausdrücken in Γ nicht enthaltenen Individuenkonstanten α ein Element zuweist, dem die gemäß I dem offenen Satz φ entsprechende Eigenschaft wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. I' macht dann neben den Elementen aus Γ auch $\varphi(\alpha/\xi)$ wahr. Es ist leicht einsehbar, dass sich diese Überlegung auch auf Fälle ausweiten lässt, in denen I' die Interpretation einer um eine neue Individuenkonstante erweiterten Sprache L' ist. α muss deshalb nicht ursprünglich zu L gehört haben. Das ist wichtig, damit sich unser Wahrheitsbaumverfahren beispielsweise auch auf PL-Sprachen ohne Individuenkonstanten anwenden lässt.

Sehr wichtig ist bei der Anwendung dieser Regel, dass wir über das von uns sozusagen neu getaufte Element nichts weiter voraussetzen, als dass es dasjenige Element ist, auf das φ zutrifft. Deshalb muss α eine *neu eingeführte* Individuenkonstante sein, über die nicht bereits in anderen Aussagen des

Wahrheitsbaums schon irgendwelche einschränkenden Bedingungen gesetzt sind. Konkret bedeutet dies: **α darf auf demselben Ast noch in keinem einzigen Satz vorgekommen sein.**

Was passiert, wenn man diese Klausel missachtet, illustriert das folgende Beispiel. Wir „beweisen“ die angebliche Gültigkeit der folgenden, glorios fehlschlüssigen Argumentform:

$\exists x Ex$	Es gibt mindestens einen Elefanten.
$Ma \rightarrow Ea$	Wenn Anton eine Maus ist, ist Anton ein Elefant.

1.	$\exists x Ex$	A
2.	$\neg(Ma \rightarrow Ea)$	A
3.	Ea	Fehlanwendung der \exists-Regel auf (1)!
4.	Ma	(2)
5.	$\neg Ea$	(2)
	ζ	

Anschaulich gesprochen, besteht der Fehler darin, dass wir in (3) zwar ein Recht haben, anzunehmen, dass es ein Element im Träger der Interpretation geben muss, dass die dem Prädikat „Ex“ zugeordnete Eigenschaft besitzt, und dass wir diesem Element einen Namen geben dürfen. Wir hätten aber nicht voraussetzen dürfen, dass es sich dabei um *dasselbe* Element handelt, von dem auch in Zeile (2) schon die Rede war.

285. Neue Regeln

Außer der neuen Regel für existenzquantifizierte Sätze haben wir im Beispiel auch eine für Allsätze angewandt, nämlich beim Übergang von (1) nach (11).

$$\begin{array}{c} \forall \xi \varphi \\ | \\ \varphi(\alpha/\xi) \end{array}$$

Dabei darf α nunmehr *irgendeine* Individuenkonstante sein.

Der Grund dafür ist, dass hinsichtlich einer Interpretation, die $\forall \xi \varphi$ wahr macht, die durch φ ausgedrückte Eigenschaft auf *jedes* beliebige Element der Trägermenge zutreffen muss. Deshalb dürfen wir bei *dieser* Regel auch Individuenkonstanten einsetzen, die schon früher im Baum vorgekommen sind.

Außerdem haben wir im Beispiel beim Schritt von (3) nach (7) eine uns bereits bekannte Äquivalenzumformung vorgenommen:

$$\begin{array}{c} \neg \exists \xi \varphi \\ | \\ \forall \xi \neg \varphi \end{array}$$

Analog (im Beispiel nicht auftauchend) darf man natürlich auch wie folgt umformen:

$$\begin{array}{c} \neg \forall \xi \varphi \\ | \\ \exists \xi \neg \varphi \end{array}$$

Wie wir sehen werden, genügen diese vier neuen Regeln, um die uns bereits bekannten aussagenlogischen Regeln zu einem Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik auszubauen.

$\begin{array}{c} \exists \xi \varphi \\ \\ \varphi(\alpha/\xi), \\ \text{für eine Individuenkonstante } \alpha, \\ \text{die auf dem Ast neu ist} \end{array}$	$\begin{array}{c} \forall \xi \varphi \\ \\ \varphi(\alpha/\xi), \\ \text{für eine beliebige Individuenkonstante } \alpha \end{array}$
$\begin{array}{c} \neg \exists \xi \varphi \\ \\ \forall \xi \neg \varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg \forall \xi \varphi \\ \\ \exists \xi \neg \varphi \end{array}$

Für eine Gesamtübersicht aller Regeln (einschließlich der aussagenlogischen) siehe unten Folie 393.

287. **Anwendungsbeispiele**

Zunächst einige Beispiele für die Anwendung des prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens.

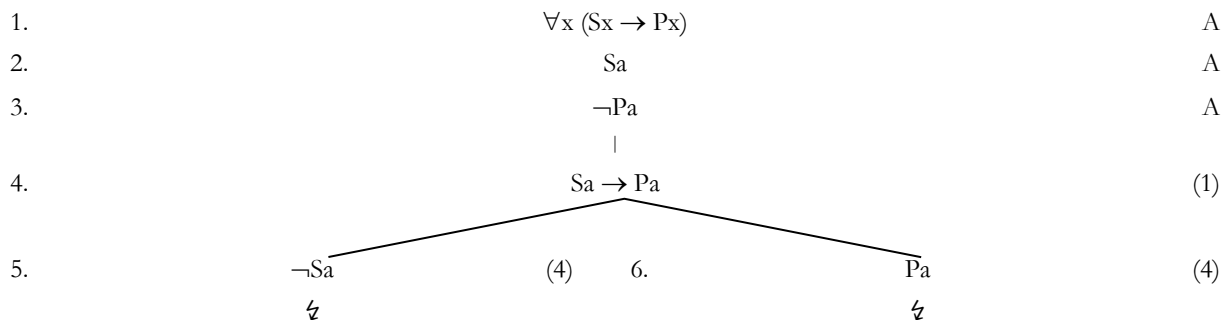
- Die Verwendungsweise des Verfahrens ist dabei natürlich prinzipiell dieselbe, die wir schon im Zusammenhang mit der Aussagenlogik kennengelernt haben:
- Um die *logische Wahrheit* eines Satzes φ nachzuweisen, $\models \varphi$, entwickle aus der **Annahme** $\neg\varphi$ einen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste abgeschlossen sind.
- Um eine *logische Folgerung* nachzuweisen, $\Sigma \models \varphi$, entwickle aus den **Annahmen** $\Sigma, \neg\varphi$ einen Wahrheitsbaum, dessen sämtliche Äste abgeschlossen sind.

Gültigkeit der Argumentform

$\forall x (Sx \rightarrow Px)$
 Sa

 Pa

Dies ist die Argumentform des sogenannten „Quasi-Syllogismus“, vgl. Kap. 14.



288. **Anwendungsbeispiele**

Gültigkeit der Folgerung

$$\forall x Fx \vee \forall x Gx \models \forall x (Fx \vee Gx)$$

1.		$\forall x Fx \vee \forall x Gx$	A
2.		$\neg \forall x (Fx \vee Gx)$	A
3.		$\exists x \neg (Fx \vee Gx)$	(2)
4.		$\neg (Fa \vee Ga)$	(3)
5.		$\neg Fa$	(4)
6.		$\neg Ga$	(4)
7.	$\forall x Fx$	(1) 8.	$\forall x Gx$
9.	Fa	(7) 10.	Ga
	ζ		ζ

289. **Anwendungsbeispiele**

Logische Wahrheit von

$$\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$$

1.		$\neg (\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy)$	A
2.		$\exists x \forall y Fxy$	(1)
3.		$\neg \forall y \exists x Fxy$	(1)
4.		$\forall y \neg \exists x Fxy$	(2)
5.		$\exists y \neg \exists x Fxy$	(3)
6.		$\neg \exists x Fxb$	(5)
7.		$\forall x \neg Fxb$	(6)
8.		$\neg Fab$	(7)
9.		Fab	(4)
		ζ	

An diesem Beispiel kann man sehen: Es ist sehr wichtig, dass die Anwendung der Regeln für Allsätze (von (7) nach (8) und von (4) nach (9)) erst *nach* der Anwendung der Regeln für Existenzsätze geschehen ist.

Nur so konnten die allquantifizierten Variablen in (4) und (7) durch dieselben Individuenkonstanten ersetzt werden, die vorher schon eingeführt worden waren, so dass ein Widerspruch entstehen konnte. Diese Beobachtung lässt sich verallgemeinern:

Hinweis zur Verwendung der Regeln für Quantifizierte Formeln: Wenden Sie die Regel für Allsätze möglichst spät an, d.h. nachdem Sie die Anwendungsmöglichkeiten der Regel für Existenzsätze ausgeschöpft haben, und setzen Sie bei der Anwendung der Regel für Allsätze solche Individuenkonstanten ein, die Sie vorher bereits bei der Anwendung der Regel für Existenzsätze eingeführt haben.

Außerdem gelten weiterhin die Hinweise 3 u. 4, die wir beim aussagenlogischen Wahrheitsbaumverfahren zu beachten gelernt haben (vgl. Folien 149/150).

290. Anwendungsbeispiele

Im folgenden Beispiel wird die logische Wahrheit von

$$\exists x (\neg Fx \vee \forall y Fy)$$

nachgewiesen.

Es verdeutlicht eine **wichtige Besonderheit des Wahrheitsbaumverfahrens für die Prädikatenlogik**: Die Entwicklungsregel für Allsätze muss unter Umständen auf ein und denselben Ausgangssatz *mehrmals* angewendet werden, um einen Wahrheitsbaum abschließen zu können (wobei jedes Mal eine andere Individuenkonstante eingeführt wird)! Deshalb dürfen Sie einen Satz, den Sie bereits unter Anwendung dieser Regel entwickelt haben, trotzdem *nicht* mit einem Häkchen als „erledigt“ markieren.

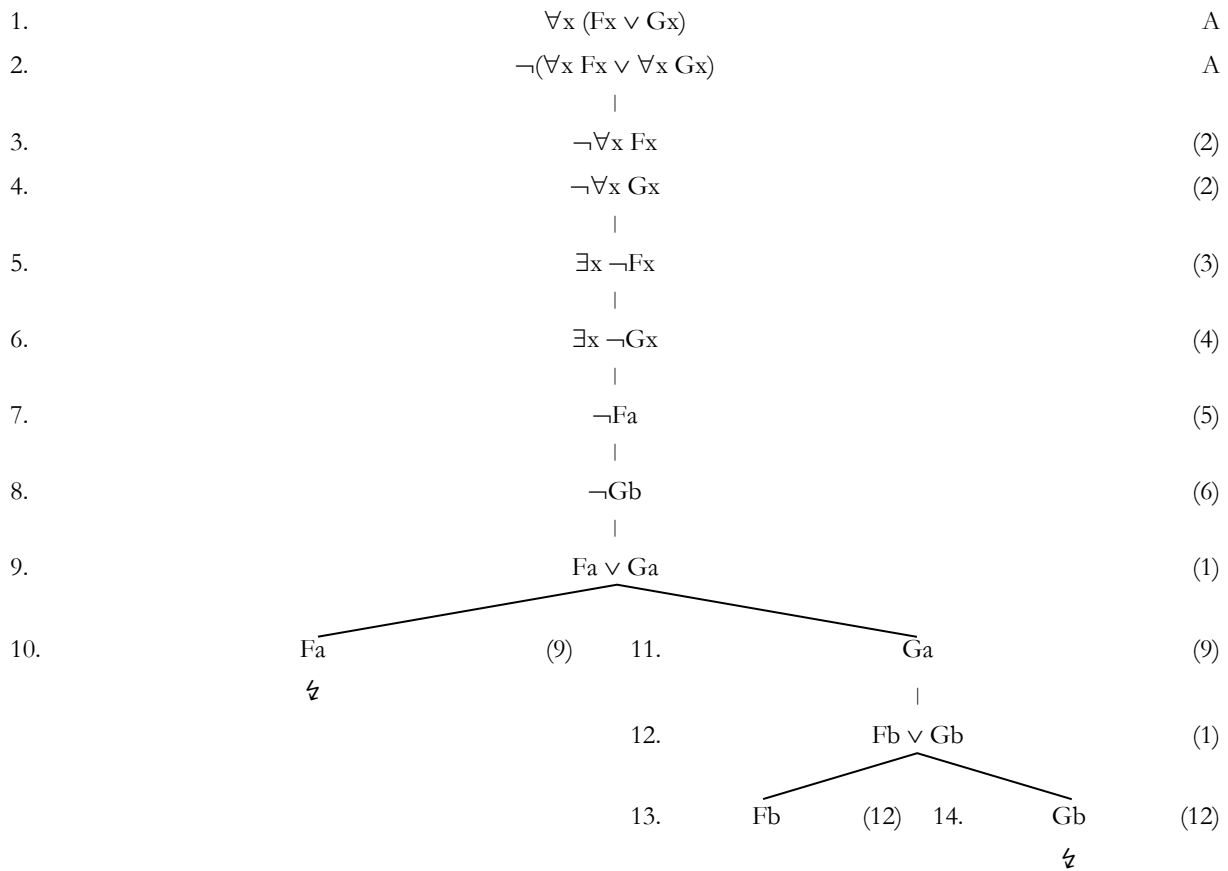
1.	$\neg \exists x (\neg Fx \vee \forall y Fy)$	A
2.	$\forall x \neg(\neg Fx \vee \forall y Fy)$	(1)
3.	$\neg(\neg Fa \vee \forall y Fy)$	(2)
4.	$\neg\neg Fa$	(3)
5.	$\neg\forall y Fy$	(3)
6.	$\exists y \neg Fy$	(5)
7.	$\neg Fb$	(6)
8.	$\neg(\neg Fb \vee \forall y Fy)$	(2)
9.	$\neg\neg Fb$	(8)
10.	$\neg\forall y Fy$	(8)
	ζ	

291. Ein unabschließbarer Wahrheitsbaum

Auch beim prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahren schauen wir uns einmal an, was passiert, wenn wir eine **unrichtige Behauptung** nachzuweisen versuchen:

$$\forall x (Fx \vee Gx) \vDash \forall x Fx \vee \forall x Gx$$

Die umgekehrte Richtung dieser Folgerungsbeziehung stimmt, wie wir oben (Folie 347) gezeigt haben, aber in dieser Richtung ist der Schluss nicht gültig.



Der in (13) endende Ast lässt sich offenbar nicht schließen – richtigerweise, denn die Sätze an der Wurzel des Baumes sind tatsächlich *nicht* inkonsistent. Allerdings wird hier erneut ein Unterschied zum Verfahren für AL deutlich: Den Zustand eines voll ausentwickelten Astes können wir im Beispiel nicht erreichen. Es gibt immer noch Möglichkeiten, durch Anwendung der Quantorenregeln neue Individuenkonstanten einzuführen und somit neue Sätze zu generieren (z.B.: „ $\neg Fc$ “), die bisher noch nicht auf dem Ast stehen. Es ist allerdings klar, dass dies nur zu Wiederholungen der im Wahrheitsbaum schon vorhandenen Konstellationen mit anderen Individuenkonstanten führen wird und deshalb ebensowenig wie die bereits ausgeführte Entwicklung zum Abschluss aller Äste führen kann.

In diesem Fall hilft uns der Baum, wie er oben entwickelt ist, auch auf andere Weise, uns Gewissheit zu verschaffen, dass sich der letzte Ast auf keinen Fall wird abschließen lassen. Wir können nämlich vom nicht abgeschlossenen Ast ein *Gegenmodell* ablesen, d.h. eine Interpretation, die alle Sätze an der Wurzel des Baumes wahr macht. Im Ast finden wir die Sätze

Fb $\neg Fa$ Ga $\neg Gb$

Mit Hilfe dieser Sätze können wir das folgende Modell konstruieren: Die Trägermenge besteht aus nur zwei Gegenständen, A und B . Die durch „ Fx “ ausgedrückte Eigenschaft kommt B zu, nicht aber A ; die durch „ Gx “ ausgedrückte Eigenschaft kommt A zu, nicht aber B . Hinsichtlich dieser Interpretation sind beide Sätze an der Wurzel des Wahrheitsbaums wahr. Die Sätze sind also ganz sicher nicht unvereinbar miteinander.

292. In welcher Form man Gegenmodelle ganz einfach angeben kann

Wie wir gesehen haben, kann das Ergebnis der Durchführung eines Wahrheitsbaumverfahrens auch sein, dass man eine Interpretation findet, die alle Sätze an der Wurzel des Baumes wahr macht. Wenn wir mit

dem Wahrheitsbaum z.B. eine behauptete logische Folgerungsbeziehung überprüfen wollten, dann stellt ein solche Interpretation ein Gegenmodell dar – ein Beispiel, das zeigt, dass es möglich ist, dass die Prämissen zugleich mit der Negation der Schlussfolgerung wahr sein können, so dass die behauptete Folgerungsbeziehung also nicht bestehen kann.

Im folgenden möchte ich einige einfache Diagramme vorstellen, mit deren Hilfe man solche Gegenmodelle schnell und sinnfällig darstellen kann, wenn man sie einmal gefunden (z. B. am Wahrheitsbaum abgelesen) hat.

293. Extensionen von Prädikaten in mengentheoretischer Sprache angeben

Bei den Gegenmodellen kommt es natürlich allein auf die Extensionen der Prädikate an. Es ist unnötig, sich Beispiele von realweltlichen Prädikaten auszudenken, die sich in ihren Extensionen genau so zueinander verhalten.

Man kann deshalb endlich große Gegenmodelle meist sehr einfach in der Sprache der Mengentheorie darstellen. Dabei benutzen wir Individuenkonstanten als Bezeichnungen für die Grundelemente unseres Gegenmodells. (Wenn in den Sätzen, für die wir das Modell angeben, Individuenkonstanten auftreten, benutzen wir dieselben Individuenkonstanten natürlich nur für die Angabe derjenigen Elemente des Modells, die die im Satz auftretenden Konstanten interpretieren sollen.)

Beispiele:

- Gegenmodell zur Behauptung

$$Fa, \forall x (Gx \rightarrow Fx) \models Ga$$

$$D = \{a, b\}, |F| = \{a, b\}, |G| = \{b\}$$

Die senkrechten Striche sind eine weithin übliche Konvention für die Angabe der Extension eines Prädikats (unter einer gegebenen Interpretation.)

- **Modelle** zur Erfüllbarkeit von $\forall x \exists y Bxy$

(Und damit **Gegenmodelle** zur Behauptung $\models \neg \forall x \exists y Bxy$)

$$D = \{a, b\}, |B| = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\} \quad \text{oder} \quad D = \{a\}, |B| = \{\langle a, a \rangle\}$$

Die Extension eines zweistelligen Prädikats ist eine Menge geordneter Paare. Geordnete Paare (und n-Tupel) werden mit Hilfe spitzer Klammern angegeben.

- Gegenmodell zur Behauptung

$$\forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gy \wedge Bxy))$$

$$\exists y (Gy \wedge \forall x (Fx \rightarrow Bxy))$$

$$D = \{a, b, c, d\}, |F| = \{a, b\}, |G| = \{c, d\}, |B| = \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$$

294. Gegenmodelle durch Diagramme darstellen

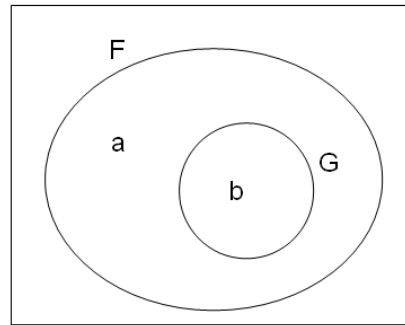
Die Angabe von Gegenmodellen in mengentheoretischer Sprache ist zwar präzise, aber nicht besonders sinnfällig. Es macht die Sache anschaulicher, die Gegenmodelle durch Diagramme anzugeben.

Sind nur einstellige Prädikate im Spiel, dann können ganz einfache Mengendiagramme zum Einsatz kommen, bei denen die Extension in der Prädikate durch Kreise oder Ovale dargestellt werden; ob Individuen zur Extension des Prädikats gehören oder nicht, wird dadurch angezeigt, dass sie sich innerhalb des entsprechenden Kreises oder Ovals befinden (oder eben nicht).

Beispiel: Gegenmodell zur Behauptung

$Fa, \forall x (Gx \rightarrow Fx) \vDash Ga$

$D = \{a, b\}, |F| = \{a, b\}, |G| = \{b\}$

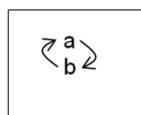


Bei der Angabe von Gegenmodellen im Rahmen von Aufgaben in dieser Lehrveranstaltung wollen wir uns auf die Konvention einigen, dass nur die ausdrücklich im Diagramm angegebenen Individuen existieren. Bitte tragen Sie auch leere Prädikate als leere Kreise ein. Achten Sie auf eindeutige Bezeichnung der Mengen mit Prädikatbuchstaben.

Wenn es in den behandelten Sätzen um zweistellige Prädikate (Relationen) geht, dann lassen sich Modelle sehr gut mithilfe von Pfeilen („gerichteten Graphen“) darstellen.

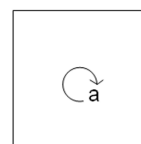
Beispiel: Zwei Modelle zur Erfüllbarkeit von $\forall x \exists y Bxy$

$D = \{a, b\}, |B| = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}$



$x \rightsquigarrow y \cong Bxy$

$D = \{a\}, |B| = \{\langle a, a \rangle\}$



$x \rightsquigarrow y \cong Bxy$

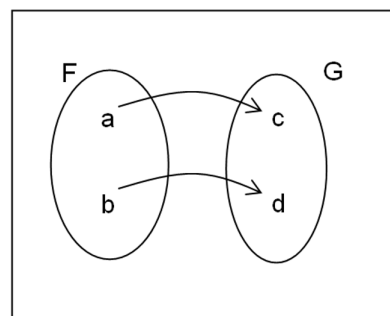
Konvention ist, dass alle nicht ausdrücklich eingezeichneten Relationen *nicht* bestehen. Die Bedeutung des Pfeils muss *immer* mit angegeben werden.

Bei Sprachen, die sowohl ein- als auch zweistellige Prädikate enthalten, können beide Darstellungsformen auch kombiniert werden.

Beispiel: Gegenmodell zur Behauptung

$\frac{\forall x (Fx \rightarrow \exists y (Gy \wedge Bxy))}{\exists y (Gy \wedge \forall x (Fx \rightarrow Bxy))}$

$D = \{a, b, c, d\}, |F| = \{a, b\}, |G| = \{c, d\}, |B| = \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$

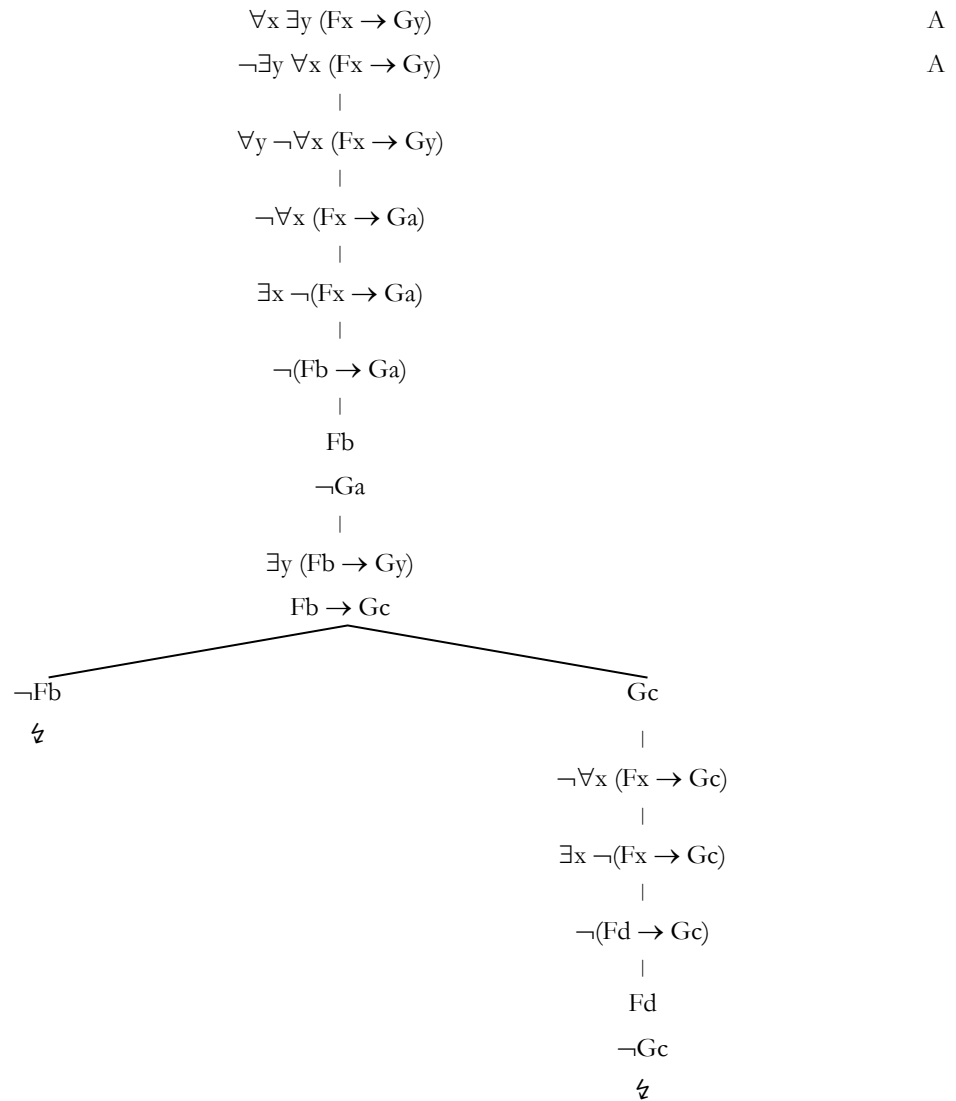


$x \rightsquigarrow y \cong Bxy$

Im Allgemeinen ist der Schluss von $\forall x \exists y \phi$ auf $\exists y \forall x \phi$ *nicht* logisch gültig. Das folgende Beispiel zeigt, dass es aber bestimmte Sonderfälle gibt, für die daraus ein gültiger Schluss wird. Gezeigt wird

$$\forall x \exists y (Fx \rightarrow Gy) \models \exists y \forall x (Fx \rightarrow Gy)$$

Das Beispiel ist außerdem eine neuerliche Illustration der Einsicht, dass die Entwicklungsregel für Allsätze zuweilen mehrfach auf ein und denselben Satz angewendet werden muss.



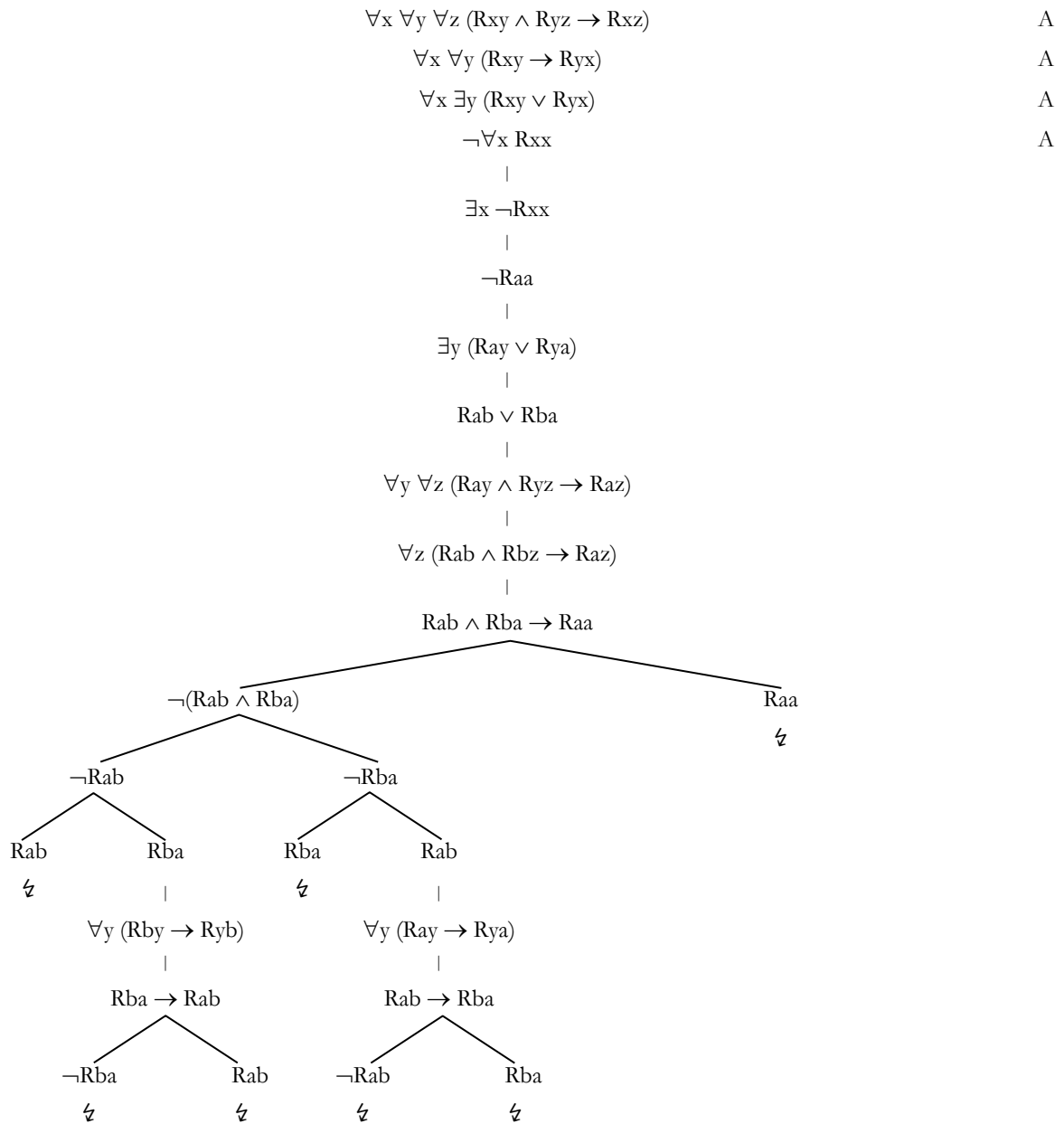
Gezeigt wird die Gültigkeit des Schlusses

$$\forall x \forall y \forall z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$$

$$\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$$

$$\forall x \exists y (Rxy \vee Ryx)$$

$$\forall x Rxx$$

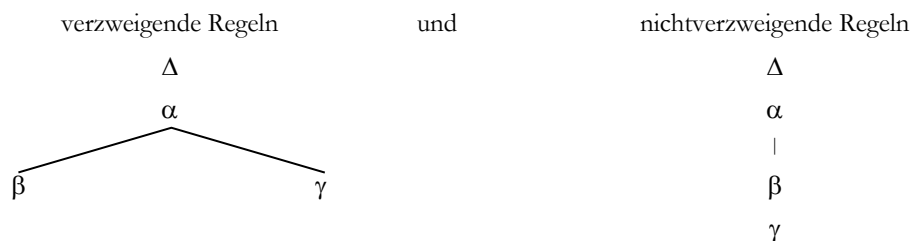


Vgl. auch die Beweise der Korrektheit und Vollständigkeit des prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens in Beckermann 2003, Abschnitt 27.2, Howson 1997, Kap. 8 und Bostock 1997, Abschnitte 4.5 u. 4.7.

△ Korrektheit des Wahrheitsbaumverfahrens:
Jede Menge von Sätzen einer PL-Sprache, aus denen sich ein Wahrheitsbaum entwickeln lässt, dessen sämtliche Äste geschlossen sind, ist inkonsistent.

Beweis:

Der Beweis ist eine einfache Erweiterung des Beweises der Korrektheit des aussagenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens (vgl. Folie 152). Zur Erinnerung: Dort hatten wir für



die folgenden zwei Behauptungen gezeigt:

- (V) Für alle verzweigenden Regeln gilt: Wenn Δ, α konsistent ist, dann ist Δ, α, β konsistent, *oder* es ist Δ, α, γ konsistent.
- (N) Für alle nichtverzweigenden Regeln gilt: Wenn Δ, α konsistent ist, dann ist auch $\Delta, \alpha, \beta, \gamma$ konsistent.

Nun sind vier neue, nichtverzweigende Regeln hinzugekommen, für die wir (N) noch zeigen müssen.

Wenn $\Delta, \exists \xi \varphi$ konsistent ist, muss es eine Interpretation I geben, hinsichtlich derer $\exists \xi \varphi$ und alle Sätze in Δ wahr sind. Wenn α eine Individuenkonstante ist, die in keinem der Sätze aus $\Delta, \exists \xi \varphi$ vorkommt, dann können wir I so zu I' abwandeln, dass I' der Konstanten α ein Element zuordnet, so dass $\varphi(\alpha/\xi)$ wahr wird (ein solches Element muss es geben, da ja $\exists \xi \varphi$ bzgl. I wahr ist) und in allen übrigen Punkten völlig mit I übereinstimmt. Da die Umbewertung von α für die Wahrheitswerte der Sätze in Δ und für $\exists \xi \varphi$ keine Rolle spielen kann, macht I' dann neben $\varphi(\alpha/\xi)$ auch $\exists \xi \varphi$ und alle Sätze in Δ wahr, somit ist $\Delta, \exists \xi \varphi, \varphi(\alpha/\xi)$ konsistent.

Wenn $\Delta, \forall \xi \varphi$ konsistent ist, muss es eine Interpretation I geben, hinsichtlich derer $\forall \xi \varphi$ und alle Sätze in Δ wahr sind. Dieselbe Interpretation macht dann für eine beliebige Individuenkonstante α auch $\varphi(\alpha/\xi)$ wahr. Daher ist dann auch $\Delta, \forall \xi \varphi, \varphi(\alpha/\xi)$ konsistent.

Für den Fall, dass α in der in Rede stehenden PL-Sprache bisher nicht vorkam und deshalb die Anwendung der Quantorenregeln hier eine Erweiterung der Sprache erforderlich macht, muss man auch im Fall der \forall -Regel über eine abgewandelte Interpretation I' der neuen, erweiterten Sprache argumentieren, die in fast allen Punkten mit I übereinstimmt und nur zusätzlich der neuen Individuenkonstante ein Element aus D zuweist.

Wenn $\Delta, \neg \exists \xi \varphi$ konsistent ist, ist auch $\Delta, \neg \exists \xi \varphi, \forall \xi \neg \varphi$ konsistent, da $\neg \exists \xi \varphi \equiv \forall \xi \neg \varphi$.

Wenn $\Delta, \neg \forall \xi \varphi$ konsistent ist, ist auch $\Delta, \neg \forall \xi \varphi, \exists \xi \neg \varphi$ konsistent, da $\neg \forall \xi \varphi \equiv \exists \xi \neg \varphi$.

(V) und (N) gelten also auch für das prädikatenlogische Wahrheitsbaumverfahren, und das bedeutet auch hier: Wenn eine Menge von Aussagen an der Wurzel eines Wahrheitsbaumes konsistent ist, dann muss auch mindestens ein Ast des Baums (bzw. die Menge der auf ihm stehenden Sätze) konsistent sein.

Abermals folgt: Wenn in einem Wahrheitsbaum alle Äste geschlossen sind (also inkonsistente Satzmenge enthalten), muss die Menge von Sätzen an seiner Wurzel inkonsistent sein. Q.E.D.

- △ **Vollständigkeit des Wahrheitsbaumverfahrens:**
Aus jeder endlichen inkonsistenten Menge von Sätzen einer PL-Sprache lässt sich ein Wahrheitsbaum entwickeln, dessen sämtliche Äste geschlossen sind.

Beweis:

Wir zeigen (was äquivalent ist): *Jede nicht-abschließbare prädikatenlogische Wahrheitsbaum-Wurzel besteht aus einer konsistenten Menge von Sätzen.*

Dieser Satz ist, genauer gesagt, äquivalent zur folgenden Behauptung: Jeder Wahrheitsbaum, der in einer inkonsistenten Menge wurzelt, ist abschließbar. Er ist also nur deshalb tatsächlich äquivalent zur Vollständigkeitsbehauptung, wie wir sie oben definiert haben, weil wir diese auf endliche Satzmenge beschränkt haben. (Denn in einer unendlichen inkonsistenten Satzmenge kann überhaupt kein Wahrheitsbaum wurzeln.) Trotzdem lässt sich auch aus einer unendlichen inkonsistenten Satzmenge heraus immer ein abschließbarer Wahrheitsbaum entwickeln (der nämlich in einer Teilmenge der unendlichen inkonsistenten Menge wurzelt). Diesen, etwas aufwändigeren Beweis sparen wir hier jedoch aus. Siehe Bostock 1997, Abschnitte 4.6-4.7.

Sei W eine solche nicht-abschließbare Wahrheitsbaum-Wurzel, das heißt eine Menge von Sätzen, bei der sich die Regeln des Wahrheitsbaumverfahrens auf keine wie auch immer geartete Weise so anwenden lassen, dass am Ende alle Äste des Baums geschlossen sind.

Anders als bei den aussagenlogischen Wahrheitsbäumen können wir beim prädikatenlogischen Verfahren leider nicht von voll ausentwickelten Ästen und fertigen Bäumen sprechen, denn durch die Quantorenregeln lassen sich immer unendlich viele neue Sätze erzeugen. Stattdessen führen wir eine andere Konstruktion ein:

Auf diese Menge wenden wir nun eine ganz bestimmte, regelmäßige Art und Weise an, den Wahrheitsbaum zu entwickeln. Diese Methode nennen wir die *kanonische Entwicklung*. Da sich W auf *keine* Weise in einen überall abgeschlossenen Wahrheitsbaum entwickeln lässt, muss auch bei dieser Methode immer mindestens ein Ast offen bleiben.

Die kanonische Entwicklung erfolgt in Zyklen, bei denen die Schritte (1)-(4) nacheinander und immer wieder von neuem bei (1) beginnend angewandt werden. (Zwischendurch werden natürlich abschließbare Äste geschlossen und nicht mehr weiter entwickelt.)

- (1) Wende alle aussagenlogischen Regeln an, solange bis jeder Ast entweder abgeschlossen ist oder auf ihm mit Hilfe dieser Regeln keine Sätze mehr erzeugt werden können, die nicht bereits auf ihm stehen.
- (2) Entwickle alle Sätze der Formen $\neg\exists\xi\varphi$ und $\neg\forall\xi\varphi$ mit Hilfe der entsprechenden Regeln (zu $\forall\xi\neg\varphi$ bzw. $\exists\xi\neg\varphi$).
- (3) Wende die Regel für Existenzsätze unter Einführung neuer Individuenkonstanten an, und zwar so oft es geht, ohne die Regel mehr als einmal auf demselben Ast auf denselben Satz anzuwenden.
- (4) Wende die Regel für Allsätze an, und zwar so oft es geht, ohne Individuenkonstanten einzuführen, die nicht schon im Baum vorkommen und ohne einen Satz auf einen Ast zu schreiben, der dort genau so schon steht. Ausnahme: Wenn bisher überhaupt noch keine Individuenkonstante im Baum vorkommt, darf in diesem Schritt eine einzige neue Konstante eingeführt werden.

Um zu zeigen, dass die kanonische Entwicklung wohldefiniert ist, müssen wir sicherstellen, dass jede Phase dieses Zyklus immer in endlich vielen Schritten abschließbar ist. Da der Baum bei jedem einzelnen Entwicklungsschritt immer nur aus einer endlichen Zahl von Sätzen besteht (in denen nur endlich viele Individuenkonstanten vorkommen können), kann man sich dies durch Betrachtung der Anwendungsbedingungen der einzelnen Phasen klar machen.

Es kann sein, dass die kanonische Entwicklung auch bei einer nicht-abschließbaren Wurzel zu einem Halt kommt, weil keiner der Schritte mehr im Einklang mit den in (1)-(4) formulierten Bedingungen angewandt werden kann. (Folie 350 zeigt ein Beispiel für einen solchen Fall.) Es kann aber auch passieren, dass die kanonische Entwicklung sozusagen zu einem unendlich langen Ast führt, wie das folgende Beispiel zeigt:

1.	$\forall x \exists y Fxy$	A
2.	$\exists y Fay$	(1)
3.	Fab	(2)
4.	$\exists y Fby$	(1)
5.	Fbc	(2)
6.	$\exists y Fcy$	(1)
7.	Fcd	(2)
	⋮	

Die kanonische Entwicklung unserer Wurzel muss also zwar mindestens einen Ast besitzen, der nicht abgeschlossen ist, bei diesem kann es sich unter Umständen aber um einen unendlich langen Ast handeln.

Sei also \mathcal{A} ein nicht-abgeschlossener Ast der kanonischen Entwicklung von \mathcal{W} . Dann konstruieren wir die *kanonische Interpretation* I wie folgt: Der Träger D von I besteht aus so vielen Elementen, wie auf \mathcal{A} Individuenkonstanten vorkommen. Jeder Individuenkonstanten wird ein anderes Element des Trägers zugeordnet. Die Prädikatbuchstaben werden so interpretiert, dass die durch sie ausgedrückten Eigenschaften bzw. Relationen *dann und nur dann* bestehen, wenn der entsprechende atomare Satz ausdrücklich auf dem Ast \mathcal{A} steht.

Mit einem „atomaren Satz“ ist hier natürlich ein Satz gemeint, der nur aus einem Prädikatbuchstaben in Anwendung auf eine oder mehrere Individuenkonstante besteht.

Die Behauptung ist nun: Hinsichtlich der kanonischen Interpretation sind *alle* Sätze auf \mathcal{A} wahr. Für die atomaren Sätze ist das unmittelbar offensichtlich. Die Erweiterung auf alle Sätze erreichen wir durch vollständige Induktion über die Länge des Satzes.

Induktionsannahme ist, dass für alle Sätze aus weniger als n Zeichen gegeben ist, dass sie hinsichtlich I wahr sind. Induktionsschritt: Sei χ ein Satz auf \mathcal{A} mit n Zeichen. Zu zeigen: χ ist wahr hinsichtlich I . Wir müssen sechs verschiedene Möglichkeiten berücksichtigen (deren erste zwei uns zugleich den Induktionsanfang liefern werden, denn sie betreffen die kürzestmöglichen Sätze und wir beweisen sie ohne Rückgriff auf die Induktionsannahme). a) χ ist ein atomarer Satz. b) χ ist ein negierter atomarer Satz. c) χ ist eine andere aussagenlogische Verknüpfung oder negierte aussagenlogische Verknüpfung. d) χ ist ein Allsatz. e) χ ist ein Existenzsatz. f) χ ist ein negierter All- oder Existenzsatz.

- a) Ist χ atomar, so ist χ offensichtlich wahr hinsichtlich I .
- b) Hat χ die Form $\neg\varphi$ (mit φ atomar), dann steht φ nicht auf \mathcal{A} (da \mathcal{A} nicht abgeschlossen ist) und ist demzufolge durch I als falsch interpretiert, $\neg\varphi$ demzufolge als wahr.
- c) Ist χ eine andere aussagenlogische Verknüpfung (oder negierte aussagenlogische Verknüpfung), dann müssen auf \mathcal{A} auch ein oder zwei kürzere Sätze zu finden sein, die durch Anwendung einer der aussagenlogischen Entwicklungsregeln in Stufe (1) der kanonischen Entwicklung erzeugt worden sind. Wie wir bereits früher beobachtet haben (vgl. Sätze (V') und (N') in Folie 153), gilt für die aussagenlogischen Regeln: Für Regeln, bei denen auf \mathcal{A} zwei Sätze β, γ erzeugt wurden, gilt $\beta \wedge \gamma \models \chi$; für Regeln bei denen auf \mathcal{A} ein Satz β erzeugt wurde, gilt $\beta \models \chi$. Wenn die kürzeren Sätze hinsichtlich I wahr sind (Induktionsannahme), ist es deshalb auch χ .
- d) Hat χ die Form $\forall\xi \varphi$, dann steht für jede im Ast \mathcal{A} überhaupt auftretende Individuenkonstante α irgendwo auf \mathcal{A} auch ein bei Ausführung von Stufe (4) der kanonischen Entwicklung generierter Satz der Form $\varphi(\alpha/\xi)$. Wenn diese kürzeren Sätze alle wahr bzgl. I sind (Induktionsannahme), dann ist auch $\forall\xi \varphi$ wahr hinsichtlich I (da ja im Träger D von I keine Elemente vorkommen, die nicht durch eine der Individuenkonstanten bezeichnet wären).

- e) Hat χ die Form $\exists\xi \varphi$, dann steht irgendwo auf \mathcal{A} auch ein Satz der Form $\varphi(\alpha/\xi)$, der bei Stufe (3) der kanonischen Entwicklung entstanden sein muss. Wenn dieser kürzere Satz wahr hinsichtlich I ist (Induktionsannahme), dann ist auch $\exists\xi \varphi$ wahr hinsichtlich I .
- f) Hat χ die Form $\neg\exists\xi \varphi$, dann steht auf \mathcal{A} auch ein Satz selber Länge der Form $\forall\xi \neg\varphi$; dieser ist logisch äquivalent zu χ und muss, da er unter Fall d) fällt, wahr hinsichtlich I sein.
 Hat χ die Form $\neg\forall\xi \varphi$, dann steht auf \mathcal{A} auch ein Satz selber Länge der Form $\exists\xi \neg\varphi$; dieser ist logisch äquivalent zu χ und muss, da er unter Fall e) fällt, wahr hinsichtlich I sein.

Zusammengenommen zeigen diese Überlegungen, dass alle Sätze auf \mathcal{A} hinsichtlich der kanonischen Interpretation I wahr sind. Dies gilt auch für alle Sätze an der Wurzel des Baumes, die ja auch zu \mathcal{A} gehören. Also sind diese Sätze konsistent. Q.E.D.

299. Der Satz von Löwenheim und Skolem

△ Satz von Löwenheim und Skolem für endliche Satzmenge:
Jede konsistente, endliche Menge von Sätzen einer PL-Sprache besitzt eine Interpretation, die auf einem Träger aus höchstens abzählbar unendlich vielen Elementen besteht.

Eine unendliche Menge heißt abzählbar, wenn es eine Eins-zu-eins-Zuordnung zwischen ihren Elementen und den natürlichen Zahlen gibt. Es gibt durchaus unendliche Mengen, für die das nicht zutrifft, wie etwa die Menge der reellen Zahlen.

Diese eingeschränkte Variante des Satzes von Löwenheim und Skolem lässt sich unmittelbar aus unserem Beweis der Vollständigkeit des prädikatenlogischen Wahrheitsbaumverfahrens ablesen. Denn die dort eingeführte kanonische Interpretation beruht auf einer abzählbaren Menge.

Thoralf Skolem hat diesen Satz 1920 bereits nicht nur für endliche Satzmenge, sondern gleich für abzählbar unendliche bewiesen. Er bildete damals in gewisser Weise den Anfang einer Reihe von metalogischen Ergebnissen, die die Grenzen der PL-Sprachen aufweisen. Denn interessanterweise bedeutet der Satz zum Beispiel, dass wir in einer PL-Sprache nicht eindeutig charakterisieren können, was wir mit einer überabzählbaren Menge meinen. Auch wenn wir etwa ein Axiomensystem für die reelle Analysis in einer PL-Sprache formulieren wollten, würde es immer auch eine abzählbar unendliche Menge von Gegenständen geben, die dieses Axiomensystem erfüllt.

Nach Skolems Entdeckung kam es bald zu noch stärkeren Ergebnissen, die die Grenzen der PL-Sprachen betreffen. Diese können jedoch hier nicht behandelt werden.

300. Beweissysteme, syntaktische Charakterisierbarkeit

Das Vollständigkeitsergebnis bedeutet, dass man im Prinzip die logischen Eigenschaften der PL-Sprachen (welche Sätze logisch wahr sind, welche Satzmenge konsistent sind, welcher Satz aus welchem folgt) vollständig angeben kann, indem man auf die Regeln des Wahrheitsbaumverfahrens verweist. Da sich diese Regeln in ihren Anwendungsbedingungen ausschließlich auf das äußere Erscheinungsbild der auftretenden Sätze beziehen, heißt das: Die Prädikatenlogik lässt sich im Prinzip allein auf der Grundlage *syntaktischer* Eigenschaften charakterisieren.

△ Allgemein nennen wir in der Logik ein System \mathcal{S} von Regeln, die in solcher Weise auf Sätze einer Sprache angewandt werden können, dass nur die Form der Sätze bei der Anwendung der Regeln berücksichtigt werden muss, und die dadurch einen Begriff davon charakterisieren, welcher Satz aus welchem anderen folgt, als *Beweissystem*.

Wir nennen einen Folgerungsbegriff, der durch ein Beweissystem \mathcal{S} eingeführt wird, eine syntaktische Folgerungsbeziehung und bezeichnen ihn mit $\vdash_{\mathcal{S}}$.

Das Wahrheitsbaumverfahren ist ein Beweissystem für die Logik der PL-Sprachen, es gibt aber eine ganze Reihe verschiedener Beweissysteme:

- ▶ Axiomatische Beweissysteme

Das erste Beweissystem für die klassische Logik, das von Gottlob Frege in seiner *Begriffsschrift* von 1879 angegeben wurde, ist ein axiomatisches. Es hat nur wenige Schlussregeln (Regeln, die einem erlauben, von gegebenen Sätzen, die eine bestimmte Form haben, zu anderen gegebenen Sätzen überzugehen) und viele Axiomenschemata (Regeln, die einem erlauben, Sätze bestimmter Form an beliebiger Stelle im Beweis einzuführen, egal, welche Sätze schon gegeben sind). Frege hatte zum Beispiel die Schlussregel „Gegeben ein Satz der Form ϕ und ein Satz der Form $\phi \rightarrow \psi$, gehe über zu ψ “ und Axiomenschemata wie „Führe jederzeit einen beliebigen Satz der Form $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$ ein“, oder auch „Führe jederzeit einen beliebigen Satz der Form $\forall \xi \phi \rightarrow \phi(\alpha/\xi)$ ein, wobei $\phi(\alpha/\xi)$ das Ergebnis der Ersetzung jedes freien Vorkommens der Variablen ξ in ϕ durch eine Individuenkonstante α ist“. Bertrand Russell und Alfred North Whitehead verfolgten in ihren *Principia Mathematica* von 1910 einen ähnlichen axiomatischen Ansatz.

► **Natürliches Schließen**

Dies ist ein System mit vielen Schlussregeln und kaum Axiomenschemata. Verschiedene Systeme des natürlichen Schließens wurden 1934 von Gerhard Gentzen und Stanisław Jaśkowski unabhängig voneinander erfunden. Natürliches Schließen hat es bei Philosoph:innen zu großer Beliebtheit gebracht, nachdem W.V.O. Quine es 1950 in einem einflussreichen Lehrbuch verwendet hatte.

► **Sequenzkalküle**

Ähnlich wie das natürliche Schließen, aber formal eleganter. Ebenfalls von Gentzen im Jahr 1934 erfunden. Weit verbreitet in der mathematischen Logik.

► **-Semantische Tableaus oder Wahrheitsbäume**

... sind das wohl intuitivste und am einfachsten anzuwendende Beweissystem. Auch sie gehen auf die Ideen von Gentzen aus dem Jahr 1934 zurück, wurden aber erst 1955 von dem niederländischen Logiker Evert Willem Beth vollständig entwickelt. Beachten Sie, dass die „semantischen Tableaus“ trotz ihres Namens eine *syntaktische* Charakterisierung der Folgerelation bieten.

Korrektheit und Vollständigkeit beziehen sich Merkmale strenggenommen immer auf ein bestimmtes Beweissystem \mathcal{S} der Prädikatenlogik. Ganz allgemein lassen sie sich am einfachsten wie folgt angeben:
 Korrektheit: Wenn $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$, dann $\Sigma \models \alpha$. Vollständigkeit: Wenn $\Sigma \models \alpha$, dann $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$.

Der erste Beweis überhaupt für die Vollständigkeit irgendeines Beweissystems der Prädikatenlogik erster Stufe wurde erst 1929 von Kurt Gödel erbracht. (Er bewies die Vollständigkeit für ein axiomatisches Beweissystem von David Hilbert, das auf Freges System basierte.)

Es wird auch oft gesagt, dass Gödel *die* Vollständigkeit *der* Prädikatenlogik bewiesen hat. Damit ist gemeint, dass Gödel bewiesen hat, dass es ein korrektes und vollständiges Beweissystem für die PL-Sprachen *gibt*. Die Bedeutung des Beweises beruht auch darauf, dass durch ihn gezeigt wird, dass die Logik der PL-Sprachen ganz allein auf syntaktischer Ebene charakterisiert werden kann.

301. **Nicht-Charakterisierbarkeit der Logik zweiter Stufe**

Dass dies keine Selbstverständlichkeit ist, zeigt das Gegenbeispiel der sog. Prädikatenlogik zweiter Stufe. Was wir hier als Logik der PL-Sprachen bezeichnet haben, nennt man auch Prädikatenlogik erster Stufe. Damit ist gemeint, dass es in den PL-Sprachen nur Variablen und Quantoren für die Ebene der Individuen gibt.

Dagegen kann man prinzipiell auch auf der Ebene der Prädikate Variablen einführen. Manche intuitiv akzeptablen Schlüsse scheinen das nahezulegen.

Gudrun ist mutig.	Mg
Ute ist mutig	Mu
Es gibt etwas, das Gudrun und Ute beide sind.	$\exists X (Xg \wedge Xu)$

Das Studium formaler Sprachen, die diesen Schritt erlauben, nennt man Prädikatenlogik zweiter Stufe.

Es gilt aber: Es kann kein syntaktisches Verfahren für Sprachen zweiter Stufe geben, auf dessen Grundlage sich alle logisch inkonsistenten und nur die logisch inkonsistenten Mengen von Sätzen zweiter Stufe zu einem Widerspruch führen lassen.

Zum Schluss sei noch ein wichtiges limitatives Ergebnis genannt, das auch für PL-Sprachen (Sprachen erster Stufe) Grenzen der Formalisierbarkeit aufzeigt: Die Logik der PL-Sprachen ist *nicht entscheidbar*.

△ **Die Prädikatenlogik (erster Stufe) ist unentscheidbar: Es gibt kein effektives Verfahren, mit dem man für jeden beliebigen gegebenen Satz einer PL-Sprache in endlicher Zeit (durch die Ausführung endlich vieler Schritte) entscheiden kann, ob er eine logische Wahrheit ist.**

Es könnte vielleicht der Eindruck entstehen, dass das Wahrheitsbaumverfahren ein solches Verfahren sei. Das ist aber nicht der Fall. Wir können zwar zu einer *positiven* Entscheidung über die logische Wahrheit von φ kommen, wenn wir für $\neg\varphi$ einen Wahrheitsbaum entwickeln und endlich alle Äste schließen können. Wenn aber φ *nicht* logisch wahr ist, kann der Fall entstehen, dass wir dies allein aufgrund des Wahrheitsbaumverfahrens an keinem Punkt definitiv feststellen können. Wir wissen nicht, ob es noch mehr Schritte braucht, um alle Äste schließen zu können, oder ob dies nie passieren wird.

Wohlgemerkt: Nicht nur ist das Wahrheitsbaumverfahren kein Entscheidungsverfahren für PL-Sprachen; es lässt sich mit Mitteln der mathematischen Logik beweisen, dass es ein solches Verfahren nicht geben kann.

Zwar könnte man das eine oder andere der oben genannten Beweissysteme verwenden, um einen Computer so zu programmieren, dass er eine Liste aller beweisbaren Sätze einer PL-Sprache L erstellt. Da das Beweissystem vollständig ist, würde die unendliche Liste, die der Computer erzeugen würde, alle logischen Wahrheiten von L enthalten. In der Terminologie der mathematischen Logik: Die Menge der logischen Wahrheiten von L ist „rekursiv aufzählbar“.

Wenn wir also einen beliebigen Satz von L nehmen und herausfinden wollen, ob er eine logische Wahrheit ist, können wir das Programm laufen lassen, uns die Liste ansehen, die es erzeugt, und warten, bis unser Satz erscheint. Wenn er eine logische Wahrheit ist, wird er irgendwann auftauchen, und wir sind fertig. Das Problem ist, dass wir nach einer endlichen Zeit nie sagen können, ob unser Satz einfach noch nicht vom Programm generiert wurde und weiter unten auf der Liste der logischen Wahrheiten erscheinen wird, oder ob er noch nicht erschienen ist, weil er keine logische Wahrheit ist.

Dies ist eine Eigenschaft, die sich in *jedem* Beweissystem für PL in der Tatsache widerspiegelt, dass es keine Möglichkeit gibt, auf algorithmische Weise zu bestimmen, wann man mit dem Versuch, eine logische Wahrheit zu beweisen, fertig ist.

Im Unterschied dazu ist die Logik der Sprache AL entscheidbar. Ein einfaches Entscheidungsverfahren bieten dort die Wahrheitstabellen. Aber auch das Wahrheitsbaumverfahren eignet sich in der Aussagenlogik als Entscheidungsverfahren. Im Gegensatz zur Prädikatenlogik kann man bei der Aussagenlogik immer den Punkt erreichen, an dem man einen *fertigen* Baum (vgl. Folie 153) entwickelt hat und somit wissen kann, dass $\neg\varphi$ keine widersprüchliche Annahme war (falls es im fertigen Baum noch mindestens einen offenen Satz gibt).

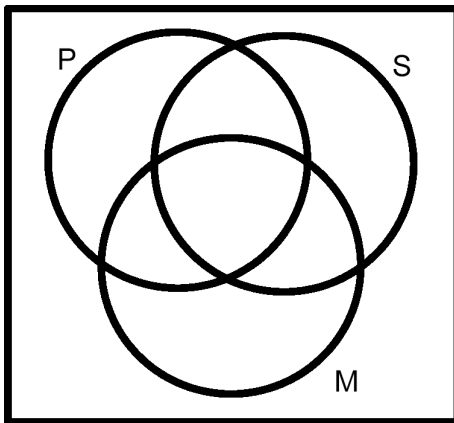
12. Typische prädikatenlogische Argumentformen und formale Fehlschlüsse

Im Folgenden sollen einige typische prädikatenlogische Argumentformen betrachtet werden. Ihre Gültigkeit können wir nun jeweils ganz leicht mit Hilfe des Wahrheitsbaumverfahrens überprüfen. Dennoch wollen wir noch ein zusätzliches Hilfsmittel hinzuziehen, um uns klar zu machen, auf welche Weise die Prämissen jeweils die Konklusion stützen.

In der Prädikatenlogik hilft es insbesondere bei einstelligigen Prädikaten oft, sich die *Extensionen* der Prädikate zu vergegenwärtigen. Unter der Extension eines Prädikats versteht man bei einer gegebenen Interpretation die Menge all derjenigen Elemente des Trägers, die unter das Prädikat fallen. Z.B. ist die Extension des Prädikats „Mx“, das wir durch die Eigenschaft interpretieren, Millionär zu sein, die Menge aller Millionäre.

304. **Euler-Venn-Diagramme**

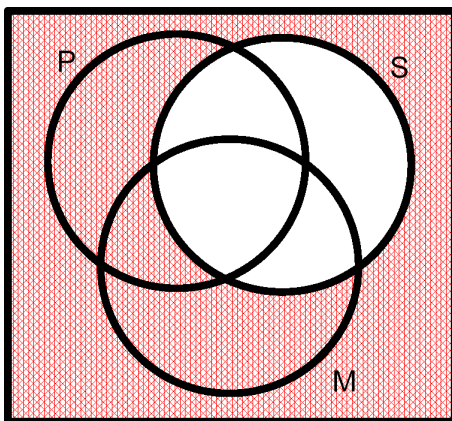
Mengen kann man zweidimensional darstellen, mit Hilfe sogenannter Euler-Venn-Diagramme. Dies wollen wir uns auch bei den Extensionen von Prädikaten zunutze machen.



In einem solchen Diagramm stellen wir uns vor, die Trägermenge D der Interpretation sei über die rechteckige Fläche verteilt. Es müssen nicht überall Elemente von D liegen, manche Regionen des Diagramms können leer sein. Die drei Kreise bezeichnen die Extensionen dreier einstelliger Prädikate. Alle Elemente, die die zum Prädikat „Sx“ gehörige Eigenschaft besitzen, liegen innerhalb des rechten oberen Kreises usw.

305. **PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen**

Wir können den Inhalt mancher Sätze von PL-Sprachen in Euler-Venn-Diagrammen darstellen. Dazu vereinbaren wir: Wir *schraffieren* solche Regionen des Diagramms, die nach Aussage des betreffenden Satzes *leer* sein müssen.

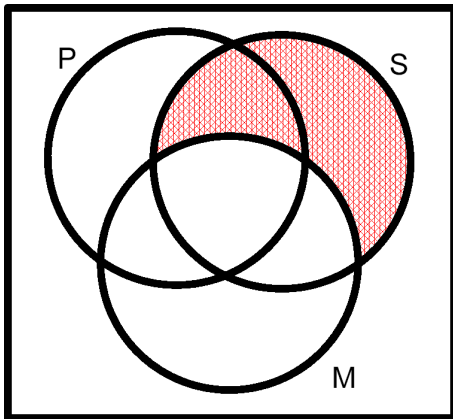


Das nebenstehende Diagramm ist dann eine Darstellung des Satzes
 $\forall x Sx$

306. **PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen**

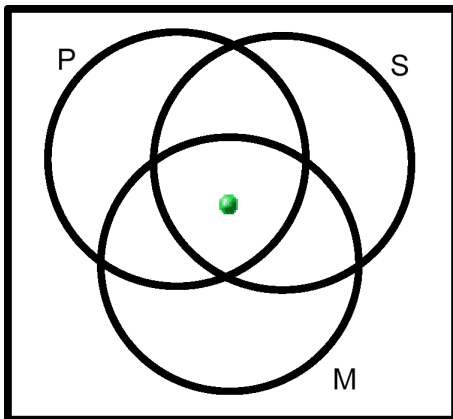
Nach demselben Prinzip ist das folgende Diagramm eine Darstellung von

$\forall x (Sx \rightarrow Mx)$



Denn „ $\forall x (Sx \rightarrow Mx)$ “ bedeutet, dass alle Elemente von D , die innerhalb der Extension von „ S “ liegen, auch innerhalb der Extension von „ M “ liegen.

307. PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen

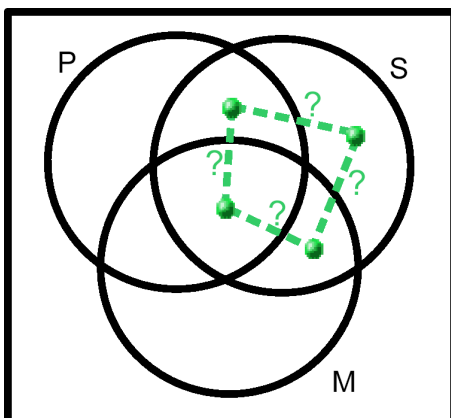


Existenzaussagen drücken wir auf andere Weise aus:

Der *grüne Punkt* soll bedeuten, dass das von Linien umschlossene Feld, innerhalb dessen er sich befindet, *nicht leer* ist. Das nebenstehende Diagramm ist deshalb eine Darstellung von

$$\exists x (Px \wedge Sx \wedge Mx)$$

308. PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen



Durch ein mit Linien verbundenes *Netz von grünen Punkten* drücken wir aus, dass *mindestens eines der betreffenden Felder nicht leer* ist.

Das nebenstehende Diagramm stellt daher den folgenden Satz dar:

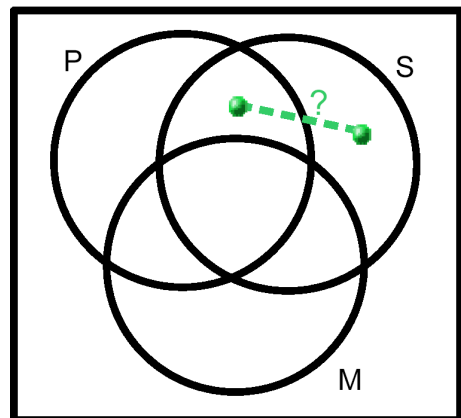
$$\exists x Sx$$

309. PL-Sätze in Euler-Venn-Diagrammen darstellen

Dieses Beispiel ist eine Darstellung von

$$\neg \forall x (Sx \rightarrow Mx)$$

Denn „ $\neg \forall x (Sx \rightarrow Mx)$ “ bedeutet, dass nicht alle Elemente, die zur Extension von „S“ gehören, auch zur Extension von „M“ gehören. D.h. es gibt mindestens ein Element, das innerhalb der Extension von „S“ liegt, aber außerhalb der Extension von „M“.



310. Kategorische Aussagen

Vor der Erfindung der Prädikatenlogik gab es in der traditionellen Logik bereits seit der Antike eine Theorie über Argumente, die aus einer ganz bestimmten Art von Aussagen aufgebaut sind, die wir heute als quantifizierte Aussagen verstehen würden. Es handelt sich dabei um die folgenden vier Typen.

- | | |
|----------------------|----------------------------|
| (A) Alle S sind P. | (E) Kein S ist P. |
| (I) Einige S sind P. | (O) Einige S sind nicht P. |

Aussagen nach dem Muster dieser vier Typen werden manchmal kategorische Aussagen genannt. Gültige Argumente, die zwei solcher Aussagen als Prämissen und eine als Konklusion haben, heißen *kategorische Syllogismen*.

Die Buchstaben „(A)“, „(E)“, „(I)“, „(O)“, mit denen die kategorischen Aussageformen bezeichnet sind, haben eine bloß traditionelle Bedeutung. Sie brauchen sie sich nicht zu merken. In der mittelalterlichen Logik wurden sie in einem raffinierten System verwendet, um mit Hilfe von Merkwörtern wie „Barbara“ alle Kombinationen der Aussagen, die gültige Schlüsse ergeben, auswendig zu lernen. Die beiden Aussageformen in der linken Spalte sind bejahend, „(A)“ und „(I)“ stehen daher für lat. „affirmo“, die beiden rechten Aussagen sind verneinend, „(E)“ und „(O)“ stehen für „nego“.

311. Kategorische Aussagen

Die folgenden Formalisierungen geben die kategorischen Aussagen in einer PL-Sprache wieder.

- | | |
|---|---|
| (A) Alle S sind P.
$\forall x (Sx \rightarrow Px)$ | (E) Kein S ist P.
$\neg \exists x (Sx \wedge Px)$ |
| (I) Einige S sind P.
$\exists x (Sx \wedge Px)$ | (O) Einige S sind nicht P.
$\exists x (Sx \wedge \neg Px)$ |

Diese Formalisierungen entsprechen der modernen Auffassung der Logik. In der traditionellen Auffassung wurde eine Aussage der Form (A) so verstanden, dass sie auch impliziert, dass es mindestens einen Gegenstand gibt, der unter den Begriff S fällt. Wie Sie wissen, wird das in der Prädikatenlogik nicht vorausgesetzt: Die Extension von „Sx“ kann auch leer sein. Von diesem Punkt abgesehen, gibt es sehr weitreichende Entsprechungen zwischen der traditionellen Syllogismenlehre und den hier dargestellten formalen Aussagen.

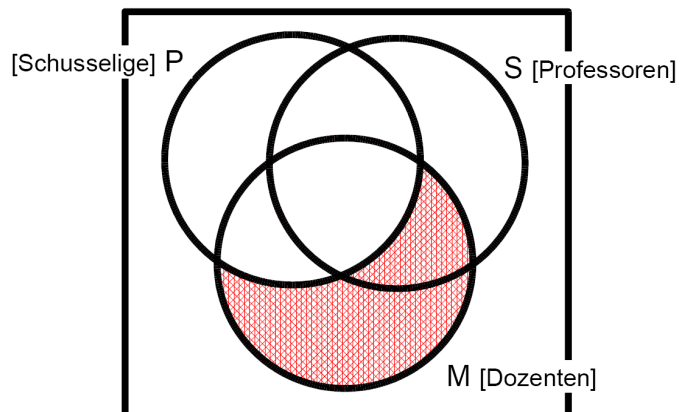
Im Folgenden werden wir uns einige kategorische Syllogismen anschauen und uns ihre Gültigkeit mit Hilfe von Euler-Venn-Diagrammen klar machen.

312. **Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Barbara“)**

Beispiel:	
$\forall x (Mx \rightarrow Px)$	Alle Dozenten sind schusselig.
$\forall x (Sx \rightarrow Mx)$	Alle Professoren sind Dozenten.
$\forall x (Sx \rightarrow Px)$	Alle Professoren sind schusselig.

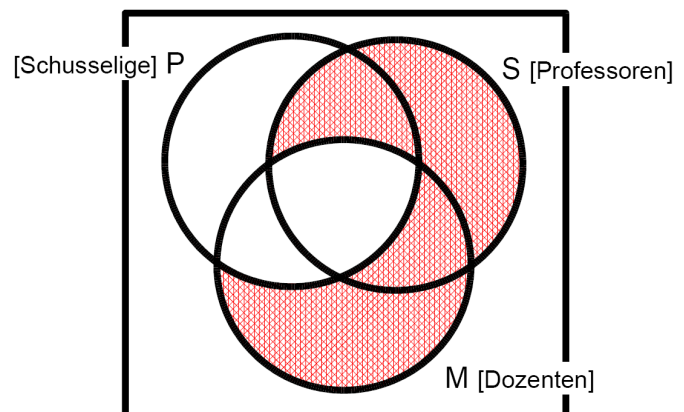
Erste Prämisse:

$\forall x (Mx \rightarrow Px)$
(Alle Dozenten sind schusselig.)



Hinzufügung der zweiten Prämisse:

$\forall x (Mx \rightarrow Px)$
 $\forall x (Sx \rightarrow Mx)$
Alle Professoren sind Dozenten.



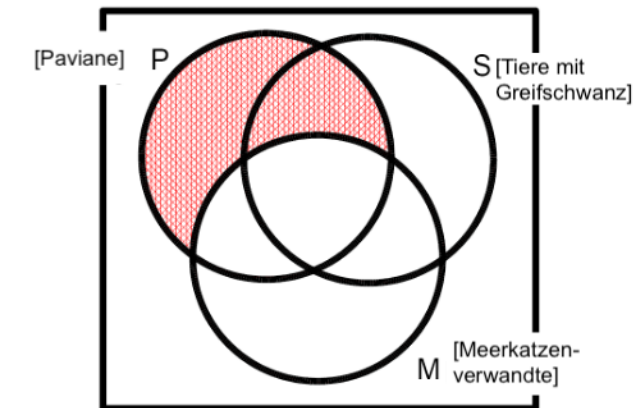
An der Darstellung der beiden Prämissen kann man ablesen, dass in einer Welt, in der „ $\forall x (Mx \rightarrow Px)$ “ und „ $\forall x (Sx \rightarrow Mx)$ “ gelten, alle Dinge, die in der Extension von „S“ liegen, auch in „P“ liegen. D.h. aber:

$\forall x (Sx \rightarrow Px)$
(Alle Professoren sind schusselig.)

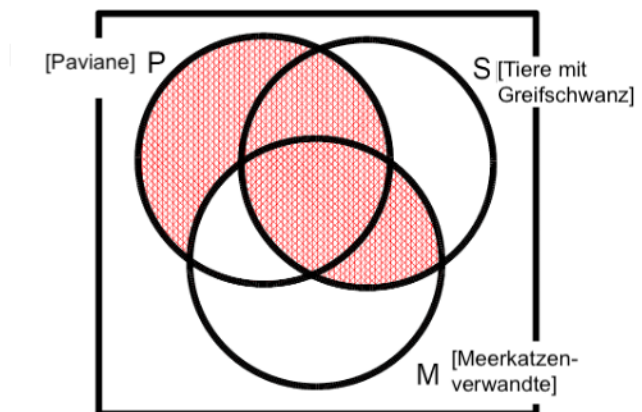
313. **Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Camenes“)**

	Beispiel:
$\forall x (Px \rightarrow Mx)$	Alle Paviane sind Meerkatzenverwandte.
$\neg \exists x (Mx \wedge Sx)$	Kein Meerkatzenverwandter hat einen Greifschwanz.
<hr/>	<hr/>
$\neg \exists x (Sx \wedge Px)$	Kein Tier mit Greifschwanz ist ein Pavian.

Erste Prämisse:
 $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
 (Alle Paviane sind Meerkatzenverwandte.)



Hinzufügung der zweiten Prämisse:
 $\forall x (Px \rightarrow Mx)$
 $\neg \exists x (Mx \wedge Sx)$
 (Kein Meerkatzenverwandter hat einen Greifschwanz.)



Es lässt sich erkennen, dass, wo „ $\forall x (Px \rightarrow Mx)$ “ und „ $\neg \exists x (Mx \wedge Sx)$ “ gelten, der Überschneidungsbereich der Extensionen von „S“ und „P“ leer sein muss. Das heißt aber:

$\neg \exists x (Sx \wedge Px)$
 (Kein Tier mit Greifschwanz ist ein Pavian.)

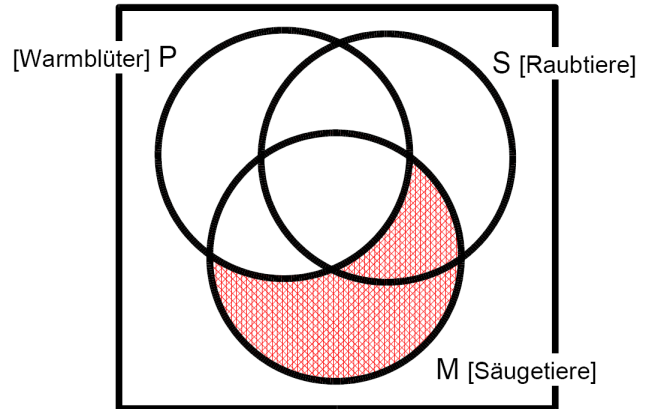
314. **Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Darri“)**

	Beispiel:
$\forall x (Mx \rightarrow Px)$	Alle Säugetiere sind Warmblüter.
$\exists x (Sx \wedge Mx)$	Einige Raubtiere sind Säugetiere.
<hr/>	<hr/>
$\exists x (Sx \wedge Px)$	Einige Raubtiere sind Warmblüter.

Erste Prämisse:

$$\forall x (Mx \rightarrow Px)$$

(Alle Säugetiere sind Warmblüter.)



Hinzufügung der zweiten Prämisse:

$$\forall x (Mx \rightarrow Px)$$

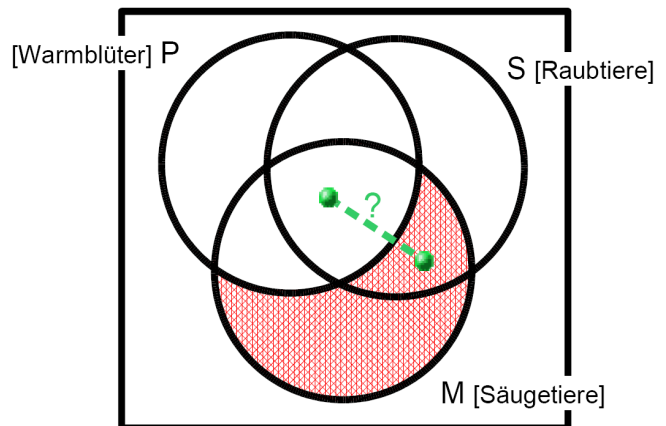
$$\exists x (Sx \wedge Mx)$$

(Einige Raubtiere sind Säugetiere.)

Aus der Kombination der hier dargestellten Informationen ergibt sich, dass das zentrale Feld des Diagramms nicht leer sein kann. Das bedeutet aber, dass mindestens ein Element im Überschneidungsbereich der Extensionen von „S“ und „P“ liegt. D.h.:

$$\exists x (Sx \wedge Px)$$

(Einige Raubtiere sind Warmblüter.)



315. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Baroco“)

Beispiel:

$$\forall x (Px \rightarrow Mx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \neg Mx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \neg Px)$$

Alle EU-Länder liegen in Europa.

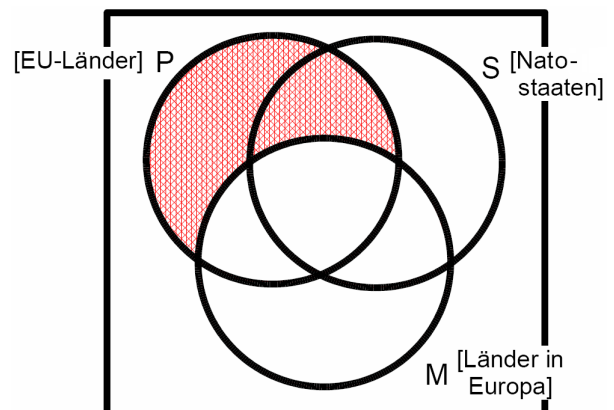
Einige Natostaaten liegen nicht in Europa.

Einige Natostaaten sind keine EU-Länder.

Erste Prämisse:

$$\forall x (Px \rightarrow Mx)$$

(Alle EU-Länder liegen in Europa.)



Hinzufügung der zweiten Prämisse:

$$\forall x (Px \rightarrow Mx)$$

$$\exists x (Sx \wedge \neg Mx)$$

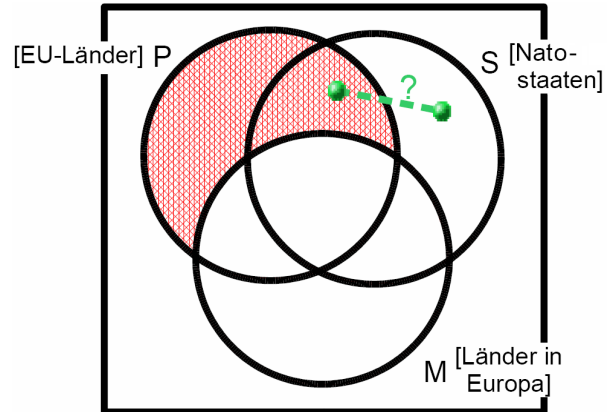
(Einige Natostaaten liegen nicht in Europa.)

Aus der Kombination der in dem Diagramm enthaltenen Informationen lässt sich diesmal ablesen, dass der äußere Bereich der Extension von „S“, der weder zur Extension von „P“ noch zur Extension von „M“ gehört, nicht leer sein kann.

Das bedeutet aber auch, dass es sozusagen ein S gibt, dass nicht P ist:

$$\exists x (Sx \wedge \neg Px)$$

(Einige Natostaaten sind keine EU-Länder.)



316. Kategorische Syllogismen (Beispiel: „Ferison“)

Wie würden Sie den Syllogismus des Typs „Ferison“ im Euler-Venn-Diagramm darstellen?

Beispiel:

$$\neg \exists x (Mx \wedge Px)$$

Kein BAföG-Empfänger ist reich.

$$\exists x (Mx \wedge Sx)$$

Einige BAföG-Empfänger sind Studenten.

$$\exists x (Sx \wedge \neg Px)$$

Einige Studenten sind nicht reich.

317. Quasi-Syllogismus

Nicht im strengen Sinne ein kategorischer Syllogismus ist die folgende Argumentform, die aber wegen ihrer Ähnlichkeit zu den kategorischen Syllogismen manchmal *Quasi-Syllogismus* genannt wird.

$$\forall x (Mx \rightarrow Px)$$

Alle Kommunisten befürworten ein staatliches Gesundheitssystem.

$$Ma$$

Hans Meier ist ein Kommunist.

$$Pa$$

Hans Meier befürwortet ein staatliches Gesundheitssystem.

Ebenso gültig ist die folgende Argumentform, für die es allerdings keinen besonderen Namen gibt.

$$\forall x (Px \rightarrow Mx)$$

Alle Kommunisten befürworten ein staatliches Gesundheitssystem

$$\neg Ma$$

Es ist nicht der Fall, dass Hans Meier ein staatliches Gesundheitssystem befürwortet.

$$\neg Pa$$

Hans Meier ist kein Kommunist.

318. Viele gültige Argumentformen

Vergessen Sie nicht, dass es unendlich viele gültige Argumentformen gibt – mehr als wir mit Namen benennen können. Hier sind einige Beispiele für Schlüsse, die wir bereits als gültig erkannt haben, ohne dass es einen bestimmten traditionellen Namen für diese Argumentformen gäbe.

$\frac{\exists x \forall y Fxy}{\forall y \exists x Fxy}$	$\frac{\exists x (Fx \wedge Gx)}{\exists x Fx \wedge \exists x Gx}$	$\frac{\forall x Fx \vee \forall x Gx}{\forall x (Fx \vee Gx)}$
---	---	---



Dies sind alles Beispiele für Schlüsse, die in dieser Richtung gültig sind, in der umgekehrten (von „unten“ nach „oben“ aber nicht!

Bedenken Sie außerdem, dass natürlich auch alle von uns erkannten prädikatenlogischen Äquivalenzen als Grundlage gültiger Argumentformen dienen können, z.B.

$\frac{\forall x Fx}{\neg \exists x \neg Fx}$	$\frac{\exists x (Fx \vee Gx)}{\exists x Fx \vee \exists x Gx}$	$\frac{\forall x (Fx \rightarrow Gx) \wedge \forall x (Fx \rightarrow Hx)}{\forall x (Fx \rightarrow Gx \wedge Hx)}$
---	---	--



Bei diesen drei Beispielen würde der Schluss auch in umgekehrter Richtung gültig sein.

319. Formale Fehlschlüsse

Auch bei der Prädikatenlogik gibt es „Argumente“, die gültigen prädikatenlogischen Argumentformen sehr ähnlich sehen, aber selbst nicht wirklich gültig sind

320. Bejahung des Konsequens (*fallacia consequentis*)

Die folgende Form kann man unter den Begriff der Bejahung des Konsequens oder *fallacia consequentis* fassen. (Sie unterscheidet sich von den in Kap. 7 so bezeichneten Fehlschlüssen nur dadurch, dass das Konditional quantifiziert ist.)

Alle Kommunisten befürworten ein staatliches Gesundheitssystem.

Hans Meier befürwortet ein staatliches Gesundheitssystem.

Hans Meier ist ein Kommunist

Alle A sind B.	$\forall x (Ax \rightarrow Bx)$
c ist B.	Bc
c ist A.	Ac

321. Verneinung des Antecedens

Auch bei der Verneinung des Antecedens kann man die entsprechende quantifizierte Variante mit unter den bereits eingeführten Begriff fallen lassen:

Alle Faulenzer fallen durchs Examen.

Fritz ist kein Faulenzer

Fritz fällt nicht durchs Examen.

Alle A sind B. $\forall x (Ax \rightarrow Bx)$

c ist nicht A. $\neg Ac$

c ist nicht B. $\neg Bc$

322. Quantorenschwindel

Ein häufiger und oft nicht leicht zu erkennender Fehlschluss ist der sogenannte Quantorenschwindel.

Bei jeder Veränderung eines Gegenstandes muss es etwas geben, das unverändert bleibt.

Es muss an einem Gegenstand etwas geben, das bei jeder Veränderung unverändert bleibt.

Dies ist zugleich ein Beispiel dafür, dass man formale Fehlschlüsse auch in den Werken der klügsten Philosophen finden kann. Denn man findet eine dem obigen Beispiel entsprechende Argumentation in Kants *Kritik der reinen Vernunft* (B 230-231).

Ein leichter zu durchschauendes Beispiel:

Jedes Klubmitglied fährt einen Sportwagen.

Es gibt einen Sportwagen, den alle Klubmitglieder fahren.

Für alle x gilt, dass es ein y gibt, so dass Φ . $\forall x \exists y \Phi$

Es gibt ein y, so dass für alle x gilt, dass Φ . $\exists y \forall x \Phi$

Während der umgekehrte Schluss (von $\exists y \forall x \Phi$ auf $\forall x \exists y \Phi$) gültig ist, ist der Quantorenschwindel ein Fehlschluss.

13. Prädikatenlogik mit Identität

323. Das Identitätsprädikat

Eine wichtige Erweiterung der PL-Sprachen ist es, als zusätzliche logische Konstante das Identitätsprädikat „ $x = y$ “ einzuführen. Man spricht dann von Prädikatenlogik mit Identität.

Das Identitätsprädikat funktioniert syntaktisch wie ein Prädikat, darf aber nicht beliebig interpretiert werden. Stattdessen wird es standardmäßig so interpretiert, dass $[\alpha = \beta]$ dann und nur dann wahr ist, wenn α und β sich auf dasselbe Element von D beziehen.

Mit dem Identitätsprädikat identifizieren wir somit eine zusätzliche logische Konstante, die von den PL-Sprachen nicht erfasst wurde. Formale Sprachen, die ein so festgelegtes Identitätsprädikat enthalten und ansonsten wie PL-Sprachen aussehen, werden wir PL₌-Sprachen nennen.

324. „Es gibt mehrere ...“

Mit der so erweiterten Prädikatenlogik vergrößern sich die Ausdrucksmöglichkeiten beim Formalisieren. Z.B. kann man mit Hilfe der Identität die folgende Aussage formalisieren:

Es gibt mehr als einen Millionär.

Mx : x ist ein Millionär.

$\exists x \exists y (Mx \wedge My \wedge \neg[x = y])$

325. Eindeutige Existenzaussagen

Ebenso hilfreich sind PL₌-Sprachen bei eindeutigen Existenzaussagen.

Es gibt genau einen Bundespräsidenten.

Bx : x ist Bundespräsident

$\exists x (Bx \wedge \forall y (By \rightarrow [y = x]))$

Als abkürzende Schreibweise für Aussagen genau dieser Form wird manchmal „ $\exists!x Bx$ “ geschrieben. (Lies: „Es gibt genau ein x derart, dass ...“)

Statt „ $\exists x (Bx \wedge \forall y (By \rightarrow [y = x]))$ “ kann man auch äquivalent und kürzer (aber weniger intuitiv verständlich) schreiben:

$\exists x \forall y (By \leftrightarrow [y = x])$

326. Einzigkeit, Eindeutigkeit

Identität brauchen wir auch für andere Aussagen, in denen es um Einzigkeit oder Eindeutigkeit geht:

Nur Joachim Gauck ist Bundespräsident.

j : Joachim Gauck

Bx : x ist Bundespräsident.

$Bj \wedge \forall x (Bx \rightarrow [x = j])$

Wenn einer die Welt retten kann, dann ist es Gisbert Schlüter aus Ubbedissen.

g: Gisbert Schlüter aus Ubbedissen.

Wx: x kann die Welt retten.

$\forall x (Wx \rightarrow [x = g])$

327. Eindeutige und ein-eindeutige Relationen

Auch um die Eindeutigkeit von Relationen auszudrücken, braucht man die Prädikatenlogik mit Identität.

Für eine zweistellige Relation, die *in einer Richtung eindeutig* ist, muss gelten:

$\forall x \forall y \forall z (R_{xz} \wedge R_{yz} \rightarrow [x = y])$

oder

$\forall x \forall y \forall z (R_{zx} \wedge R_{zy} \rightarrow [x = y])$

Im ersten Fall ist die Relation sozusagen links-eindeutig, wie z.B. bei

Rxy: x ist der Vater von y,

im zweiten Fall rechts-eindeutig, wie bei

Rxy: Der kleinste echte Primteiler von x ist y.

Wenn die Eindeutigkeit in beiden Richtungen gilt, sprechen wir auch von einer ein-eindeutigen Relation. Die Ein-Eindeutigkeit lässt sich in einer einzigen Bedingung zusammenfassen:

$\forall w \forall x \forall y \forall z (R_{wx} \wedge R_{yz} \rightarrow ([w = y] \leftrightarrow [x = z]))$

328. Numerische Quantoren

Schreiben wir einmal „ $\exists_1 x$ “ statt „ $\exists! x$ “ und definieren:

$\exists_1 x Fx \equiv_{\text{df}} \exists x (Fx \wedge \forall y (Fy \rightarrow [y = x]))$

Darauf aufbauend, definieren wir:

$\exists_2 x Fx \equiv_{\text{df}} \exists x (Fx \wedge \exists_1 y (Fy \wedge \neg[y = x]))$.

Und weiter:

$\exists_3 x Fx \equiv_{\text{df}} \exists x (Fx \wedge \exists_2 y (Fy \wedge \neg[y = x]))$.

Statt der zweiten und dritten Definition können wir noch viel allgemeiner sagen:

$\exists_{n+1} x Fx \equiv_{\text{df}} \exists x (Fx \wedge \exists_n y (Fy \wedge \neg[y = x]))$.

Sie sehen, dass wir mit Hilfe der PL=-Sprachen alle numerischen Aussagen der Form „Es gibt genau *n* Gegenstände / Individuen, für die gilt ...“ formalisieren können. Die auf dieser Folie definierten Quantoren nennt man numerische Quantoren.

Interessanterweise würde diese Definition auch funktionieren, wenn wir statt mit 1 mit 0 beginnen und stipulieren würden:

$\exists_0 x Fx \equiv_{\text{df}} \neg \exists x Fx$

$\exists_{n+1} x Fx \equiv_{\text{df}} \exists x (Fx \wedge \exists_n y (Fy \wedge \neg[y = x]))$

Mit Hilfe numerischer Quantoren kann man sogar gewisse (quasi-) arithmetische Erkenntnisse so formulieren, dass sie sich als logische Wahrheiten erweisen:

$$\exists_2x (Px \wedge Qx) \wedge \exists_3x (Px \wedge \neg Qx) \rightarrow \exists_5x Px$$

Die genaue Beziehung zwischen dieser logischen Wahrheit und der arithmetischen Wahrheit „2 + 3 = 5“ ist allerdings eine schwierige Angelegenheit. Fest steht, dass nicht alle arithmetischen Wahrheiten auf diese Weise als logische Wahrheiten rekonstruiert werden können.

329. Kennzeichnungen

PL-Sprachen erlauben auch eine bestimmte, von Bertrand Russell vorgeschlagene Analyse von Kennzeichnungen (*definite descriptions*). Dabei versteht man unter einer Kennzeichnung einen sprachlichen Ausdruck, der sich auf einen bestimmten Gegenstand bezieht, indem er ein Prädikat oder einen offenen Satz verwendet, der nur diesem einen Gegenstand wahrheitsgemäß zugeschrieben werden kann. Z.B.:

Der Millionär, der die Linkspartei wählt, wohnt im Zooviertel.

Laut Russells Analyse sind in dieser Aussage sozusagen zwei Teilaussagen versteckt:

Es gibt genau einen Millionär, der die Linkspartei wählt, und dieser wohnt im Zooviertel.

Entsprechend kann man dies so formalisieren:

$$\exists x (Mx \wedge Lx \wedge \forall y (My \wedge Ly \rightarrow [y = x] \wedge Zx))$$

Mx: x ist ein Millionär.
Lx: x wählt die Linkspartei.
Zx: x wohnt im Zooviertel.

Russell hat für „dasjenige x, auf das der offene Satz $\Phi(x)$ zutrifft“ die formale Schreibweise

$$tx \Phi(x)$$

eingeführt. Für jeden offenen Satz $\Psi(x)$, in dessen offener Stelle die Kennzeichnung $tx \Phi(x)$ eingesetzt wird, ist definiert:

$$\Psi(tx \Phi(x)) \equiv_{df} \exists x (\Phi(x) \wedge \forall y (\Phi(y) \rightarrow [y = x]) \wedge \Psi(x))$$

(Grob gesprochen ist das eine Formalisierung von „Dasjenige eindeutig bestimmte Ding, das Φ ist, ist auch Ψ “ oder kürzer: „Das Φ ist Ψ “.)

Allerdings ist diese Analyse weniger eindeutig, als es auf den ersten Blick den Anschein haben mag. Was z.B. bedeutet „ $\neg F(tx Gx)$ “? Dies ist offenbar davon abhängig, ob man die Negation mit zum offenen Satz Ψ zählt, in den die Kennzeichnung eingesetzt wird, oder ob man die ganze Aussage als Negation von „ $F(tx Gx)$ “ ansieht. Im ersten Fall erhält man

$$\neg F(tx Gx) \equiv \exists x (Gx \wedge \forall y (Gy \rightarrow [y = x]) \wedge \neg Fx)$$

im zweiten

$$\neg F(tx Gx) \equiv \neg \exists x (Gx \wedge \forall y (Gy \rightarrow [y = x]) \wedge Fx)$$

Man hat dies so formuliert, dass Kennzeichnungen einen Skopus haben, der sozusagen weiter (wie im ersten Fall) oder weniger weit reichen kann (wie im zweiten Fall). Dies ist ein wichtiger logischer Unterschied zwischen Kennzeichnungen und Namen.

Bei Namen (in der Prädikatenlogik repräsentiert durch Individuenkonstanten), macht es keinen Unterschied, ob wir „ $\neg Fa$ “ so verstehen, dass wir zuerst „ F “ auf „ a “ anwenden und das Ergebnis negieren, oder so, dass sozusagen das negierte Prädikat „ $\neg F$ “ auf „ a “ angewandt wird.

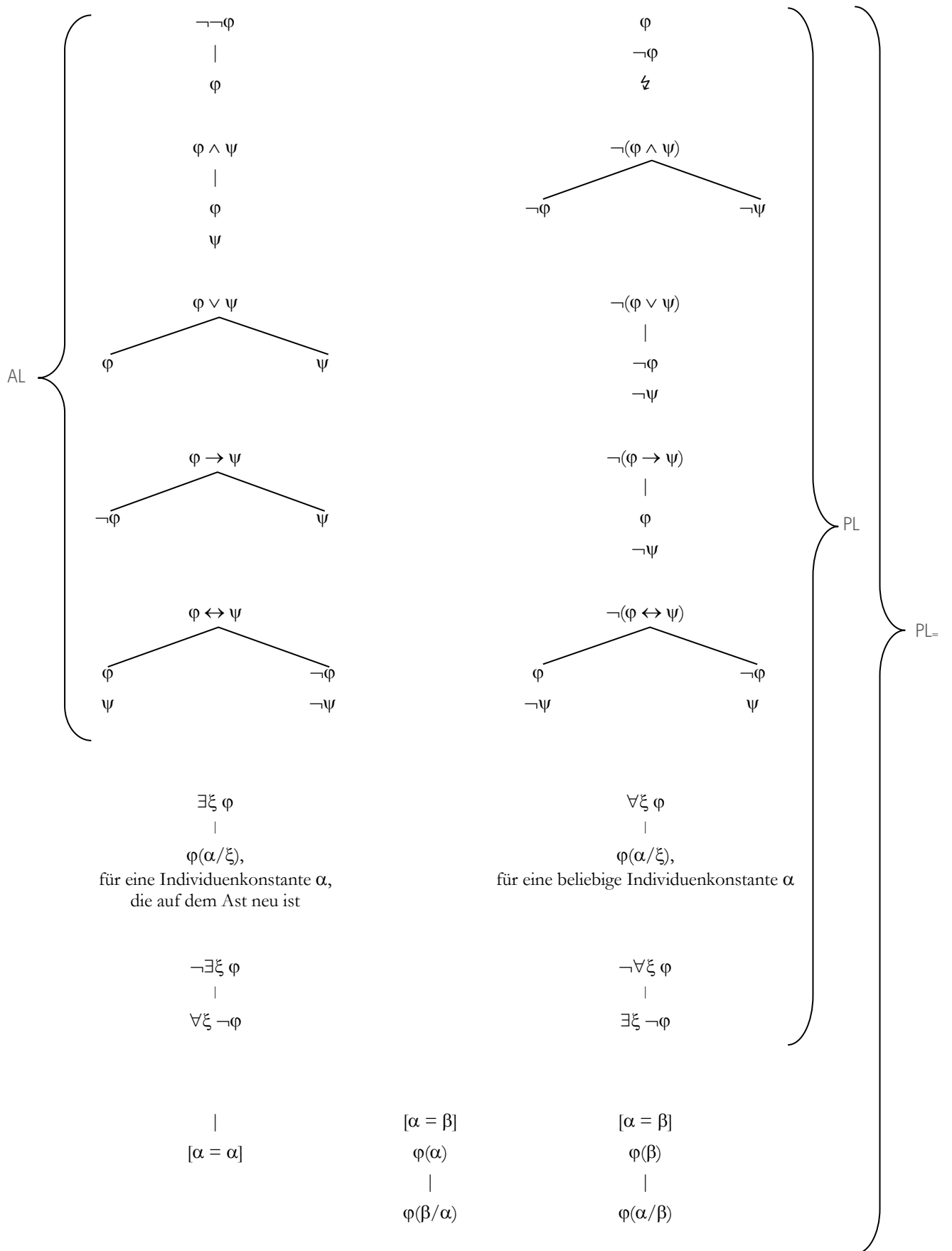
330. Das Wahrheitsbaumverfahren für die Prädikatenlogik mit Identität

Durch drei einfache Regeln lässt sich das Wahrheitsbaumverfahren auf $PL_{=}$ -Sprachen ausweiten.

	$[\alpha = \beta]$	$[\alpha = \beta]$
$[\alpha = \alpha]$	$\varphi(\alpha)$	$\varphi(\beta)$
	$\varphi(\beta/\alpha)$	$\varphi(\alpha/\beta)$

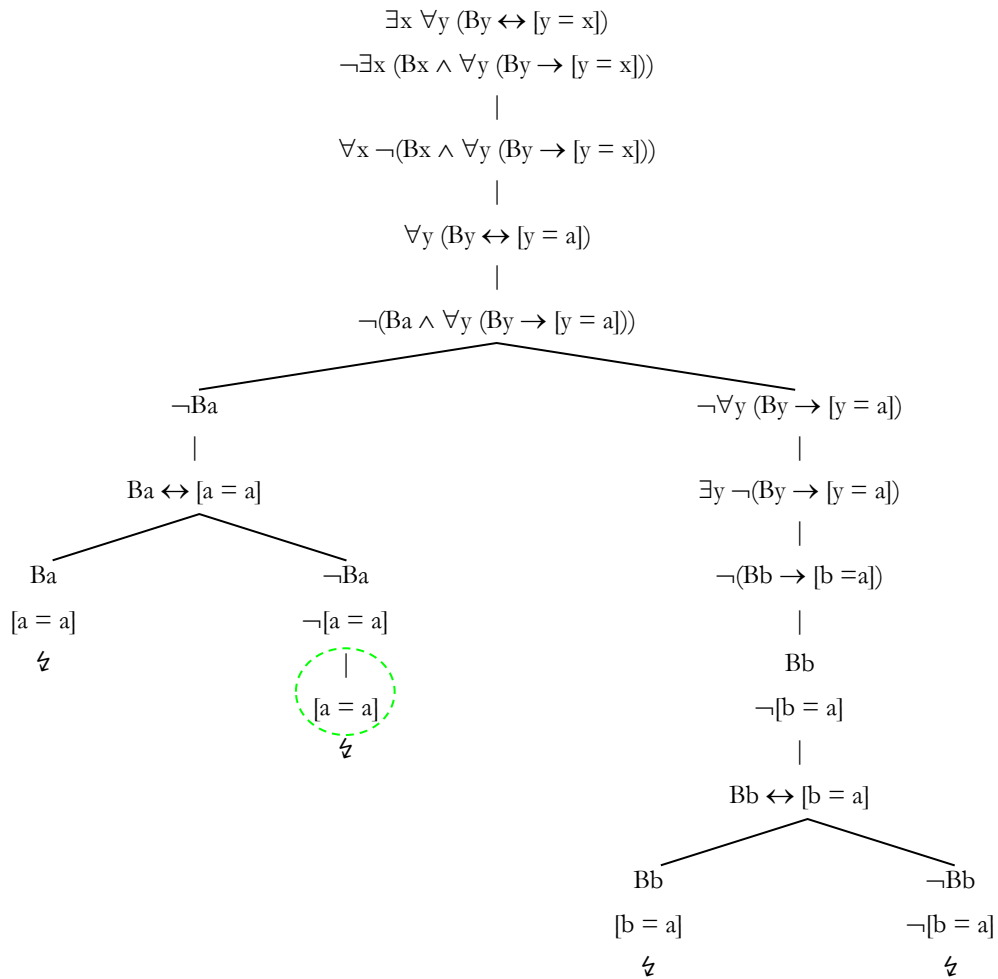
Die erste Regel bedeutet, dass ein Satz der Form $[\alpha = \alpha]$ für beliebige Individuenkonstanten α an jeder Stelle im Wahrheitsbaum eingeführt werden darf. Die zweite Regel besagt, dass auf einem Ast, auf dem ein Satz vorkommt, in dem die Individuenkonstante α vorkommt, der gleiche Satz, in dem aber α durch β ersetzt wurde, eingeführt werden darf, sofern auf demselben Ast auch bereits der Satz $[\alpha = \beta]$ steht. (Die dritte Regel besagt Entsprechendes.)

Das so erweiterte Verfahren für die Prädikatenlogik mit Identität ist sowohl korrekt als auch vollständig. Den Beweis (siehe Bostock 1997, S. 325 f.) sparen wir uns hier.



Um die Anwendung des Verfahrens in der Prädikatenlogik mit Identität zu illustrieren, erfolgt hier der Beweis der Äquivalenz zwischen der oben (s. Folie 387) behaupteten Äquivalenz zwischen „ $\exists x \forall y (By \leftrightarrow [y = x])$ “ und „ $\exists x (Bx \wedge \forall y (By \rightarrow [y = x]))$ “. Die Anwendungen der neuen Regeln sind eingekreist.

Richtung \rightarrow



Richtung ←

