Diss. ETH Nr. 9320

Perfectness Notions related to Polarity

A dissertation submitted to the

SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of

Doctor of Mathematics

presented by
Arlette Gaillard
dipl. Math. ETH
born October 22, 1958
citizen of Zurich

accepted on the recommendation of

PD. Dr. H. Gröflin, examiner
Prof. Dr. Ch. Blatter, co-examiner

1990

Abstract

A significant achievement in *polyhedral combinatorics* has been the proof of the *perfect graph theorem* (Lovász [1972]). A major step thereof consisted in characterizing the notion of perfectness of graphs in terms of polyhedra and systems of inequalities, and led to the development of the *anti-blocking theory of Fulkerson* [1972]. We study notions of perfectness which generalize notions of perfectness of graphs, and which are related to *classical polarity* rather than to Fulkerson´s anti-blocking theory.

For pairs $((A,R),(\overline{A},\overline{R}))$ with $\{0,1\}$-matrices (A,R) and $\{1,0,-1,\dots,-k\}$-matrices $(\overline{A},\overline{R})$, we define different notions of *perfectness* by means of the following properties:

(1) (P,Q) with $P := \{x \in \mathbb{R}^V \mid Ax \leq \mathbf{1}, Rx \leq \mathbf{0}\}$, $Q := \{x \in \mathbb{R}^V_+ \mid \overline{A}x \leq \mathbf{1}, \overline{R}x \leq \mathbf{0}\}$ is a *polar pair* (i.e. $P^* := \{x \in \mathbb{R}^V \mid x^Tz \leq 1 \ \forall\ x \in P\} = Q$ and $Q^* = P$);

(2) the describing system of P, $Ax \leq \mathbf{1}$, $Rx \leq \mathbf{0}$ is *tdi* (i.e. min $\mathbf{1}^Ty$ subject to $y^TA + w^TR = c^T$, $y, w \geq \mathbf{0}$ has an integer optimum solution for integral c, if the optimum exists).

(3) the describing system of Q, $x \geq \mathbf{0}$, $\overline{A}x \leq \mathbf{1}$, $\overline{R}x \leq \mathbf{0}$ is tdi;

(4) For all $J \subseteq V$, a pair $((A^J,R^J),(\overline{A}^J,\overline{R}^J))$ is derived from $((A,R),(\overline{A},\overline{R}))$, which inherits the properties among (1)-(3) required for $((A,R),(\overline{A},\overline{R}))$.

The various *perfectness notions* read then:

(5) $((A,R),(\overline{A},\overline{R}))$ has the *integrality property* if it satisfies (1) and (4);

(6) $((A,R),(\overline{A},\overline{R}))$ is called *A-perfect* if it satisfies (1), (2) and (4);

(7) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ is called *$\bar{A}$-perfect* if it satisfies (1), (3) and (4);

(8) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ is called *$(A,\bar{A})$-perfect* if it is A-perfect and $\bar{A}$-perfect.

Observe that (4), called *heredity property*, appears in each definition with a different meaning. This property parallels an essential feature of perfect graphs, where by definition any node induced subgraph inherits the perfectness property of a perfect graph.

Notions (5) to (8) include the perfect graph case in the following sense: The pair $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\mathbf{0}))$ with $\{0,1\}$-matrices A, $\bar{A}$ has the integrality property if and only if A, $\bar{A}$ are perfect matrices (Padberg [1984]), i.e. A ($\bar{A}$) is essentially the incidence matrix of cliques (stable sets) of a perfect graph. Moreover, (5) implies (8) in this case.

This work is then articulated along the following three topics:

Characterizations: We characterize perfect pairs $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ by properties on $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ only (and which imply heredity). For this purpose, we introduce a concept of *homogeneity* and establish the following results: $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ has the integrality property (is A-perfect) if and only if $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ satisfies (1) ((1) and (2)) and the system $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ has the so-called *homogeneity* property. Moreover, if $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ satisfies (1) and (3) ((1),(2) and (3)) and the system $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ has the so-called *homogeneous-tdi* property, then $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ is $\bar{A}$-perfect ($(A,\bar{A})$-perfect). If $(\bar{A},\bar{R})$ are $\{1,0,-1\}$-matrices, the homogeneous-tdi property is also necessary.

Some polyhedral descriptions: A pair $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ with property (1) *describes* a family of combinatorial objects in the following way: A can be interpreted as the incidence matrix of a family $\mathcal{F}$ and $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ is the polyhedral description of $\mathcal{F}$. We consider families $\mathcal{F}$ whose incidence matrices $A^{\mathcal{F}}$ are so-called *lattice matrices* and derive a pair $((A^{\mathcal{F}},\mathbf{0}),(\bar{A}^{\mathcal{F}},\bar{R}^{\mathcal{F}}))$, which describes $\mathcal{F}$ and which is $(A,\bar{A})$-perfect. Examples of $\mathcal{F}$ are *dicuts* in a graph, *convex sets of bounded length* in a poset, and families of so-called *intersections*.

Classes of integer polyhedra: Polyhedra of the form $Q := \{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}^{\mathcal{F}}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}^{\mathcal{F}}x \leq \mathbf{0}\}$ are integer polyhedra with homogeneous-tdi systems, which, if $\bar{R}^{\mathcal{F}} = \mathbf{0}$, belong to the *switching paths polyhedra* (Gröflin [1987]). We generalize this concept in order to contain polyhedra of the form Q as well as the *coflow polyhedra* (Cameron [1982]).

The family $\mathcal{L} := \{\{x \mid A^{\mathcal{F}}x \leq \mathbf{1}\} \mid A^{\mathcal{F}}$ is a lattice matrix$\}$ is a subclass of lattice polyhedra (Hoffman & Schwartz [1978], Hoffman [1976,1978], Gröflin & Hoffman [1982]). For a subclass $\mathbf{S}$ of the generalized switching paths polyhedra (with elements of the form $\{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}\}$ for $\{1,0,-1\}$-matrices $(\bar{A},\bar{R})$), we show that $\mathcal{L}$ and $\mathbf{S}$ are polar classes, i.e. $P \in \mathcal{L}$ implies $P^* \in \mathbf{S}$ and $Q \in \mathbf{S}$ implies $Q^* \in \mathcal{L}$. Hence for $\{x \mid Ax \leq \mathbf{1}\} \in \mathcal{L}$, there exists $(\bar{A},\bar{R})$ such that $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ is $(A,\bar{A})$-perfect, and for $\{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}\} \in \mathbf{S}$, there exists A such that $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ is $(A,\bar{A})$-perfect.

Zusammenfassung

Ein wichtiger Durchbruch in der polyedrischen Kombinatorik war der Beweis des *Theorems der perfekten Graphen* (Lovász [1972]). Er beruht auf der Charakterisierung des Perfektheitsbegriffes von Graphen mit Hilfe von Polyedern und Ungleichungssystemen, und führte zur Entwicklung der *Antiblocking Theorie von Fulkerson* [1972]. Wir untersuchen Perfektheitsbegriffe, die denjenigen von Graphen verallgemeinern und die auf der klassischen Polarität, statt auf der Antiblocking Theorie von Fulkerson, beruhen.

Für Paare $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$, mit $\{0,1\}$-Matrizen (A,R) und $\{1,0,-1,...,-k\}$-Matrizen $(\bar{A},\bar{R})$, werden diverse Perfektheitsbegriffe definiert, die auf folgenden Eigenschaften basieren:

(1) $P := \{x \in \mathbb{R}^V \mid Ax \leq \mathbf{1},\ Rx \leq \mathbf{0}\}$ und $Q := \{x \in \mathbb{R}^V_+ \mid \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}\}$ sind *polare Polyeder* (d.h. $P^* := \{x \in \mathbb{R}^V \mid x^T z \leq 1\ \forall\ x \in P\} = Q$ und $Q^* = P$);

(2) $Ax \leq \mathbf{1},\ Rx \leq \mathbf{0}$ ist *tdg* (i.e. min $\mathbf{1}^T y$, so dass $y^T A + w^T R = c^T,\ y, w \geq \mathbf{0}$ besitzt für alle ganzzahligen c eine ganzzahlige optimale Lösung, sofern eine solche existiert);

(3) $x \geq \mathbf{0},\ \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}$ ist tdg;

(4) Für alle $J \subseteq V$ wird ausgehend von $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ ein Paar $((A^J,R^J),(\bar{A}^J,\bar{R}^J))$ definiert, das die Eigenschaften erbt, die für $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ verlangt werden.

Die verschiedenen *Perfektheitsbegriffe* lauten dann:

(5) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ besitzt die *Ganzzahligkeitseigenschaft (GE)*, falls es (1) und (4) erfüllt;

(6) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ ist *A-perfekt*, falls es (1), (2) und (4) erfüllt;

(7) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ ist *$\bar{A}$-perfekt*, falls es (1), (3) und (4) erfüllt;

(8) $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ ist *$(A,\bar{A})$-perfekt*, falls es A-perfekt und $\bar{A}$-perfekt ist.

Die sogenannte *Erb-Eigenschaft* (4) kommt in allen Definitionen mit einer unterschiedlichen Bedeutung vor. Sie ist das Analogon der Vererbung der Perfektheit bei Graphen, die definitionsgemäss gegeben ist (jeder induzierte Untergraph eines perfekten Graphen ist perfekt).

Die Begriffe (5) bis (8) enthalten den Fall der perfekten Graphen: $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\mathbf{0}))$, mit $\{0,1\}$-Matrizen A, $\bar{A}$, besitzt die GE genau dann, wenn A, $\bar{A}$ perfekte Matrizen sind (Padberg [1984]), d.h. A ist im wesentlichen die Inzidenzmatrix der Cliquen, $\bar{A}$ die der unabhängigen Mengen eines perfekten Graphen. Weiter gilt in diesem Fall: (5) $\Leftrightarrow$ (8).

Die Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit sind:

Charakterisierungen: Wir charakterisieren perfekte Paare $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ durch Eigenschaften, die nur von $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ abhängen (und die damit die Vererbung implizieren). Dazu führen wir das *Homogenitäts-Konzept* ein und erhalten folgendes Resultat: $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ besitzt die GE (ist A-perfekt) genau dann, wenn $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ (1) (resp. (1),(2)) erfüllt und $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ die sogenannte *Homogenitäts-Eigenschaft* besitzt. Falls weiter $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ (1) und (3) (rep. (1),(2),(3)) erfüllt und $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ die sogenannte *Homogen-tdg-Eigenschaft* besitzt, ist $((A,R),(\bar{A},\bar{R}))$ $\bar{A}$-perfekt (resp. $(A,\bar{A})$-perfekt). Für $\{1,0,-1\}$-Matrizen $(\bar{A},\bar{R})$ ist homogen-tdg auch notwendig.

Polyedrische Beschreibungen: $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ mit Eigenschaft (1) *beschreibt* eine Familie kombinatorischer Objekte $\mathfrak{F}$: A kann als Inzidenzmatrix, $x \geq \mathbf{0}$, $\bar{A}x \leq \mathbf{1}$, $\bar{R}x \leq \mathbf{0}$ als polyedrische Beschreibung von $\mathfrak{F}$ aufgefasst werden. Wir betrachten Familien $\mathfrak{F}$, dessen Inzidenzmatrizen $A^{\mathfrak{F}}$ sogenannte *Verbandsmatrizen* sind, und leiten $(A,\bar{A})$-perfekte Paare $((A^{\mathfrak{F}},\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ her, die $\mathfrak{F}$ beschreiben. *Schnitte* von Graphen, *konvexe Mengen beschränkter Längen* in Halbordnungen und *Durchschnitte* von Ringfamilien sind Beispiele für solche $\mathfrak{F}$.

Klassen von ganzzahligen Polyedern: Die Polyeder $Q := \{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}^{\mathfrak{F}}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}^{\mathfrak{F}}x \leq \mathbf{0}\}$ sind ganzzahlige Polyeder mit homogen-tdg Systemen. Falls $\bar{R}^{\mathfrak{F}} = \mathbf{0}$, gehören sie zu den *switching-paths Polyedern (SPP)* (Gröflin [1987]). Wir verallgemeinern die SPP, so dass die neue Klasse die Polyeder Q sowie die *Coflow-Polyeder* (Cameron [1982]) enthalten.

Die Familie $\mathfrak{L} := \{\{x \mid A^{\mathfrak{F}}x \leq \mathbf{1}\} \mid A^{\mathfrak{F}}$ ist eine Verbandsmatrix$\}$ ist eine Unterklasse der *Verbands-Polyeder* (Hoffman & Schwartz [1978], Hoffman [1976,1978], Gröflin & Hoffman [1982]). Für eine Unterklasse $\mathfrak{S}$ der verallgemeinerten SPP (mit Elementen der Form $\{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}\}$ für $\{1,0,-1\}$-Matrizen $(\bar{A},\bar{R})$) zeigen wir, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ polare Klassen sind, d.h. $P \in \mathfrak{L}$ impliziert $P^* \in \mathfrak{S}$ und $Q \in \mathfrak{S}$ impliziert $Q^* \in \mathfrak{L}$. Also existiert $(\bar{A},\bar{R})$ zu $\{x \mid Ax \leq \mathbf{1}\} \in \mathfrak{L}$, so dass $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ $(A,\bar{A})$-perfekt ist, und zu $\{x \geq \mathbf{0} \mid \bar{A}x \leq \mathbf{1},\ \bar{R}x \leq \mathbf{0}\} \in \mathfrak{S}$ existiert A, so dass $((A,\mathbf{0}),(\bar{A},\bar{R}))$ $(A,\bar{A})$-perfekt ist.