

Diss. ETH No. 14335

# **A Graph Theoretical Approach for Reconstruction and Generation of Oriented Matroids**

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
ZURICH

for the degree of  
DOCTOR OF MATHEMATICS

presented by

LUKAS FINSCHI  
dipl. Math. ETH

born 1972 March 18  
citizen of Safien GR

accepted on the recommendation of

Prof. Hans-Jakob Lüthi, examiner  
Prof. Komei Fukuda, co-examiner  
Prof. Günter M. Ziegler, co-examiner

2001

# Abstract

This thesis studies the reconstruction and generation of oriented matroids. Oriented matroids are a combinatorial abstraction of discrete geometric objects such as point configurations or hyperplane arrangements. Both problems, reconstruction and generation, address fundamental questions of representing and constructing (classes of) oriented matroids. The representations which are discussed in this thesis are based on graphs that are defined by the oriented matroids, namely tope graphs and cocircuit graphs. The first part of this thesis studies properties of these graphs and the question as to what extent oriented matroids are determined by these graphs. In the second part, these graph representations are used for the design of generation methods which produce complete lists of oriented matroids of given number of elements and given rank. These generation methods are used in the third part for the construction of a catalog of oriented matroids and of complete listings of the combinatorial types of point configurations and hyperplane arrangements.

The reconstruction problem is the problem of whether an oriented matroid can be reconstructed from some representation of it, which is here the tope graph and the cocircuit graph. It is known that tope graphs determine oriented matroids up to isomorphism. However, there is no simple graph theoretical characterization of tope graphs of oriented matroids. We strengthen the known properties of tope graphs and prove that for every element  $f$  the topes that are not bounded by  $f$  induce a connected subgraph in the tope graph. This property is later used for the design of generation methods that are based on tope graphs.

On the contrary to the tope graph case, it is known that cocircuit graphs do not determine isomorphism classes of oriented matroids. However, if every vertex is labeled by its supporting hyperplane, oriented matroids can be reconstructed up to reorientation. We present a simple algorithm which gives a constructive proof for this result. Furthermore, we extend the known results and show that the isomorphism class of a *uniform* oriented matroid is determined by its cocircuit graph. In addition, we present polynomial algorithms which provide a constructive proof to this result, and it is shown that the correctness of the input of the algorithms can be verified in polynomial time.

The generation problem asks for methods for listing all oriented matroids of given cardinality of the ground set and given rank. The known generation methods have been designed primarily for uniform oriented matroids in rank 3 or 4. Our methods are based on tope graph and cocircuit graph representations and generate all isomorphism classes of oriented matroids, including non-uniform ones in arbitrary rank. The generation approach incrementally extends oriented matroids by adding single elements. These single

element extensions are studied in terms of localizations of graphs, which are signatures on the vertex sets that characterize single element extensions.

The first two generation methods are based on tope graphs. These methods make use of the properties of tope graphs studied earlier in this thesis, especially of the new connectedness property. The first method is a reverse search method for the generation of generalized localizations in the tope graph. In the second method graph automorphisms are used to reduce the amount of isomorphic single element extensions. Furthermore we discuss techniques which reduce multiple extension of the same oriented matroid from different minors.

Two algorithms based on cocircuit graph representations are designed similarly to those based on tope graphs. However, all these first four generation methods lack efficiency, and a reason for this is that they do not use a good characterization of localizations. Due to a result of Las Vergnas, localizations of cocircuit graphs can be characterized by sign patterns on the coline cycles in the cocircuit graph. This allows us to design a fifth method which is efficient in practice. This method is a backtracking algorithm which enumerates all sign patterns of coline cycles that are feasible in terms of the characterization. It turns out that the method is similar to a method of Bokowski and Guedes de Oliveira for the uniform case. Our method is more general as it is capable to handle all oriented matroids in arbitrary rank, including non-uniform oriented matroids. Furthermore it uses an efficient data structure and a new dynamic ordering in the backtrack procedure.

The generation methods are used for the construction of a catalog of oriented matroids. This catalog is organized using basis orientations of oriented matroids. We discuss some properties of the catalog and a method to generate the catalog. The catalog of oriented matroids can be used to find complete listings of combinatorial types of point configurations and hyperplane arrangements. We study these listing problems and discuss solution methods. Furthermore we show by an example the potential of these complete listings in resolving geometric conjectures. The listings of oriented matroids, point configurations, and hyperplane arrangements can be accessed via the Internet on <http://www.om.math.ethz.ch>.

# Zusammenfassung

Diese Dissertation behandelt die Rekonstruktion und Erzeugung von Orientierten Matroiden. Orientierte Matroide sind eine kombinatorische Abstraktion von diskreten, geometrischen Objekten wie z. B. Punktfigurationen oder Hyperebenenarrangements. Beide Probleme, Rekonstruktion und Erzeugung, stellen fundamentale Fragen bezüglich der Darstellung und Herstellung von (Klassen von) Orientierten Matroiden. Die Darstellungen, welche in dieser Dissertation diskutiert werden, basieren auf Graphen, die durch die Orientierten Matroide definiert werden, nämlich Tope-Graphen und Kokreis-Graphen. Der erste Teil dieser Dissertation untersucht Eigenschaften dieser Graphen und die Frage, wie weit Orientierte Matroide durch diese Graphen bestimmt werden. Im zweiten Teil werden diese durch Graphen gegebenen Darstellungen für die Entwicklung von Erzeugungsmethoden verwendet, welche vollständige Listen von Orientierten Matroiden mit einer gegebenen Anzahl von Elementen und gegebenem Rang herstellen. Diese Erzeugungsmethoden werden im dritten Teil verwendet für die Erstellung eines Kataloges von Orientierten Matroiden und von vollständigen Auflistungen der kombinatorischen Typen von Punktfigurationen und Hyperebenenarrangements.

Das Rekonstruktionsproblem ist gegeben durch die Frage, ob ein Orientiertes Matroid von einer gewissen Darstellung von ihm wiederhergestellt werden kann; die hier betrachteten Darstellungen sind der Tope-Graph und der Kokreis-Graph. Es ist bekannt, dass Tope-Graphen Orientierte Matroide bis auf Isomorphie bestimmen. Allerdings gibt es keine einfache, graphentheoretische Charakterisierung der Tope-Graphen von Orientierten Matroiden. Wir erweitern die bekannten Eigenschaften von Tope-Graphen und beweisen, dass für jedes Element  $f$  die durch  $f$  nicht begrenzten Tope im Tope-Graphen einen zusammenhängenden Untergraphen induzieren. Diese Eigenschaft wird später für die Entwicklung von Erzeugungsmethoden verwendet, welche auf Tope-Graphen basiert sind.

Im Gegensatz zum Tope-Graphen bestimmt der Kokreis-Graph die Isomorphieklasse eines Orientierten Matroids nicht. Wenn aber jeder Knoten mit der Stützhyperebene markiert wird, kann das Orientierte Matroid bis auf Reorientierung rekonstruiert werden. Wir stellen einen einfachen Algorithmus vor, der dieses Ergebnis konstruktiv beweist. Ausserdem erweitern wir die bekannten Resultate und zeigen, dass die Isomorphieklasse eines *uniformen* Orientierten Matroids durch den Kokreis-Graphen bestimmt ist. Zudem stellen wir polynomiale Algorithmen vor, welche einen konstruktiven Beweis dieses Ergebnisses bieten, und es wird gezeigt, dass die Eingabe der Algorithmen in polynomialer Zeit auf Korrektheit überprüft werden kann.

Das Erzeugungsproblem verlangt nach Methoden zur Auflistung aller Orientierten Ma-

troide von gegebener Kardinalität der Grundmenge und gegebenem Rang. Die bekannten Erzeugungsmethoden wurden hauptsächlich für uniforme Orientierte Matroide im Rang 3 oder 4 entwickelt. Unsere Methoden basieren auf Darstellungen durch Tope-Graphen und Kokreis-Graphen und erzeugen alle Isomorphieklassen von Orientierten Matroiden, einschliesslich nicht-uniformer in beliebigem Rang. Der Erzeugungsansatz erweitert schrittweise Orientierte Matroide durch Hinzufügen einzelner Elemente. Diese 1-Element-Erweiterungen werden anhand von Lokalisierungen von Graphen untersucht, welches Signaturen auf der Knotenmenge sind, welche 1-Element-Erweiterungen charakterisieren.

Die ersten beiden Erzeugungsmethoden basieren auf Tope-Graphen. Diese Methoden machen Gebrauch von den Eigenschaften von Tope-Graphen, die vorher in dieser Dissertation untersucht wurden, besonders von der neuen Zusammenhangseigenschaft. Die erste Methode ist eine Umkehrsuchmethode für die Erzeugung von verallgemeinerten Lokalisierungen im Tope-Graphen. In der zweiten Methode werden Graphenautomorphismen verwendet, um die Menge von isomorphen 1-Element-Erweiterungen zu reduzieren. Weiter diskutieren wir Techniken, welche das mehrfache Erzeugen des gleichen Orientierten Matroids von verschiedenen Minoren vermindern.

Basierend auf Darstellungen mittels Kokreis-Graphen werden zwei Algorithmen entwickelt, ähnlich jenen, die auf Tope-Graphen basieren. Diese ersten vier Erzeugungsmethoden sind jedoch alle wenig leistungsfähig, und ein Grund dafür liegt darin, dass sie keine gute Charakterisierung von Lokalisierungen verwenden. Infolge eines Ergebnisses von Las Vergnas können Lokalisierungen von Kokreis-Graphen charakterisiert werden durch Vorzeichenmuster auf den Kolinien-Kreisen im Kokreis-Graph. Dies erlaubt uns, eine fünfte Methode zu entwickeln, welche in der Anwendung effizient ist. Diese Methode ist ein Rückverfolgungs-Algorithmus, welcher alle Vorzeichenmuster von Kolinien-Kreisen enumeriert, die zulässig sind im Sinne der Charakterisierung. Es stellt sich heraus, dass die Methode ähnlich ist zu einer Methode von Bokowski und Guedes de Oliveira für den uniformen Fall. Unsere Methode ist allgemeiner, da sie alle Orientierten Matroide in beliebigem Rang behandeln kann, einschliesslich nicht-uniformer Orientierter Matroide. Zudem benutzt sie eine effiziente Datenstruktur und eine neue dynamische Reihenfolge im Rückverfolgungs-Verfahren.

Die Erzeugungsmethoden werden für die Erstellung eines Kataloges von Orientierten Matroiden verwendet. Dieser Katalog wird mittels Basisorientierungen von Orientierten Matroiden organisiert. Wir diskutieren einige Eigenschaften des Kataloges und eine Methode für die Erzeugung des Kataloges. Der Katalog von Orientierten Matroiden kann verwendet werden, um vollständige Auflistungen der kombinatorischen Typen von Punktfigurationen und Hyperebenenarrangements zu finden. Wir untersuchen diese Auflistungsprobleme und diskutieren Lösungsmethoden. Weiter zeigen wir mit einem Beispiel das Potential dieser vollständigen Auflistungen im Lösen von geometrischen Vermutungen. Die Auflistungen von Orientierten Matroiden, Punktfigurationen und Hyperebenenarrangements sind im Internet zugänglich unter <http://www.om.math.ethz.ch>.